

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»



На правах рукописи

Муняев

Муняев Вячеслав Олегович

Синхронизация и хаос в ансамблях связанных ротаторов

Специальность 1.3.4 —

«Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Осипов Григорий Владимирович

Нижний Новгород — 2022

Оглавление

Стр.

Введение	5
Глава 1. Регулярные и хаотические вращательные режимы в цепочке локально связанных маятников	16
1.1 Механизм разрушения симметрии и несинфазная вращательная динамика в небольшой цепочке связанных маятников	17
1.1.1 Модель и постановка задачи	17
1.1.2 Самоиндуцированная параметрическая неустойчивость синфазного (абсолютно симметричного) режима вращения	19
1.1.3 Численные методы	21
1.1.4 Регулярная динамика и бистабильность синфазных и несинфазных вращательных режимов	23
1.1.5 Хаотические состояния с нарушенной симметрией	25
1.2 Синхронные структуры в цепочке произвольной длины	29
1.2.1 Модель	29
1.2.2 Синфазный режим и его устойчивость	31
1.2.3 Несинфазные вращательные режимы. Кластерная синхронизация. Классификация	35
Глава 2. Возникновение хаоса и гиперхаоса в цепочке маятников произвольной длины	39
2.1 Модель и синфазный режим	39
2.2 Пересечение областей неустойчивости синфазного режима	41
2.3 Развитие хаотической динамики	46
Глава 3. Пространственно-временные структуры в ансамбле глобально связанных маятников	55
3.1 Природа нарушения симметрии в системе связанных маятников	55
3.1.1 Исследуемая модель	55
3.1.2 Устойчивость синфазного вращательного режима	57
3.1.3 Общий подход к анализу устойчивости состояний с нарушенной симметрией	60

3.2	Теоретические и численные результаты для системы трех элементов	63
3.2.1	Анализ устойчивости режимов (2:1) и (1:1:1)	63
3.2.2	Регулярная динамика синфазных и несинфазных вращательных мод	64
3.2.3	Хаотическая динамика	65
3.3	Вращательная динамика в больших ансамблях	69
Глава 4. Синхронные состояния в ансамбле глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией и шумом		
4.1	Связанные ротаторы с шумом	73
4.2	Стационарное распределение фаз в пределе малых масс	76
4.2.1	Матричное представление уравнения Фоккера–Планка	76
4.2.2	Приближение малой массы	78
4.3	Предельные случаи	80
4.3.1	Бесшумовой случай	80
4.3.2	Безмассовые ротаторы: модель Курамото	81
4.3.3	Переход к синхронизации	82
4.4	Примеры	85
4.4.1	Распределение Гаусса	86
4.4.2	Распределение Лоренца	86
4.4.3	Бимодальное распределение	88
4.4.4	Равномерное распределение	88
4.5	Обобщения	90
Заключение		93
Список литературы		95
Список рисунков		104
Приложение А. Аналитическая аппроксимация решения уравнения маятника		
		112

Приложение Б. Методы расчета периодических движений и их устойчивости	114
Приложение В. Собственные числа и собственные векторы матрицы A	117
Приложение Г. Определение типа несинфазных режимов	119
Приложение Д. Анализ устойчивости режимов (2:1) и (1:1:1)	121
Д.1 Режим (2:1)	121
Д.2 Режим (1:1:1)	123
Приложение Е. Вывод параметра порядка подгруппы с помощью разложения моментов	126

Введение

Коллективная динамика сложных систем различной природы, синхронизация ансамблей взаимодействующих осцилляторов, формирование разнообразных диссипативных структур и их эволюция представляют собой одно из центральных направлений исследований в нелинейной динамике и связанных междисциплинарных областях науки. Данная область важна как для теоретического понимания сложных процессов, так и для широкого круга практических приложений. Полученные результаты отражены в большом количестве монографий и статей.

Одной из главных особенностей коллективного поведения является синхронизация [1–6], под которой обычно понимают процесс достижения коллективного ритма функционирования связанных осцилляторов. Возможна синхронизация как двух или трех элементов, так и элементов ансамблей, состоящих из сотен и тысяч единиц [1–6]. Известно, что даже слабая связь может оказывать влияние на фазы и частоты осцилляторов, вызывая их синхронизацию. Однако это не всегда так, даже если система симметрична и элементы сильно связаны. В силу потери симметрии в популяции идентичных элементов, в то время как существует полностью синхронный режим, могут реализовываться устойчивые решения, в которых состояния некоторых элементов могут отличаться друг от друга [7]. Выделяют три типа синхронизации: полная (глобальная) – все осцилляторы синхронизованы, частичная (кластерная) – существуют группы синхронизованных осцилляторов, и химерные состояния (кластерная синхронизация в ансамблях идентичных осцилляторов).

Многие задачи по синхронизации осцилляторов изначально сформулированы как задачи синхронизации фазовых систем или *ротаторов* или сводятся к подобным задачам. Наиболее распространёнными являются такие модели фазовых систем как

- $\dot{\varphi} = \gamma$, фазовый осциллятор;
- $\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = \gamma$, фазовый осциллятор с инерцией;
- $\dot{\varphi} = \gamma - \sin \varphi$, активный ротатор;
- $\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = \gamma$, маятник.

Все указанные системы могут (а фазовые системы всегда) демонстрировать процессы неограниченного роста фазы, т.е. вращения. Именно такие режимы

указанных систем рассматриваются в работе. Системы связанных фазовых систем или *ротаторов* являются одной из актуальных моделей в различных областях науки и техники. Несмотря на относительную простоту таких моделей, они адекватно описывают не только поведение механических объектов [8], но и различные процессы в полупроводниковых структурах [9], молекулярной биологии [10–12] и в системах фазовой синхронизации [3; 13]. Фазовые системы часто выбираются в качестве основы для теоретических исследований массивов связанных джозефсоновских контактов [1; 9; 14–17]. Приведенные примеры показывают, что изучение поведения подобных систем является актуальной темой исследований и имеет важное прикладное значение.

Кластерные и химерные состояния в ансамблях различной размерности представляют особый интерес при изучении явлений синхронизации и нарушения симметрии [18–23]. Состояния первого типа характеризуются двумя или более группами взаимно синхронизованных осцилляторов. Эти состояния уже известны в течение многих лет, но все еще привлекают большое внимание исследователей в различных областях науки и техники [18; 19]. Кластерные состояния возникают как в ансамблях с конечным числом элементов [24–27], так и в распределенных колебательных средах [28–31]. Состояния частичной синхронизации могут являться промежуточными в процессах перехода от режима полной синхронизации ансамбля к режиму полной десинхронизации. Одним из возможных сценариев является переход через уединенные состояния (“solitary states”) [32]. Термин уединенный (“solitary”) происходит от латинского “solitarius”, что обозначает одинокий, изолированный. Для уединенных состояний характерно, что отдельные “уединенные” осцилляторы при вариации коэффициента связи начинают покидать синхронный кластер в случайных положениях в пространстве [32; 33]. Примеры уединенных состояний были найдены в различных типах сетей [34; 35], системах нелокально связанных элементов [33], системах осцилляторов Стюарта–Ландау [27].

Наконец, в случае сетей связанных идентичных элементов с топологией “звезда” можно наблюдать так называемые “drum-head” моды. В таких режимах периферийные элементы демонстрируют синхронную динамику, в то время как центральные элементы не синхронизированы друг с другом [36; 37]. В частности, эти состояния наблюдались в моделях нейронной активности [38; 39].

Важным фактором, влияющим на динамику ансамблей и активных сред, является действие случайных сил, порождаемых внутренними и внешни-

ми источниками шума. Обычно случайные воздействия (шум) препятствуют синхронизации и разрушают пространственные структуры. Однако в определенных случаях в распределенных системах наблюдаются стохастические эффекты, приводящие к росту упорядоченности и формированию структур. Это стохастический и когерентный резонансы, индуцированная шумом синхронизация, перемежаемость [40; 41] и ряд других.

Среди множества моделей, предложенных для описания процесса синхронизации, наиболее популярной является модель Курамото. Разработка данной модели была мотивирована явлением коллективной синхронизации, при которой даже очень большие неоднородные системы осцилляторов переходят к режиму, характеризующемуся общей частотой функционирования всех элементов [42; 43]. Модель Курамото является упрощением модели, разработанной Уинфри для изучения динамики больших популяций связанных осцилляторов. Курамото показал, что для любой системы слабосвязанных осцилляторов, движущихся близ своих предельных циклов, долгосрочная динамика задается фазовыми уравнениями элементов, связанных через среднее поле [44]. Благодаря своей относительной простоте модель Курамото позволяет аналитически изучать вопросы перехода к синхронизации. Для характеристики степени синхронизации фазовых осцилляторов в рамках модели Курамото часто используют так называемый параметр порядка – комплексную величину, определяющую степень фазовой когерентности группы соседних элементов (локальный параметр порядка) или всех элементов рассматриваемого ансамбля (глобальный параметр порядка).

Важным обобщением модели Курамото является ансамбль глобально связанных ротаторов. Особенности синхронизации глобально связанных ротаторов, как детерминированных, так и при наличии шума, были широко изучены [45–50]; в частности, в работах [51–53] был разработан подход, аналогичный аналитическому описанию [54]. Однако на данный момент для ротаторов со связями с шумом стационарные распределения были найдены только численно. Также отсутствуют аналитические выражения, описывающие параметр порядка как функцию других параметров модели Курамото с шумом.

Исследования синхронизации и хаоса в ансамблях различной природы, включая ротаторы, получили широкое развитие в работах В.С. Анищенко, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, М.В. Иванченко, А.А. Короновского, В.Б. Казанцева, Ю.С. Кившаря, С.П. Кузнецова, Й. Курамото, Ю. Куртца,

П.С. Ланды, К. Лейнга, Ю.Л. Майстренко, В.В. Матросова, Ю.И. Неймарка, В.И. Некоркина, Г.В. Осипова, А.С. Пиковского, М.И. Рабиновича, М.Г. Розенблюма, С. Строгаца, А.Е. Храмова, В.Д. Шалфеева и многих других. Однако в силу трудоемкости задачи и широкого спектра вопросов по-прежнему существует ряд нерешённых проблем. Ключевым вопросом остается закономерность формирования пространственно-временных структур взаимодействующих ротаторов в зависимости от топологии связи и внешних факторов, таких как шум, а также изучение сценариев перехода к хаосу. Второй важной проблемой остается наблюдаемый недостаток аналитических результатов и методов исследования подобных систем.

Целью данной работы является выявление и детальный анализ пространственно-временных структур, синхронных и асинхронных режимов, регулярных и хаотических процессов в ансамблях взаимодействующих фазовых систем. Основной акцент делается на исследование ансамблей связанных систем произвольной размерности и топологии, теоретическое и численное изучение поведения таких ансамблей в зависимости от их параметров: таких как сила связи между элементами, размер ансамбля, неоднородность ансамбля по характеристикам элементов, влияние шума, и т.д. Для этого необходима разработка аналитических методов исследования.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Выявить разнообразие и механизмы формирования регулярных и хаотических синфазных и несинфазных кластерных структур в ансамблях локально нелинейно связанных элементов маятникового типа в цепочках малой длины.
2. Установить закономерности формирования и описать синфазные и несинфазные (кластерные или полностью несинфазные) режимы динамики в ансамблях локально нелинейно связанных маятников в цепочках произвольной длины, исследовать хаотическую динамику таких ансамблей.
3. Обнаружить регулярные и хаотические состояния, подробно проанализировать процесс разрушения симметрии состояний и описать общий механизм формирования структур в ансамблях глобально связанных идентичных ротаторов.

4. Разработать аналитические методы для описания синфазных и несинфазных кластерных структур и анализа их устойчивости в ансамблях нелинейно взаимодействующих ротаторов при различной топологии связей.
5. Описать стационарные синхронные режимы в ансамбле неидентичных глобально связанных ротаторов с шумом и проанализировать процесс перехода к синхронизму, найти аналитические критерии, позволяющие установить тип перехода (суперкритический/субкритический).

Научная новизна. Работа посвящена решению задач анализа динамики в ансамблях взаимодействующих фазовых систем. Совокупность результатов работы существенно расширяет представления о механизмах формирования, структуре и свойствах регулярных и хаотических динамических структур в подобных ансамблях, таких как синфазные и несинфазные кластерные структуры, уединенные состояния, “drum-head” моды и т.д. Результаты работы находятся в соответствии с установившимися представлениями в этой области науки, расширяя и дополняя их. Новизна основных результатов подтверждается публикациями в ряде научных статей в высокорейтинговых журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ.

В процессе проведения исследований получены следующие научные результаты:

1. Разработана асимптотическая теория неустойчивости синфазного вращательного режима в цепочке произвольной длины и ансамблях глобально связанных идентичных маятников. Теория позволяет определить все области параметров неустойчивости синфазного вращательного режима при малой величине диссипации.
2. Создана теория, позволяющая предсказать тип реализующегося в интервалах неустойчивости синфазного вращательного синхронного по частоте (полностью несинфазного или кластерно синфазного) режима в цепочках произвольной длины локально связанных идентичных маятников.
3. Обнаружен и описан переход к хаотической вращательной динамике при изменении индивидуальных параметров элементов и силы связи в цепочке локально связанных маятников. Показано, что он связан с плотностью перекрытия зон неустойчивости синфазного режима, и

- происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода или бифуркации разрушения тора.
4. Показано, что к возникновению (исчезновению) хаотической вращательной динамики в цепочке локально связанных маятников может приводить изменение количества ее элементов. Установлена квазилинейная корреляция между размерностью гиперхаотических режимов и длиной цепочки.
 5. Найдены аналитически и исследованы на устойчивость несинфазные вращательные режимы в ансамбле глобально связанных идентичных маятников. Показана связь их появления с параметрической неустойчивостью синфазного вращения. Обнаружен переход к хаотической динамике через бифуркации разрушения тора и каскад удвоения периода.
 6. Аналитически описаны стационарные синхронные режимы в больших ансамблях глобально связанных неидентичных по частоте ротаторов с шумом. Показано, что аналитическое решение справедливо в пределе малых масс. Для безмассовых ротаторов (модель Курамото–Сакагучи) с шумом получено точное выражение для стационарного значения модуля параметра порядка.
 7. Найден критерий, позволяющий определить тип перехода к синхронизации, супер- или субкритический, в системе неидентичных глобально связанных ротаторов с шумом. Для ряда часто используемых распределений данный критерий был найден в явном виде.

Теоретическая и практическая значимость. В работе решено множество научных задач в области нелинейной динамики, посвященных детальному анализу механизмов формирования различных типов динамических регулярных и хаотических структур, их устойчивости и изучение процессов перехода к синхронному режиму в ансамблях взаимодействующих фазовых систем. Результаты работы носят в основном фундаментально научный характер, расширяют и дополняют имеющиеся представления в актуальной области исследований, связанных с изучением закономерностей и свойств формирования пространственно-временных структур в ансамблях взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Работа содержит большое количество разработанных методов и аналитических результатов, позволяющих производить исследование ансамблей различных размеров и топологий, учитывающий зависимость от таких парамет-

ров как сила связи, неоднородность ансамбля по характеристикам элементов, размер ансамбля, интенсивность шума. Полученные результаты носят не только фундаментально научный характер, но имеют и существенное прикладное значение. Исследования формирования структур и эффектов их синхронизации важны при моделировании и анализе процессов в системах фазовой синхронизации, полупроводниковых структурах, молекулярной биологии, электросетях и т.д.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использован широкий спектр аналитических и численных методов теории колебаний, математической физики и бифуркационного анализа. Поставленные задачи подразумевали проведение глубокого численного исследования изучаемых моделей связанных ротаторов и разработку аналитических обоснований результатов. Для построения асимптотических решений и исследования устойчивости движения в задачах, имеющих малый параметр, применялись различные методы теории возмущений и их модификации. В частности, для аналитического описания вращательных режимов использовался метод Линдштедта–Пуанкаре. При изучении линейной устойчивости применялись методы и сведения из теории матриц, позволившие в случаях матриц особой структуры произвести точное вычисление их спектров. Устойчивость вращательных режимов определялась посредством вычисления спектра Флоке–Блоха периодических линеаризованных операторов. Для описания систем с шумом в пределе большого числа элементов применялось уравнение Фоккера–Планка, теоретический и численный анализ решений которого преимущественно проводился в матричном представлении, для перехода к которому использовался специальный базис. Для отыскания стационарных решений уравнения Фоккера–Планка был применен метод матричных непрерывных дробей. Для прямого моделирования детерминированной динамики популяций связанных ротаторов главным образом использовался классический метод Рунге–Кутты, в то время как моделирование стохастических систем производилось с помощью схемы Эйлера первого порядка. Для численного поиска вращательных траекторий использовался алгоритм Ньютона–Рафсона.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что в системе трех идентичных связанных маятников с ростом силы связи происходит рождение несинфазных вращательных периодических движений, связанных с потерей устойчивости синфаз-

- ного синхронного режима. Причем существуют две такие области неустойчивости, что было доказано численно и аналитически. Одна область неустойчивости соответствует появлению “drum-head” моды. Для исследуемой системы установлена бистабильность синфазного и несинфазного периодических вращательных режимов.
2. Аналитически определено количество областей неустойчивости синфазного режима в цепочке локально связанных идентичных маятников. В интервалах неустойчивости синфазного синхронного режима реализуются различные (полностью несинфазные или кластерно синфазные) синхронные по частоте режимы. Показано, что иерархия эволюций синфазного режима в несинфазный с ростом параметра связи однозначно зависит от числа элементов в цепочке. Развитый анализ позволяет предсказать какой именно тип синхронного режима будет реализован.
 3. Описаны сценарии возникновения хаотической вращательной динамики в цепочках из трех и более связанных маятников. Показано, что переход к хаотической динамике при увеличении диссипации происходит через каскад бифуркаций удвоения периода периодических движений или в результате бифуркации разрушения инвариантных торов, обусловленных сближением и перекрытием зон неустойчивости синфазного режима. Продемонстрировано, что хаос может возникнуть при добавлении или исключении элементов в ансамбле. Обнаружена квазилинейная корреляция между размерностью гиперхаоса и длиной цепочки.
 4. Установлена единственная область параметрической неустойчивости симметричного синфазного режима системы глобально связанных идентичных маятников. Разработан аналитический подход, позволяющий построить асимптотическое разложение для вращательных мод, возникающих в результате потери устойчивости синфазного режима, и исследовать их устойчивость в случае малой диссипации. Разработанный метод был применен для системы из трех и большего числа элементов. Описан сценарий возникновения хаотической вращательной динамики.
 5. Разработано аналитическое описание стационарных синхронных режимов в ансамбле глобально связанных ротаторов с шумом. Основное аналитическое выражение справедливо для малых масс. Рассмотрены

различные предельные случаи. Для безмассовых ротаторов (стандартные осцилляторы Курамото) получено точное выражение. Оно представляет собой аналитическую формулу для стационарных решений модели Курамото (или, в более общем случае, для модели Курамото–Сакагучи) с шумом. Найдено аналитическое выражение для критической массы ротаторов, при котором происходит изменение типа перехода к синхронизации (суперкритический/субкритический).

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических методов теоретического и численного анализа, обоснованных и многократно проверенных в исследованиях нелинейных процессов в сложных системах. Достоверность результатов подтверждается их воспроизводимостью с использованием различных подходов и численных схем, а также согласованностью с данными, полученными ранее другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. XXII научная конференция по радиофизике, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 15.05.2018 – 29.05.2018, Вращательная динамика в системе связанных маятников (секционный, внутривузовский).
2. International Conference-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2018, ННГУ им. Лобачевского, Нижний Новгород, 16.07.2018 – 20.07.2018, Rotational dynamics in the ensemble of three coupled pendulums (секционный, международный).
3. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 17.12.2018 – 18.12.2018, Symmetry broken states in an ensemble of coupled pendulums (секционный, международный).
4. XXIII научная конференция по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения Н.А. Железцова, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 13.05.2019 – 21.05.2019, Кластерные вращательные режимы в ансамбле глобально связанных маятников (секционный, внутривузовский).
5. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2019, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 09.12.2019 – 13.12.2019, Analytical approach to synchronous states of globally coupled noisy rotators (секционный, международный).

6. XXIV научная конференция по радиофизике, посвященная 75-летию радиофизического факультета, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 13.05.2020 – 31.05.2020, Вращательные состояния с потерей симметрии в цепочке связанных маятников (секционный, внутривузовский).
7. Mathematical modeling and supercomputer technologies, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 23.11.2020 – 27.11.2020, Синхронные состояния в ансамблях глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией и шумом (секционный, международный).
8. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 17.12.2020 – 18.12.2020, Appearance of chaos in evolving pendulum network (секционный, международный).
9. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 17.12.2020 – 18.12.2020, Stationary and periodic regimes in the noisy Kuramoto system with a bimodal frequency distribution (секционный, международный).

Результаты работы также обсуждались на научных семинарах кафедры теории управления и динамики систем ННГУ им. Н.И. Лобачевского и кафедре хаоса и статистической физики Потсдамского университета (Германия).

Личный вклад. Диссертант принимал участие в постановке задач, разработке аналитических подходов для их решения, обсуждении и интерпретации полученных результатов. Результаты численного моделирования получены диссертантом с применением самостоятельно реализованных программных комплексов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 9 — в тезисах докладов.

Исследования, результаты которых вошли в настоящую работу, проводились при поддержке Российского научного фонда (проекты №№14-12-00811, 17-12-01534, 19-12-00367), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№17-32-50096, 18-29-10068_mk, 19-52-12053).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 6 приложений. Полный объём диссертации составляет 128 страниц, включая 35 рисунков. Список литературы содержит 93 наименования.

Глава 1. Регулярные и хаотические вращательные режимы в цепочке локально связанных маятников

В данной главе изучается вращательная динамика, в частности пространственно-временные структуры, в цепочках локально связанных идентичных систем маятникового типа. Рассматриваемая модель интересна для таких приложений, как динамика систем фазовой синхронизации [3], изучения вращательных колебаний азотистых оснований молекул ДНК [11; 12] и массивов джозефсоновских контактов [14]. Ранее были рассмотрены системы, состоящие из двух [55] и восьми элементов [56]. В данной главе внимание сосредоточено на синфазных и нетривиальных несинфазных режимах вращения. Показано, что количество областей параметров, в которых синфазное вращательное движение системы является неустойчивым и наблюдается несинфазная динамика, на единицу меньше числа элементов цепочки. Разработана асимптотическая теория, позволяющая аналитически находить границы областей неустойчивости синфазного вращения. Продемонстрировано, что несинфазные режимы вращений являются результатом параметрической неустойчивости синфазного движения. Сложные несинфазные вращения найдены численно, исследованы их устойчивость и бифуркации, построена теория, позволяющая предсказывать, какой тип несинфазного синхронного вращения реализуется. Изучены сценарии рождения хаотического аттрактора в зависимости от значений параметров система в цепочке трех элементов.

1.1 Механизм разрушения симметрии и несинфазная вращательная динамика в небольшой цепочке связанных маятников

1.1.1 Модель и постановка задачи

Рассмотрим цепочку трех связанных идентичных маятников, описываемых следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \lambda \dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 &= \gamma + K \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \lambda \dot{\varphi}_2 + \sin \varphi_2 &= \gamma + K \left[\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right], \\ \ddot{\varphi}_3 + \lambda \dot{\varphi}_3 + \sin \varphi_3 &= \gamma + K \sin(\varphi_2 - \varphi_3).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь λ – коэффициент затухания, ответственный за все диссипативные процессы в системе, γ – постоянное внешнее воздействие одинаковое для всех маятников, а параметр K характеризует нелинейную силу связи между элементами.

Для определенных значений параметров γ и K система (1.1) демонстрирует нетривиальное поведение. Во-первых, заметим, что в системе возможна синфазная динамика, то есть $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_3(t) = \phi(t)$. Будем обозначать такой режим как (3:0). Динамика фазы каждого маятника будет описываться общим уравнением

$$\ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + \sin \phi = \gamma.\tag{1.2}$$

Поведение такой системы хорошо изучено [57]. Бифуркационная диаграмма уравнения изображена на рисунке 1.1, она делится на три области [16; 58]. В первой области D_1 есть два состояния равновесия: седло и устойчивый фокус (узел). Во второй области D_2 сосуществуют устойчивое 2π -периодическое по ϕ движение и устойчивый фокус (узел). В третьей области D_3 существует только устойчивое вращательное периодическое движение. Множество параметров (λ, γ) , при которых в фазовом пространстве уравнения (1.2) существует периодическая вращательная траектория, а в системе (1.1), соответственно, синфазное вращательное движение $\phi(t)$, приближенно описывается неравенствами $\gamma > T(\lambda) = 4\lambda/\pi - 0.305\lambda^3$ при $\lambda < \lambda^* \approx 1.22$ и $\gamma > 1$ при $\lambda > \lambda^*$ [59], где $T(\lambda)$

определяет бифуркационную кривую Трикоми [58]. Далее нас будет интересовать вращательная динамика маятникового ансамбля, т.е. будем считать, что значения параметров λ и γ лежат в области D_2 или D_3 .

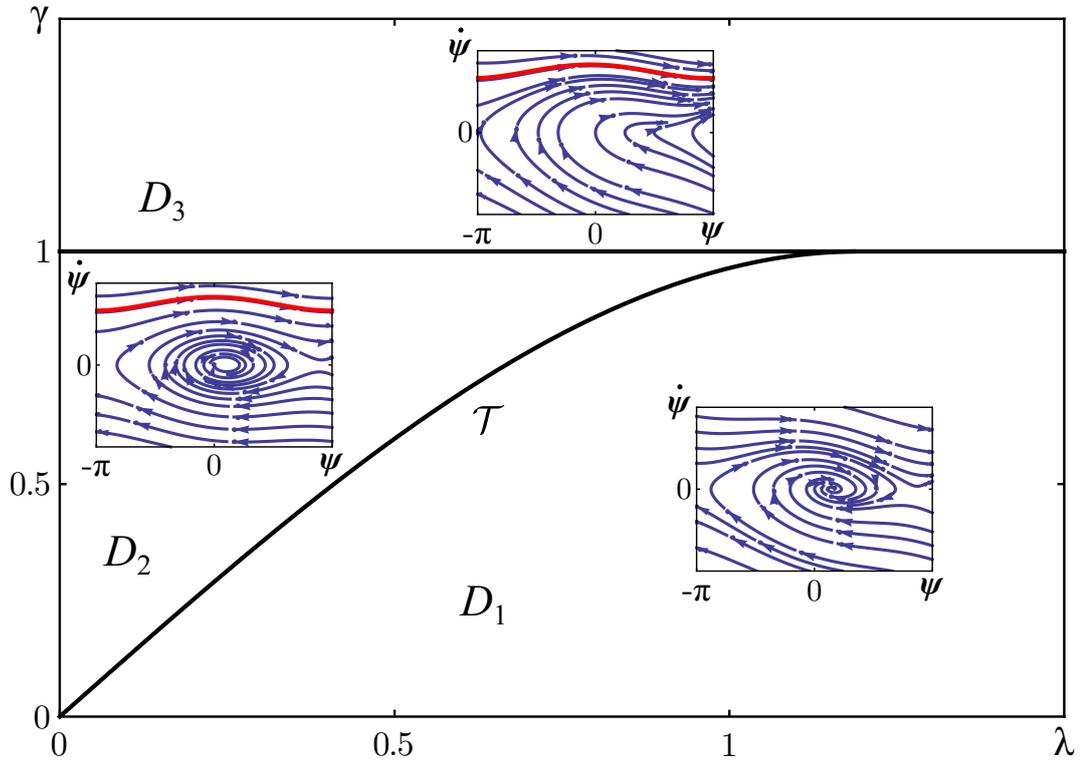


Рисунок 1.1 — Бифуркационная диаграмма (плоскость параметров λ и γ) и структурно устойчивые фазовые портреты системы (1.2). Кривая \mathcal{T} является бифуркационной кривой Трикоми, при переходе через которую из области D_1 в D_2 происходит разрушение инвариантной седло-узловой кривой, что приводит к рождению 2π -периодической вращательной траектории (отмечена красным).

Мы обнаружили, что при некоторых значениях параметров в системе (1.1) может наблюдаться неустойчивость синфазного вращательного движения. Продемонстрируем это для некоторых фиксированных параметров $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.97$, $K = 1.5$ (область D_2) при очень близких начальных условиях $\varphi_1(0) = 5.0$, $\varphi_2(0) = 5.00001$, $\varphi_3(0) = 5.00002$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_3(0) = 0$. Из рисунка 1.2 видно, что на промежутке времени $20 \leq t \leq 45$ фазовые скорости $\dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) практически совпадают друг с другом. На втором приведенном на рисунке 1.2 этапе, когда $2100 \leq t \leq 2125$, становится заметна расфазировка в движении маятников из-за развития неустойчивости их синхронного режима вращения. Разница между $\dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) довольно заметна. Новый тип предельных несинфазных вращений $\dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) развивается, когда $7000 \leq t \leq 7025$. Таким образом, когда параметр связи K достигает некоторых значений, возникает

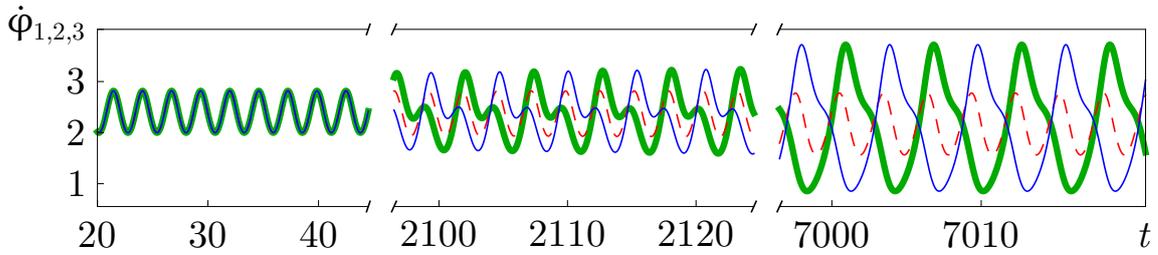


Рисунок 1.2 — Временная эволюция фазовых скоростей $\dot{\phi}_1$ (сплошная тонкая синяя линия), $\dot{\phi}_2$ (пунктирная красная линия), и $\dot{\phi}_3$ (сплошная толстая зеленая линия) трех маятников. Численное моделирование системы (1.1) проводилось при параметрах $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.97$ и $K = 1.5$.

неустойчивость синхронного периодического движения: в ансамбле маятников возникают новые 4π -периодические предельные вращения. Это движение характеризуется несинфазностью вращений с периодом, в два раза превышающим период синхронного периодического вращения, то есть происходит бифуркация удвоения периода. Стоит отметить, что этот эффект имеет место для системы двух элементов и рассматривался в статье [60].

Однако, как будет показано ниже, система из трех связанных маятников демонстрирует более сложную и интересную динамику, которую по аналогии со статьями [36—39] можно интерпретировать как “drum-head” режим.

1.1.2 Самоиндуцированная параметрическая неустойчивость синфазного (абсолютно симметричного) режима вращения

Исследуем случай, когда диссипация в системе мала (т.е. $\lambda \ll 1$). Предположим также, что характеризующее внешнюю силу значение γ близко к единице. В этой ситуации можно построить асимптотическую теорию, объясняющую причины возникновения наблюдаемой при прямом численном моделировании системы уравнений (1.1) неустойчивости синфазного режима вращения трёх связанных маятников. Для развития аналитического подхода при малом параметре λ введем параметр малости $\varepsilon = \lambda/\gamma$, причем $\varepsilon \ll 1$.

Построим асимптотическое решение уравнения (1.2), используя метод Линдштедта-Пуанкаре [61], суть которого состоит во введении нового безраз-

мерного времени τ , где $t = \omega\tau$ и

$$\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \omega_j \quad (1.3)$$

неизвестная угловая частота искомого решения, позволяющая избежать секулярных членов. Принимая для простоты $\phi(0) = 0$, представим решение в виде следующего асимптотического разложения:

$$\phi(\tau) = \tau + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \phi_j(\tau), \quad (1.4)$$

где ϕ_j – 2π -периодические функции переменной τ . Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.2), разлагая обе части равенства по степеням ε , приравнивая коэффициенты при равных степенях ε и определяя ω_j из условия отсутствия секулярных слагаемых, получаем решение для фазового вращения системы (1.1) в следующем виде:

$$\phi(\tau) = \tau + \varepsilon^2 \sin(\tau) + O(\varepsilon^4), \quad (1.5)$$

где

$$\tau = \left[\varepsilon^{-1} - \frac{1}{2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right] t. \quad (1.6)$$

Найдем условия устойчивости синфазного режима вращения. Сначала линеаризуем систему (1.1) близ $\phi(t)$, тогда $\varphi_i(t) = \phi(t) + \delta\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Далее получаем соответствующие уравнения для вариаций $\delta\varphi_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos\phi(t)\delta\varphi_1 &= K(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ \delta\ddot{\varphi}_2 + \lambda\delta\dot{\varphi}_2 + \cos\phi(t)\delta\varphi_2 &= K(\delta\varphi_1 - 2\delta\varphi_2 + \delta\varphi_3), \\ \delta\ddot{\varphi}_3 + \lambda\delta\dot{\varphi}_3 + \cos\phi(t)\delta\varphi_3 &= K(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_3). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Далее введем две переменные расстройки $\xi_{ij} = \delta\varphi_i - \delta\varphi_j$. Для ξ_{12} и ξ_{23} получаем замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{12} + \lambda\dot{\xi}_{12} + \cos\phi(t)\xi_{12} &= K(-2\xi_{12} + \xi_{23}), \\ \ddot{\xi}_{23} + \lambda\dot{\xi}_{23} + \cos\phi(t)\xi_{23} &= K(\xi_{12} - 2\xi_{23}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

которая допускает два простых решения.

Первое из них $\xi_{12} = \xi_{23}$ соответствует режиму с попарно различными фазами осцилляторов $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t) \neq \varphi_3(t)$. Обозначим этот режим как (1 : 1 : 1). Введя для краткости $\xi = \xi_{12}$, получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \lambda\dot{\xi} + [K + \cos\phi(t)]\xi = 0. \quad (1.9)$$

Это уравнение является уравнением типа Матье. Следовательно, при некоторых значениях параметра K , зависящего от λ и γ , могут наблюдаться эффекты параметрической неустойчивости [60]. Чтобы найти границы области неустойчивости синфазного режима вращения, определим значения параметра связи K , для которых уравнение (1.9) допускает решение с периодом $2T$ или, эквивалентно, с частотой $\omega/2$.

Используя некоторые аспекты теории возмущений, взяв результаты (1.5) и (1.6), и производя поиск решения уравнения (1.9) с частотой $\omega/2$, получим границы $K_{1,2}$ для первой области неустойчивости

$$K_{1,2} = \frac{1}{4} \left[\varepsilon^{-2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right] + O(\varepsilon^4). \quad (1.10)$$

Другое решение $\xi_{12} = -\xi_{23}$ соответствует режиму с $\varphi_1(t) = \varphi_3(t) \neq \varphi_2(t)$, когда два осциллятора образуют синфазный синхронный кластер, а третий вращается отдельно с некоторой задержкой. Это режим (2 : 1).

Введя снова $\xi = \xi_{12}$, получим уравнение для расстройки ξ

$$\ddot{\xi} + \lambda \dot{\xi} + [3K + \cos \phi(t)] \xi = 0. \quad (1.11)$$

Аналогично ранее рассмотренному случаю получаем границы $K_{1,2}$ для второй области неустойчивости

$$K_{1,2} = \frac{1}{12} \left[\varepsilon^{-2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right] + O(\varepsilon^4). \quad (1.12)$$

Таким образом, для цепочки из трех маятников могут существовать два интервала значений силы связи K , соответствующих режимам (2 : 1) и (1 : 1 : 1), для которых синфазное периодическое вращение становится параметрически неустойчивым.

1.1.3 Численные методы

В этом разделе представлены результаты подробного численного моделирования, которое проводится непосредственно в рамках обсуждаемой модели (1.1) трех маятников для широкого диапазона параметров λ , γ и K .

Прежде всего, подробно рассматривается развитие самоиндуцированной параметрической неустойчивости синфазного синхронного режима, особое внимание уделено нелинейной стадии этого процесса и возникающих в результате движениях, которые могут существовать в течение длительного времени. В наших численных расчетах для интегрирования системы (1.1) применялась часто используемая схема Рунге-Кутты пятого порядка (с фиксированным временным шагом $dt = 0.001$) и стандартный алгоритм для поиска наибольшего ляпуновского показателя [62]. Расчеты проводились на временных интервалах более 50000 единиц, что должно обеспечить установление показателей Ляпунова с хорошим уровнем точности.

Приведенный теоретический анализ позволяет описать начальную стадию развития неустойчивости синхронного режима вращения. Также можно найти все интервалы значений коэффициента связи K , для которых возможно развитие самоиндуцированной параметрической неустойчивости, и оценить границы этих областей с достаточно хорошей точностью. Прямое численное моделирование динамической системы (1.1) с заданными начальными условиями дает нам общее представление об эволюции во времени ансамбля связанных маятников и нелинейной стадии развиваемой неустойчивости. Для объединения и дополнения этих двух подходов производится поиск периодических вращений и исследуется их параметрическое продолжение в рамках модели (1.1). Для этого, учитывая, что $\varphi_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) определены на интервале от $-\pi$ до π и используя свойство замкнутости рассматриваемых траекторий в фазовое пространство $\{\varphi_j(t), \dot{\varphi}_j(t)\}$, для каждого заданного набора параметров λ , γ и K строится отображение Пуанкаре и используется алгоритм Ньютона-Рафсона для поиска его неподвижных точек и периода движения T вдоль соответствующей траектории [63]. Основные идеи этого метода обсуждаются в приложении Б. В результате можно обнаружить как устойчивые, так и неустойчивые предельные циклы системы и подробно изучить их бифуркации и процесс перехода к хаосу. Это одна из основных целей представленной работы.

Линейная (спектральная) устойчивость произвольных периодических решений исследуется с помощью анализа Флоке, в основном опирающегося на численные расчеты (подробности см., например, в [63] и приложении Б). Для этого в заданное периодическое решение вносится небольшое возмущение. Анализ устойчивости выполняется путем диагонализации матрицы монодромии (оператора Флоке) $\widehat{\mathbf{M}}$, которая связывает возмущение при $t = 0$ с возмущением

при $t = T$, и изучения собственных значений спектра Флоке–Блоха периодических линеаризованных операторов. Для линейной устойчивости предельных циклов требуется, чтобы собственные значения матрицы монодромии (мультипликаторы Флоке) лежали внутри (или на) единичного круга [63].

В качестве характеристики степени синхронизации рассмотрим величину Ξ , которая представляет собой частотную отстройку маятников:

$$\Xi = \frac{1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \max_{0 < t < T} |\dot{\phi}_i(t) - \dot{\phi}_j(t)|, \quad (1.13)$$

где T – период вращательной моды. Общее определение величины Ξ для произвольного числа элементов N , а также описание ее свойств смотрите в приложении Б.

1.1.4 Регулярная динамика и бистабильность синфазных и несинфазных вращательных режимов

Из выражений (1.10) и (1.12) видно, что в случае малых значений λ при $\gamma \approx 1.0$, возникают две области неустойчивости синфазного режима. Далее будет исследован случай $\gamma = 0.97$. Рассмотрим ситуацию, когда области неустойчивости разделены окном устойчивости. На рисунке 1.3 приведена бифуркационная диаграмма, полученная путем численного моделирования системы. На диаграмме изображена зависимость характеристики синхронности Ξ от величины силы связи K при $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$. Горизонтальные отрезки A_1 , A_3 и A_5 соответствуют синхронному синфазному режиму ($\Xi = 0$). Существуют две ветви A_2 и A_4 значений параметра K , при которых этот режим становится неустойчивым. Как показано выше в ходе асимптотического рассмотрения (выражения (1.10) и (1.12)) именно при значениях параметра связи K из этих интервалов развивается параметрическая неустойчивость синфазного периодического движения.

Рассмотрим процессы, происходящие в цепочке при попадании K в область A_2 и выходе из нее. При увеличении параметра K синфазное периодическое движение претерпевает бифуркацию удвоения периода ($K \approx 0.4505$), при этом из устойчивого синфазного 2π -периодического по $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$

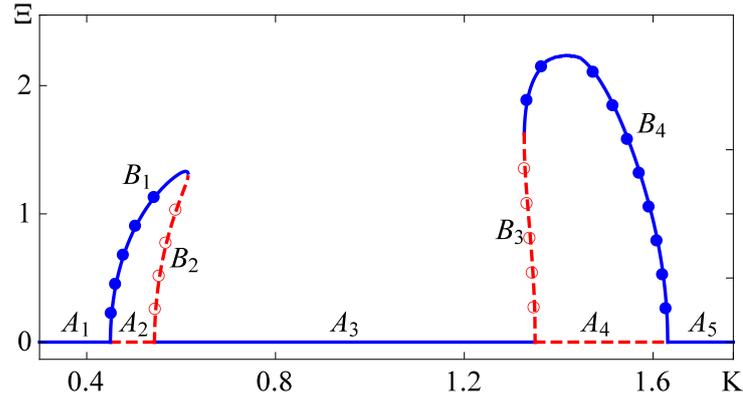


Рисунок 1.3 — Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (1.1). Здесь и ниже: синие закрашенные маркеры — устойчивые режимы, красные незакрашенные маркеры — неустойчивые режимы. Прямые без маркеров — 2π -периодические режимы. Круглые маркеры — 4π -периодические режимы. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$.

движения рождается устойчивое 4π -периодическое по φ движение, соответствующее синхронному режиму динамики, когда $\varphi_1(t) = \varphi_3(t) \neq \varphi_2(t)$ (2: 1), 2π -периодическое движение при этом теряет устойчивость. Данному режиму на бифуркационной диаграмме соответствует ветвь B_1 . Помимо устойчивых периодических движений существует также и неустойчивое несинфазное 4π -периодическое по φ движение (ветвь B_2), которое рождается из неустойчивого 2π -периодического движения в результате субкритической бифуркации удвоения периода ($K \approx 0.5435$) при увеличении K . Далее при $K \approx 0.6145$ устойчивое (ветвь B_1) и неустойчивое (ветвь B_2) несинфазные периодические движения сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации.

Аналогично, для неустойчивой ветви A_4 , при уменьшении параметра K в результате бифуркации удвоения периода ($K \approx 1.6305$) синфазное периодическое движение теряет устойчивость и возникает 4π -периодическое по ϕ движение (ветвь B_4), соответствующее полностью несинфазному режиму $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t) \neq \varphi_3(t)$ (1 : 1 : 1). При $K \approx 1.327$ устойчивое 4π -периодическое движение (ветвь B_4) сливается с 4π -периодическим неустойчивым движением (ветвь B_3) в результате седлоузловой бифуркации. Неустойчивое 4π -периодическое движение (ветвь B_3) возникает при уменьшении K из неустойчивого 2π -периодического синфазного движения (область A_4) при субкритической бифуркации удвоения периода ($K \approx 1.3505$)

Таким образом, при неустойчивости синфазного режима в системе реализуются несинфазные 4π -периодические (2 : 1) и (1 : 1 : 1) режимы.

Бифуркационная диаграмма (см. рисунок 1.3) показывает, что существуют также две области значений силы связи, при которых одновременно существуют два устойчивых (и один неустойчивый) вращательных предельных цикла. Первый из двух устойчивых вращательных предельных циклов характеризуется синфазным поведением трех маятников, в то время как другой характеризуется несинфазным поведением. Это означает, что в системе уравнений (1.1) имеется бистабильность периодических движений. Отметим, что такой же эффект можно наблюдать в системе двух элементов (подробнее см. [60]).

1.1.5 Хаотические состояния с нарушенной симметрией

При увеличении параметра диссипации области неустойчивости синфазного режима приближаются друг к другу. При этом в цепочке трех маятников возможна хаотическая динамика. В разделе 1.1.4 был описан случай сосуществования двух областей неустойчивости синфазного режима при значении параметров $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$, причем при потере устойчивости синфазного режима рождались только 4π -периодические несинфазные режимы. Рассмотрим случай $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.7$. На рисунке 1.4a изображена бифуркационная диаграмма 2π - и 4π -периодических режимов. Здесь отрезки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и ветви B_1, B_2, B_3, B_4 соответствующие вращательным режимам, аналогичны таковым при $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$. Рассмотрим устойчивый 4π -периодический (1 : 1 : 1) режим (ветвь B_4). С уменьшением K 4π -периодическое движение теряет устойчивость в результате бифуркации «вилка» ($K \approx 0.5933$), из него возникает устойчивое 4π -периодическое движение, которому на рисунке 1.4b соответствует ветвь B_8 , и неустойчивое 4π -периодическое движение, ветвь B_6 . Кроме того, с уменьшением значений параметра связи K происходит последовательность бифуркаций удвоения периода (рисунок 1.4d), что приводит к переходу к хаотической динамике. Рисунок 1.4c показывает несколько первых бифуркаций этой последовательности при $K \approx 0.5785$, $K \approx 0.5729$, при которых возникают 8π - и 16π -периодические движения (ветви C_2 и D_2 соответственно). Ветви C_3 и D_3 соответствуют 8π - и 16π -периодическим движениям, потерявшим устойчивость после бифуркаций удвоения периода. Рисунок 1.4e демонстрирует величину наибольшего показателя Ляпунова системы в зависимости от силы

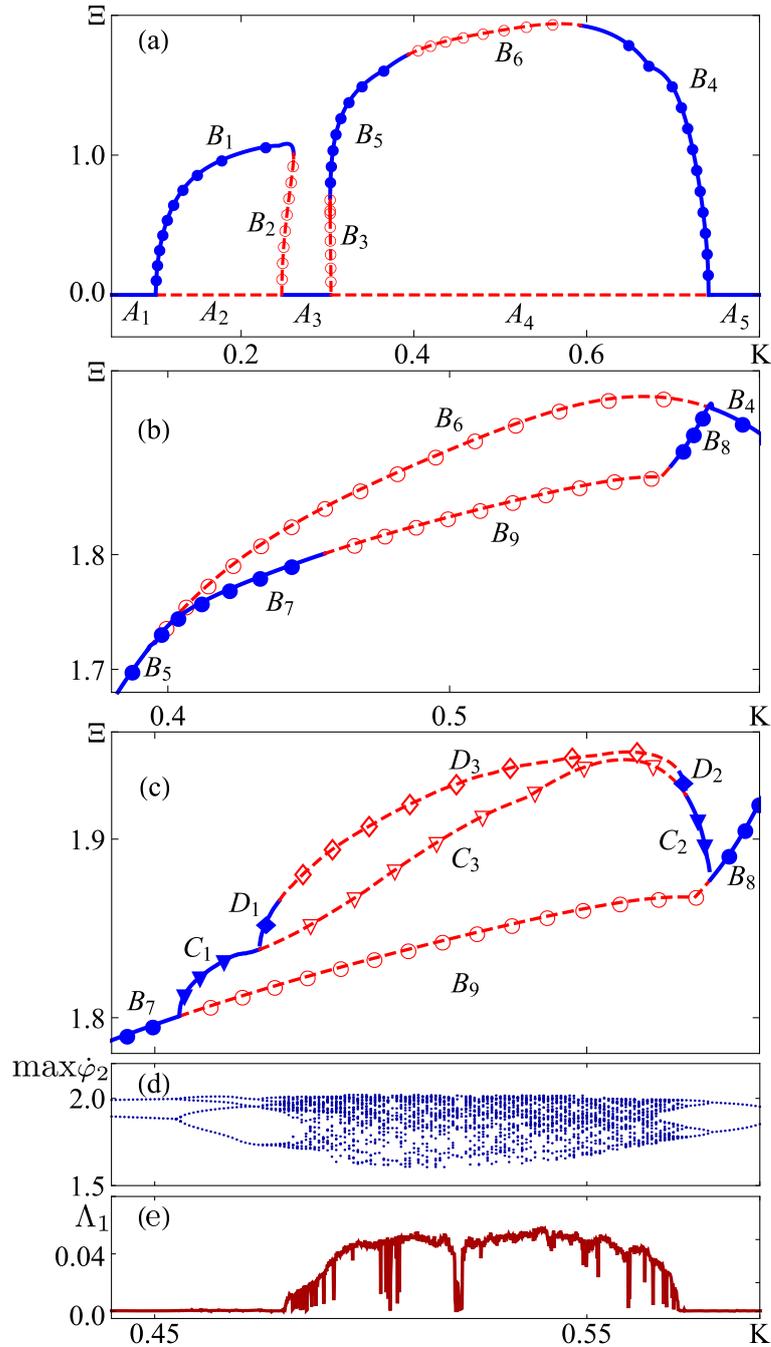


Рисунок 1.4 — Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (1.1). (a) 2π - и 4π -периодические режимы. (b) 4π -периодические режимы. (c) 4π -, 8π - и 16π -периодические режимы. Треугольными маркерами отмечены 8π -периодические режимы. Ромбическими маркерами отмечены 16π -периодические режимы. (d) Локальные максимумы $\dot{\phi}_2$. (e) Наибольший показатель Ляпунова Λ_1 . Параметры: $\gamma=0.97$, $\lambda=0.7$.

связи K . Видно, что при $0.478 < K < 0.572$ в системе наблюдается хаотическая динамика. При дальнейшем уменьшении параметра K , после выхода из области хаотической динамики, в обратном порядке наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода. Несколько бифуркаций из этой

последовательности показаны на рисунке 1.4с. 16π -, 8π - и 4π -периодические режимы становятся устойчивыми в результате бифуркаций удвоения периода при $K \approx 0.479$, $K \approx 0.4742$, $K \approx 0.456$ (ветви D_1 , C_1 и B_7 соответственно). При $K \approx 0.3932$ наблюдается бифуркация «вилка» 4π -периодического движения (на рисунке 1.4b B_6 и B_7 сливаются в B_5).

При увеличении значения параметра диссипации λ области неустойчивости синфазного периодического движения A_2 и A_4 сближаются. При критическом значении параметра $\lambda \approx 0.75$ области неустойчивости касаются друг друга, после чего они начинают перекрываться (рисунок 1.5a). Ветвь A_3 исчезает, наблюдается бистабильность несинфазных режимов: сосуществуют режимы $(2 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$. При сближении областей неустойчивости синфазного режима в первой области неустойчивости через каскад бифуркаций удвоения (рисунок 1.5b) также возникает хаотический режим. Заметим, что при развитии хаотической динамики в первой области неустойчивости, сначала наблюдается режим $(2 : 1)$, причем динамика переменных $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) при этом нерегулярна (см. рисунок 1.6a). Этот режим может быть интерпретирован как хаотический “drum-head” режим [36–39]. Подобные хаотические режимы наблюдались в цепочках из трех связанных элементов, где крайние элементы когерентны, а центральный элемент не синхронизирован с периферийными [64; 65]. Если параметр силы связи K принимает значение из области A_4 , реализуется хаотический режим $(1 : 1 : 1)$ (см. рисунок 1.6b). Дальнейшее увеличение параметра λ приводит к сближению областей хаотической динамики. Для значений параметров $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.86$ хаотическая динамика реализуется при $0.057 < K < 0.157$ и $0.193 < K < 0.398$ (см. рисунок 1.7).

При последующем возрастании λ области хаотической динамики сливаются в одну. Для $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.96$ (см. рисунок 1.8) при увеличении силы связи до критического значения $K \approx 0.015$, в результате каскада бифуркаций удвоения периода, возникает хаотический $(2 : 1)$ режим (см. рисунок 1.8 и 1.9a). Далее, при $K \approx 0.019$, хаотический $(2 : 1)$ режим становится неустойчивым, и в системе реализуется режим, когда длительные интервалы времени, при которых фазы маятников $\varphi_1(t) \approx \varphi_3(t)$, чередуются с непродолжительными интервалами, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_3(t)$ не совпадают (см. рисунок 1.8 и 1.9b), т.е. имеет место перемежаемость хаотических колебаний $(2 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$. При дальнейшем увеличении K реализуется только хаотический $(1 : 1 : 1)$ режим (см. рисунок 1.8 и 1.9c).

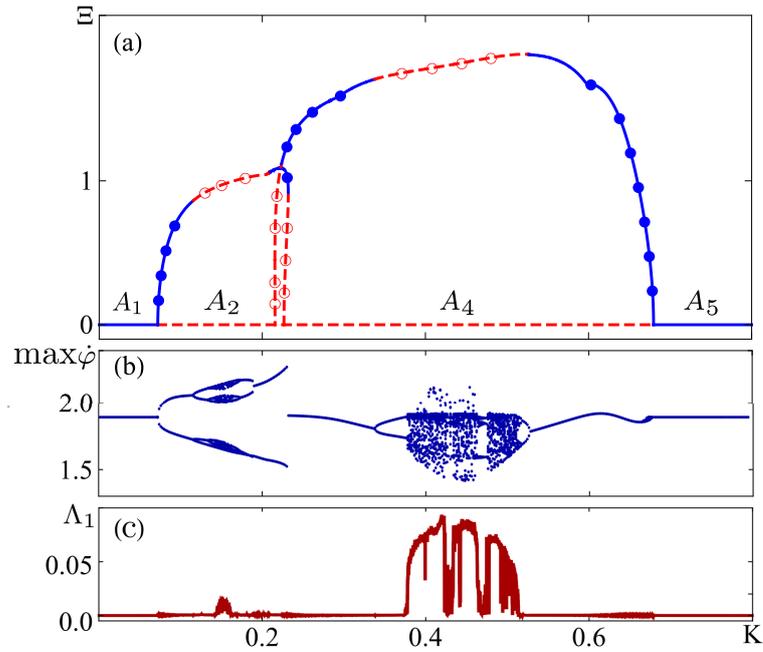


Рисунок 1.5 — (а) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (1.1). (б) Локальные максимумы $\dot{\phi}_2$. (с) Наибольший показатель Ляпунова Λ_1 . Параметры: $\gamma=0.97$, $\lambda=0.76$.

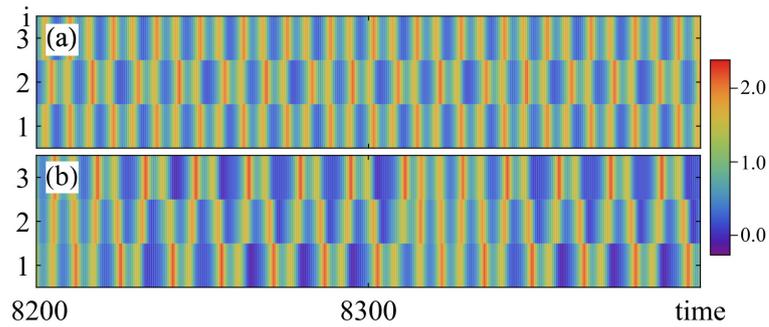


Рисунок 1.6 — Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) трех маятников в системе (1.1). (а) Хаотический (2 : 1) режим при $K = 0.1524$. (б) Хаотический (1 : 1 : 1) режим при $K = 0.4$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.76$.

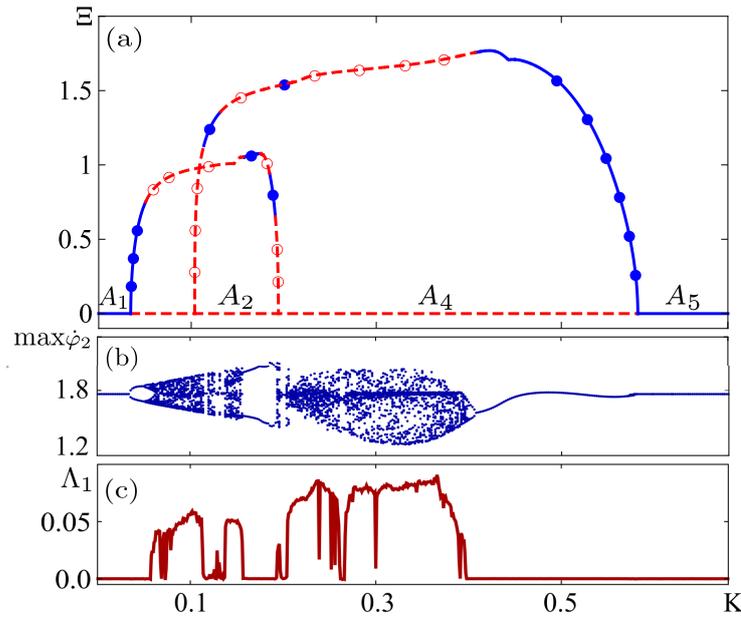


Рисунок 1.7 — То же, что и на рисунке 1.5, но для $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.86$.

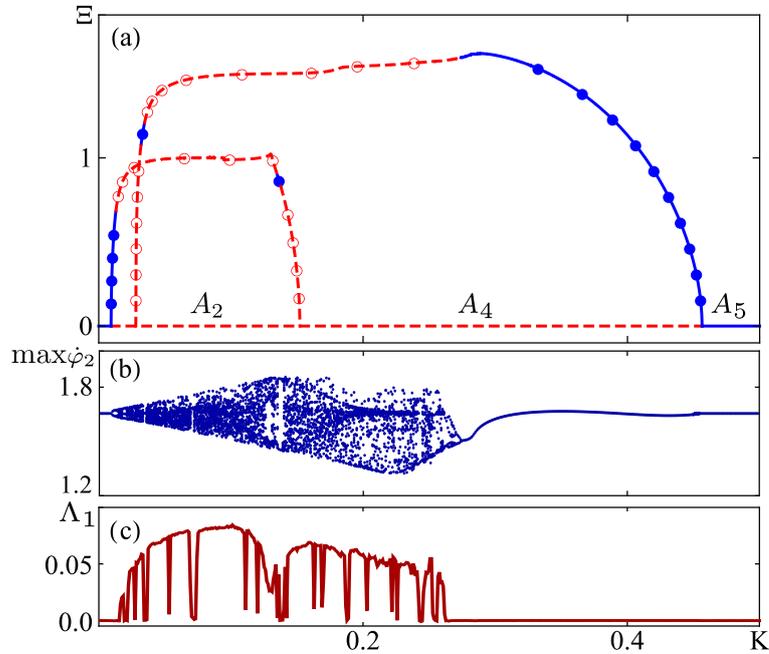


Рисунок 1.8 — То же, что и на рисунке 1.5, но для $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.96$.

1.2 Синхронные структуры в цепочке произвольной длины

1.2.1 Модель

Рассмотрим N связанных идентичных маятников, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений (индекс $n = 1, 2, \dots, N$)

$$\ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = \gamma + \sum_{\tilde{n}=1}^N K_{n\tilde{n}} \sin(\varphi_{\tilde{n}} - \varphi_n), \quad (1.14)$$

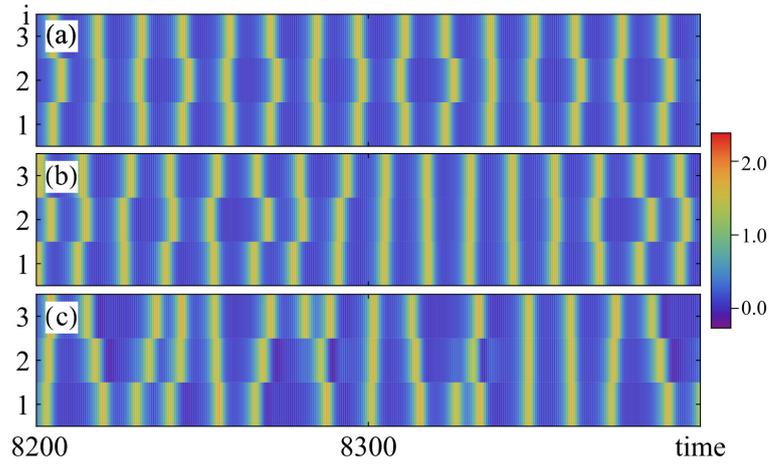


Рисунок 1.9 — Динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) трех маятников в системе (1.1). (a) Хаотический (2 : 1) режим при $K = 0.016$. (b) Хаотический (1 : 1 : 1) режим с перемежаемостью режимов (1 : 1 : 1) и (2 : 1) при $K = 0.024$. (c) Хаотический (1 : 1 : 1) режим при $K = 0.2$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.96$.

где, как и ранее, λ — коэффициент затухания, ответственный за диссипативные процессы в системе, γ — постоянный вращающий момент одинаковый для всех N маятников, элементы $K_{n\tilde{n}}$ матрицы $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ характеризуют нелинейную связь между элементами.

Рассмотренная ранее модель (1.1) является частным случаем системы (1.14), поэтому следует ожидать, что при некоторых соотношениях между параметрами λ , γ и \mathbf{K} , система (1.14) также демонстрирует нетривиальное, регулярное или хаотическое, поведение. Отметим, что в силу идентичности элементов ансамбля в системе (1.14) возможны следующие пространственно-однородные режимы:

- состояние равновесия с когерентными по фазе элементами $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \bar{\phi} = \text{const}$;
- вращательное движение с когерентными по фазе элементами $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_N(t) \equiv \phi(t)$. При этом динамика каждого маятника описывается уравнением (1.2).

Нас будут интересовать только вращательные динамические режимы, поэтому остановимся на значениях параметров λ и γ , при которых в фазовом пространстве системы (1.14) существует синфазное вращательное периодическое движение — синфазный режим с некоторым периодом T_r , что соответствует областям D_2 и D_3 на плоскости (λ, γ) (см. рисунок 1.1).

Далее сосредоточимся на частном варианте модели (1.14), а именно на случае цепочки со свободными концами, образованной N (индекс $n = 1, 2, \dots, N$)

локально и идентично связанными маятниками, т.е. $K_{n\tilde{n}} = K (\delta_{n+1,\tilde{n}} + \delta_{n,\tilde{n}+1})$, где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера ($\delta_{n,m} = 1$, если $n = m$, иначе $\delta_{n,m} = 0$). При $N \geq 3$ система (1.14) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \lambda\dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 &= \gamma + K \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_n + \lambda\dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n &= \gamma + K [\sin (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \sin (\varphi_{n-1} - \varphi_n)], \\ & n = 2, \dots, N-1, \\ \ddot{\varphi}_N + \lambda\dot{\varphi}_N + \sin \varphi_N &= \gamma + K \sin (\varphi_{N-1} - \varphi_N). \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.2.2 Синфазный режим и его устойчивость

Возможность реализации вращательных режимов различной степени сложности в системе (1.15) непосредственно связана с вопросом устойчивости синфазного вращения, развитие неустойчивости которого приводит к возникновению несинфазных режимов. В силу этого рассмотрим далее вопрос его устойчивости. Для нахождения условий устойчивости синфазного режима линеаризуем систему (1.15) в окрестности $\phi(t)$, тогда $\varphi_n(t) = \phi(t) + \delta\varphi_n(t)$. Линеаризованная система уравнений относительно возмущений $\delta\varphi_n(t)$ будет иметь вид (индекс $n = 2, \dots, N-1$):

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos \phi(t) \delta\varphi_1 &= K (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ \delta\ddot{\varphi}_n + \lambda\delta\dot{\varphi}_n + \cos \phi(t) \delta\varphi_n &= K (\delta\varphi_{n-1} - 2\delta\varphi_n + \delta\varphi_{n+1}), \\ \delta\ddot{\varphi}_N + \lambda\delta\dot{\varphi}_N + \cos \phi(t) \delta\varphi_N &= K (\delta\varphi_{N-1} - \delta\varphi_N). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Представим систему (1.16) в векторной форме:

$$\delta\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \lambda\delta\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \cos \phi(t) \delta\boldsymbol{\varphi} = K\mathbf{A} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}, \quad (1.17)$$

где вектор вариаций $\delta\boldsymbol{\varphi} = (\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \dots, \delta\varphi_N)$, а матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Переходя в системе (1.17) к нормальным координатам $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ получим:

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \lambda \dot{\boldsymbol{\psi}} + \cos \phi(t) \boldsymbol{\psi} = K \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (1.19)$$

где $\mathbf{D} = \text{diag} \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ – матрица, на диагонали которой расположены собственные числа μ_n матрицы \mathbf{A} (см. Приложение В):

$$\mu_n = -2 [1 + \cos(n\pi/N)]. \quad (1.20)$$

В нормальных координатах система (1.16) разделяется на N независимых друг от друга уравнений:

$$\ddot{\psi}_n + \lambda \dot{\psi}_n + [\cos \phi(t) - K \mu_n] \psi_n = 0. \quad (1.21)$$

Совокупность N нормальных мод $\{\psi_n\}$ определяет устойчивость синфазного режима $\phi(t)$. Уравнения (1.21) рассматривались в контексте вопросов устойчивости вращательных режимов в главе 1.1.2 (см. (1.9) и (1.11)). Было показано, что в пределах малой диссипации λ тривиальное решение уравнения

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \lambda \dot{\boldsymbol{\psi}} + [\cos \phi(t) + K^*] \boldsymbol{\psi} = 0,$$

когда синфазное вращательное движение $\phi(t)$ можно описать посредством асимптотических разложений (1.5) и (1.6), теряет свою устойчивость при $K^* \in (K_1^*(\lambda, \gamma), K_2^*(\lambda, \gamma))$, а асимптотические выражения для значений границ интервала K_1^* и K_2^* имеют вид

$$K_{1,2}^* = \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \right] + O\left(\frac{\lambda^4}{\gamma^4}\right). \quad (1.22)$$

Тогда нетрудно найти, что

$$K_{1,2}^{(n)} = -K_{1,2}^* / \mu_n. \quad (1.23)$$

Заметим, что одно из собственных значений матрицы \mathbf{A} равно нулю ($\mu_N = 0$). Соответствующая ему мода ψ_N удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\psi}_N + \lambda \dot{\psi}_N + \cos \phi(t) \psi_N = 0. \quad (1.24)$$

Для определения устойчивости моды ψ_N вычислим мультипликаторы Флоке линейного дифференциального уравнения (1.24) с T_r -периодическими коэффициентами. Дифференцирование по t уравнения (1.2) показывает, что функция $\dot{\phi}(t)$

является решением (1.24). Таким образом, один из мультипликаторов (1.24) равен единице. Далее, используя теорему Лиувилля, получаем значение второго мультипликатора $e^{-\lambda T_r}$. Режим ψ_N устойчив при любых значениях параметров исследуемой системы, в том числе при любых K . Можно заключить, что для синфазного режима существует $N - 1$ интервалов значений параметра K , внутри которых $\phi(t)$ может становится неустойчивым. При потере устойчивости синфазного режима при $K \in (K_1^{(n)}, K_2^{(n)})$ возникает режим, соответствующий неустойчивой моде ψ_n .

На рисунке 1.10 представлены построенные численно карты устойчивости синфазного режима в плоскости параметров (K, λ) для цепочек при $N = 6$ и $N = 7$, соответственно. Теоретический анализ с большой степенью точно-

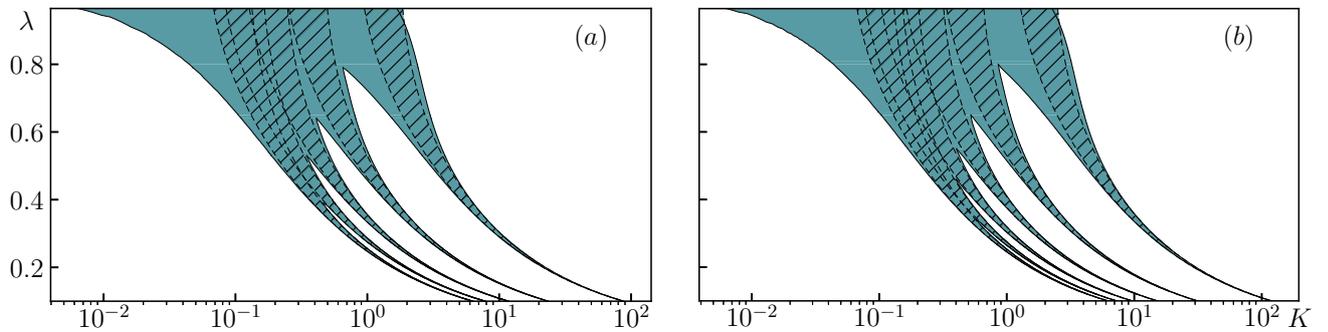


Рисунок 1.10 — Области устойчивости (светлые области) и неустойчивости (темные области) синфазного режима $\phi(t)$ на плоскости (λ, K) , определенные численно для системы (1.14) при $\gamma = 0.97$. Заштрихованная зона обозначает область неустойчивости синфазного режима, определяемая асимптотическими границами областей неустойчивости $K_{1,2}^{(n)}$ (штриховые линии), заданными выражениями (1.22) и (1.23). (a) $N = 6$, (b) $N = 7$.

сти показывает границы неустойчивости синфазного вращательного режима в случае малой диссипации. При малых λ количество областей неустойчивости равно $N - 1$. Каждой такой области соответствует определенная вращательная структура (см. описание ниже). Можно заметить, что при увеличении параметра λ области неустойчивости начинают сливаться друг с другом, пока не превращаются в одну.

Подобное поведение областей неустойчивости наблюдается и при увеличении числа маятников N . На рисунке 1.11 на плоскости (K, N) красным цветом обозначены зоны неустойчивости синфазного режима. Добавление маятника в

систему приводит к появлению новой области неустойчивости, происходит уширение зоны, содержащей области неустойчивости $(K_1^{(n)}, K_2^{(n)})$. Левая граница этой зоны, определяемая выражением $\min_{n \in \{1, \dots, N\}} K_1^{(n)} = K_1^* / \left(4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2N}\right)\right)$, отодвигается влево. Правая граница этой области, определяемая как $\max_{n \in \{1, \dots, N\}} K_2^{(n)} = K_2^* / \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2N}\right)\right)$, отодвигается вправо. При больших N величина правой границы эквивалентна $\sim N^2$. С ростом N начинается перекрытие областей неустойчивости, расположенных слева, причем образуемая перекрытиями зона неустойчивости растет. В пределе $N \rightarrow \infty$ эта область занимает луч $\left[L^*/4, +\infty\right)$. Из рисунка 1.11b видно, что с ростом числа

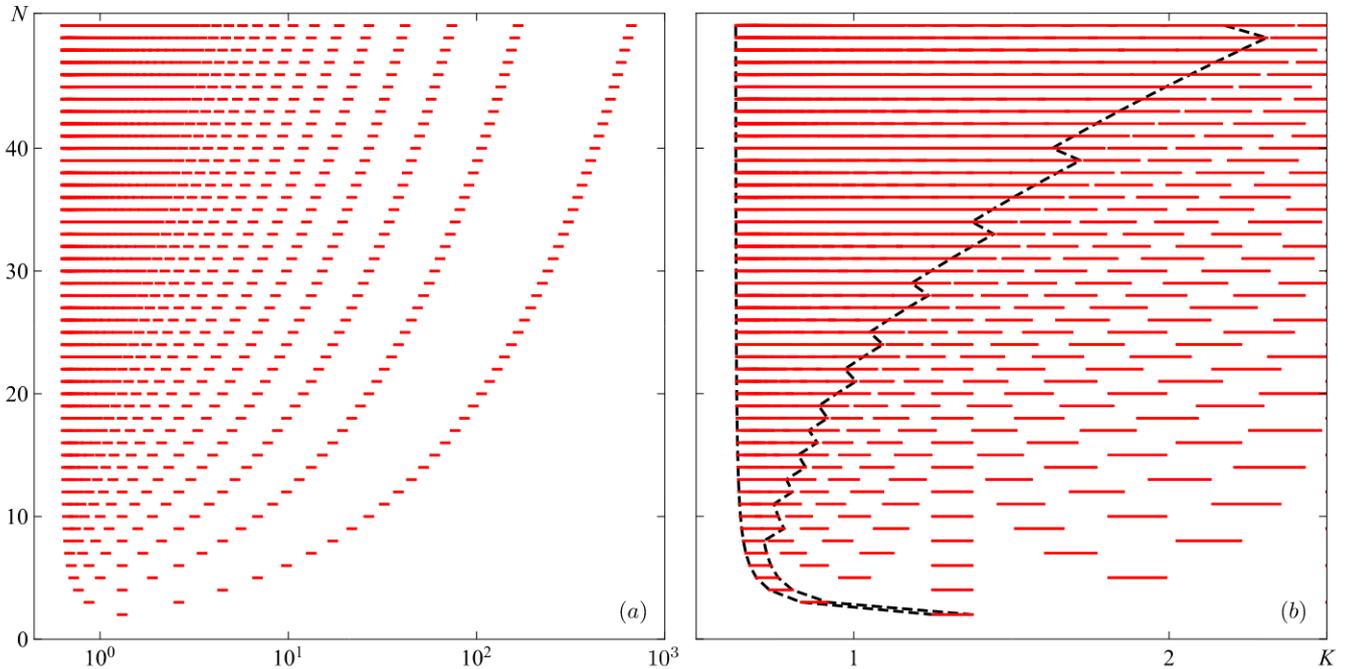


Рисунок 1.11 — (a,b) Области неустойчивости синфазного режима при различных значениях K . $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$, $K_1^*(\lambda, \gamma) \approx 2.5$ и $K_2^*(\lambda, \gamma) \approx 2.75$. Красным цветом выделены интервалы неустойчивости мод ψ_n . Панель (b) представляет собой увеличенную часть рисунка с панели (a). Черной пунктирной линией обозначены границы зоны неустойчивости, образованной перекрытиями интервалов неустойчивости мод ψ_n .

элементов N на единицу происходит появление одной новой зоны неустойчивости синфазного режима. В этих зонах реализуются несинфазные вращения, структурно представляющие из себя кластерные режимы различных типов. Типы вращательных режимов, возникающих в системе будем обозначать как $(a_1 : a_2 : \dots : a_m : \dots : a_M)$, где число a_m показывает количество элементов с одинаковой фазой, находящихся в кластере m . Таким образом синфазный

режим в цепочке из N элементов будет обозначаться $(N : 0)$. Регулярные вращательные режимы искались численно с помощью процедуры поиска замкнутых траекторий (на цилиндре) многомерных динамических систем (см. Приложение Б).

1.2.3 Несинфазные вращательные режимы. Кластерная синхронизация. Классификация

На рисунке 1.12 и 1.13 показаны конфигурации несинфазных вращательных режимов для цепочки из $N = 6$ и $N = 7$ элементов, соответственно. Например, конфигурация $(2 : 2 : 2)$ означает реализацию режима с попарно совпадающими фазами элементов. Отметим, что конфигурации с одинаковыми значениями a_j могут соответствовать различным режимам. Например, имеется три различных структуры $(1 : 1 : \dots : 1)$ и $(2 : 2 : 2 : 1)$ для $N = 7$ (см. рисунок 1.13). Для заданного числа элементов N количество синхронных кластеров $M_n(N)$ несинфазного режима, соответствующего n -ой зоне неустойчивости ($n = 1, 2, \dots, N - 1$) определяется выражением

$$M_n(N) = \left\lfloor \frac{N}{\gcd(2N, N - n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (1.25)$$

где $\lfloor \dots \rfloor$ – округление вниз, а \gcd – наибольший общий делитель (см. Приложение Г).

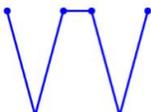
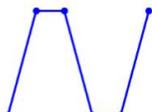
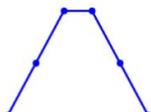
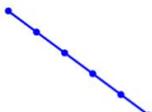
n	1	2	3	4	5
Типы режимов	$(1 : 1 : \dots : 1)$	$(2 : 4)$	$(3 : 3)$	$(2 : 2 : 2)$	$(1 : 1 : \dots : 1)$
Конфигурации фаз					
$(K_1^{(n)}, K_2^{(n)})$	$(0.671, 0.736)$	$(0.835, 0.916)$	$(1.252, 1.374)$	$(2.504, 2.747)$	$(9.345, 10.252)$

Рисунок 1.12 — Конфигурации несинфазных вращательных режимов внутри областей неустойчивости $\phi(t)$. Параметры: $N = 6$, $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$.

На рисунке 1.14 на основе анализа выражений (1.22), (1.23) представлены границы областей неустойчивости синфазного режима и типы реализующихся

n	1	2	3	4	5	6
Типы режимов	(2 : 2 : 2 : 1)	(1 : 1 : ... : 1)	(2 : 2 : 2 : 1)	(1 : 1 : ... : 1)	(2 : 2 : 2 : 1)	(1 : 1 : ... : 1)
Конфигурации фаз						
$(K_1^{(n)}, K_2^{(n)})$	(0.659, 0.723)	(0.771, 0.846)	(1.024, 1.124)	(1.61, 1.767)	(3.325, 3.648)	(12.643, 13.87)

Рисунок 1.13 — Конфигурации несинфазных вращательных режимов внутри областей неустойчивости $\phi(t)$. Параметры: $N = 7$, $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$.

при этом несинфазных вращательных режимов при фиксированных значениях параметров. Видно, что в цепочках может устанавливаться как полностью несинфазный режим (1 : 1 : ... : 1), так и режимы кластерной синхронизации (например, (4 : 4) для $N = 8$). Анализируя схему 1.14 можно увидеть,

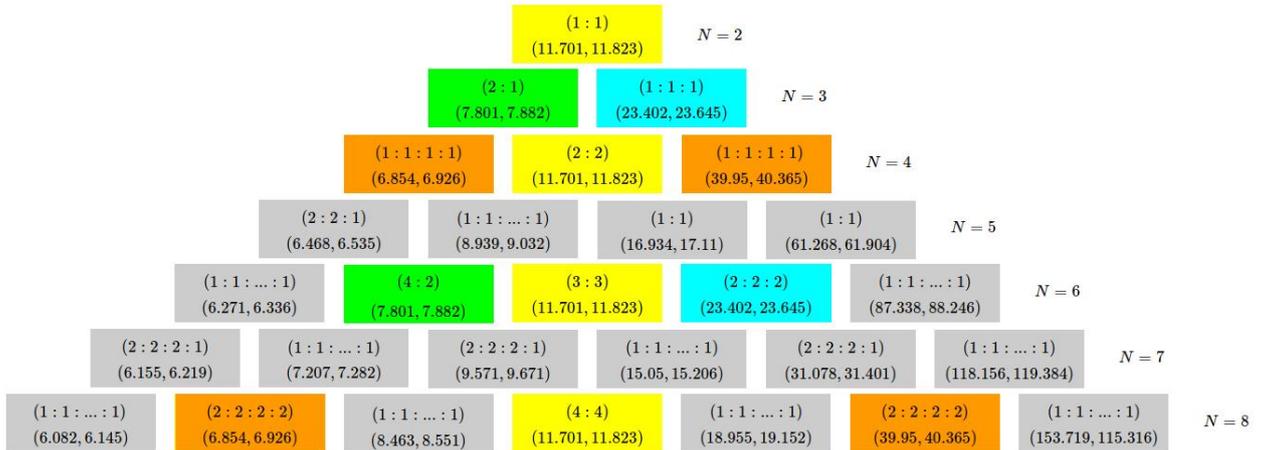


Рисунок 1.14 — Устойчивые несинфазные вращательные режимы, в цепочках с различным числом маятников. Каждая ячейка показывает диапазон значений параметра связи K , внутри которого синфазный вращательный режим является неустойчивым (1.23), а также тип несинфазного вращательного режима. Ячейки одного цвета, кроме серых, обозначают одинаковый диапазон области неустойчивости по параметру K . Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.1$.

что в случае малой диссипации при фиксированном K , которое находится в области неустойчивости синфазного вращательного движения, при увеличении числа осцилляторов в целое число раз несинфазный вращательный режим будет появляться вновь. При этом в каждом из кластеров будет в два раза больше элементов. Например, область неустойчивости, соответствующая режиму (2 : 1) в цепочке с $N = 3$, вновь будет существовать при $N = 6$ для режима (4 : 2).

Для более подробного анализа представим результаты вычислительных экспериментов, а именно бифуркационные диаграммы, а также рисунки, на которых показаны локальные максимумы частот осцилляторов и параметр синхронности Ξ (см. Приложение Б) регулярных вращательных режимов.

Проанализируем динамику вращательных режимов в цепочке из $N = 6$ маятников в зависимости от параметра K . Рассмотрим значения параметра $\lambda = 0.3$ (см. рисунок 1.15). Нас будет интересовать диапазон значений параметра K , при котором первый раз реализуется вращательное движение $(1 : 1 : \dots : 1)$. При увеличении параметра K синфазное периодическое вращательное движение $\phi(t)$ претерпевает бифуркацию удвоения периода при $(K \approx 0.668)$. При этом из устойчивого синфазного 2π -периодического движения рождается устойчивое 4π -периодическое движение $(1 : 1 : \dots : 1)$, а 2π -периодическое синфазное движение теряет свою устойчивость. На бифуркационной диаграмме видно (см. рисунок 1.15с), что существует также неустойчивое несинфазное 4π -периодическое движение $(1 : 1 : \dots : 1)$, которое рождается из синфазного неустойчивого 2π -периодического движения в результате субкритической бифуркации удвоения периода $(K \approx 0.736)$. При этом синфазное 2π -периодическое движение вновь становится устойчивым. Далее при увеличении параметра K устойчивое и неустойчивое 4π -периодические вращательные движения $(1 : 1 : \dots : 1)$ сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации $(K \approx 0.911)$. Те же бифуркации происходят с вращательными движениями типа $(2 : 4)$, $(2 : 2 : 2)$, $(1 : 1 : \dots : 1)$. Можно заметить, что в системе также происходит бифуркация Неймарка–Сакера $(K \approx 1.543)$, в результате которой 4π -периодический вращательный режим $(3 : 3)$ теряет свою устойчивость. Замкнутая периодическая траектория превращается в тор, который при дальнейшем увеличении параметра K становится неустойчивым и затем неустойчивые 4π -периодические вращательные движения сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации $(K \approx 1.894)$. Также заметим, что при $K \in (0.83, 0.915)$ в системе имеет место бистабильность несинфазных вращательных движений, в результате которой при различных начальных условиях в результате эволюции системы может образоваться $(1 : 1 : \dots : 1)$ или $(2 : 4)$ 4π -периодические вращательные движения.

При увеличении числа взаимодействующих элементов N , как следует из приведенных выше аналитических результатов, пространственно-временная динамика ансамбля усложняется. Однако, как показали наши вычислительные

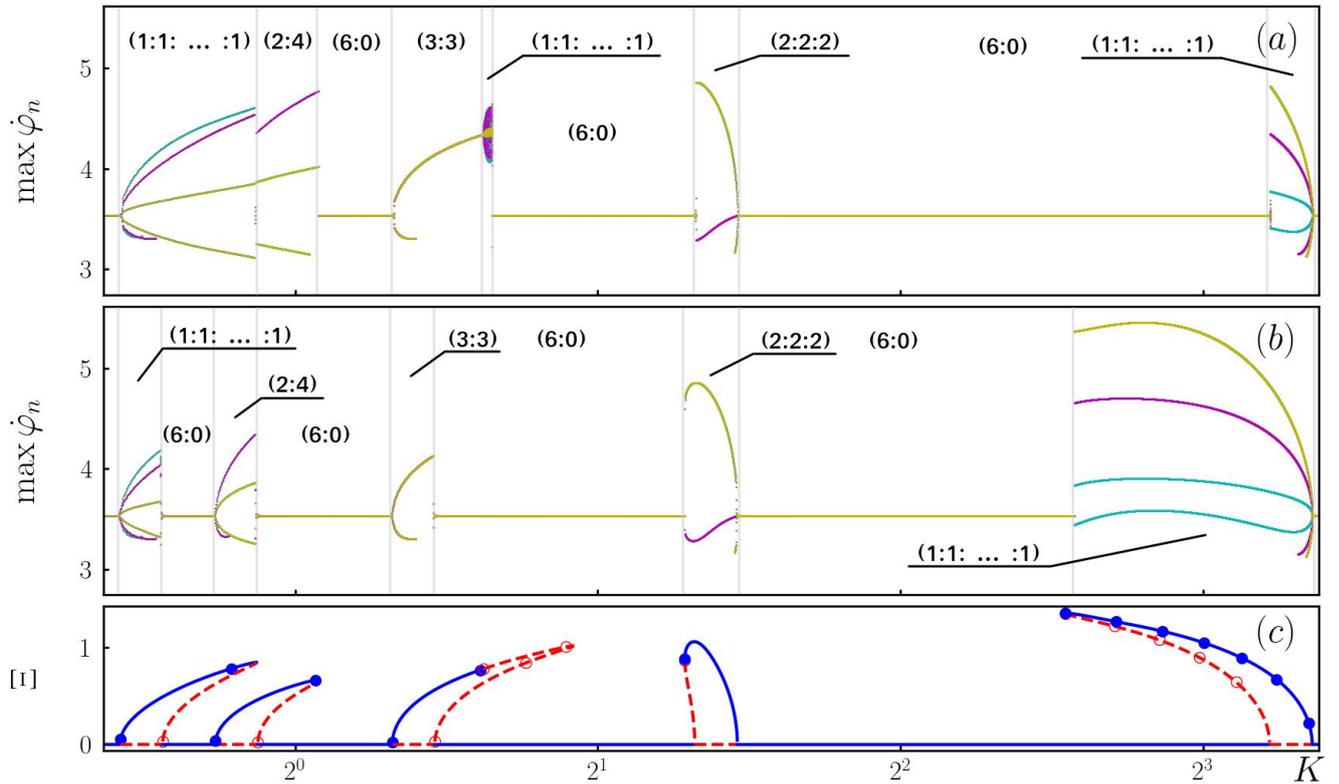


Рисунок 1.15 — (a,b) Локальные максимумы частот. Рисунки получены с помощью наследования начальных условий: (a) при увеличении параметра K , (b) при уменьшении параметра K . (c) бифуркационная диаграмма периодических вращательных режимов. Ξ – параметр синхронности, $\max \dot{\varphi}_n$ – локальные максимумы частот маятников. Круглыми маркерами обозначены 4π -периодические вращательные режимы. Закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращательным движениям, незакрашенные маркеры – неустойчивым. Линия без маркеров соответствует синфазному 2π -периодическому вращательному режиму, сплошная – устойчивому, пунктирная – неустойчивому. Параметры: $N = 6$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.3$.

эксперименты, основные бифуркации периодических вращательных режимов, обнаруженные для цепочки из $N = 6$ маятников, остаются такими же.

Глава 2. Возникновение хаоса и гиперхаоса в цепочке маятников произвольной длины

В данной главе изучается развитие хаоса в цепочках локально связанных идентичных маятников. Исследуются механизмы возникновения (исчезновения) и свойства хаоса как при изменении индивидуальных свойств элементов, так и свойств всего рассматриваемого ансамбля, определяемых числом взаимодействующих элементов и силой связи между ними. Показано, что усиление диссипации в ансамбле с фиксированной величиной связи и количеством элементов может приводить к возникновению хаоса в результате каскада бифуркаций удвоения периода периодических вращательных движений или в результате бифуркации разрушения инвариантных торов. Также хаос может возникнуть в ансамбле при добавлении или исключении одного или нескольких элементов. Отдельно исследовано влияние величины связи на возникновение хаоса. Показано, что хаос возможен при малых и средних значениях параметра связи и обусловлен перекрытием областей существования несинфазных вращательных режимов. Установлена корреляция между размерностью гиперхаотических режимов и количеством элементов цепочки.

2.1 Модель и синфазный режим

Рассмотрим N связанных систем маятникового типа, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \lambda \dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 &= \gamma + K \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n &= \gamma + K [\sin (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \sin (\varphi_{n-1} - \varphi_n)], \\ & n = 2, \dots, N - 1, \\ \ddot{\varphi}_N + \lambda \dot{\varphi}_N + \sin \varphi_N &= \gamma + K \sin (\varphi_{N-1} - \varphi_N), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где λ – коэффициент затухания, ответственный за диссипативные процессы в системе, γ – постоянный вращающий момент одинаковый для всех N маятников, K – параметр силы связи между элементами.

Система (2.1) используется для описания поведения взаимодействующих маятников [1; 2; 60], связанных джозефсоновских контактов [9; 16; 17; 66–68]. Она используется для описания процессов в сверхпроводниках [69], молекулярной биологии [10; 70], системах фазовой синхронизации [3]. Более того, такую систему можно рассматривать как обобщение модели Курамото с учетом инерции и собственной нелинейности элементов ансамбля [59; 71–73].

Так как элементы ансамбля идентичны, то при любых значениях параметров возможны следующие пространственно-однородные режимы:

- состояние равновесия с когерентными по фазе элементами $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \bar{\phi} = \text{const}$;
- вращательное движение с когерентными по фазе элементами $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_N(t) \equiv \phi(t)$.

Эти режимы подчиняются маятниковому уравнению:

$$\ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + \sin \phi = \gamma. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) тщательно исследовано в [57; 58].

В данном исследовании нас будут интересовать регулярные и хаотические вращательные режимы, поэтому остановимся на значениях параметров λ и γ , для которых в системе (2.1) существует синфазное вращательное периодическое движение и устойчивое состояние равновесия, что соответствует области D_2 на бифуркационной диаграмме 1.1, ограниченной снизу бифуркационной кривой Трикоми \mathcal{T} [57; 58].

Возможность реализации вращательных режимов различной степени сложности в системе (2.1) непосредственно связана с вопросом устойчивости синфазного режима, развитие неустойчивости которого приводит к возникновению несинфазных режимов. В силу этого рассмотрим далее кратко вопрос устойчивости синфазного режима. Для этого линеаризуем систему (2.1) в окрестности $\phi(t)$, представив $\varphi_n(t)$ в виде $\varphi_n(t) = \phi(t) + \delta\varphi_n(t)$. Тогда линеаризованная система уравнений относительно возмущений $\delta\varphi_n(t)$ будет иметь вид: (индекс $n = 2, \dots, N - 1$):

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos \phi(t) \delta\varphi_1 &= K (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ \delta\ddot{\varphi}_n + \lambda\delta\dot{\varphi}_n + \cos \phi(t) \delta\varphi_n &= K (\delta\varphi_{n-1} - 2\delta\varphi_n + \delta\varphi_{n+1}), \\ \delta\ddot{\varphi}_N + \lambda\delta\dot{\varphi}_N + \cos \phi(t) \delta\varphi_N &= K (\delta\varphi_{N-1} - \delta\varphi_N). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Переходя в системе (2.3) к нормальным координатам $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ получим следующую систему независимых уравнений (см. раздел 1.2.2):

$$\ddot{\psi}_n + \lambda \dot{\psi}_n + [\cos \phi(t) - K \mu_n] \psi_n = 0, \quad (2.4)$$

где $\mu_n = -2[1 + \cos(n\pi/N)]$. Моды $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1}$ могут становиться неустойчивыми, что приводит к возникновению несинфазных вращательных режимов, при этом границы интервала неустойчивости $(K_1^{(n)}, K_2^{(n)})$ определяются выражениями

$$K_{1,2}^{(n)} = K_{1,2}^* / |\mu_n|, \quad (2.5)$$

где $K_{1,2}^*(\lambda, \gamma)$, соответственно, левая и правая границы области неустойчивости тривиального решения уравнения $\ddot{\psi} + \lambda \dot{\psi} + [\cos \phi(t) + K^*] \psi = 0$, которые могут быть определены асимптотическими выражениями

$$K_{1,2}^* = \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \right] + O\left(\frac{\lambda^4}{\gamma^4}\right). \quad (2.6)$$

Таким образом, в системе (2.1) при определенных значениях управляющих параметров λ, γ может существовать $N - 1$ область неустойчивости синфазного режима $\phi(t)$. Причем при малой диссипации ($\lambda \ll 1$) данные области неустойчивости не перекрываются.

2.2 Пересечение областей неустойчивости синфазного режима

В данном разделе мы покажем, что взаимное расположение областей неустойчивости синфазного режима существенным образом влияет на сложность реализующихся динамических режимов. В результате прямого численного моделирования системы (2.1) в области параметров (λ, γ) были построены карты вращательных режимов, представленные на рисунке 2.1, анализируя которые видим, что при увеличении диссипации происходит усложнение структур. Имеет место перекрытие зон существования различных структур, а также возникновение мультистабильности, что в итоге приводит к появлению режима динамического хаоса. Хаотичность поведения будем определять исходя из знака наибольшего показателя Ляпунова.

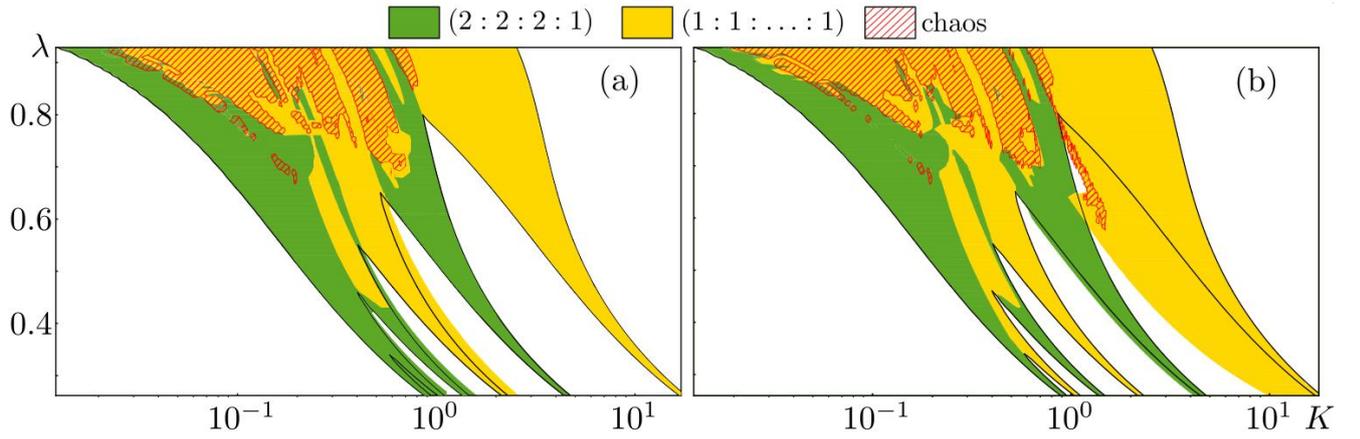


Рисунок 2.1 — Карты вращательных режимов, реализующихся в системе (2.1) при $N = 7$, $\gamma = 0.97$ для различных значений λ и K . Черные линии – границы областей неустойчивости синфазного вращательного движения $\phi(t)$, полученные численно. Цветом обозначены типы реализующихся вращательных режимов: зеленый – $(2 : 2 : 2 : 1)$ режимы, жёлтый – $(1 : 1 : \dots : 1)$ режимы. Красной штриховкой показаны области хаоса, т.е. старший ляпуновский показатель в этих областях положителен. Карты получены для случая увеличения (a) и уменьшения (b) параметра K . Во всех расчетах начальные условия для следующих значений параметров выбирались равными конечным состояниям предыдущей реализации (наследование начальных условий). Наблюдаются довольно большие области, в которых структуры с хаотическим поведением сосуществуют с полностью синхронными вращениями.

Проанализируем каким образом происходит возникновение, эволюция и перекрытие зон неустойчивости синфазного режима. Мы покажем, что при фиксированных значениях параметров λ и γ увеличение числа элементов цепочки N приводит к следующим сценариям перекрытий областей неустойчивости синфазного режима:

- (i) при добавлении новых элементов одна из областей неустойчивости всегда будет отделена от остальных;
- (ii) существует такое критическое число элементов N^* , при превышении которого в системе одна из областей неустойчивости отделена от остальных;
- (iii) при любом числе элементов N все области неустойчивости будут иметь пересечения с другими.

Из выражения (2.5) и монотонного возрастания выражений $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}$ следует, что последовательности левых $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, \dots, K_1^{(N-1)}$ и правых

$K_2^{(1)}, K_2^{(2)}, \dots, K_2^{(N-1)}$ границ областей неустойчивости монотонно возрастают (так же монотонно возрастают и ширины областей неустойчивости $K_2^{(n)} - K_1^{(n)}$). Таким образом, две соседние области неустойчивости могут частично перекрываться ($K_1^{(n+1)} \leq K_2^{(n)}$), либо быть разделены окном устойчивости ($K_1^{(n+1)} > K_2^{(n)}$). Т.е. зона неустойчивости не может целиком входить в другую зону неустойчивости. Введем число $n^*(N)$, определяющее количество первых перекрывающихся зон неустойчивости при увеличении параметра силы связи K . Например, если $n^*(8) = 3$, то первые три зоны неустойчивости перекрываются, затем следует окно устойчивости (расположение остальных четырех зон нас не интересует, важно, что они отделены друг от друга). Выражение $n^*(8) = 7$ означает, что все зоны неустойчивости перекрылись и слились в одну. Очевидно, $1 \leq n^*(N) \leq N - 1$. Формально $n^*(N)$ определяется выражением

$$n^*(N) = \min \left(\left\{ n \in \{1, 2, \dots, N - 2\} \mid K_1^{(n+1)} - K_2^{(n)} > 0 \right\} \cup \{N - 1\} \right). \quad (2.7)$$

Для нахождения явного выражения для числа $n^*(N)$ рассмотрим континуализованное по n выражение: $K_1^{(n+1)} - K_2^{(n)}$, введем функцию расстояния между областями неустойчивости $L(x) = K_1^{(x+1)} - K_2^{(x)}$. Очевидно, функция $L(x)$ периодична: $L(x + 2N) = L(x)$. Кроме того, имеются разрывы в точках $x = (2k + 1)N$ и $x = (2k + 1)N - 1$, где k – целое число. Можно проверить, что $\lim_{x \rightarrow N} L(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow N-1} L(x) = +\infty$. Таким образом, на интервалах $[-N, N - 1]$ и $[N - 1, N]$ найдется хотя бы по одному корню уравнения $L(x) = 0$. Непосредственное решение уравнения $L(x) = 0$ приводит к корням

$$x_k^\pm = \frac{2N}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2N} \right) \pm \sqrt{K_1^*/K_2^*}}{\sin \left(\frac{\pi}{2N} \right)} \right) + 2Nk. \quad (2.8)$$

Корни x_0^- и x_0^+ лежат в интервале $[-N, N]$. Приходим к выводу, что каждый интервал $[-N, N - 1]$ и $[N - 1, N]$ содержит по одному корню, причем меньший корень x_0^- лежит в интервале $[-N, N - 1]$. Таким образом, для $x > x_0^-$ имеем $L(x) > 0$: расстояние между областями неустойчивости становится положительным, т.е. зоны перестают перекрываться. Тогда

$$n^*(N) = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{2N}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2N} \right) - \sqrt{K_1^*/K_2^*}}{\sin \left(\frac{\pi}{2N} \right)} \right) \right\rceil \right\}, \quad (2.9)$$

где скобки $\lceil \dots \rceil$ обозначают функцию округления вверх, т.е. округление происходит до ближайшего целого числа, не меньше данного значения. Таким

образом, при увеличении параметра K перекрываться могут только первые $n^*(N)$ областей неустойчивости. Все прочие неустойчивые области (если таковые остались) отделены друг от друга окнами устойчивости. Также полезно заметить, что в силу монотонного роста функции, стоящей под скобками округления вверх в (2.9), с ростом числа N , последовательность $n^*(N)$ является неубывающей. Иными словами, увеличение числа элементов цепочки N может приводить только к увеличению числа пересекающихся областей неустойчивости синфазного режима.

Определим правую границу $K_2^{(n^*)}$ зоны неустойчивости, образованной перекрытием отдельных зон неустойчивости:

$$K_2^{(n^*)} = \frac{K_2^*}{4 \cos^2 \left(\frac{n^*(N) \pi}{2N} \right)}. \quad (2.10)$$

При $N \rightarrow \infty$ имеем предел $\lim_{N \rightarrow \infty} n^*(N)/N = 1$. В самом деле, при достаточно больших N (когда $\cos(\frac{\pi}{2N}) > \sqrt{K_1^*/K_2^*}$)

$$n^*(N) = \left\lceil \frac{2N}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2N}) - \sqrt{K_1^*/K_2^*}}{\sin(\frac{\pi}{2N})} \right) \right\rceil, \quad (2.11)$$

и имеют место неравенства

$$\frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2N}) - \sqrt{K_1^*/K_2^*}}{\sin(\frac{\pi}{2N})} \right) \leq \frac{n^*(N)}{N} \leq 1 - \frac{1}{N}. \quad (2.12)$$

Тогда, вычисляя пределы с обеих сторон, по теореме о двух сопровождающих приходим к указанному пределу. В итоге приходим к

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_2^{(n^*)} = +\infty. \quad (2.13)$$

Левая граница зоны неустойчивости, образованной перекрытием отдельных областей неустойчивости определяется как $K_1^{(1)}$. При $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_1^{(1)} = K_1^*/4. \quad (2.14)$$

Для более детального исследования поведения областей неустойчивости введем в рассмотрение число $\bar{n}^*(N) = N - 1 - n^*(N)$ ($0 \leq \bar{n}^*(N) \leq N - 2$), определяющее количество изолированных (окнами устойчивости) неустойчивых областей. Из (2.9) получим, что

$$\bar{n}^*(N) = \min \left\{ N - 1, \left\lceil \frac{2N}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2N}) - \sqrt{K_1^*/K_2^*}}{\sin(\frac{\pi}{2N})} \right) \right) \right\rceil \right\} - 1, \quad (2.15)$$

где скобки $\lfloor \dots \rfloor$ обозначают функцию округления вниз, т.е. округление происходит до ближайшего целого числа, не больше данного значения. Изучим поведение функции, стоящей под скобками округления вниз. Непосредственным вычислением можно проверить, что ее вторая производная по N всегда отрицательна для $\forall N \geq 1$ (нас интересуют значения $N \geq 2$). Таким образом, при $N \geq 1$ первая производная монотонно убывает с ростом N . В точке $N = 1$ производная равна $\frac{K_1^*}{K_1^* + K_2^*} + \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{K_1^*}{K_2^*}} > 0$; при $N \rightarrow +\infty$ значение производной стремится к $+0$. Следовательно можно утверждать, что производная для всех $N \geq 1$ положительна и исследуемая функция монотонно растет с ростом числа $N \geq 2$. Тогда последовательность $\bar{n}^*(N)$, подобно последовательности $n^*(N)$, является неубывающей.

Сценарий А. Найдем условие, при котором для любого N найдется изолированная область неустойчивости синфазного режима. Из неубывания последовательности $\bar{n}^*(N)$ следует, что необходимым и достаточным условием является выполнение равенства $\bar{n}^*(3) = 1$. Из (2.15) находим $K_2^*/K_1^* < 3$. Пример данного сценария продемонстрирован на рисунке 2.2а.

Сценарий Б. Аналогично можно найти условие, при котором для любого N перекрываются все области неустойчивости. Необходимым и достаточным условием является выполнение равенства $\lim_{N \rightarrow +\infty} \bar{n}^*(N) = 0$. Из (2.15) следует

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \bar{n}^*(N) = \left\lfloor \left(1 - \sqrt{K_1^*/K_2^*}\right)^{-1} \right\rfloor - 1. \text{ Тогда } K_2^*/K_1^* > 4 \text{ (рисунок 2.2с).}$$

Сценарий В. При $3 < K_2^*/K_1^* < 4$ для малых N все области неустойчивости перекрываются, но начиная с некоторого номера N появляются изолированные области, отделенные окнами устойчивости (рисунок 2.2б).

Еще одним выводом из неубывания последовательностей $n^*(N)$ и $\bar{n}^*(N)$ является тот факт, что при добавлении нового элемента, т.е. при увеличении N на единицу, либо возникает одна новая изолированная область неустойчивости и число перекрывающихся областей не изменяется, либо количество перекрывающихся областей увеличивается на единицу, а число изолированных областей не изменяется.

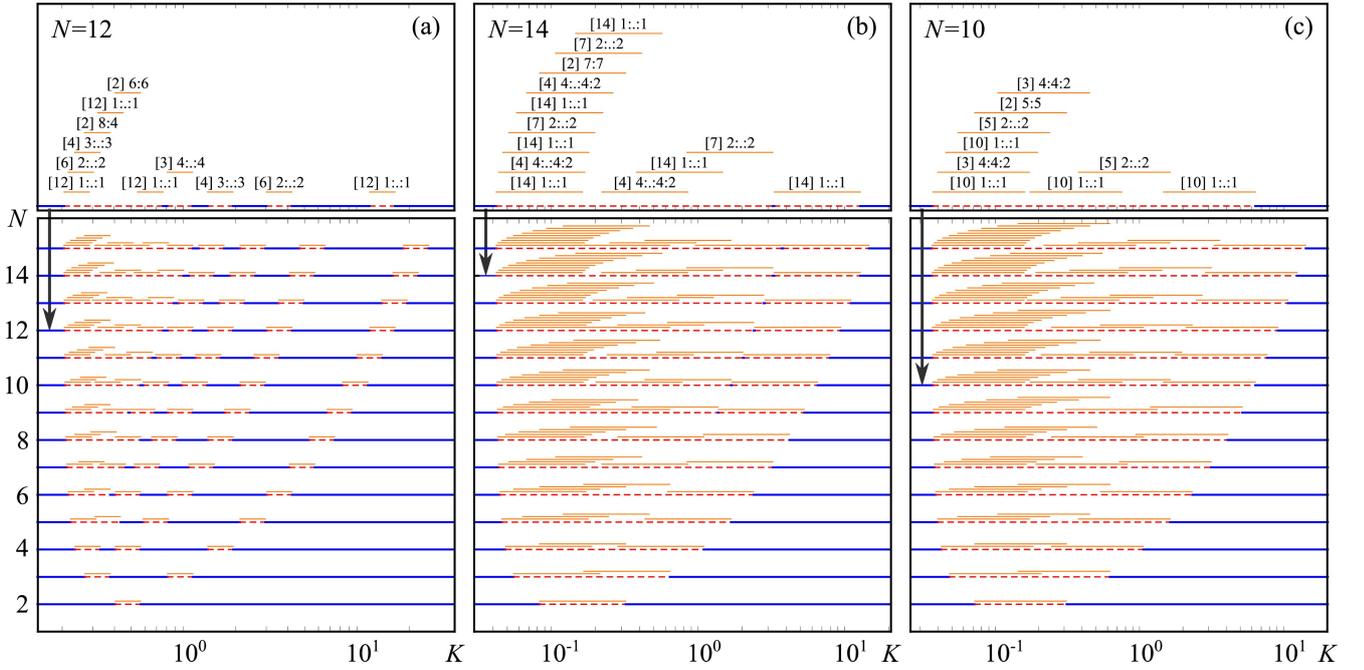


Рисунок 2.2 — Нижние панели. Области неустойчивости мод ψ_n (оранжевые сплошные линии) и соответствующие области неустойчивости синфазного режима (красные пунктирные линии), найденные из выражения (2.5) и численного вычисления границ $K_{1,2}^*$ для $\gamma = 0.97$ и различных N и λ в зависимости от силы связи K . Синие сплошные линии соответствуют устойчивому синфазному вращательному движению. (a) $\lambda = 0.5$. *Сценарий А*. Для любого N существует хотя бы одна область неустойчивости синфазного режима, изолированная от остальных окном устойчивости. (b) $\lambda = 0.8$. *Сценарий В*. Начиная с некоторого N (здесь с $N = 9$) появляется область неустойчивости, изолированная окном устойчивости. (c) $\lambda = 0.82$. *Сценарий Б*. При любом числе элементов N наблюдается перекрытие всех областей неустойчивости мод ψ_n с образованием единой области неустойчивости синфазной моды без устойчивых окон. Верхние панели. Области неустойчивости мод ψ_n и соответствующие типы несинфазных режимов вращения для указанных стрелками значений N . Число в квадратных скобках указывает количество синфазных кластеров.

2.3 Развитие хаотической динамики

Проанализируем детально механизмы возникновения сложных периодических и хаотических режимов, и роль при этом перекрытия областей существования различных несинфазных режимов. Для более подробного анализа ниже будут представлены бифуркационные диаграммы, графики значений

локальных максимумов частот осцилляторов, а также старшего ляпуновского показателя, положительное значение которого говорит о наличии в системе режима динамического хаоса.

Исследуем динамику вращательных режимов в цепочке в зависимости от параметра K для различных значений параметра диссипации λ и длин цепочек N . Наши вычислительные эксперименты показывают, что при увеличении значения параметра K синфазный режим мягко теряет свою устойчивость, однако потеря устойчивости несинфазного режима, который при этом родился, происходит при дальнейшем увеличении K жестким образом. Т.е. имеет место гистерезис, когда существует интервал значений K , где синфазный режим сосуществует с несинфазным. Будем называть такую область неустойчивости синфазного режима «правой». В случае если синфазный режим теряет устойчивость жестко, а несинфазный мягко при увеличении K , то назовем такую область неустойчивости «левой». Сценарий появления и существования «левых» и «правых» областей для разного числа элементов цепочки N следующий:

- $N = 2$ – одна «левая» $(1 : 1)$ область;
- $N = 3$ – одна «левая» $(2 : 1)$ и одна «правая» $(1 : 1 : 1)$;
- $N = 4$ – две «левых» $(1 : 1 : 1 : 1)$ и $(2 : 2)$ и одна «правая» $(1 : 1 : 1 : 1)$;
- $N = 5$ – две «левых» $(2 : 2 : 1)$ и $(1 : 1 : 1 : 1 : 1)$ и две «правых» $(2 : 2 : 1)$ и $(1 : 1 : 1 : 1 : 1)$;
- и т.д.

Таким образом переход от четного числа элементов к нечетному сопровождается добавлением одной «правой» области; аналогично, при переходе от нечетного числа к четному добавляется одна «левая» область.

Фиксированное количество элементов N . Рассмотрим динамику цепочки при $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.3$ (рисунок 2.3). В данном случае при увеличении значений параметра K в системе (2.1) при развитии неустойчивости синфазного вращения реализуются последовательно несинфазные $(2 : 2 : 2 : 1)$ и $(1 : 1 : \dots : 1)$ режимы, соответствующие модам ψ_n ($n = 1, \dots, 6$). Отметим, что режимы, имеющие одно обозначение, могут отличаться друг от друга и представлять собой различные объекты в фазовом пространстве исследуемой системы (2.1). Рассмотрим диапазон значений параметра K , когда первый раз реализуется вращательное движение $(2 : 2 : 2 : 1)$. Здесь при увеличении параметра K синфазное периодическое вращение $\phi(t)$ претерпевает бифуркацию удвоения периода при $K \approx 0.65689$. При этом из устойчивого син-

фазного 2π -периодического движения рождается устойчивое 4π -периодическое $(2 : 2 : 2 : 1)$ движение, а $\phi(t)$ теряет свою устойчивость. На бифуркационной диаграмме (рисунок 2.3а) видно, что существует также неустойчивое движение $(2 : 2 : 2 : 1)$, которое при $K \approx 0.72420$ возникает из неустойчивого синфазного движения в результате бифуркации удвоения периода, при этом $\phi(t)$ вновь становится устойчивым. Далее при увеличении параметра K устойчивые и неустойчивые $(2 : 2 : 2 : 1)$ движения сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации. При дальнейшем увеличении параметра связи K мягким образом возникают режимы $(1 : 1 : \dots : 1)$ и $(2 : 2 : 2 : 1)$, и далее жестким образом другие режимы $(1 : 1 : \dots : 1)$, $(2 : 2 : 2 : 1)$ и $(1 : 1 : \dots : 1)$. Таким образом, при малой диссипации λ в системе (2.1) при изменении параметра K наблюдается три правых и три левых области неустойчивости синфазного режима $\phi(t)$. Обратим также внимание на то, что при $\lambda = 0.3$ 4π -периодические вращательные режимы $(2 : 2 : 2 : 1)$ и $(1 : 1 : \dots : 1)$, относящиеся к «правым» интервалам неустойчивости, могут сосуществовать на интервале силы связи $0.76917 \leq K \leq 0.90117$, хотя соответствующие области неустойчивости не пересекаются. В рассматриваемом случае возможно появление не только периодических вращательных режимов. В интервале $1.95 < K < 2.0$ наблюдается устойчивый инвариантный тор, возникающий в результате бифуркации Неймарка–Сакера.

Дальнейшее увеличение параметра диссипации λ приводит пересечению интервалов неустойчивости синфазного режима. При $\lambda = 0.6$ имеют пересечения четыре таких области, соответствующие меньшим значениям силы связи K (рисунок 2.4), при этом 4π -периодические режимы, соответствующие режиму $(1 : 1 : \dots : 1)$, неустойчивы и реализуются вращения с большим числом оборотов на 2π , которые возникают в ходе последующих бифуркаций 4π -периодических траекторий. В «левой» области, соответствующей $(1 : 1 : \dots : 1)$ вращению, в результате каскада бифуркаций удвоения периода, возникает интервал с хаотическими движениями, что подтверждается положительными значениями старшего ляпуновского показателя (рисунок 2.4с). В случае $\lambda = 0.7$ (рисунок 2.5), когда пересекается уже пять областей неустойчивости, хаотические режимы наблюдаются уже на нескольких интервалах. Переход от периодической динамики к хаотической может происходить через бифуркацию Неймарка–Саккера, приводящую к возникновению инвариантного тора, и последующую бифуркацию разрушения тора, которая приводит к рождению

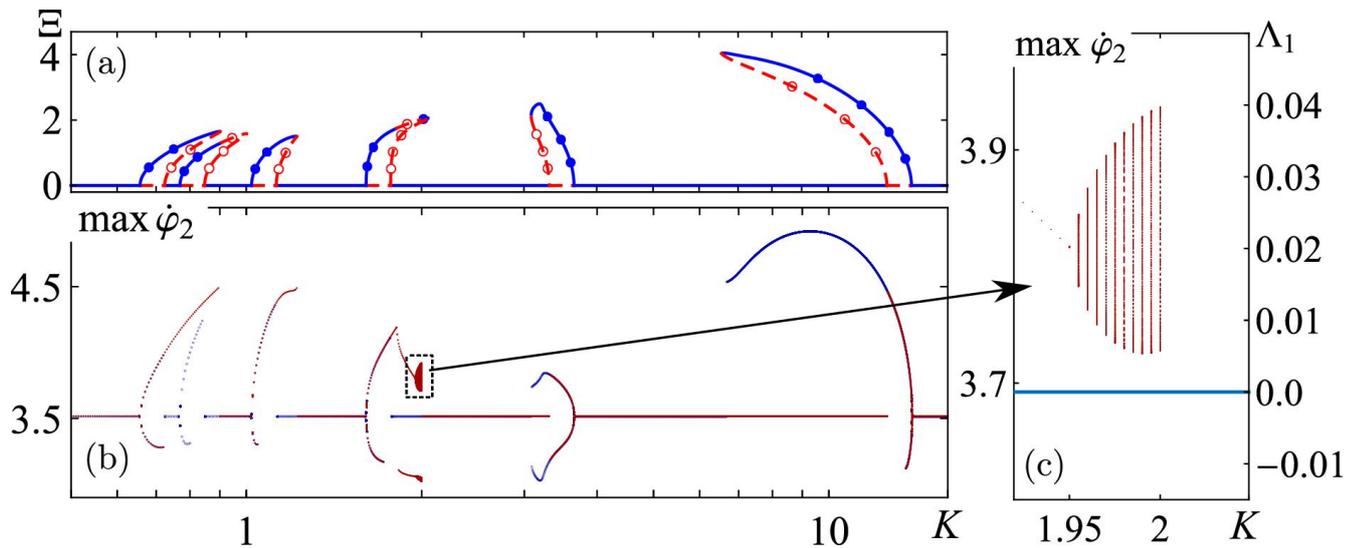


Рисунок 2.3 — Локальная бифуркационная диаграмма периодических вращательных режимов (a). Ξ — параметр синхронности. Круглыми маркерами отмечены 4π -периодические вращательные режимы. Закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращениям, незакрашенные — неустойчивым. Прямая без маркеров соответствует синфазному 2π -периодическому вращательному режиму, сплошная линия — устойчивому, пунктирная линия — неустойчивому. Локальные максимумы частоты $\max \dot{\varphi}_m$ (b). Диаграмма построена двумя способами: путём увеличения (красные маркеры) и уменьшения (синие маркеры) параметра K . На (c) показана увеличенная область из (b), а также $\max \dot{\varphi}_m$ и старший показатель Ляпунова $\Lambda_1 = 0$ (синяя кривая). Фрагмент (c) демонстрирует рождение инвариантного тора из несинфазного 4π -периодического вращательного режима. Параметры: $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.3$.

хаотического аттрактора. Здесь кривые, соответствующие 4π -периодическим вращательным режимам имеют достаточно нетривиальную структуру с различными совместными пересечениями (рисунок 2.5a). При дальнейшем увеличении параметра диссипации λ области хаотической динамики постепенно увеличиваются и сливаются друг с другом (рисунок 2.6).

Фиксированное значение параметра диссипации λ . Рассмотрим эволюцию режимов в случае фиксированного значения параметра диссипации, например $\lambda = 0.9$, при изменении числа элементов цепочки N и параметра связи K . В первую очередь нас будут интересовать переходы от регулярных режимов к хаотическим и роль, которую при этих переходах играет появление и эволюция областей неустойчивости синфазного режима.

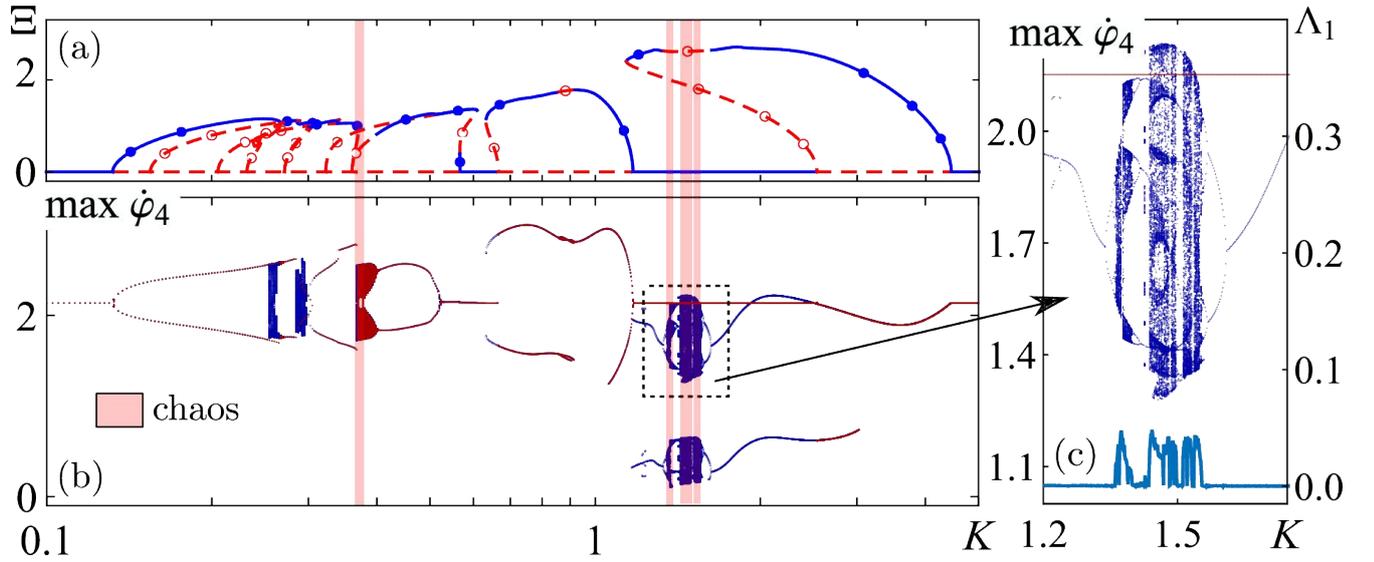


Рисунок 2.4 — То же, что и на рисунке 2.3. Области хаоса отмечены красным цветом. Фрагмент (с) демонстрирует возникновение хаотического движения из несинфазного 4π -периодического вращательного режима в результате каскада бифуркаций удвоения периода. Параметры: $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.6$.

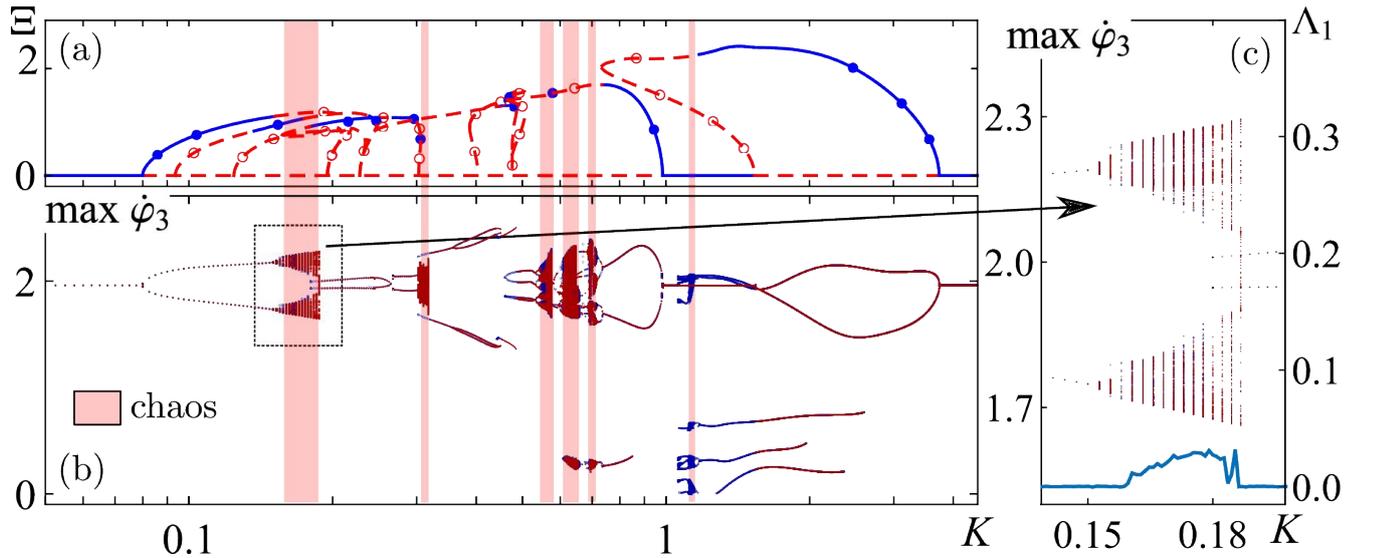


Рисунок 2.5 — То же, что и на рисунке 2.4. Фрагмент (с) демонстрирует возникновение хаотического движения в результате разрушения инвариантного тора. Параметры: $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.7$.

Используя общее выражение (2.5), можно определить число N_ψ и долю $u_N(K) = N_\psi / (N - 1)$ мод ψ_n , теряющих свою устойчивость при некотором фиксированном значении параметра связи K :

$$u_N(K) = \frac{\theta(K - K_1^*/4)}{N - 1} \left[\frac{2N}{\pi} \arccos \left(\sqrt{\frac{K_1^*}{4K}} \right) \right] - \frac{\theta(K - K_2^*/4)}{N - 1} \left[\frac{2N}{\pi} \arccos \left(\sqrt{\frac{K_2^*}{4K}} \right) \right], \quad (2.16)$$

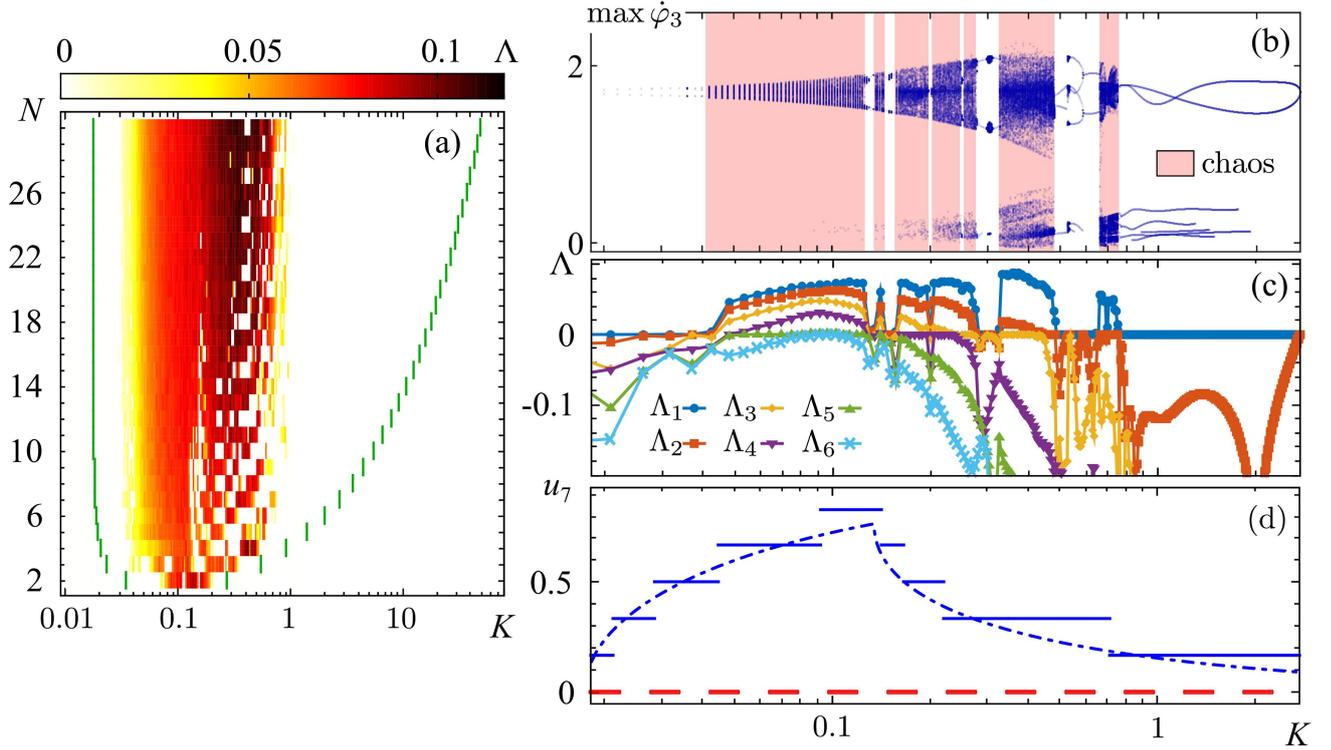


Рисунок 2.6 — (а) Карта хаотических режимов в системе (2.1) в зависимости от силы связи K и количества элементов N при $\gamma = 0.97$ и $\lambda = 0.9$. Зелеными линиями обозначены левые $K_1^{(1)}$ и правые $K_2^{(N-1)}$ границы области неустойчивости синфазного режима $\phi(t)$. Белый цвет соответствует регулярным режимам вращения (старший показатель Ляпунова $\Lambda = 0$). В цветной области наибольший показатель Ляпунова положителен. (б) Локальные максимумы частот $\max \dot{\phi}_m$ при $m = 3$, $N = 7$. (в) Спектр ляпуновских показателей Λ_j (шесть наибольших показателей) для $N = 7$. Наблюдаются интервалы с четырьмя, тремя, двумя и одним положительным показателем. (д) Зависимость доли $u_7(K)$ неустойчивых мод ψ_n для $N = 7$ (синие линии) и для $N \rightarrow \infty$ (синяя пунктирная кривая). Красной пунктирной линией обозначена область неустойчивости синфазного режима при $N = 7$.

где θ — функция Хевисайда (единичная ступенчатая функция). Так как $K_2^*/K_1^* > 4$, то для любого N происходит перекрытие всех областей неустойчивости мод ψ_n , что приводит к формированию единственной, глобальной области неустойчивости синфазного режима. В пределе бесконечно длинной цепочки,

$N \rightarrow \infty$, имеем

$$u_\infty(K) = \frac{2}{\pi} \left[\theta(K - K_1^*/4) \arccos\left(\sqrt{\frac{K_1^*}{4K}}\right) - \theta(K - K_2^*/4) \arccos\left(\sqrt{\frac{K_2^*}{4K}}\right) \right]. \quad (2.17)$$

На рисунке 2.6d приведены графики зависимости доли неустойчивых мод в зависимости от K при фиксированном $N = 7$ и в пределе $N \rightarrow \infty$. Из графиков видно, что наибольшее количество неустойчивых мод наблюдается при малых и средних величинах силы связи ($0.01 < K < 1$). В результате потери устойчивости синфазного вращения появляются новые несинфазные режимы, которые в свою очередь также могут становиться неустойчивыми, что приводит к появлению новых и новых несинфазных вращений (см. рисунок 2.3–2.6).

Общим свойством полученной зависимости (2.17) является ее достижение максимума в точке $K = K_2^*/4$, что демонстрируется на рисунке 2.6d, полученном для рассматриваемого случая $\lambda = 0.9$. Таким образом, максимальная плотность перекрытий зон неустойчивости мод ψ_N наблюдается при малых и средних значениях K , расположенных близ левой границы зоны неустойчивости синфазного вращения, т.е. там, где появляются «левые» области неустойчивости синфазного режима.

Как показывают наши вычислительные эксперименты именно в области наибольшего накопления и пересечения различных областей неустойчивости наблюдаются хаотические режимы. На рисунке 2.6a для $\lambda = 0.9$ отображена область на плоскости (K, N) , где наблюдается хаотическая динамика. Видно, что хотя правая граница области неустойчивости $K_2^{(N-1)}$ достаточно быстро перемещается вправо по мере увеличения N , хаотические режимы реализуются только на достаточно узком интервале значений силы связи $0.01 < K < 1$. При малых K в силу слабого взаимодействия хаотизация изначально регулярных вращений не происходит. При сильной связи взаимодействие маятников приводит к регуляризации вращений. При этом возникающие режимы не обязательно синфазные. Синфазный вращательный режим вновь устанавливается только при сильной связи (см. кривую $K_2^{(N-1)}$ на рисунке 2.6a).

Анализируя рисунок 2.6 можно сделать следующие выводы. При фиксированном значении K при изменении длины цепочки N реализуются два основных сценария возникновения и существования хаотической динамики:

- (i) для малых $K \sim 0.1$ появляющийся вследствие каскада бифуркаций удвоения периода при $N = 2$ хаос с ростом N не исчезает. Усложне-

ние реализующихся режимов происходит с увеличением количества взаимодействующих маятников. В этом случае увеличивается размерность хаотических колебаний. Размерность гиперхаоса, то есть количество положительных показателей Ляпунова, можно аппроксимировать линейной функцией (см. рисунок 2.7). Отметим, что добавление в цепочку одного маятника не всегда приводит к появлению нового положительного показателя Ляпунова.

- (ii) для $0.12 \lesssim K \lesssim 1.0$: а) добавление одного (иногда двух и более) нового элемента может приводить как к хаотизации, так и к регуляризации режимов; б) при добавлении двух (иногда более) элементов хаотический режим остаётся хаотическим, а регулярный режим – регулярным. Здесь важную роль играет четность числа элементов в цепочке. При этом, чем ближе K к 1, тем менее плотной становится общая область хаоса, т.е. увеличиваются число и размеры областей регулярного поведения. При $K > 1$ хаотического поведения не обнаружено ни при каких N .

Была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых длина цепочки N менялась во времени. В одной серии количество элементов менялось добавлением (или исключением) одного элемента. Во второй серии к цепочке добавлялись (из цепочки исключались) сразу несколько элементов. В обоих случаях наблюдались оба описанных выше сценария.

При фиксированных N эволюция регулярных и хаотических режимов с ростом K качественно одна и та же для различных длин цепочки N . А именно, хаос возникает практически при одном и том же значении $K \approx 0.01$ и реализуется непрерывно без окон регулярного поведения вплоть до $K \approx 0.12$. Далее хаотических режимов может чередоваться с регулярным.

В исследуемой цепочке маятников возможно существование гиперхаоса. Был вычислен спектр показателей Ляпунова для цепочки длиной $N = 7$ и параметров $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.9$ в зависимости от силы связи K (рисунок 2.6с). Есть несколько интервалов значений K , где четыре, три, два и один показатель Ляпунова положительны. Области существования устойчивых гиперхаотических режимов сильно коррелируют с областями наибольшей плотности неустойчивых мод ψ_n . Действительно, как видно на рисунке 2.6с, интервалы значений параметра связи K , в которых число перекрытий областей неустойчивости N_ψ

достигает наибольших значений (наибольших значений u_7), соответствуют наибольшему числу положительных показателей Ляпунова N_Λ .

На рисунке 2.7 более подробно показана взаимосвязь между количеством положительных ляпуновских показателей N_Λ и количеством неустойчивых мод N_Ψ в зависимости от количества элементов N . Видно, что для случая больших значений плотности u_N (рисунок 2.7a,b) число N_Λ совпадает с N_Ψ практически для всех N и линейно растет с его увеличением. Для более низких значений плотности u_N (рисунок 2.7c) число N_Λ обычно не превышает N_Ψ , но обе зависимости сохраняют тенденцию линейного роста. Представленные результаты ясно показывают, что размерность гиперхаотического режима сильно зависит от степени неустойчивости периодических вращений: развитие дополнительной неустойчивости приводит к появлению нового положительного ляпуновского показателя.

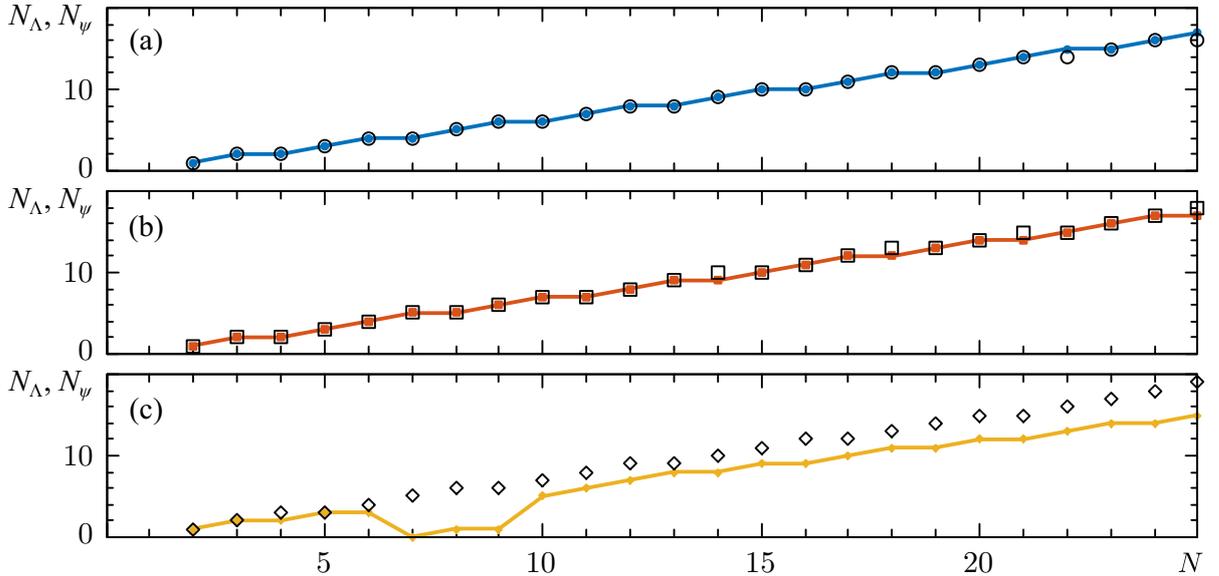


Рисунок 2.7 — Зависимости количества положительных показателей Ляпунова N_Λ (цветные линии с закрасненными маркерами) и числа N_Ψ неустойчивых мод Ψ_n (незаполненные черные маркеры) от количества элементов N в цепочке для различных значений параметра связи K : (a) $K = 0.07$, (b) $K = 0.1$, (c) $K = 0.13$. Прочие параметры системы: $\lambda = 0.9$, $\gamma = 0.97$.

Глава 3. Пространственно-временные структуры в ансамбле глобально связанных маятников

В этой главе рассматривается вращательная динамика в ансамбле глобально связанных идентичных маятников. Данная модель по сути является обобщением стандартной модели Курамото, учитывающей инерцию и внутреннюю нелинейность элементов ансамбля. Влияние модификации первого типа интенсивно изучалось в последние годы (например, см. [59; 71; 74]). Модификации второго типа также были рассмотрены в литературе [72; 75; 76]. Будет показано, что в таком ансамбле существует большое количество синфазных и несинфазных режимов вращения. Многие из этих состояний возникают в результате нарушения симметрии. В случае малой диссипации проведенный теоретический анализ позволяет найти границы области неустойчивости синфазного режима вращения для ансамблей с произвольным числом элементов, описать все возникающие моды несинфазных вращений и детально изучить их устойчивость. Для случая параметров системы трех элементов, соответствующих неустойчивому синфазному вращению, найдено множество несинфазных режимов динамики и исследована их устойчивость и бифуркации как аналитически, так и численно. В результате получена достаточно подробная картина процесса разрушения симметрии и показано существование различных регулярных и хаотических состояний.

3.1 Природа нарушения симметрии в системе связанных маятников

3.1.1 Исследуемая модель

Мы изучаем вращательную динамику ансамбля N глобально связанных одинаковых осцилляторов маятникового типа (индекс n). Данная постановка может рассматриваться как обобщение стандартной модели Курамото, учитывающая инерцию и внутреннюю нелинейность структурных элементов.

Нелинейность в виде синуса была выбрана потому, что она довольно типична для многих реальных систем, перечисленных выше. В этом случае эволюция обобщенной координаты $\varphi_n(t)$ n -ой частицы, принадлежащей ансамблю, определяется как

$$\ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = \gamma + \frac{K}{N} \sum_{\tilde{n}=1}^N \sin(\varphi_{\tilde{n}} - \varphi_n), \quad (3.1)$$

где λ – коэффициент затухания, учитывающий все диссипативные процессы в системе, γ – постоянный крутящий момент, одинаковый для всех маятников, K характеризует силу глобальной связи между осцилляторами в рассматриваемом ансамбле.

Поскольку нас интересует вращательная динамика системы (3.1), начнем с рассмотрения простейшего синфазного вращения и его устойчивости. Когда в любой момент времени t координаты $\varphi_n(t)$ и скорости $\dot{\varphi}_n(t)$ ($n = 1, \dots, N$) совпадают, система демонстрирует синфазную динамику, то есть для любого момента времени t : $\varphi_1(t) = \dots = \varphi_N(t) = \phi(t)$. Обозначим такой режим как $(N : 0)$. В этом режиме все маятники движутся синхронно, и их динамика описывается следующим общим уравнением:

$$\ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + \sin \phi = \gamma, \quad (3.2)$$

которое по сути представляет собой нелинейное уравнение маятника с трением и постоянным моментом. Динамическое поведение, все возможные состояния равновесия и предельные движения частицы, описываемой уравнением (3.2), были хорошо изучены и тщательно проанализированы во многих публикациях (например, в [16; 57; 58; 77]). Основываясь на предыдущих результатах, мы кратко опишем основные особенности модели (3.2), которые сделают формулировку проблемы, исследуемой в представленной работе, понятной и доступной для широкого круга читателей. Плоскость параметров λ, γ делится на три области [16; 58; 77; 78], которые соответствуют различным структурно устойчивым цилиндрическим фазовым пространствам системы (3.2). Для λ, γ из первой области в фазовом пространстве соответствующего маятника существуют только два стационарных состояния: седло и фокус (узел). Когда λ, γ находятся во второй области, наряду с этими стационарными состояниями существует также устойчивый 2π -периодический по ϕ предельный цикл. Следует отметить, что в этом случае область притяжения фокуса (узла) достаточно мала и ограничена сепаратрисами седла. Для λ, γ из третьей области равновесные состояния

исчезают из системы, и остается только притягивающая вращательная мода. Третья область отделена от остальных прямой $\gamma = 1$ в плоскости параметров λ, γ . В свою очередь, первая и вторая области разделены так называемой бифуркационной кривой Трикоми [16; 58; 77; 78].

В случае небольшой диссипации (то есть, когда $\lambda \ll \gamma$) можно аналитически описать вращательный предельный цикл одного маятника, используя асимптотический подход, основанный, например, на методе Линдштедта–Пуанкаре [61]. В [79] было показано, что приближенное решение для предельного вращения системы (3.2) имеет следующий вид:

$$\phi(\tau) = \tau + \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \sin \tau + o(\lambda^4), \quad \tau = \left(\frac{\gamma}{\lambda} - \frac{\lambda^3}{2\gamma^3} + o(\lambda^7) \right) t. \quad (3.3)$$

Отметим, что система (3.2) имеет континуум колебательных решений (не вращательного типа) при $\lambda = 0$ и $\gamma \in [0, 1)$. Если λ не равно 0, устойчивое стационарное состояние (центр) трансформируется в устойчивый фокус, и все эти решения перестают существовать, может появиться только одно периодическое вращательное решение.

3.1.2 Устойчивость синфазного вращательного режима

Согласно проведенному непосредственно в рамках базовой модели (3.1) численному моделированию, синфазный вращательный режим устойчив в широком диапазоне значений параметров λ, γ и K . Однако для некоторых значений λ, γ и K система (3.1) демонстрирует нетривиальное поведение: развивается неустойчивость синфазного предельного вращательного движения и, как результат, возникает множество несинфазных состояний, что приводит к частичному нарушению симметрии в рассматриваемом ансамбле глобально связанных маятников. Стоит отметить, что подобный по своей природе эффект имеет место в системе двух элементов [60]. Этот эффект также наблюдается в случае небольшой цепочки локально связанных идентичных маятников [79].

Прежде чем перейти к подробному описанию многообразия несинфазных вращательных движений, наблюдаемых в рамках модели (3.1) при прямом численном моделировании, представим аналитический подход, позволяющий объяснить неустойчивость периодических предельных циклов, существующих

в системе глобально связанных маятников. В качестве отправной точки рассмотрим развитие неустойчивости синфазного состояния, о котором говорилось выше. Это позволит продемонстрировать основную идею теоретического анализа, избегая при этом громоздких вычислений.

Найдем условия устойчивости для синфазной вращательной моды. Сначала линеаризуем систему (3.1) близ $\phi(t)$, тогда $\varphi_n(t) = \phi(t) + \delta\varphi_n(t)$ и $\dot{\varphi}_n(t) = \dot{\phi}(t) + \delta\dot{\varphi}_n(t)$, где возмущения $\delta\varphi_n(t)$, $\delta\dot{\varphi}_n(t)$ малы по величине. Далее получаем соответствующие уравнения для вариаций $\delta\varphi_n(t)$:

$$\delta\ddot{\varphi}_n + \lambda\delta\dot{\varphi}_n + \cos\phi(t)\delta\varphi_n = \frac{K}{N} \sum_{\tilde{n}=1}^N (\delta\varphi_{\tilde{n}} - \delta\varphi_n). \quad (3.4)$$

Для дальнейшей работы с (3.4), введем новые переменные

$$\eta = \frac{1}{N} \sum_{\tilde{n}=1}^N \delta\varphi_{\tilde{n}}, \quad (3.5)$$

$$\xi_n = \delta\varphi_{n+1} - \delta\varphi_n, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

в которых уравнения (3.4), соответствующие синфазному T -периодическому предельному циклу в системе (3.1), принимают следующую форму

$$\ddot{\eta} + \lambda\dot{\eta} + \cos\phi(t)\eta = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_n + \lambda\dot{\xi}_n + (K + \cos\phi(t))\xi_n &= 0, \\ n &= 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Мультипликаторы Флоке уравнения (3.6) равны 1 и $e^{-\lambda T}$. В самом деле, дифференцирование уравнения (3.2) по t показывает, что периодическая функция $\dot{\phi}(t)$ является решением уравнения (3.6), поэтому соответствующий мультипликатор равен 1. Второй множитель можно найти из формулы Лиувилля. Таким образом, мода η всегда устойчива, а неустойчивость в системе может возникнуть только при возбуждении мод ξ_n ($n = 1, \dots, N-1$). Уравнение (3.7) является уравнением типа Матье. Следовательно, эффекты параметрической неустойчивости могут наблюдаться при некоторых значениях параметра K , зависящих от λ и γ [80]. Чтобы найти границы области неустойчивости синфазного вращательного режима, определим значения параметра связи K , для которых уравнение (3.7) допускает решение с периодом $2T$ или, что эквивалентно, с частотой $\omega/2$. Переходя к безразмерному времени $t = \omega\tau$, система (3.7)

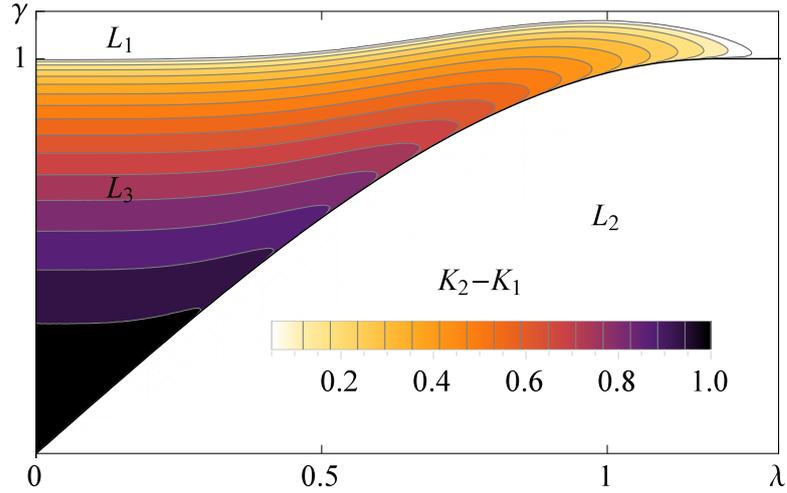


Рисунок 3.1 — Карта ширины области неустойчивости синфазного режима $[K_2 - K_1](\lambda, \gamma)$ в зависимости от параметров λ и γ . Черной линией обозначена кривая Трикоми, т.е. граница области существования синфазного вращательно-периодического цикла. Для области L_1 синфазное вращение устойчиво при любых K . В области L_2 синфазное вращение не существует. Синфазное вращение в области L_3 неустойчиво при $K_1 < K < K_2$.

преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_n + \lambda \omega \dot{\xi}_n + \omega^2 (K + \cos \phi(\tau)) \xi_n &= 0, \\ n &= 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя теорию возмущений, учитывая результат (3.3) и осуществляя поиск решения уравнения (3.8) с частотой $\omega/2$, получим границы $K_{1,2}$ для области неустойчивости

$$K_{1,2} = \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1-\gamma^2} + \frac{1\lambda^2}{2\gamma^2} \right] + O(\lambda^4). \quad (3.9)$$

При достижении критических значений $K_{1,2}$ одновременно развивается неустойчивость мод ξ_n , $n = 1, \dots, N-1$, что является общим свойством при дестабилизации синхронных состояний в системах N глобально связанных идентичных элементов. Таким образом, в системе глобально связанных маятников (3.1) существует только одна область неустойчивости ($K_1 < K < K_2$) синфазного вращательного движения $\phi(t)$, которая ограничена значениями K_1 и K_2 , определяемыми выражением (3.9).

Рисунок 3.1 показывает ширину диапазона значений силы связи K , при которых наблюдается неустойчивость синфазной моды, в зависимости от значений параметров γ и λ как функцию $[K_2 - K_1](\lambda, \gamma)$. Плоскость параметров

(λ, γ) можно разделить на 3 области: L_1 , L_2 и L_3 . В области L_1 синфазная мода устойчива для любого K . В области L_2 , ограниченной кривой Трикоми и прямой $\gamma = 1$, этот режим не существует. Кривая Трикоми соответствует значениям параметров (λ, γ) , для которых вращательное движение в системе (3.2) исчезает в результате седло-узловой гомоклинической бифуркации. В окрашенной области L_3 существует диапазон значений K , для которых синфазное вращение является неустойчивым ($K_1 < K < K_2$). Границы K_1 и K_2 этого диапазона определяются выражениями (3.9). Черный цвет означает, что длина интервала неустойчивости режима $(N : 0)$ близка к единице. Оранжевый цвет означает, что длина интервала неустойчивости режима $(N : 0)$ близка к нулю. При фиксированном λ с увеличением γ интервал $K_2 - K_1$ становится меньше. Область неустойчивости возникает при значениях γ , близких к единице, и расширяется с уменьшением γ . Когда параметры (γ, λ) достигают кривой Трикоми, синфазная вращательная мода исчезает.

3.1.3 Общий подход к анализу устойчивости состояний с нарушенной симметрией

Перейдем к подробному описанию общего аналитического подхода для анализа устойчивости синфазных периодических предельных циклов, существующих в модели (3.1) N глобально связанных маятников. Для определенности предположим, что маятники образуют M синхронных кластеров с N_m маятниками в m -ом кластере ($N_1 + \dots + N_M = N$). Здесь и далее такие режимы будут обозначаться как $(N_1 : N_2 : \dots : N_M)$. Обратим внимание, что кластер также может состоять только из одного элемента. Предполагая, что каждый маятник в m -ом кластере движется с одинаковой фазой $\phi_m(t)$ и скоростью $\dot{\phi}_m(t)$ система (3.1) N уравнений второго порядка сводится к системе M дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих динамику неизвестных фаз $\phi_m(t)$:

$$\ddot{\phi}_m + \lambda \dot{\phi}_m + \sin \phi_m = \gamma + \frac{K}{N} \sum_{\tilde{m}=1}^M N_{\tilde{m}} \sin(\phi_{\tilde{m}} - \phi_m). \quad (3.10)$$

Применяя подход, описанный в разделе 3.1.1 для синфазного решения (3.1), к текущей задаче нахождения T -периодических предельных циклов уравнения (3.10), можно найти фазы $\phi_m(t)$.

После нахождения фаз $\phi_m(t)$ возможно произвести анализ устойчивости режима $(N_1 : N_2 : \dots : N_M)$. Для этого вводится линейное возмущение $\varphi_{mk}(t) = \phi_m(t) + \delta\varphi_{mk}(t)$ и $\dot{\varphi}_{mk}(t) = \dot{\phi}_m(t) + \delta\dot{\varphi}_{mk}(t)$, где $\varphi_{mk}(t)$, $\dot{\varphi}_{mk}(t)$ есть возмущенные фаза и скорость k -го маятника из m -го кластера ($k = 1, \dots, N_m$). Таким образом, уравнения для вариаций $\delta\varphi_{mk}(t)$ имеют вид

$$\delta\ddot{\varphi}_{mk} + \lambda\delta\dot{\varphi}_{mk} + \cos\phi_m\delta\varphi_{mk} = \frac{K}{N} \sum_{\tilde{m}=1}^M \sum_{\tilde{k}=1}^{N_{\tilde{m}}} \cos(\phi_{\tilde{m}} - \phi_m) (\delta\varphi_{\tilde{m}\tilde{k}} - \delta\varphi_{mk}). \quad (3.11)$$

Следующим ключевым шагом является линейная замена переменных, которая разбивает систему (3.11) на множество независимых систем дифференциальных уравнений меньших размеров:

$$\eta_m = \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \delta\varphi_{mk}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.12)$$

$$\xi_{mk} = \delta\varphi_{m,k+1} - \delta\varphi_{mk}, \quad k = 1, \dots, N_m - 1.$$

Возбуждение моды η_m в случае $\xi_{\tilde{m}\tilde{k}} = 0$ можно интерпретировать как возмущение m -ого кластера подобно целому, поскольку в этом случае все маятники, образующие кластер m , возмущаются одинаково. Устойчивость, связанную с такими возмущениями, часто называют внутренней [62]. Напротив, возбуждение мод ξ_{mk} для фиксированного m в случае $\eta_{\tilde{m}} = 0$ означает возмущение маятников только внутри m -го кластера и связанную с ним устойчивость называют внешней [62].

В новых переменных уравнения (3.11), соответствующие T -периодическому вращательному движению системы (3.1), принимают следующий вид

$$\ddot{\eta}_m + \lambda\dot{\eta}_m + \cos\phi_m\eta_m = K \sum_{\tilde{m}=1}^M \frac{N_{\tilde{m}}}{N} \cos(\phi_{\tilde{m}} - \phi_m) (\eta_{\tilde{m}} - \eta_m), \quad (3.13)$$

$$\ddot{\xi}_{mk} + \lambda\dot{\xi}_{mk} + \left(\cos\phi_m + K \sum_{\tilde{m}=1}^M \frac{N_{\tilde{m}}}{N} \cos(\phi_{\tilde{m}} - \phi_m) \right) \xi_{mk} = 0. \quad (3.14)$$

Поэтому фактически необходимо анализировать систему M уравнений второго порядка (3.13) и \tilde{M} независимых уравнений второго порядка (3.14) (в силу их

идентичности для различных значений k , индекс k ниже будет опускаться), где $\tilde{M} = |\{m : N_m > 1\}|$ – количество кластеров, содержащих более одного элемента.

Из теоремы Флоке следует, что каждому характеристическому показателю Λ системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, такой как (3.13), соответствует решение вида $\eta_m(t) = e^{\Lambda^{in}t} \tilde{\eta}_m(t)$ ($m = 1, \dots, M$), где $\tilde{\eta}_m(t)$ периодически по t : $\tilde{\eta}_m(t + T) = \tilde{\eta}_m(t)$. Новые переменные $\tilde{\eta}_m(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\eta}}_m + (2\Lambda^{in} + \lambda) \dot{\tilde{\eta}}_m + \left((\Lambda^{in})^2 + \lambda\Lambda^{in} + \cos \phi_m \right) \tilde{\eta}_m \\ = K \sum_{\tilde{m}=1}^M \frac{N_{\tilde{m}}}{N} \cos(\phi_{\tilde{m}} - \phi_m) (\tilde{\eta}_{\tilde{m}} - \tilde{\eta}_m). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для определения характеристического показателя Λ , используем метод Линдштедта–Пуанкаре. Поскольку наша теория строится вблизи консервативного предела, т.е. для малой диссипации λ , представим характеристический показатель Λ в виде асимптотического разложения

$$\Lambda^{in} = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \Lambda^{(j)}. \quad (3.16)$$

Коэффициенты $\Lambda^{(j)}$ следует выбирать таким образом, чтобы избежать секулярных членов в (3.15), т.е. чтобы $\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_M$ были периодическими.

Аналогично, используя теорему Флоке, будем искать решение (3.14) в виде $\xi_m(t) = e^{\Lambda^{ex}t} \tilde{\xi}_m(t)$, где $\tilde{\xi}_m(t)$ периодичны, т.е. $\tilde{\xi}_m(t + T) = \tilde{\xi}_m(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\xi}}_m + (2\Lambda^{ex} + \lambda) \dot{\tilde{\xi}}_m + \left((\Lambda^{ex})^2 + \lambda\Lambda^{ex} + \cos \phi_m \right) \tilde{\xi}_m \\ = -K \sum_{\tilde{m}=1}^M \frac{N_{\tilde{m}}}{N} \cos(\phi_{\tilde{m}} - \phi_m) \tilde{\xi}_m. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используя асимптотическое разложение (3.16) и избегая секулярные члены в выражении для $\tilde{\xi}_m$, можно найти неизвестные коэффициенты $\Lambda^{(j)}$.

Знаки Λ^{in} и Λ^{ex} определяют устойчивость мод η_m и ξ_m соответственно. Таким образом, получая выражение для $\phi_m(t)$ в виде асимптотического разложения, подобного (3.3) в случае синфазного вращения, мы можем найти разложение в виде ряда для показателей Ляпунова Λ^{in} и Λ^{ex} систем (3.15) и (3.17). Окончательно получим $2M$ показателей Λ^{in} , определяющих внутреннюю устойчивость, и $2(N - M)$ показателей Λ^{ex} , определяющих внешнюю

устойчивость. Пример анализа устойчивости состояний с нарушенной симметрией представлен в 3.2.1.

3.2 Теоретические и численные результаты для системы трех элементов

3.2.1 Анализ устойчивости режимов (2:1) и (1:1:1)

В данном разделе будет рассмотрено применение подхода, разработанного в 3.1.3, для анализа устойчивости кластерных вращательных движений, возникающих в результате развития неустойчивости синфазного режима $\phi(t)$ при $N = 3$. В этом случае существует два типа кластерных режимов: уединенное состояние (2:1) и режим (1:1:1). Подробный анализ устойчивости этих режимов представлен в приложении Д.

В Д.1 показано, что для уединенного состояния (2:1) решение ϕ_m^- , возникающее на правом краю K_2 интервала неустойчивости параметра K , определяемого уравнением (3.9), всегда внутренне неустойчиво для любых значений K (см. (Д.7)). Напротив, решение ϕ_m^+ , возникающее на левом краю K_1 интервала неустойчивости, всегда внутренне устойчиво, однако меняет свою внешнюю устойчивость при $K = K_c^{(2:1)}$, причем оно устойчиво при $K > K_c^{(2:1)}$, где

$$K_c^{(2:1)} = \frac{\gamma^2}{4\lambda^2} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{3} + O(\lambda). \quad (3.18)$$

Аналогично, из (Д.15) для режима (1:1:1) следует неустойчивость решения ϕ_m^- для любых значений K . Решение ϕ_m^+ меняет свою устойчивость при $K = K_c^{(1:1:1)}$, и оно устойчиво при $K < K_c^{(1:1:1)}$, где

$$K_c^{(1:1:1)} = \frac{\gamma^2}{4\lambda^2} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{3} + O(\lambda). \quad (3.19)$$

Таким образом, при определенных значениях силы связи K синхронная синфазная вращательная мода в ансамбле из трех связанных маятников становится параметрически неустойчивой и, в зависимости от начальных условий, могут реализоваться режимы (2:1) и (1:1:1). Получены значения параметра связи $K_c^{(2:1)}$

и $K_c^{(1:1:1)}$, при которых происходит изменение устойчивости кластерных вращательных мод. Из численного моделирования известно, что $K_c^{(2:1)} \leq K_c^{(1:1:1)}$ (см. 3.2.2).

3.2.2 Регулярная динамика синфазных и несинфазных вращательных мод

В этом и следующем разделе представлены результаты численного моделирования (см. Приложение Б), выполненные непосредственно в рамках обсуждаемой модели (3.1) для широкого диапазона значений параметров λ , γ и K в случае $N = 3$. Прежде всего, подробно рассмотрим развитие самоиндуцированной параметрической неустойчивости синфазного синхронного режима, и сосредоточим наше внимание на нелинейной стадии этого процесса и возникающих в результате движениях, которые могут существовать в течение длительного времени. В наших численных расчетах для интегрирования системы (3.1) использовалась широко применяемая схема Рунге–Кутты пятого порядка (с фиксированным шагом по времени $dt = 0.001$).

Рассмотрим случай $\gamma = 0.97$. Бифуркационные диаграммы эволюции периодических вращений системы (3.1) приведены на рисунке 3.2. На диаграмме показана зависимость характеристики степени синхронизации Ξ от величины силы связи K . Прежде всего дадим описание диаграммы для $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.2$ (рисунок 3.2а). Горизонтальные отрезки A_1 , A_3 соответствуют устойчивому синхронному синфазному режиму ($\Xi = 0$). Существует область A_2 значений параметра K , когда этот режим становится неустойчивым. Параметрическая неустойчивость синфазного периодического движения развивается при значениях параметра связи K из интервала, найденного выше в ходе асимптотического рассмотрения (выражение (3.9)).

Рассмотрим процессы, происходящие в ансамбле, когда K принимает значения из области A_2 и значения вне ее. При увеличении параметра K (при $K \approx 5.764$) периодическая траектория, соответствующая синфазному движению (2π -периодическому вращению по совокупности $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$) испытывает бифуркацию удвоения периода (пара мультипликаторов становится равной -1 одновременно), после чего этот режим становится неустойчивым и в ма-

лой окрестности возникает пара 4π -периодических режимов (один из которых устойчивый, ветвь B_1 , а второй неустойчивый, ветвь B_4). Помимо двух описанных выше 4π -периодических движений, также возможны два неустойчивых несинфазных 4π -периодических вращения (1:1:1) и (2:1) (ветви B_3 и B_6 соответственно), которые с ростом K рождаются из неустойчивого 2π -периодического движения в результате субкритической бифуркации удвоения периода ($K \approx 6.008$). Соответствующие значения параметра K , при которых происходят бифуркации удвоения, вычисленные аналитически с использованием (3.9), равны $K \approx 5.764$ и $K \approx 6.007$. Режиму (1:1:1) (рисунок 3.3a) соответствуют ветви B_1, B_2, B_3 , а уединенному режиму (2:1) (рисунок 3.3b) ветви B_4, B_5, B_6 . При увеличении параметра K меняется устойчивость режимов (1:1:1) и (2:1). Первый теряет устойчивость при $K_c^{(1:1:1)} \approx 5.9699$, а второй становится устойчивым при $K_c^{(2:1)} \approx 5.9687$ (согласно теоретическим расчетам, см. (3.18) и (3.19), $K_c^{(1:1:1)} \approx K_c^{(2:1)} \approx 5.962$). Таким образом, существует область бистабильности режимов (1:1:1) и (2:1). Изменение устойчивости происходит в ходе бифуркации “вилка”, при этом возникает неустойчивый режим (1:1:1) (ветвь B_7). При дальнейшем увеличении K периодические движения, соответствующие режиму (1:1:1) (ветви B_2 и B_3) и (2:1) (ветви B_5 и B_6), сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации при $K \approx 7.023$ и $K \approx 7.042$ соответственно. При заданных значениях параметров полученные численные результаты находятся в хорошем соответствии с аналитической теорией, описанной в разделе 3.2.1.

Из рисунка 3.2 видно, что с увеличением значения λ длина области устойчивости режима (1:1:1) увеличивается, а длина области устойчивости режима (2:1) становится короче.

3.2.3 Хаотическая динамика

Далее рассмотрим случай меньшего значения момента $\gamma = 0.8$. При небольших значениях λ бифуркации 2π - и 4π -периодических режимов качественно совпадают с описанными выше для $\gamma = 0.97$. Однако при дальнейшем увеличении параметра затухания из ветви B_5 , соответствующей уединенным режимам, в результате бифуркаций удвоения периода рождаются движения с большими периодами, что приводит к возникновению хаотической динамики.

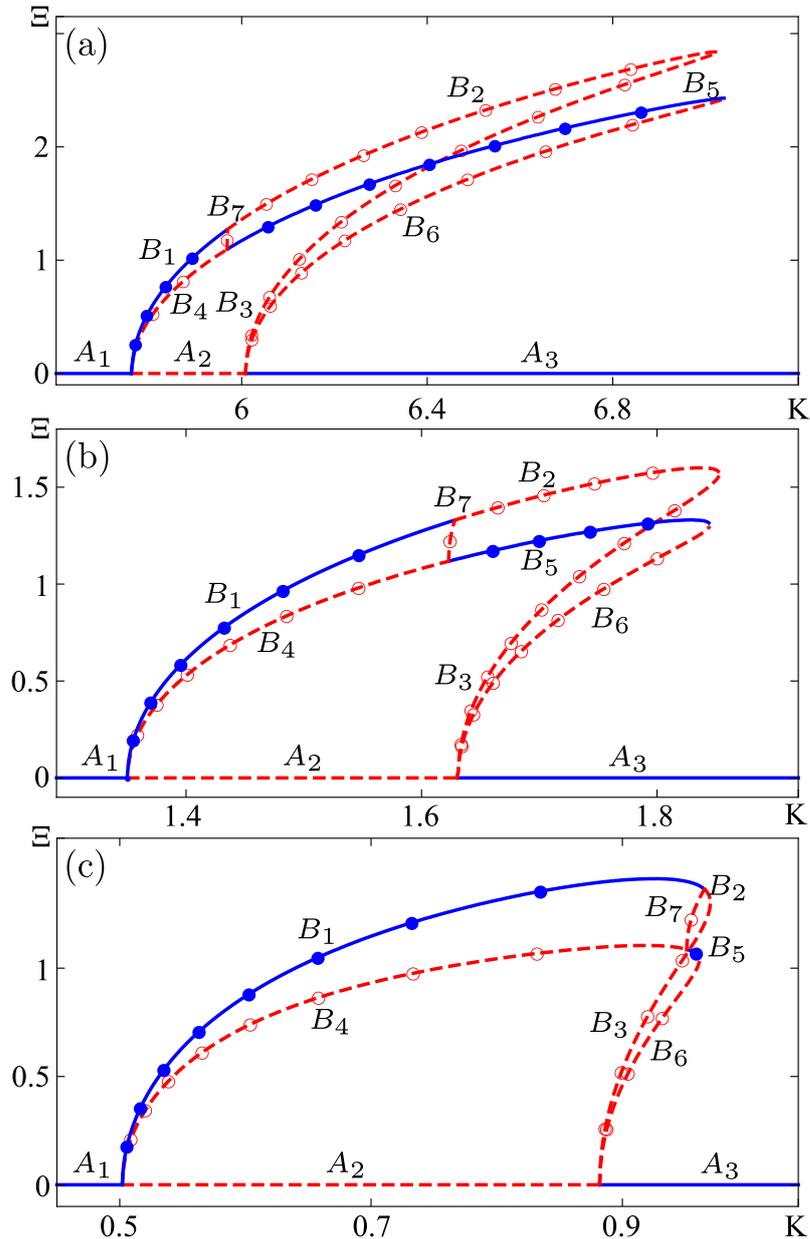


Рисунок 3.2 — Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (3.1) при $N = 3$. Здесь и ниже: синие закрашенные маркеры — устойчивые режимы, красные незакрашенные маркеры — неустойчивые режимы. Прямые без маркеров — 2π -периодические режимы. Круглые маркеры — 4π -периодические режимы. Параметры: $\gamma = 0.97$. (a) $\lambda = 0.2$. (b) $\lambda = 0.4$. (c) $\lambda = 0.6$.

Опишем подобный сценарий в случае $\lambda = 0.3$ (рисунок 3.4). При увеличении K уединенный режим (2:1) (ветвь B_5) в результате бифуркации удвоения периода теряет устойчивость (ветвь B_8) при $K \approx 2.507$. Далее после каскада бифуркаций удвоения периода уединенный режим (2:1) становится хаотическим. Ветвь B_9 соответствует устойчивому режиму (2:1). Аналогично, при $K \approx 4.063$, режим теряет устойчивость из-за бифуркации удвоения периода,

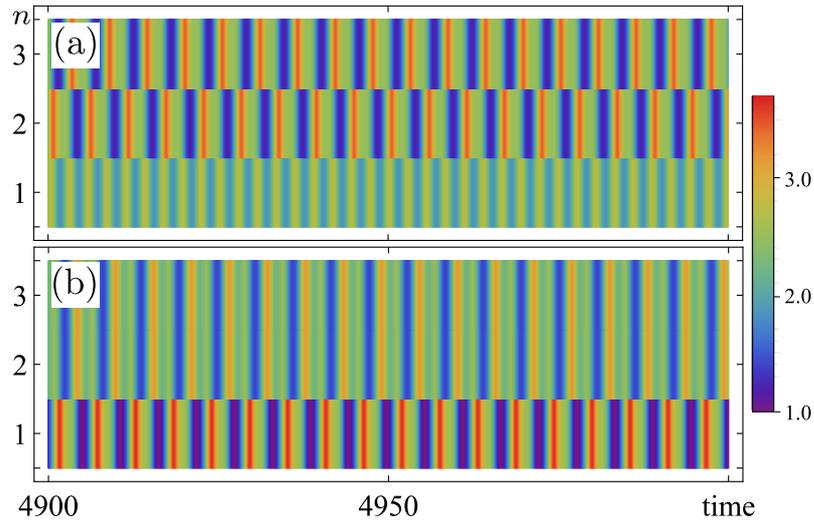


Рисунок 3.3 — Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, 3$) маятников в системе (3.1) при $N = 3$. (a) Регулярный режим (1:1:1) при $K = 1.6$. (b) Регулярный уединенный режим (2:1) при $K = 1.7$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$.

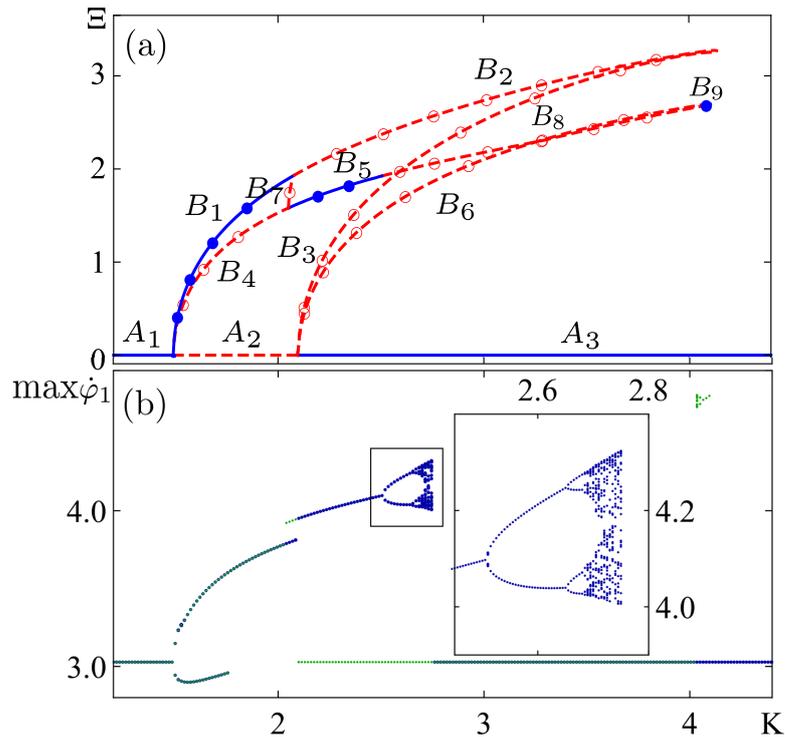


Рисунок 3.4 — (a) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (3.1) при $N = 3$. (b) Локальные максимумы $\dot{\phi}_1$. Синие точки — наследование динамического режима слева направо. Зеленые точки — наследование динамического режима справа налево. Параметры: $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.3$.

что приводит к появлению хаотического аттрактора. Последний существует при $2.7 \lesssim K < 2.754$. При $K > 2.754$ синфазное вращение вновь обретает устойчивость.

При дальнейшем увеличении λ длина устойчивой ветви B_5 уединенного состояния (2:1) уменьшается и исчезает. На рисунке 3.5 показаны бифуркационные диаграммы синхронных режимов для $\lambda = 0.35$. В этом случае в результате каскада бифуркаций удвоения периода при $1.7 < K < 1.77$ и $3.0 < K < 3.01$ реализуется хаотический уединенный режим (рисунок 3.6). Однако при $1.77 < K < 3.01$ хаотическое движение исчезает из-за кризиса соответствующего хаотического аттрактора. В результате все соседние траектории уходят на синфазный предельный цикл.

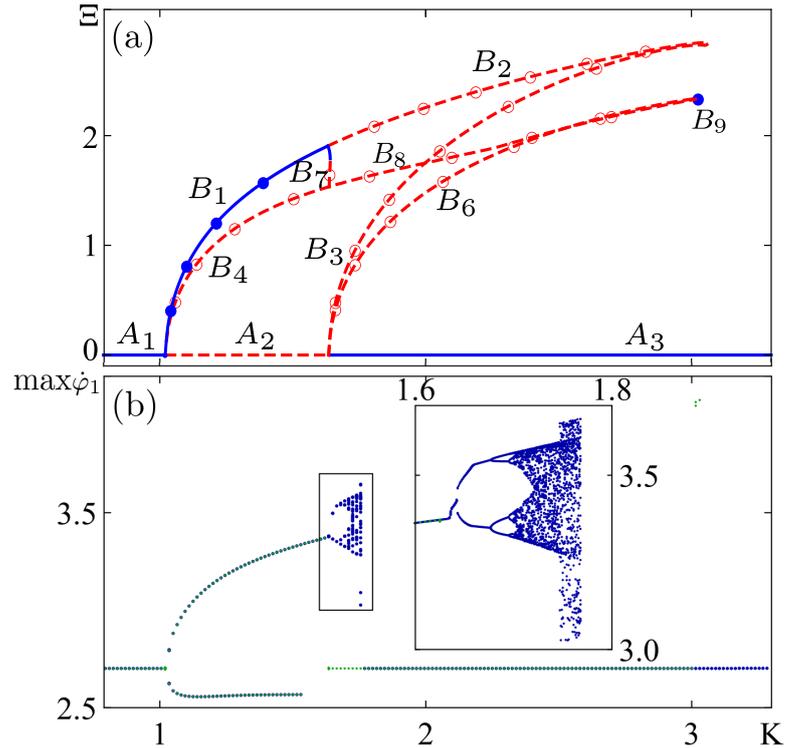


Рисунок 3.5 — То же, что и на рисунке 3.4, но для $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.35$.

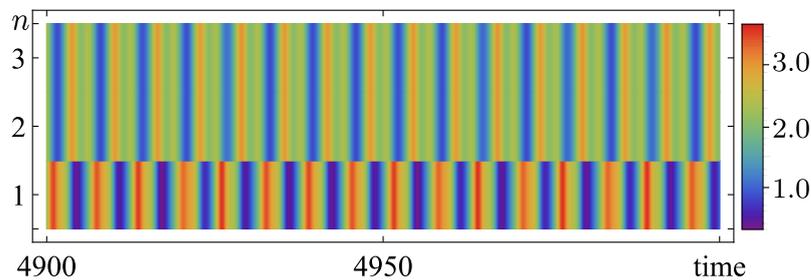


Рисунок 3.6 — Временная динамика мгновенных частот ϕ_n ($n = 1, 2, 3$) маятников в системе (3.1) при $N = 3$. Хаотический уединенный режим (2:1). Параметры: $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.35$, $K = 1.76$.

Рассмотрим далее случай $\lambda = 0.5$. При увеличении K движение (1:1:1) (ветвь B_1) теряет устойчивость ($K \approx 0.618$) в результате бифуркации Неймарка–Сакера, при этом возникает квазипериодическое движение (1:1:1). При

$K \approx 0.656$ этот квазипериодический режим становится хаотическим в ходе бифуркации разрушения тора (рисунок 3.8a). При $0.89 < K < 1.272$ появляется ветвь B_{10} , соответствующая 4π -периодическому движению, которая сливается с ветвью B_2 при $K \approx 0.956$ и $K \approx 1.272$ в результате бифуркаций “вилка”. При $0.89 < K < 0.907$ эта ветвь имеет устойчивую область, которая соответствует “окну устойчивости”, когда хаос в системе (3.1) не наблюдается (рисунок 3.7b). Далее при увеличении K реализуется режим, когда интервалы времени, при ко-

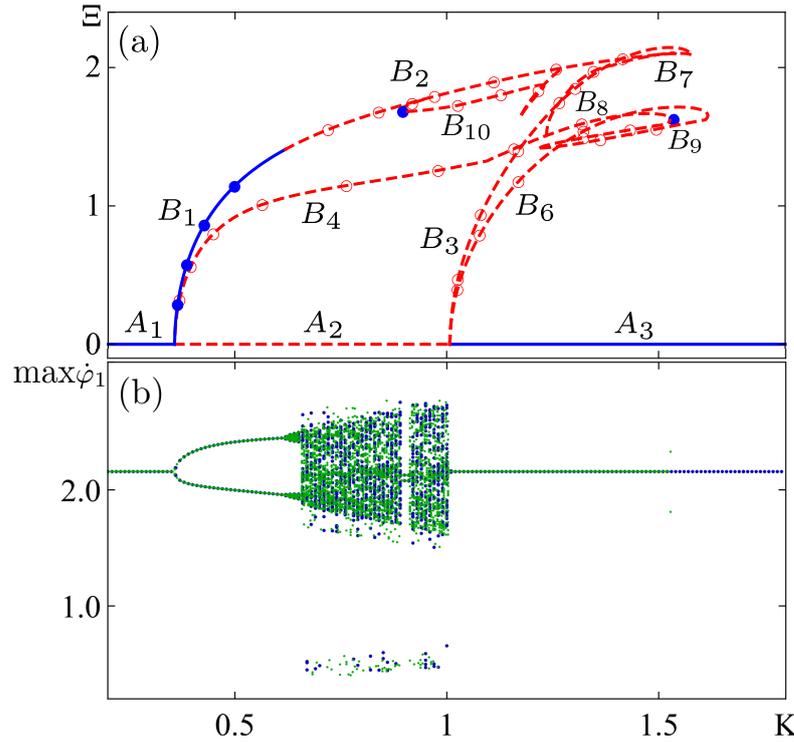


Рисунок 3.7 — То же, что и на рисунке 3.4, но для $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.5$.

торых фазы маятников $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \varphi_3$, чередуются с интервалами, где φ_1 , φ_2 и φ_3 не совпадают (рисунок 3.8b), т.е. имеет место перемежаемость хаотических колебаний (3:0) и (1:1:1). При достижении $K \approx 1.007$ синфазный режим становится устойчивым и хаотические колебания более не наблюдаются, система при этом демонстрирует синфазную динамику.

3.3 Вращательная динамика в больших ансамблях

В этой главе представлен вариант развития неустойчивости синфазного вращательного движения в системе (3.1) при $N > 3$. Рассмотрим случай $N = 4$. Границы области неустойчивости синфазного вращения определяются

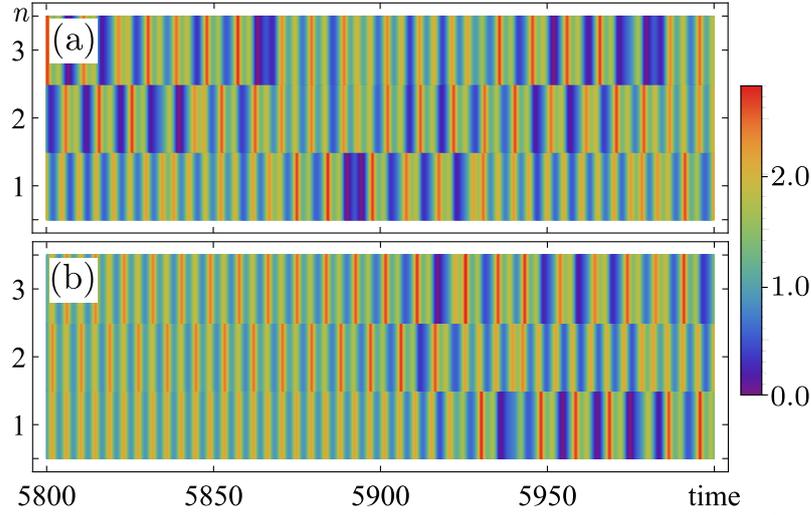


Рисунок 3.8 — Временная динамика мгновенных частот $\dot{\varphi}_n$ ($n = 1, 2, 3$) маятников в системе (3.1) при $N = 3$. (a) Хаотический режим (1:1:1) при $K = 0.95$. (b) Хаотический режим (1:1:1) с перемежаемостью режимов (1:1:1) и (3:0) при $K = 1.0$. Parameters: $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.5$.

выражениями (3.9) в соответствии с асимптотической теорией, разработанной в разделе 3.1 для $\lambda \ll \gamma$. Далее, применяя наш аналитический подход, можно показать, что существуют три несинфазных вращательных движения: двухкластерные режимы (2 : 2) и (3 : 1), а также кластерное состояние (2 : 1 : 1). Более того, согласно развитой теории, это кластерное состояние является устойчивым при $K_{c1}^{(2:1:1)} < K < K_{c2}^{(2:1:1)}$, где

$$\begin{aligned} K_{c1}^{(2:1:1)} &= \frac{\gamma^2}{4\lambda^2} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{4} + O(\lambda), \\ K_{c2}^{(2:1:1)} &= \frac{\gamma^2}{4\lambda^2} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2} + O(\lambda). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Например, численно и аналитически опишем систему (3.1) с параметрами $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.2$ (рисунок 3.9). Прямые численные расчеты показывают, что при этих значениях параметра связи K синфазное периодическое движение претерпевает бифуркацию удвоения периода. При этом рождаются несинфазные режимы (2:2), (2:1:1) и (3:1) (ветви B_1 , B_2 и B_3 соответственно). На рисунке 3.9b показан режим (2:1:1), когда два маятника образуют синфазный кластер, а другие демонстрируют несинфазную динамику. Отметим, что в этом случае существует диапазон параметра K , в котором сосуществуют несинфазные режимы (2:2), (2:1:1) и (3:1) и являются устойчивыми, т.е. наблюдается мультистабильность. В частности, из численных расчетов установлено, что для

значений $K_{c1}^{(2:1:1)} < K < K_{c2}^{(2:1:1)}$, где $K_{c1}^{(2:1:1)} \approx 5.9859$ и $K_{c2}^{(2:1:1)} \approx 6.0443$, режим (2:1:1) устойчив. Соответствующие теоретические значения для границ $K_{c1}^{(2:1:1)}$, $K_{c2}^{(2:1:1)}$ области неустойчивости, следующие из (3.20): $K_{c1}^{(2:1:1)} \approx 5.9414$ и $K_{c2}^{(2:1:1)} \approx 6.0022$.

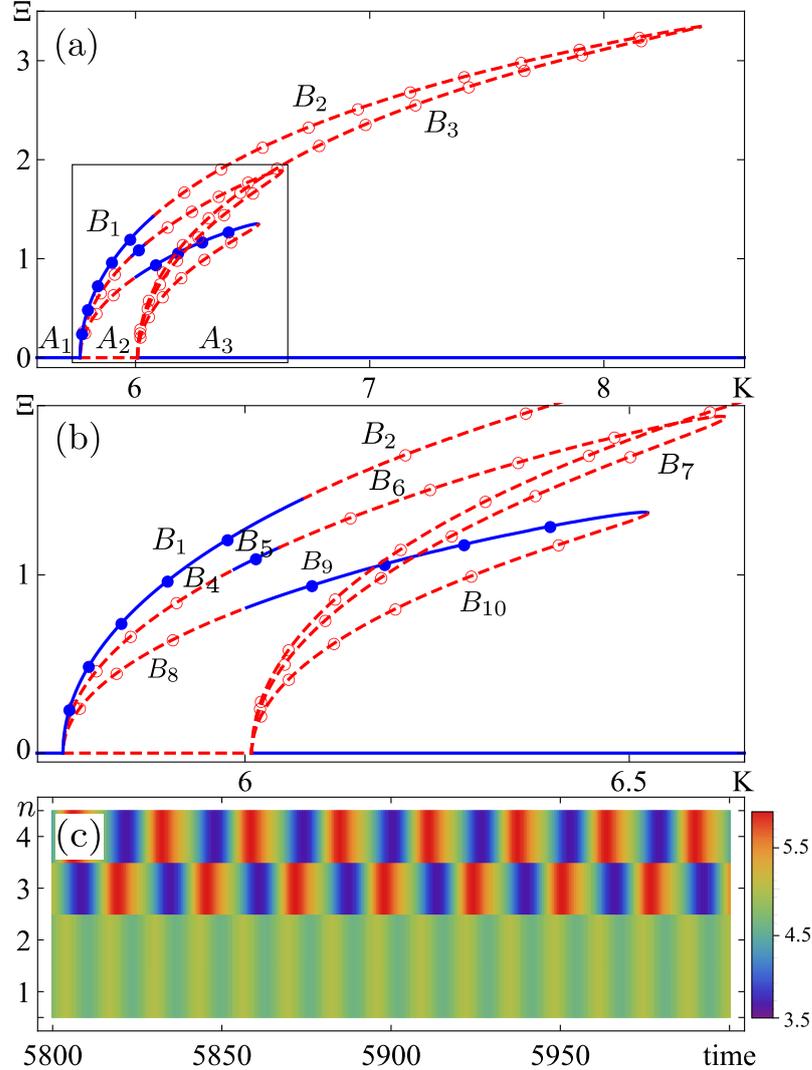


Рисунок 3.9 — (a), (b) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (3.1) при $N = 4$. (b) Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) маятников в системе (3.1) при $N = 4$. (c) Регулярный кластерный режим (2:1:1) при $K = 6.0$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.2$.

Мы проанализировали динамику ансамблей и с другим количеством элементов. Было обнаружено, что в процессе развития неустойчивости синфазной моды ($N : 0$) с ростом силы связи K наблюдается устойчивое двухкластерное состояние ($N_1 : N_2$). Примечательно, что в таком случае количество элементов N_1 и N_2 в каждом кластере приблизительно равно друг другу. Данное состояние становится неустойчивым при дальнейшем увеличении параметра K , и реализуются другие кластерные режимы. Во всех случаях последовательность

кластерных режимов заканчивается уединенным (двухкластерным) состоянием ($N - 1 : 1$).

Продemonстрируем это наблюдение в случае $N = 7$ маятников с параметрами $\gamma = 0.97$ и $\lambda = 0.2$. Вследствие развития неустойчивости синфазного режима вращения возникает устойчивый кластерный режим (4:3) (рисунок 3.10a). Далее идет последовательность устойчивых кластерных мод других типов, например (3:2:2) (рисунок 3.10b). Уединенное состояние (6:1) наблюдается последним в последовательности устойчивых кластерных мод (рисунок 3.10c).

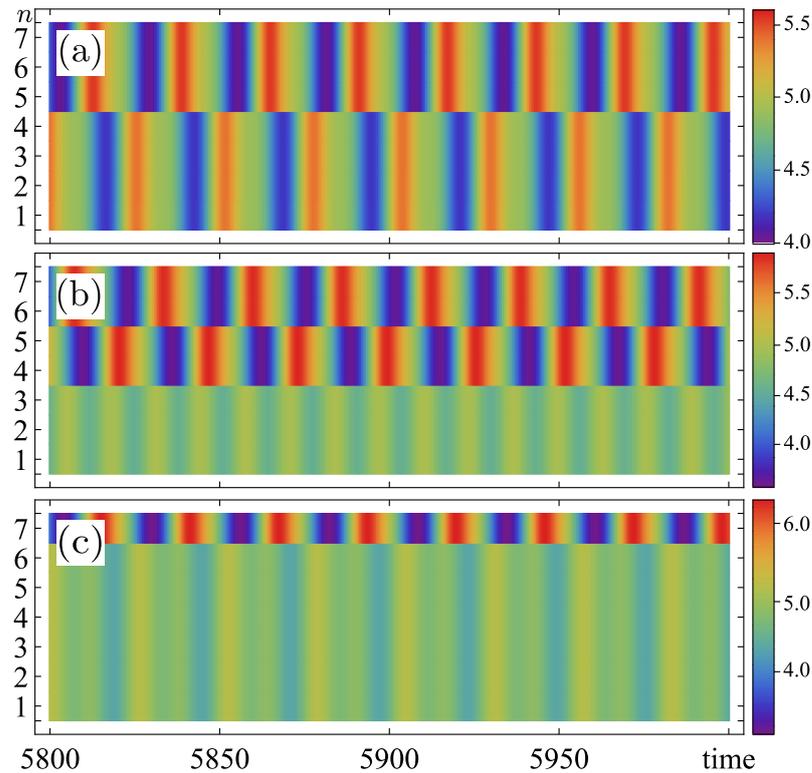


Рисунок 3.10 — Временная динамика мгновенных частот $\dot{\varphi}_n$ ($n = 1, 2, \dots, 7$) маятников в системе (3.1) при $N = 7$. (a) Кластерный режим (4:3) при $K = 5.85$. (b) Кластерный режим (3:2:2) при $K = 6.0$. (c) Уединенное состояние (6:1) при $K = 6.1$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.2$.

Глава 4. Синхронные состояния в ансамбле глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией и шумом

Данная глава посвящена изучению ансамблей глобально связанных ротаторов (осцилляторов с инерцией) с шумом, допускающих неравновесный переход из десинхронизированного состояния в синхронное (с ненулевым параметром порядка). Разработанный аналитический подход для ротаторов с малой инерцией приводит к решениям, описывающим синхронное состояние, характеризующимся постоянным параметром порядка, и включает в себя частный случай нулевой инерции, когда модель сводится к модели связанных осцилляторов Курамото с шумом. Данный подход также предоставляет аналитический критерий, позволяющий различать суперкритические и субкритические переходы к десинхронизированному состоянию. Все полученные аналитические результаты подтверждаются численно, как прямым моделированием больших ансамблей, так и решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка. Также предлагаются обобщения разработанных методов для случаев, когда параметры ротаторов (собственные частоты, массы, интенсивности шума, силы и фазовые сдвиги в связи) рассредоточены. Отметим, что развитые ранее аналитические подходы для модели Курамото могут не ограничиваться стационарными состояниями, но обычно имеют другие ограничения поскольку применяются только для систем идентичных осцилляторов, например, теория Ватанабэ–Строгаца [81], или для случая Лоренцевского распределения собственных частот осцилляторов, например, подстановка Отта–Антонсена [82].

4.1 Связанные ротаторы с шумом

В данной главе рассматривается ансамбль N глобально связанных ротаторов, характеризующихся своими фазами φ_n и скоростями $\dot{\varphi}_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Ротаторы связаны посредством комплексного среднего поля

$$R \equiv r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n} \quad (4.1)$$

и подчиняются уравнениям движения

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n &= \omega_n + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n'=1}^N \sin(\varphi_{n'} - \varphi_n) + \sigma \zeta_n(t) \\ &= \omega_n + \varepsilon r \sin(\psi - \varphi_n) + \sigma \zeta_n(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Единица времени выбирается таким образом, чтобы коэффициент при трении ($\sim \dot{\varphi}_n$) равнялся единице и все параметры были нормированы на величину коэффициента трения. Параметр μ описывает массу ротаторов (точнее, μ следует называть моментом инерции ротатора); ниже, мы сосредоточимся на случае большого трения (малых масс), когда параметр μ мал. Параметр ε есть сила связи. Параметры ω_n описывают моменты, действующие на ротаторы; мы предполагаем, что они распределены с плотностью $g(\omega)$. Заметим, что подход может быть обобщен на случай, обсуждаемый в разделе 4.5, когда прочие параметры также являются распределенными. Поскольку несвязанные ротаторы имеют средние угловые скорости ω_n , мы говорим о “собственных частотах” а не о “моментах”. Также мы делаем это для того, чтобы переход к частному случаю $\mu = 0$ был более очевидным, когда система (4.2) является не чем иным как стандартной моделью Курамото глобально связанных фазовых осцилляторов с распределением $g(\omega)$ собственных частот ω . На каждый ротатор действует независимый белый гауссовский шум $\sigma \zeta_n(t)$ с амплитудой σ (которая полагается одинаковой для всех ротаторов), нулевым средним $\langle \zeta_n(t) \rangle = 0$, и автокоррелятором $\langle \zeta_n(t_1) \zeta_{n'}(t_2) \rangle = 2\delta_{nn'}\delta(t_1 - t_2)$ (где $\delta_{nn'}$ обозначает символ Кронекера, а $\delta(t)$ есть δ -функция Дирака). Уравнения (4.2) используются для численного моделирования, описываемого ниже, в то время как аналитический подход развивается в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$.

В моделях связи через среднее поле синхронизация является одним из фундаментальных эффектов, который актуален для многих систем. Переход к синхронности можно полностью описать в терминах параметра порядка Курамото (4.1). Физически амплитуда r комплексного параметра порядка описывает степень синхронности элементов, принадлежащих к рассматриваемой популяции. Ненулевое значение r указывает на коллективную синхронизацию. Поэтому важно разработать универсальный аналитический подход, позволяющий находить значение r и предсказывать глобальную эволюцию ансамбля, состоящего из макроскопически большого количества взаимодействующих частиц.

Заметим, что модель (4.2) не является наиболее общей – она может включать в себя сдвиг фазы в связях (что соответствует системе Курамото–Сакагучи). Мы отложим обсуждение этого случая до раздела 4.5. Кроме того, для простоты изложения в разделах 4.1–4.4 мы рассматриваем только симметричные унимодальные распределения частот; обсуждение асимметричных распределений также производится в разделе 4.5.

Теперь рассмотрим предел бесконечно большого числа элементов, то есть $N \rightarrow \infty$. Кроме того, мы будем искать стационарные синхронные состояния, то есть состояния с постоянным модулем параметра порядка и с равномерно вращающейся фазой: $r = \text{const}$, $\dot{\psi} = \Omega$. Такие состояния возможны только в термодинамическом пределе, когда флуктуации, связанные с конечным размером ансамбля, исчезают. Удобно ввести новую фазовую переменную, связанную с фазой среднего поля $\theta_n = \varphi_n - \psi$, $\dot{\theta}_n = u_n = \dot{\varphi}_n - \Omega$. Тогда модель (4.2) может быть формально переписана в виде бесконечномерной системы

$$\mu \ddot{\theta}_n + \dot{\theta}_n = \omega_n - \Omega - \varepsilon r \sin(\theta_n) + \sigma \zeta_n(t), \quad r = \langle e^{i\theta_n} \rangle. \quad (4.3)$$

Стохастическое уравнение (4.3) позволяет перейти к уравнению Фоккера–Планка (Крамерса) для плотности вероятности $P(\theta, u, t | \omega)$ подмножества ротаторов, имеющих собственную частоту ω и выразить среднее поле в виде интеграла от этой плотности

$$\begin{aligned} \partial_t P + \partial_\theta (uP) + \mu^{-1} \partial_u [(-u + \omega - \Omega - \varepsilon r \sin \theta) P] &= \mu^{-2} \sigma^2 \partial_u^2 P, \\ r &= \int d\omega g(\omega) \int d\theta \int du e^{i\theta} P(\theta, u, t | \omega). \end{aligned}$$

Поскольку все детерминированные силы в этой системе отсчета постоянны, плотность эволюционирует к стационарному распределению, не зависящему от времени. Так как единственными параметрами, влияющими на это распределение, является расстройка $\nu = \omega - \Omega$ и возмущающий член $A = \varepsilon r$, то мы ищем стационарное распределение в виде функции, явно зависящей от этих параметров, $P_0(\theta, u | \nu, A)$. Тогда система принимает вид

$$u \partial_\theta P_0 = \mu^{-1} \partial_u ((u - \nu + A \sin \theta) P_0) + \mu^{-2} \sigma^2 \partial_u^2 P_0, \quad (4.4)$$

$$r = \int d\nu g(\Omega + \nu) \int d\theta \int du e^{i\theta} P_0(\theta, u | \nu, A), \quad A = \varepsilon r. \quad (4.5)$$

Система (4.4) и (4.5) фактически является самосогласованной системой для определения неизвестного параметра порядка r (частота Ω находится из условия действительности r).

Ниже мы ограничимся случаем симметричных распределений, $g(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\nu}) = g(\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\nu})$. Тогда можно положить $\Omega = \boldsymbol{\omega}_0$, что соответствует симметричной стационарной плотности P_0 , $P_0(\boldsymbol{\theta}, u | \boldsymbol{\nu}, A) = P_0(-\boldsymbol{\theta}, -u | -\boldsymbol{\nu}, A)$. В этом случае интеграл в (4.5) является действительным, что доказывает правильность выбора значения $\boldsymbol{\omega}_0$ в качестве частоты среднего поля Ω . Заметим, что кроме $\boldsymbol{\omega}_0$ могут найтись и другие подходящие значения Ω . Различные значения соответствуют разным ветвям синхронизации. Теперь уравнение (4.5) дает параметрическое решение самосогласованной задачи, поскольку r и ε представлены как функции свободного параметра A ,

$$r(A) = \int d\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\theta} du g(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\nu}) e^{i\boldsymbol{\theta}} P_0(\boldsymbol{\theta}, u | \boldsymbol{\nu}, A), \quad \varepsilon(A) = \frac{A}{r(A)}.$$

Единственной трудностью остается поиск решения P_0 уравнения (4.4). В [51; 83] для численного решения уравнения (4.4) использовался метод матричных непрерывных дробей, другой численный подход описан в [53]. В следующем разделе 4.2 будет представлено аналитическое решение для случая большого трения (малой массы).

4.2 Стационарное распределение фаз в пределе малых масс

Здесь мы представляем один из аналитических методов для получения стационарной плотности P_0 из уравнения (4.4) в виде ряда. Второй способ приведен в приложении.

4.2.1 Матричное представление уравнения Фоккера–Планка

Следуя [46; 51], представим стационарное решение $P_0(\boldsymbol{\theta}, u | \boldsymbol{\nu})$ уравнения (4.4) в виде двойного разложения в ряд по функциям параболического цилиндра $\Phi_p(u)$ для u и Фурье модам $e^{iq\boldsymbol{\theta}}$ для $\boldsymbol{\theta}$,

$$P_0(\boldsymbol{\theta}, u | \boldsymbol{\nu}, A) = (2\pi)^{-1/2} \Phi_0(u) \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a_{pq}(\boldsymbol{\nu}, A) \Phi_p(u) e^{iq\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.6)$$

Здесь функции $\Phi_p(u)$ определяются как

$$\Phi_p(u) = \sqrt{\frac{\varkappa}{2^p p! \sqrt{\pi}}} \exp[-\varkappa^2 u^2 / 2] H_p(\varkappa u),$$

где $\varkappa = \sqrt{\mu/2\sigma^2}$, а $H_p(\varkappa u)$ есть полиномы Эрмита. Подставляя разложение (4.6) в (4.4), (4.5) и используя условие ортогональности для базисных функций, получаем бесконечную систему для неизвестных коэффициентов $a_{pq}(\mathbf{v}, A)$, где параметр порядка r будет просто пропорционален интегралу от одного из коэффициентов разложения,

$$\sigma \sqrt{\frac{p+1}{\mu}} i q a_{p+1,q} + \frac{p}{\mu} a_{pq} - \sigma \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{\sigma^2} - i q \right) a_{p-1,q} - i \frac{A}{2\sigma^2} (a_{p-1,q+1} - a_{p-1,q-1}) \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$r = \sqrt{2\pi} \int d\mathbf{v} g(\omega_0 + \mathbf{v}) a_{0,1}^*(\mathbf{v}, A). \quad (4.8)$$

Таким образом, основная задача состоит в том, чтобы найти величину $a_{0,1}(\mathbf{v}, A)$ путем решения (4.7); этот коэффициент не что иное, как параметр порядка для подгруппы осцилляторов с собственной частотой $\omega_0 + \mathbf{v}$; поэтому мы называем его *параметром порядка подгруппы*. Затем он используется в (4.8) для нахождения полного параметра порядка r путем усреднения по частоте подгруппы \mathbf{v} . Ниже мы также используем свойство симметрии, следующее из (4.7), $a_{pq}(-\mathbf{v}, A) = (-1)^p a_{pq}^*(\mathbf{v}, A)$.

Для фиксированных параметров A и \mathbf{v} , система уравнений для a_{pq} может быть формально решена с помощью метода непрерывных матричных дробей [51; 83]. Согласно этому методу выражение для параметра порядка подгруппы $a_{0,1}(\mathbf{v}, A)$ выглядит следующим образом:

$$a_{0,1}(\mathbf{v}, A) = \frac{S_{1,0}(\mathbf{v}, A)}{\sqrt{2\pi} S_{0,0}(\mathbf{v}, A)}, \quad (4.9)$$

где $S_{jk}(\mathbf{v}, A)$ – элемент бесконечной матрицы \mathbf{S} , задаваемый рекуррентной формулой

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \left(\mathbf{I} - \mu \mathbf{D} \left(\mathbf{I} - \frac{\mu}{2} \mathbf{D} \left(\mathbf{I} - \frac{\mu}{3} \mathbf{D} \left(\mathbf{I} - \dots \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}, \quad (4.10)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, а бесконечная диагональная матрица \mathbf{D} и бесконечная трехдиагональная матрица $\tilde{\mathbf{D}}$ определяются как

$$\begin{aligned} D_{jk} &= ik\delta_{jk}, \\ \tilde{D}_{jk} &= (i\sigma^2 k - \nu) \delta_{jk} + i\frac{A}{2} (\delta_{j,k-1} - \delta_{j,k+1}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Основные шаги численной процедуры, основанной на соотношениях (4.9)–(4.11), используемых для нахождения параметра порядка с требуемой точностью, подробно описаны в [51]. Несмотря на эффективность и многие практические применения этого подхода для вычисления стационарного значения r , существует несколько ограничений при его использовании. В частности, этот метод требует больших временных затрат в случае медленно убывающих распределений $g(\omega)$, например, при распределении Лоренца. Поэтому разработка аналитического приближения для расчета значения r в неравновесном стационарном состоянии крайне важна.

4.2.2 Приближение малой массы

Выражение (4.10) допускает пертурбативное разложение по малому параметру μ . Ниже мы опускаем $o(\mu)$, предполагая, что масса достаточно мала. Полученные равенства можно считать верными приближенно, если значение μ достаточно мало. В первом порядке по μ получаем

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{D} \tilde{\mathbf{D}}) + o(\mu). \quad (4.12)$$

Для вычисления обратной матрицы $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$, обозначим главные миноры как

$$M_{jk} = \tilde{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} j & j+1 & \dots & k \\ j & j+1 & \dots & k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{D}_{jj} & \tilde{D}_{j,j+1} & \dots & \tilde{D}_{jk} \\ \tilde{D}_{j+1,j} & \tilde{D}_{j+1,j+1} & \dots & \tilde{D}_{j+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{D}_{kj} & \tilde{D}_{k,j+1} & \dots & \tilde{D}_{kk} \end{vmatrix}, \quad (4.13)$$

и введем для Фурье мод число отсечки $d \rightarrow +\infty$. Тогда элементы обратной матрицы $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{jk}^{-1} &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left(i\frac{A}{2} \right)^{j-k} \frac{M_{-d,k-1} M_{j+1,d}}{\det \tilde{\mathbf{D}}}, \text{ for } j \geq k, \\ \tilde{D}_{jk}^{-1} &= (-1)^{j+k} \tilde{D}_{kj}^{-1}, \text{ for } j < k. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Согласно теореме Лапласа для любых $j \geq k$ (для удобства мы примем $M_{k+1,k} = 1$ и $M_{k+2,k} = 0$) имеет место следующее представление

$$\begin{aligned} \det \tilde{\mathbf{D}} &= M_{kj} M_{-d,k-1} M_{j+1,d} + \left(i \frac{A}{2}\right)^2 M_{k,j-1} M_{-d,k-1} M_{j+2,d} \\ &+ \left(i \frac{A}{2}\right)^2 M_{k+1,j} M_{-d,k-2} M_{j+1,d} + \left(i \frac{A}{2}\right)^4 M_{k+1,j-1} M_{-d,k-2} M_{j+2,d}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в (4.14), получаем для $j \geq k$, что

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{jk}^{-1} &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left(i \frac{A}{2}\right)^{j-k} \left(M_{kj} + \left(i \frac{A}{2}\right)^2 M_{k+1,j} \frac{M_{-d,k-2}}{M_{-d,k-1}} \right. \\ &\left. + \left(i \frac{A}{2}\right)^2 M_{k,j-1} \frac{M_{j+2,d}}{M_{j+1,d}} + \left(i \frac{A}{2}\right)^4 M_{k+1,j-1} \frac{M_{-d,k-2} M_{j+2,d}}{M_{-d,k-1} M_{j+1,d}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Главный минор M_{jk} (4.13) находится из рекуррентного уравнения с фиксированным j , то есть с фиксированным нижним правым углом

$$M_{kj} = (i\sigma^2 k - \nu) M_{k+1,j} + \left(i \frac{A}{2}\right)^2 M_{k+2,j}. \quad (4.17)$$

Рекуррентное уравнение (4.17) имеет решение

$$M_{kj} = \left(i \frac{A}{2}\right)^{j-k+1} \frac{I_{-j-1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) K_{-k+1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right) - K_{-j-1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right) I_{-k+1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{-j-1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) K_{-j-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right) - K_{-j-1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right) I_{-j-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.18)$$

Здесь I_z и K_z обозначают главные ветви модифицированных функций Бесселя первого и второго рода, соответственно, порядка z . Используя свойства модифицированных функций Бесселя, вычисляем предел

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{I_{d-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{K_{d-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right)} = 0. \quad (4.19)$$

Используя (4.18) и (4.19), находим

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{M_{-d,k-2}}{M_{-d,k-1}} = - \left(i \frac{A}{2}\right)^{-1} \frac{I_{-k+1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{-k-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.20)$$

Аналогично находим выражение для главного минора M_{kj} , используя его разложение при фиксированном k , то есть при фиксированном верхнем левом угле

$$M_{kj} = (i\sigma^2 j - \nu) M_{k,j-1} + \left(i \frac{A}{2}\right)^2 M_{k,j-2},$$

откуда следует

$$M_{kj} = \left(i\frac{A}{2}\right)^{j-k+1} \frac{I_{k-1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right) K_{j+1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) - K_{k-1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) I_{j+1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{k-1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right) K_{k+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) - K_{k-1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) I_{k+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.21)$$

Используя выражения (4.21) и (4.19), получаем

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{M_{j+2,d}}{M_{j+1,d}} = - \left(i\frac{A}{2}\right)^{-1} \frac{I_{j+1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{j+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(-\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.22)$$

Комбинация выражений (4.11)–(4.13), (4.16), (4.20), и (4.22) с основным равенством (4.9) с точностью до первого порядка по параметру массы μ приводит к замкнутой формуле

$$a_{0,1}(\nu, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \left(1 - \mu \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\sin\left(i\pi\frac{\nu}{\sigma^2}\right)}{I_{-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}\right). \quad (4.23)$$

Альтернативный вывод основного результата (4.23), основанный на методе моментов для плотности распределения и редукции по скоростям, представлен в приложении E.

4.3 Пределные случаи

Выше было выведено общее выражение для параметра порядка подгруппы (4.23). В данном разделе обсуждается его форма в нескольких важных частных случаях.

4.3.1 Бесшумовой случай

В случае детерминированной динамики ротаторов мы принимаем $\sigma \rightarrow 0$. Чтобы найти бесшумовой предел общего выражения (4.23), удобно переписать его в эквивалентной форме

$$a_{0,1}(\nu, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \left(1 - \mu \frac{A}{2} \left(\frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} - \frac{I_{-1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}\right)\right). \quad (4.24)$$

Таким образом, в (4.24) необходимо вычислить пределы двух отношений модифицированных функций Бесселя при $\sigma \rightarrow 0$. Пределы могут быть найдены с помощью известных равномерных асимптотических разложений модифицированных функций Бесселя (см. формулу (9.7.7) в [84]) или с помощью рекуррентных соотношений для этих специальных функций (см. формулу (10.29.1) в [85]). В частности, имеет место равенство

$$\left(\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right)^2 + 2i\frac{\nu}{A} \left(\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) - 1 = 0.$$

Из данного квадратного уравнения следует

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} = -i\frac{\nu}{A} \pm \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{A^2}}.$$

Знак выбирается исходя из соображений непрерывности предела по переменной ν , ограниченности при $\nu \rightarrow \pm\infty$ для областей $\nu > A$ и $\nu < A$, а также равенства предела единице при $\nu = 0$ в области $|\nu| \leq A$. После взятия предела получаем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} = \begin{cases} -i\frac{\nu}{A} + \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{A^2}}, & \nu > -A, \\ -i\frac{\nu}{A} - \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{A^2}}, & \nu \leq -A, \end{cases}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_{-1-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} = \begin{cases} -i\frac{\nu}{A} + \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{A^2}}, & \nu \leq A, \\ -i\frac{\nu}{A} - \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{A^2}}, & \nu > A. \end{cases}$$

Окончательное выражение для параметра порядка подгруппы (в первом порядке по μ) имеет вид

$$a_{0,1}(\nu, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}A} \begin{cases} i(-\nu - \sqrt{\nu^2 - A^2})(1 + i\mu\sqrt{\nu^2 - A^2}), & \nu < -A, \\ (-i\nu + \sqrt{A^2 - \nu^2}), & |\nu| \leq A, \\ i(-\nu + \sqrt{\nu^2 - A^2})(1 - i\mu\sqrt{\nu^2 - A^2}), & \nu > A. \end{cases} \quad (4.25)$$

4.3.2 Безмассовые ротаторы: модель Курамото

В безмассовом случае ($\mu = 0$) задача (4.2) представляет собой модель Курамото с шумом. Аналитическое выражение для локального параметра порядка является точным в термодинамическом пределе (теперь можно опустить

первый индекс) и имеет вид:

$$a_1(\mathbf{v}, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\frac{\gamma}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\gamma}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.26)$$

Соответственно, выражение для полного параметра порядка также является точным

$$r = \int d\mathbf{v} g(\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{v}) \frac{I_{1-i\frac{\gamma}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{-i\frac{\gamma}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.27)$$

Функция параметра порядка подгруппы (4.26) не имеет полюсов в нижней полуплоскости, и интеграл в (4.27) для подходящих распределений $g(\boldsymbol{\omega})$ может быть вычислен с помощью теории вычетов. Например, для распределения Лоренца

$$g(\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{v}) = \frac{\gamma}{\pi(\mathbf{v}^2 + \gamma^2)}, \quad (4.28)$$

окончательное выражение для r имеет форму

$$r = \frac{I_{1+\frac{\gamma}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{\frac{\gamma}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}. \quad (4.29)$$

Более сложные применения теории к модели Курамото с шумом будет представлено нами позже.

4.3.3 Переход к синхронизации

Будем использовать общее параметрическое представление параметра порядка как функции константы связи,

$$r = \sqrt{2\pi} \int d\mathbf{v} g(\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{v}) a_{0,1}^*(\mathbf{v}, A), \quad \varepsilon = \frac{A}{r}, \quad (4.30)$$

где $a_{0,1}(\mathbf{v}, A)$ задается посредством (4.23), для характеристики перехода к синхронизации, то есть для характеристики состояний с близким к нулю параметром порядка. Все приведенные ниже формулы, такие как (4.23), верны в первом порядке по малой массе μ и являются приближительными, однако, ниже для краткости они будут записаны в виде точных соотношений.

В точке перехода амплитуда A обращается в нуль. Таким образом, чтобы выяснить природу перехода, мы разложим $r(A)$ в ряд Тейлора для малых значений A . Это разложение содержит только нечетные степени A , поскольку (4.23) является нечетной функцией A

$$r(A) = C_0 A + C_1 A^3 + C_2 A^5 + \dots \quad (4.31)$$

Чтобы получить первые три коэффициента в разложении (4.31), мы перепишем (4.24), используя рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя (см. (10.29.1) в [85])

$$a_{0,1}(\mathbf{v}, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\frac{\mathbf{v}}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\mathbf{v}}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \left(1 - i\mu\mathbf{v} - i\mu A \Im \left(\frac{I_{1+i\frac{\mathbf{v}}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\mathbf{v}}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) \right).$$

Затем, вводя вспомогательную переменную $\sigma^2 y = \mathbf{v}$ в выражение (4.30) и учитывая, что значение r является действительным, получаем

$$r = \sigma^2 \int dy g(\omega_0 + \sigma^2 y) \left(\Re \left(\frac{I_{1+iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) + \mu \Im \left(\frac{I_{1+iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) \left(\sigma^2 y + A \Im \left(\frac{I_{1+iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) \right) \right).$$

Далее используем разложение для модифицированной функции Бесселя (см. (10.25.2) в [85])

$$I_{\kappa}(z) = (z/2)^{\kappa} \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2\kappa'}}{\kappa'! \Gamma(\kappa + \kappa' + 1)},$$

где $\Gamma(\kappa)$ означает гамма-функцию. В результате приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{I_{1+iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) &= \frac{A}{2\sigma^2(1+y^2)} - \frac{(1-2y^2)A^3}{4\sigma^6(1+y^2)^2(4+y^2)} \\ &\quad + \frac{(3-17y^2+4y^4)A^5}{8\sigma^{10}(1+y^2)^3(4+y^2)(9+y^2)} + \dots, \\ \Im \left(\frac{I_{1+iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{iy}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) &= -\frac{yA}{2\sigma^2(1+y^2)} + \frac{(5-y^2)yA^3}{8\sigma^6(1+y^2)^2(4+y^2)} \\ &\quad - \frac{(23-24y^2+y^4)yA^5}{16\sigma^{10}(1+y^2)^3(4+y^2)(9+y^2)} + \dots, \end{aligned}$$

из которых следует:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{1 + y^2} (1 - \mu \sigma^2 y^2), \\
C_1 &= -\frac{1}{8\sigma^4} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{(1 + y^2)^2 (4 + y^2)} (2(1 - 2y^2) - \mu \sigma^2 y^2 (13 + y^2)), \\
C_2 &= \frac{1}{16\sigma^8} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{(1 + y^2)^3 (4 + y^2) (9 + y^2)} \\
&\quad \times (2(3 - 17y^2 + 4y^4) + \mu \sigma^2 y^2 (-113 + 32y^2 + y^4)).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Для безмассового случая $\mu = 0$, выражения для C_0, C_1 были получены в [86].

Нетривиальная ветвь решений $r(\varepsilon)$ начинается при

$$\varepsilon_c^{(1)} = 1/C_0.$$

В безшумовом пределе $\sigma \rightarrow 0$ критическое значение параметра связи может быть выражено как

$$\varepsilon_c^{(1)} \Big|_{\sigma=0} = \frac{2}{\pi g(\omega_0) - \mu}.$$

Это выражение совпадает, в первом порядке по μ , с результатом для детерминированных ротаторов, полученном в [50].

Полезно сравнить это критическое значение с выражением для потери устойчивости асинхронного состояния $r = 0$ (уравнение (24) в работе [46]). В наших обозначениях эта общая формула для мнимой части собственного значения x , справедливая также для больших масс μ , имеет вид:

$$1 = \frac{\mu \hat{\varepsilon} e^{\mu \sigma^2}}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\mu \sigma^2)^2 \left(1 + \frac{p}{\mu \sigma^2}\right)}{p!} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega)}{\mu \sigma^2 + p + i(\mu \omega + x)}. \tag{4.33}$$

Для малых μ это выражение может быть упрощено. Предполагая, что $x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2$ и подставляя в (4.33), находим $x_0 = x_2 = 0$. Для унимодального распределения частот, симметричного относительно ω_0 , существует решение $x_1 = -\omega_0$, что дает

$$\hat{\varepsilon}^{-1} = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega)}{\sigma^4 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega)(\omega - \omega_0)^2}{\sigma^4 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

Легко видеть, что $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_c^{(1)}$, откуда следует, что ветвь стационарного решения пересекается с осью $r = 0$ в плоскости (r, ε) именно там, где развивается неустойчивость асинхронного состояния.

В зависимости от знака коэффициента C_1 имеется две возможности:

Суперкритический переход происходит при $C_1 < 0$. Здесь наблюдается непрерывный (второго рода) переход с ветвью решения

$$r = C_0^2 \sqrt{(\varepsilon_c^{(1)} - \varepsilon) / C_1}$$

существующей при $\varepsilon > \varepsilon_c^{(1)}$.

Субкритический переход происходит при $C_1 > 0$. Здесь ветвь решений существует для $\varepsilon < \varepsilon_c^{(1)}$. При $C_2 < 0$ можно оценить, что минимальная величина $\varepsilon_c^{(2)}$, достигаемая ветвью,

$$\varepsilon_c^{(2)} \approx \left(C_0 - \frac{C_1^2}{4C_2} \right)^{-1}.$$

Здесь переход к синхронизации скачкообразный (переход первого рода).

Мы видим, что тип перехода определяется знаком C_1 . Поскольку этот коэффициент зависит от массы μ , существует критическое значение массы, при которой изменяется тип перехода,

$$\mu^* = \frac{2}{\sigma^2} \left(\int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)(1 - 2y^2)}{(1 + y^2)^2(4 + y^2)} \right) / \left(\int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)y^2(13 + y^2)}{(1 + y^2)^2(4 + y^2)} \right). \quad (4.34)$$

Эта формула получается из (4.32) при условии $C_1 = 0$. Выражение является верным, только если значение μ^* достаточно мало.

Завершая этот раздел, отметим, что полный бифуркационный анализ перехода к синхронизации должен также включать в себя анализ устойчивости всех ветвей. В настоящий момент этот анализ отсутствует, имеются только аналитические выражения для устойчивости тривиального асинхронного состояния. Поэтому выше мы используем термин “переходы”, понимаемый на физическом уровне строгости, и избегаем термина “бифуркации”, который требует математической строгости утверждения.

4.4 Примеры

Здесь мы представляем явные вычисления переходов к синхронизации для нескольких широко исследуемых распределений частот. Каждое из этих распре-

делений характеризуется шириной γ , и во всех случаях результат зависит от безразмерного параметра $\xi = \gamma/\sigma^2$, который характеризует относительное влияние дисперсии частоты и шума на переход.

4.4.1 Распределение Гаусса

Гауссово распределение частот ротаторов

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma^2} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\gamma^2}}.$$

Для этого распределения коэффициенты

$$C_0 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{8\xi^2}} e^{\frac{1}{2\xi^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\xi}\right) (1 + \mu\sigma^2) - \frac{\mu\sigma^2}{2} \right),$$

$$\mu_* = \frac{1}{\sigma^2} \frac{2\pi e^{\frac{1}{2\xi^2}} (\xi^2 - 1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\xi}\right) + 2\xi \left(\sqrt{2\pi} (1 - 2\xi^2) + 3\pi e^{\frac{2}{\xi^2}} \xi \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}}{\xi}\right) \right)}{\xi^2 \left(\sqrt{2\pi}\xi (10 + \xi^2) - 4\pi \left(e^{\frac{1}{2\xi^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\xi}\right) + 3e^{\frac{2}{\xi^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}}{\xi}\right) \right) \right)},$$

где erfc – дополнительная функция ошибок. На рисунке 4.1 продемонстрировано несколько случаев суперкритических и субкритических переходов. Здесь параметр μ не слишком мал, тем не менее, соответствие между аналитическими и численными результатами очень хорошее. Видно, что для узкого распределения ($\gamma = 0.1$) переход к синхронизации является суперкритическим (сплошная кривая), тогда как для более широких распределений он является субкритическим.

4.4.2 Распределение Лоренца

В случае распределения Лоренца (4.28) выражения для характеристик перехода к синхронизации следующие:

$$C_0 = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1 - \mu\sigma^2\xi}{1 + \xi}, \quad C_1 = \frac{1}{8\sigma^6} \frac{-1 + \mu\sigma^2\xi(3 + \xi)}{(1 + \xi)^2(2 + \xi)}, \quad \mu_* = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\xi(\xi + 3)}.$$

Различные случаи суперкритических и субкритических переходов проиллюстрированы на рисунке 4.2. Результаты очень близки к результатам, показанным на рисунке 4.1 для гауссовского распределения. Переход является

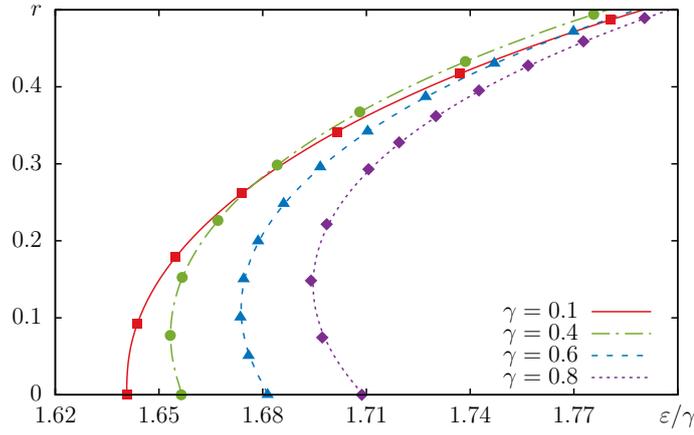


Рисунок 4.1 — Ветви десинхронизированных стационарных решений $r(\varepsilon)$ для гауссовского распределения частот с различной шириной γ : показана зависимость стационарного параметра порядка r от нормализованного параметра связи ε/γ . Прочие параметры: $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.05$. Кривые получены с помощью аналитического решения (4.23) в первом порядке по μ ; маркеры получены с помощью численных решений уравнения (4.9). Небольшие отклонения аналитического решения от численного заметны только при больших значениях γ .

суперкритическим для узких распределений собственных частот и субкритическим для больших значений γ .

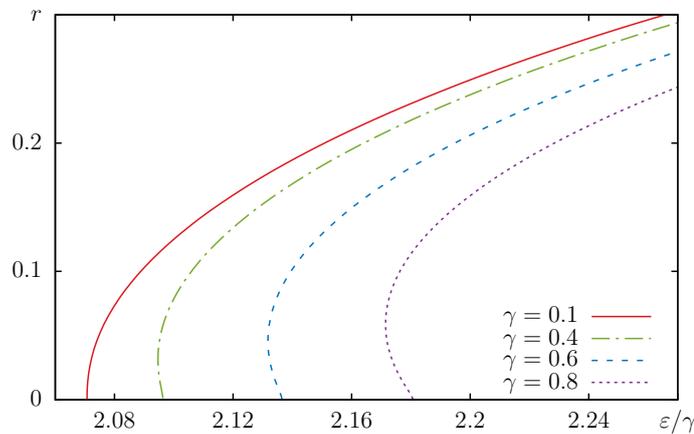


Рисунок 4.2 — Ветви стационарных решений $r(\varepsilon)$ для $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.05$ и различных γ в случае распределения Лоренца для частот. Представлены только аналитические решения, полученные из уравнения (4.23), поскольку точное численное решение полной задачи затруднено ввиду широких хвостов распределения.

4.4.3 Бимодальное распределение

Для бимодального распределения

$$g(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0 - \gamma) + \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0 + \gamma),$$

находим

$$C_0 = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1 - \mu\sigma^2\xi^2}{1 + \xi^2}, \quad C_1 = \frac{1}{8\sigma^6} \frac{(4 + 13\mu\sigma^2)\xi^2 - 2 + \mu\sigma^2\xi^4}{(1 + \xi^2)^2(4 + \xi^2)},$$

$$\mu^* = \frac{2}{\sigma^2} \frac{1 - 2\xi^2}{\xi^2(13 + \xi^2)}.$$

Кроме того, в этом случае интеграл из (4.30) может быть выражен посредством модифицированных функций Бесселя,

$$r = \Re \left(\frac{I_{1+i\xi} \left(\frac{A}{\sigma^2} \right)}{I_{i\xi} \left(\frac{A}{\sigma^2} \right)} \left(1 - \mu \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\sin(i\pi\xi)}{I_{-i\xi} \left(\frac{A}{\sigma^2} \right) I_{i\xi} \left(\frac{A}{\sigma^2} \right)} \right) \right),$$

Примечательно, что для $\gamma > \sigma^2/\sqrt{2}$ мы имеем $\mu^* < 0$; это означает, что в данном диапазоне параметров стационарная ветвь для любых масс бифурцирует субкритически.

Следует отметить, что для бимодального распределения нестационарные (периодические по времени) решения могут доминировать при переходе, что ранее было продемонстрировано в [46; 86], и приведенный выше анализ стационарных состояний решает только часть проблемы.

4.4.4 Равномерное распределение

Здесь мы рассмотрим равномерное распределение

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}, & |\omega - \omega_0| \leq \gamma, \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \gamma. \end{cases}$$

Используя (4.32) и (4.34), получаем

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{(1 + \mu\sigma^2) \arctan \xi - \mu\sigma^2 \xi}{2\xi}, \\
C_1 &= -\frac{1}{8\sigma^6} \frac{(1 + 2\mu\sigma^2)\xi + (1 + \xi^2)((1 + 2\mu\sigma^2) \arctan \frac{\xi}{2} - (1 + 3\mu\sigma^2) \arctan \xi)}{\xi(1 + \xi^2)}, \\
\mu^* &= -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\xi + (\xi^2 + 1) (\arctan \frac{\xi}{2} - \arctan \xi)}{2\xi + (\xi^2 + 1) (2 \arctan \frac{\xi}{2} - 3 \arctan \xi)}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

В бесшумовом случае, то есть при $\sigma = 0$, из (4.25) следует, что

$$r(A) = \begin{cases} A \left(\frac{\pi}{4\gamma} - \frac{\mu}{3} \left(1 - \frac{A}{\gamma} \right) \frac{\gamma - A + 2\sqrt{\gamma^2 - A^2}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - A^2}} \right), & A \leq \gamma, \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{A^2}} + \frac{A}{\gamma} \arcsin \left(\frac{\gamma}{A} \right) \right), & A > \gamma. \end{cases} \tag{4.36}$$

Критическое значение связи, в первом порядке по μ , равно $\varepsilon_c^{(1)} = 4\gamma(1 + 2\mu\gamma/\pi)/\pi$.

Примечательной особенностью этого распределения является то, что оно демонстрирует скачкообразный переход без гистерезиса для $\mu = \sigma = 0$ [87]: при $\varepsilon = 4\gamma/\pi$ параметр порядка r увеличивается с нуля до $\pi/4$. И небольшой шум, и малая инерция разрушают данное вырождение, хотя и по-разному. Для малых значений μ и исчезающего шума $\sigma \rightarrow 0$ переход является субкритическим, см. рисунок 4.3а, на котором сравнивается аналитический результат (4.36) и прямое численное моделирование. Для небольшого шума в безмассовом случае переход является суперкритическим, однако он становится субкритическим при массах больших критической массы μ^* , задаваемой уравнением (4.35). Эта ситуация иллюстрируется на рисунке 4.3б,с. Прямое численное моделирование явно показывает наличие гистерезиса и области бистабильности, где как асинхронное, так и стационарное синхронное состояние являются устойчивыми. Также можно увидеть различное влияние флуктуаций, связанных с конечным размером системы, на переходы к синхронности и обратно: асинхронное состояние гораздо более чувствительно к данным флуктуациям, что приводит к смещению точки перехода к меньшим значениям параметра связи.

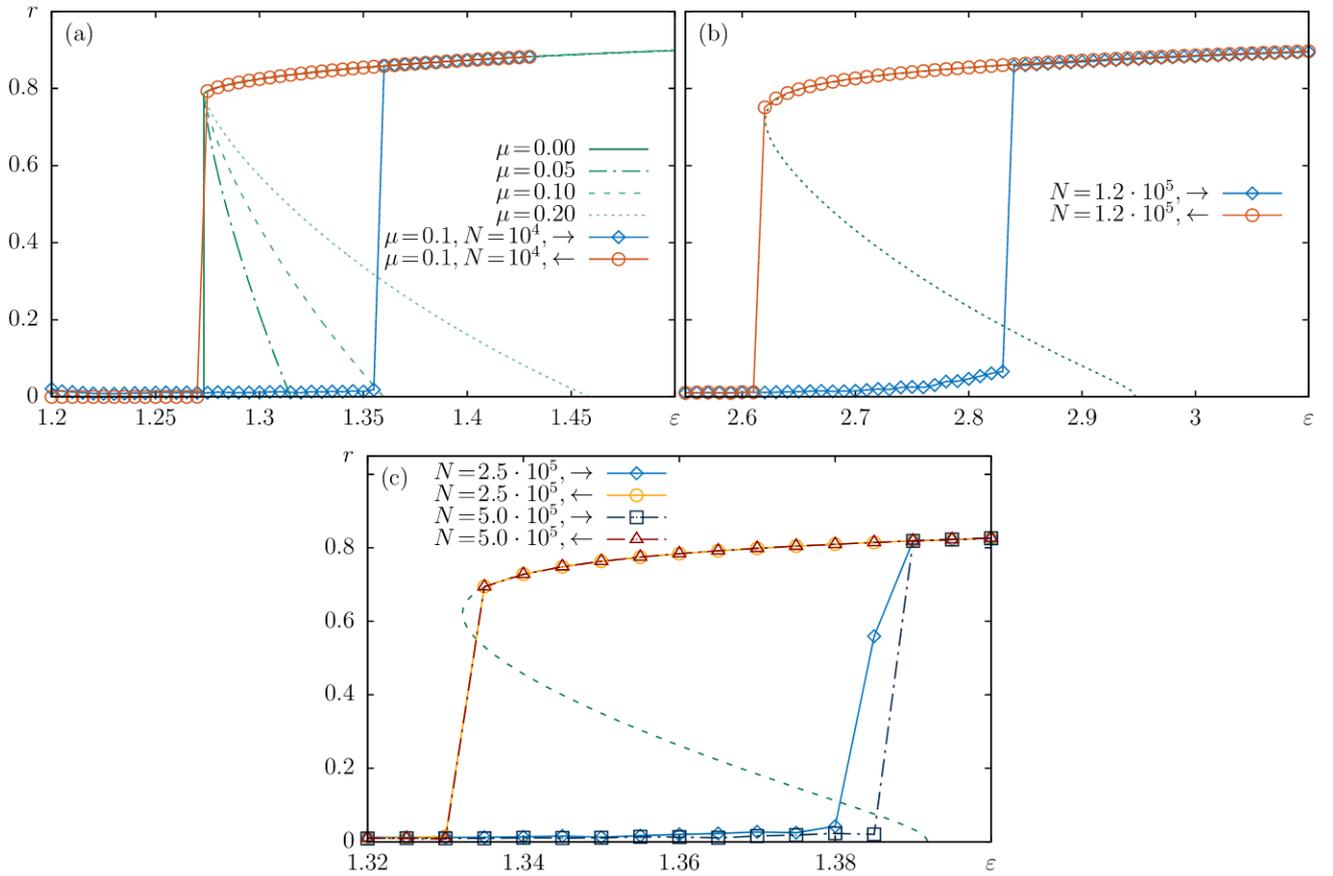


Рисунок 4.3 — (a) Кривые: ветви стационарных решений $r(\varepsilon)$ для различных μ в бесшумовом случае, полученные аналитически из уравнения (4.36). Связанные маркеры: ветви, полученные в результате прямого численного моделирования ансамбля $N = 10000$ ротаторов при $\mu = 0.1$ в условиях, когда параметр связи ε постепенно увеличивается (метка ' \rightarrow ', маркеры ромба и квадрата) или уменьшается (метка ' \leftarrow ' круглые и треугольные маркеры). На фрагментах (b) и (c) представлены результаты аналогичных численных расчетов для ротаторов с массами $\mu = 0.1$, амплитудой шума $\sigma = 0.2$ и двумя различными ширинами распределения $\gamma = 2$ на (b) и $\gamma = 1$ на (c). Сравнение с теоретическими предсказаниями (пунктирные линии) показывает особенно сильное влияние флуктуаций конечного размера на скачкообразный переход “асинхронность \rightarrow синхронность”; обратный переход близок к точке, предсказанной теорией, даже для не слишком больших популяций.

4.5 Обобщения

Выше мы сосредоточились на случае, когда ротаторы отличаются только своими собственными частотами ω_n , а распределение этих частот симметрично.

Часто желательно рассмотреть более общую ситуацию, когда все параметры, определяющие динамику ротаторов, различны (см. аналогичное обобщение модели Курамото в [88]):

$$\begin{aligned}\mu_n \ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n &= \omega_n + \frac{\epsilon_n}{N} \sum_{n'=1}^N \sin(\varphi_{n'} - \varphi_n - \beta_n) + \sigma_n \zeta_n(t) \\ &= \omega_n + \epsilon_n r \sin(\psi - \varphi_n - \beta_n) + \sigma_n \zeta_n(t).\end{aligned}\quad (4.37)$$

Введем два глобальных параметра: E – средняя сила связи, и B – характерный фазовый сдвиг в связи

$$\epsilon_n = E + \varepsilon_n, \quad \beta_n = B + \alpha_n.$$

Задача состоит в том, чтобы найти равномерно вращающиеся решения $r = \text{const}$, $\dot{\psi} = \Omega$ в термодинамическом пределе. Для заданного распределения отдельных параметров $\mu_n, \omega_n, \varepsilon_n, \alpha_n, \sigma_n$, а также для значений глобальных параметров E и B будем искать решение r, Ω (возможно также несколько решений). Как и в рассмотренных выше рассуждениях, удобно зафиксировать Ω и $A = rE$ и искать решение в параметрической форме $E = E(A, \Omega)$, $B = B(A, \Omega)$, $r = A/E(A, \Omega)$.

Для этого введем вращающуюся переменную $\theta_n = \varphi_n - \psi - B - \alpha_n$. Тогда (4.37) принимает форму

$$\mu \ddot{\theta}_n + \dot{\theta}_n = \omega_n - \Omega - A\varepsilon \sin(\theta_n) + \sigma \zeta_n(t).$$

Стационарное распределение для данного уравнения Ланжевена, проанализированное выше в разделе 4.2, дает следующий параметр порядка подгруппы

$$a_{0,1}(\omega, \mu, \varepsilon, \sigma | A, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\frac{\omega-\Omega}{\sigma^2}}\left(\frac{A\varepsilon}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\omega-\Omega}{\sigma^2}}\left(\frac{A\varepsilon}{\sigma^2}\right)} \left(1 - \mu \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\sin\left(i\pi\frac{\omega-\Omega}{\sigma^2}\right)}{I_{-i\frac{\omega-\Omega}{\sigma^2}}\left(\frac{A\varepsilon}{\sigma^2}\right) I_{i\frac{\omega-\Omega}{\sigma^2}}\left(\frac{A\varepsilon}{\sigma^2}\right)} \right).\quad (4.38)$$

Подставляя это решение в выражение для глобального параметра порядка r , получим

$$r e^{-iB} = \int d\omega d\mu d\varepsilon d\sigma d\alpha a_{0,1}^*(\omega, \mu, \varepsilon, \sigma | A, \Omega) e^{i\alpha} G(\omega, \mu, \varepsilon, \sigma, \alpha),\quad (4.39)$$

где $G(\omega, \mu, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ – плотность совместного распределения параметров задачи. Выражение (4.39) дает представление решения в явном параметрическом виде

$$r = r(A, \Omega), \quad B = B(A, \Omega), \quad E = \frac{A}{r(A, \Omega)}.$$

Очевидно, что если распределены только некоторые параметры, общие выражения (4.38), (4.39) могут быть упрощены.

Заключение

В настоящей работе решен ряд научных задач в области нелинейной динамики, связанных с исследованием механизмов формирования, эволюции и свойств различных пространственно-временных структур (уединенных состояний, "drum-head" мод и т.д.) в ансамблях взаимодействующих ротаторов. Основной акцент был сделан на разработку аналитических методов, позволяющих производить исследование ансамблей связанных ротаторов произвольной размерности и топологии. Получены следующие основные результаты:

1. Детально изучена динамика цепочки трех связанных идентичных маятников. Показано, что в цепочке с ростом силы связи происходит рождение несинфазных вращательных периодических движений, связанных с потерей устойчивости симметричного синхронного режима. Причем существуют две такие области неустойчивости, что было доказано численно и аналитически. Одна область неустойчивости соответствует появлению "drum-head" моды. Кроме того, проанализированы бифуркации, приводящие к появлению и исчезновению несинфазных режимов предельного вращения.
2. Для случая малой диссипации разработана асимптотическая теория, объясняющая неустойчивость синфазного режима в цепочке произвольной длины и ансамблях глобально связанных идентичных маятников. Найдены аналитические формулы для границ интервала неустойчивости синфазного предельного режима вращения относительно параметра силы связи.
3. Аналитически определено количество областей неустойчивости синфазного режима в цепочке локально связанных идентичных маятников. В интервалах неустойчивости синфазного синхронного режима реализуются различные (полностью несинфазные или кластерно синфазные) синхронные по частоте режимы. Показано, что иерархия эволюций синфазного режима в несинфазный с ростом параметра связи однозначно зависит от числа элементов в цепочке. При этом предсказано какой тип синхронного (синфазный или несинфазный: вариант кластерного или вариант полностью несинфазного) режима будет реализован.

4. Описан сценарий возникновения хаотической вращательной динамики в цепочках трех и более связанных маятников. Показано, что переход к хаотической динамике при изменении параметра диссипации и силы связи вызван перекрытием зон неустойчивости синфазного режима, и происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода или бифуркации разрушения тора. К хаотической динамике также может приводить изменение количества элементов цепочки. В системе обнаружен гиперхаос и найдены оценка для его размерности.
5. Установлена единственная область параметрической неустойчивости симметричного синфазного режима системы глобально связанных идентичных маятников. Описан аналитический подход, позволяющий построить асимптотическое разложение для вращательных мод, возникающих в результате потери устойчивости синфазного режима, и исследовать их устойчивость в случае малой диссипации. Разработанный метод был применен для системы трех и большего числа элементов.
6. Описан механизм реализации хаотических режимов и перемежаемости в системе глобально связанных идентичных маятников, наблюдаемых при больших значениях параметра диссипации.
7. Разработано аналитическое описание стационарных синхронных режимов в ансамбле глобально связанных ротаторов с шумом. Основное аналитическое выражение справедливо для малых масс. Рассмотрены различные предельные случаи. Для безмассовых ротаторов (стандартные осцилляторы Курамото) получено точное выражение. Оно представляет собой аналитическую формулу для стационарных решений модели Курамото (или, в более общем случае, для модели Курамото–Сакагучи) с шумом. Подход обобщен на случай, когда различаются массы, силы связи и фазовые сдвиги в связях или интенсивности шума ротаторов.
8. Найдено аналитическое выражение для критической массы ротаторов, при котором происходит изменение типа перехода к синхронизации (суперкритический/субкритический) в ансамбле глобально связанных ротаторов с шумом. Результаты применены к ряду часто используемых распределений, что позволяет записать критерий в виде алгебраических аналитических формул.

Список литературы

1. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001. — (The Cambridge nonlinear science series ; 12).
2. Synchronization in Oscillatory Networks / G. V. Osipov, J. Kurths, C. Zhou ; ed. by H. Haken. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. — (Springer Series in Synergetics).
3. Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks / V. S. Afraimovich, V. I. Nekorkin, G. V. Osipov, V. D. Shalfeev ; ed. by L. O. Chua. — Singapore : World Scientific, 1994. — (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A ; 6).
4. Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems / E. Mosekilde, Y. Maistrenko, D. Postnov. — World Scientific, 2002. — (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A ; 42).
5. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems / V. S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier. — 2nd ed. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. — (Springer Series in Synergetics).
6. Synchronization: From Simple to Complex / A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, O. Sosnovtseva. — Berlin : Springer, 2009. — (Springer Series in Synergetics).
7. Spontaneous synchrony breaking / A. E. Motter // Nature Physics. — 2010. — Vol. 6, no. 3. — P. 164—165.
8. Dynamics of an Autoparametric Pendulum-Like System with a Nonlinear Semi-active Suspension / K. Kecik, J. Warminski // Mathematical Problems in Engineering. — 2011. — Vol. 2011. — P. 1—15.
9. Physics and Applications of the Josephson Effect / A. Barone, G. Paternò. — 1st ed. — Wiley, 1982.
10. Nonlinear physics of DNA / L. V. Yakushevich. — 2nd, rev. ed. — Weinheim : Wiley-VCH, 2004.

11. A Coupled Base-Rotator Model for Structure and Dynamics of DNA: Local Fluctuations in Helical Twist Angles and Topological Solitons / S. Homma, S. Takeno // Progress of Theoretical Physics. — 1984. — Vol. 72, no. 4. — P. 679—693.
12. Kinks and Breathers Associated with Collective Sugar Puckering in DNA / S. Takeno, S. Homma // Progress of Theoretical Physics. — 1987. — Vol. 77, no. 3. — P. 548—562.
13. Системы фазовой синхронизации / под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. — Москва : Радио и связь, 1982.
14. Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder / S. Ryu, W. Yu, D. Stroud // Physical Review E. — 1996. — Vol. 53, no. 3. — P. 2190—2195.
15. The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004.
16. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case / V. N. Belykh, N. F. Pedersen, O. H. Soerensen // Physical Review B. — 1977. — Vol. 16, no. 11. — P. 4853—4859.
17. Shunted-Josephson-junction model. II. The nonautonomous case / V. N. Belykh, N. F. Pedersen, O. H. Soerensen // Physical Review B. — 1977. — Vol. 16, no. 11. — P. 4860—4871.
18. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives / A. Pikovsky, M. Rosenblum // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2015. — Vol. 25, no. 9. — P. 097616.
19. The Kuramoto model in complex networks / F. A. Rodrigues, T. K. D. Peron, P. Ji, J. Kurths // Physics Reports. — 2016. — Vol. 610. — P. 1—98.
20. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / M. J. Panaggio, D. M. Abrams // Nonlinearity. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — R67—R87.
21. Chimera states in spatiotemporal systems: Theory and Applications / N. Yao, Z. Zheng // International Journal of Modern Physics B. — 2016. — Vol. 30, no. 7. — P. 1630002.

22. A classification scheme for chimera states / F. P. Kemeth, S. W. Haugland, L. Schmidt, I. G. Kevrekidis, K. Krischer // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 9. — P. 094815.
23. The mathematics behind chimera states / O. E. Omel'chenko // *Nonlinearity*. — 2018. — Vol. 31, no. 5. — R121—R164.
24. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements / K. Kaneko // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1990. — Vol. 41, no. 2. — P. 137—172.
25. Variety and generality of clustering in globally coupled oscillators / K. Okuda // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1993. — Vol. 63, no. 3/4. — P. 424—436.
26. From collective oscillations to collective chaos in a globally coupled oscillator system / N. Nakagawa, Y. Kuramoto // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1994. — Vol. 75, no. 1—3. — P. 74—80.
27. Two-cluster solutions in an ensemble of generic limit-cycle oscillators with periodic self-forcing via the mean-field / L. Schmidt, K. Krischer // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 4. — P. 042911.
28. Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback / V. K. Vanag, L. Yang, M. Dolnik, A. M. Zhabotinsky, I. R. Epstein // *Nature*. — 2000. — Vol. 406, no. 6794. — P. 389—391.
29. Control of waves, patterns and turbulence in chemical systems / A. S. Mikhailov, K. Showalter // *Physics Reports*. — 2006. — Vol. 425, no. 2/3. — P. 79—194.
30. Resonance tongues and patterns in periodically forced reaction-diffusion systems / A. L. Lin, A. Hagberg, E. Meron, H. L. Swinney // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 066217.
31. Cluster singularity: The unfolding of clustering behavior in globally coupled Stuart–Landau oscillators / F. P. Kemeth, S. W. Haugland, K. Krischer // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 2. — P. 023107.
32. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions / Y. Maistrenko, B. Penkovsky, M. Rosenblum // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 6. — P. 060901.

33. Chimera states on the route from coherence to rotating waves / P. Jaros, Y. Maistrenko, T. Kapitaniak // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 022907.
34. Weak multiplexing in neural networks: Switching between chimera and solitary states / M. Mikhaylenko, L. Ramlow, S. Jalan, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 2. — P. 023122.
35. Solitary states in multiplex networks owing to competing interactions / S. Majhi, T. Kapitaniak, D. Ghosh // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 1. — P. 013108.
36. Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems / L. M. Pecora, T. L. Carroll // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 80, no. 10. — P. 2109—2112.
37. Synchronization stability in coupled oscillator arrays: Solution for arbitrary configurations / L. Pecora, T. Carroll, G. Johnson, D. Mar, K. S. Fink // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2000. — Vol. 10, no. 2. — P. 273—290.
38. The route to synchrony via drum head mode and mixed oscillatory state in star coupled Hindmarsh–Rose neural network / K. Usha, P. A. Subha, C. R. Nayak // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 108. — P. 25—31.
39. Star-coupled Hindmarsh–Rose neural network with chemical synapses / K. Usha, P. A. Subha // *International Journal of Modern Physics C*. — 2018. — Vol. 29, no. 3. — P. 1850023.
40. Chimera patterns under the impact of noise / S. A. M. Loos, J. C. Claussen, E. Schöll, A. Zakharova // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 1. — P. 012209.
41. Array Enhanced Stochastic Resonance and Spatiotemporal Synchronization / J. F. Lindner, B. K. Meadows, W. L. Ditto, M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara // *Physical Review Letters*. — 1995. — Vol. 75, no. 1. — P. 3—6.
42. Biological Rhythms and the Behavior of Populations of Coupled Oscillators / A. T. Winfree // *Journal of Theoretical Biology*. — 1967. — Vol. 16, no. 1. — P. 15—42.

43. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators / S. H. Strogatz // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2000. — Vol. 143, no. 1. — P. 1—20.
44. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* / Y. Kuramoto ; ed. by H. Haken. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1984. — (Springer Series in Synergetics ; 19).
45. First Order Phase Transition Resulting from Finite Inertia in Coupled Oscillator Systems / H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, S. Oishi // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 78, no. 11. — P. 2104—2107.
46. Synchronization in populations of globally coupled oscillators with inertial effects / J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, R. Spigler // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 62, no. 3. — P. 3437—3454.
47. Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia / S. Olmi, A. Navas, S. Boccaletti, A. Torcini // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 4. — P. 042905.
48. Bifurcations and Singularities for Coupled Oscillators with Inertia and Frustration / J. Barré, D. Métivier // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 117, no. 21. — P. 214102.
49. *Statistical Physics of Synchronization* / S. Gupta, A. Campa, S. Ruffo. — Cham : Springer International Publishing, 2018. — (SpringerBriefs in Complexity).
50. Self-consistent method and steady states of second-order oscillators / J. Gao, K. Efsthathiou // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 4. — P. 042201.
51. Synchronization transitions in globally coupled rotors in the presence of noise and inertia: Exact results / M. Komarov, S. Gupta, A. Pikovsky // *Europhysics Letters*. — 2014. — Vol. 106, no. 4. — P. 40003.
52. Kuramoto model of synchronization: equilibrium and nonequilibrium aspects / S. Gupta, A. Campa, S. Ruffo // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2014. — Vol. 2014, no. 8. — R08001.
53. Nonequilibrium inhomogeneous steady state distribution in disordered, mean-field rotator systems / A. Campa, S. Gupta, S. Ruffo // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2015. — Vol. 2015, no. 5. — P05011.

54. Nonuniversal Transitions to Synchrony in the Sakaguchi–Kuramoto Model / O. E. Omel'chenko, M. Wolfrum // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 16. — P. 164101.
55. Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators / M. Qian, J.-Z. Wang // *Annals of Physics*. — 2008. — Vol. 323, no. 8. — P. 1956—1962.
56. Spatiotemporal dynamics of discrete sine-Gordon lattices with sinusoidal couplings / Z. Zheng, B. Hu, G. Hu // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 57, no. 1. — P. 1139—1144.
57. *Theory of oscillators* / A. A. Andronov, S. E. Hajkin, A. A. Vitt. — Pergamon, 1966.
58. Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica / F. Tricomi // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze*. — 1933. — Vol. Ser. 2, 2, no. 1. — P. 1—20.
59. Bistability of patterns of synchrony in Kuramoto oscillators with inertia / I. V. Belykh, B. N. Brister, V. N. Belykh // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 9. — P. 094822.
60. Bistability of rotational modes in a system of coupled pendulums / L. A. Smirnov, A. K. Kryukov, G. V. Osipov, J. Kurths // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2016. — Vol. 21, no. 7/8. — P. 849—861.
61. *Perturbation Methods* / A. H. Nayfeh. — 1st ed. — Wiley, 2000.
62. *Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics* / A. Pikovsky, A. Politi. — Cambridge : Cambridge University Press, 2016.
63. *Elements of Applied Bifurcation Theory* / Y. A. Kuznetsov ; ed. by J. E. Marsden, L. Sirovich, F. John. — New York, NY : Springer New York, 1995. — (Applied Mathematical Sciences ; 112).
64. Synchronization of chaos in an array of three lasers / J. R. Terry, K. S. Thornburg, D. J. DeShazer, G. D. VanWiggeren, S. Zhu, P. Ashwin, R. Roy // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59, no. 4. — P. 4036—4043.
65. Enhancing synchrony in chaotic oscillators by dynamic relaying / R. Banerjee, D. Ghosh, E. Padmanaban, R. Ramaswamy, L. M. Pecora, S. K. Dana // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, no. 2. — P. 027201.

66. Vortex Dynamics and Phase Transitions in a Two-Dimensional Array of Josephson Junctions / C. Leemann, P. Lerch, G. -A. Racine, P. Martinoli // *Physical Review Letters*. — 1986. — Vol. 56, no. 12. — P. 1291—1294.
67. Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration / B. J. Kim, S. Kim, S. J. Lee // *Physical Review B*. — 1995. — Vol. 51, no. 13. — P. 8462—8466.
68. Phases of Josephson Junction Ladders / C. Denniston, C. Tang // *Physical Review Letters*. — 1995. — Vol. 75, no. 21. — P. 3930—3933.
69. Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors / R. S. Fishman, D. Stroud // *Physical Review B*. — 1988. — Vol. 38, no. 1. — P. 290—296.
70. Biomechanics of DNA: Rotational Oscillations of Bases / L. V. Yakushevich // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. — 2011. — Vol. 18. — P. 449—461.
71. Low-dimensional behavior of Kuramoto model with inertia in complex networks / P. Ji, T. K. D. M. Peron, F. A. Rodrigues, J. Kurths // *Scientific Reports*. — 2014. — Vol. 4, no. 1. — P. 4783.
72. Nonuniversal Results Induced by Diversity Distribution in Coupled Excitable Systems / L. F. Lafuerza, P. Colet, R. Toral // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 105, no. 8. — P. 084101.
73. When three is a crowd: Chaos from clusters of Kuramoto oscillators with inertia / B. N. Brister, V. N. Belykh, I. V. Belykh // *Physical Review E*. — 2020. — Vol. 101, no. 6. — P. 062206.
74. Large-Time Dynamics of Kuramoto Oscillators under the Effects of Inertia and Frustration / S.-Y. Ha, Y. Kim, Z. Li // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2014. — Vol. 13, no. 1. — P. 466—492.
75. Order parameter expansion and finite-size scaling study of coherent dynamics induced by quenched noise in the active rotator model / N. Komin, R. Toral // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 82, no. 5. — P. 051127.
76. Susceptibility of large populations of coupled oscillators / H. Daido // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 1. — P. 012925.

77. Cluster Explosive Synchronization in Complex Networks / P. Ji, T. K. D. Peron, P. J. Menck, F. A. Rodrigues, J. Kurths // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 21. — P. 218701.
78. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* / S. H. Strogatz. — Addison-Wesley, 1994.
79. Variety of rotation modes in a small chain of coupled pendulums / M. I. Bolutov, V. O. Munyaev, A. K. Kryukov, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 033109.
80. *Theory and Application of Mathieu Functions* / N. W. McLachlan. — London : Oxford: Clarendon Press, 1947.
81. Integrability of a globally coupled oscillator array / S. Watanabe, S. H. Strogatz // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 70, no. 16. — P. 2391—2394.
82. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators / E. Ott, T. M. Antonsen // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2008. — Vol. 18, no. 3. — P. 037113.
83. *The Fokker–Planck Equation* / H. Risken ; ed. by H. Haken. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1989. — (Springer Series in Synergetics ; 18).
84. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* / ed. by M. Abramowitz, I. A. Stegun. — Washington D.C.; New York : United States Department of Commerce, 1964. — (Applied Mathematics Series ; 55).
85. *The NIST Handbook of Mathematical Functions* / F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. — Cambridge University Press, 2010.
86. Nonlinear stability of incoherence and collective synchronization in a population of coupled oscillators / L. L. Bonilla, J. C. Neu, R. Spigler // *Journal of Statistical Physics*. — 1992. — Vol. 67, no. 1/2. — P. 313—330.
87. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model / D. Pazó // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 72, no. 4. — P. 046211.

88. Synchronization of oscillators in a Kuramoto-type model with generic coupling / V. Vlasov, E. E. N. Macau, A. Pikovsky // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2014. — Vol. 24, no. 2. — P. 023120.
89. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. — 3rd ed. — Cambridge, UK; New York : Cambridge University Press, 2007.
90. Tridiagonal Toeplitz matrices: properties and novel applications / S. Noschese, L. Pasquini, L. Reichel // *Numerical Linear Algebra with Applications*. — 2013. — Vol. 20, no. 2. — P. 302—326.
91. On the derivation of Smoluchowski equations with corrections in the classical theory of Brownian motion / G. Wilemski // *Journal of Statistical Physics*. — 1976. — Vol. 14, no. 2. — P. 153—169.
92. *Topics in the Theory of Random Noise. Vol. 2* / R. L. Stratonovich. — New York : Gordon and Breach, 1963.
93. *Tables of Integrals, Series, and Products* / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik ; ed. by A. Jeffrey, D. Zwillinger. — 7th ed. — Academic Press, 2007.

Список рисунков

- 1.1 Бифуркационная диаграмма (плоскость параметров λ и γ) и структурно устойчивые фазовые портреты системы (1.2). Кривая \mathcal{T} является бифуркационной кривой Трикоми, при переходе через которую из области D_1 в D_2 происходит разрушение инвариантной седло-узловой кривой, что приводит к рождению 2π -периодической вращательной траектории (отмечена красным). 18
- 1.2 Временная эволюция фазовых скоростей $\dot{\phi}_1$ (сплошная тонкая синяя линия), $\dot{\phi}_2$ (пунктирная красная линия), и $\dot{\phi}_3$ (сплошная толстая зеленая линия) трех маятников. Численное моделирование системы (1.1) проводилось при параметрах $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.97$ и $K = 1.5$ 19
- 1.3 Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (1.1). Здесь и ниже: синие закрашенные маркеры – устойчивые режимы, красные незакрашенные маркеры – неустойчивые режимы. Прямые без маркеров – 2π -периодические режимы. Круглые маркеры – 4π -периодические режимы. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$ 24
- 1.4 Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (1.1). (a) 2π - и 4π -периодические режимы. (b) 4π -периодические режимы. (c) 4π -, 8π - и 16π -периодические режимы. Треугольными маркерами отмечены 8π -периодические режимы. Ромбическими маркерами отмечены 16π -периодические режимы. (d) Локальные максимумы $\dot{\phi}_2$. (e) Наибольший показатель Ляпунова Λ_1 . Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.7$ 26
- 1.5 (a) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (1.1). (b) Локальные максимумы $\dot{\phi}_2$. (c) Наибольший показатель Ляпунова Λ_1 . Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.76$ 28
- 1.6 Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) трех маятников в системе (1.1). (a) Хаотический (2 : 1) режим при $K = 0.1524$. (b) Хаотический (1 : 1 : 1) режим при $K = 0.4$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.76$ 28
- 1.7 То же, что и на рисунке 1.5, но для $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.86$ 29
- 1.8 То же, что и на рисунке 1.5, но для $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.96$ 29

- 1.9 Динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) трех маятников в системе (1.1). (a) Хаотический (2 : 1) режим при $K = 0.016$. (b) Хаотический (1 : 1 : 1) режим с перемежаемостью режимов (1 : 1 : 1) и (2 : 1) при $K = 0.024$. (c) Хаотический (1 : 1 : 1) режим при $K = 0.2$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.96$ 30
- 1.10 Области устойчивости (светлые области) и неустойчивости (темные области) синфазного режима $\phi(t)$ на плоскости (λ, K) , определенные численно для системы (1.14) при $\gamma = 0.97$. Заштрихованная зона обозначает область неустойчивости синфазного режима, определяемая асимптотическими границами областей неустойчивости $K_{1,2}^{(n)}$ (штриховые линии), заданными выражениями (1.22) и (1.23). (a) $N = 6$, (b) $N = 7$ 33
- 1.11 (a,b) Области неустойчивости синфазного режима при различных значениях K . $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$, $K_1^*(\lambda, \gamma) \approx 2.5$ и $K_2^*(\lambda, \gamma) \approx 2.75$. Красным цветом выделены интервалы неустойчивости мод ψ_n . Панель (b) представляет собой увеличенную часть рисунка с панели (a). Черной пунктирной линией обозначены границы зоны неустойчивости, образованной перекрытиями интервалов неустойчивости мод ψ_n 34
- 1.12 Конфигурации несинфазных вращательных режимов внутри областей неустойчивости $\phi(t)$. Параметры: $N = 6$, $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$ 35
- 1.13 Конфигурации несинфазных вращательных режимов внутри областей неустойчивости $\phi(t)$. Параметры: $N = 7$, $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$ 36
- 1.14 Устойчивые несинфазные вращательные режимы, в цепочках с различным числом маятников. Каждая ячейка показывает диапазон значений параметра связи K , внутри которого синфазный вращательный режим является неустойчивым (1.23), а также тип несинфазного вращательного режима. Ячейки одного цвета, кроме серых, обозначают одинаковый диапазон области неустойчивости по параметру K . Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.1$ 36

1.15 (a,b) Локальные максимумы частот. Рисунки получены с помощью наследования начальных условий: (a) при увеличении параметра K , (b) при уменьшении параметра K . (c) бифуркационная диаграмма периодических вращательных режимов. Ξ – параметр синхронности, $\max \dot{\phi}_n$ – локальные максимумы частот маятников. Круглыми маркерами обозначены 4π -периодические вращательные режимы. Закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращательным движениям, незакрашенные маркеры – неустойчивым. Линия без маркеров соответствует синфазному 2π -периодическому вращательному режиму, сплошная – устойчивому, пунктирная – неустойчивому. Параметры: $N = 6$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.3$ 38

2.1 Карты вращательных режимов, реализующихся в системе (2.1) при $N = 7$, $\gamma = 0.97$ для различных значений λ и K . Черные линии – границы областей неустойчивости синфазного вращательного движения $\phi(t)$, полученные численно. Цветом обозначены типы реализующихся вращательных режимов: зеленый – $(2 : 2 : 2 : 1)$ режимы, жёлтый – $(1 : 1 : \dots : 1)$ режимы. Красной штриховкой показаны области хаоса, т.е. старший ляпуновский показатель в этих областях положителен. Карты получены для случая увеличения (a) и уменьшения (b) параметра K . Во всех расчетах начальные условия для следующих значений параметров выбирались равными конечным состояниям предыдущей реализации (наследование начальных условий). Наблюдаются довольно большие области, в которых структуры с хаотическим поведением сосуществуют с полностью синхронными вращениями. . 42

- 2.2 Нижние панели. Области неустойчивости мод ψ_n (оранжевые сплошные линии) и соответствующие области неустойчивости синфазного режима (красные пунктирные линии), найденные из выражения (2.5) и численного вычисления границ $K_{1,2}^*$ для $\gamma = 0.97$ и различных N и λ в зависимости от силы связи K . Синие сплошные линии соответствуют устойчивому синфазному вращательному движению. (а) $\lambda = 0.5$. *Сценарий А*. Для любого N существует хотя бы одна область неустойчивости синфазного режима, изолированная от остальных окном устойчивости. (b) $\lambda = 0.8$. *Сценарий В*. Начиная с некоторого N (здесь с $N = 9$) появляется область неустойчивости, изолированная окном устойчивости. (с) $\lambda = 0.82$. *Сценарий Б*. При любом числе элементов N наблюдается перекрытие всех областей неустойчивости мод ψ_n с образованием единой области неустойчивости синфазной моды без устойчивых окон. Верхние панели. Области неустойчивости мод ψ_n и соответствующие типы несинфазных режимов вращения для указанных стрелками значений N . Число в квадратных скобках указывает количество синфазных кластеров. 46
- 2.3 Локальная бифуркационная диаграмма периодических вращательных режимов (а). Ξ – параметр синхронности. Круглыми маркерами отмечены 4π -периодические вращательные режимы. Закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращениям, незакрашенные – неустойчивым. Прямая без маркеров соответствует синфазному 2π -периодическому вращательному режиму, сплошная линия – устойчивому, пунктирная линия – неустойчивому. Локальные максимумы частоты $\max \dot{\phi}_m$ (b). Диаграмма построена двумя способами: путём увеличения (красные маркеры) и уменьшения (синие маркеры) параметра K . На (с) показана увеличенная область из (b), а также $\max \dot{\phi}_m$ и старший показатель Ляпунова $\Lambda_1 = 0$ (синяя кривая). Фрагмент (с) демонстрирует рождение инвариантного тора из несинфазного 4π -периодического вращательного режима. Параметры: $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.3$ 49

- 2.4 То же, что и на рисунке 2.3. Области хаоса отмечены красным цветом. Фрагмент (с) демонстрирует возникновение хаотического движения из несинфазного 4π -периодического вращательного режима в результате каскада бифуркаций удвоения периода. Параметры: $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.6$ 50
- 2.5 То же, что и на рисунке 2.4. Фрагмент (с) демонстрирует возникновение хаотического движения в результате разрушения инвариантного тора. Параметры: $N = 7$, $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.7$ 50
- 2.6 (а) Карта хаотических режимов в системе (2.1) в зависимости от силы связи K и количества элементов N при $\gamma = 0.97$ и $\lambda = 0.9$. Зелеными линиями обозначены левые $K_1^{(1)}$ и правые $K_2^{(N-1)}$ границы области неустойчивости синфазного режима $\phi(t)$. Белый цвет соответствует регулярным режимам вращения (старший показатель Ляпунова $\Lambda = 0$). В цветной области наибольший показатель Ляпунова положителен. (б) Локальные максимумы частот $\max \dot{\phi}_m$ при $m = 3$, $N = 7$. (с) Спектр ляпуновских показателей Λ_j (шесть наибольших показателей) для $N = 7$. Наблюдаются интервалы с четырьмя, тремя, двумя и одним положительным показателем. (д) Зависимость доли $u_7(K)$ неустойчивых мод ψ_n для $N = 7$ (синие линии) и для $N \rightarrow \infty$ (синяя пунктирная кривая). Красной пунктирной линией обозначена область неустойчивости синфазного режима при $N = 7$ 51
- 2.7 Зависимости количества положительных показателей Ляпунова N_Λ (цветные линии с закрашенными маркерами) и числа N_ψ неустойчивых мод ψ_n (незаполненные черные маркеры) от количества элементов N в цепочке для различных значений параметра связи K : (а) $K = 0.07$, (б) $K = 0.1$, (с) $K = 0.13$. Прочие параметры системы: $\lambda = 0.9$, $\gamma = 0.97$ 54

- 3.1 Карта ширины области неустойчивости синфазного режима $[K_2 - K_1](\lambda, \gamma)$ в зависимости от параметров λ и γ . Черной линией обозначена кривая Трикоми, т.е. граница области существования синфазного вращательного периодического цикла. Для области L_1 синфазное вращение устойчиво при любых K . В области L_2 синфазное вращение не существует. Синфазное вращение в области L_3 неустойчиво при $K_1 < K < K_2$ 59
- 3.2 Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (3.1) при $N = 3$. Здесь и ниже: синие закрашенные маркеры – устойчивые режимы, красные незакрашенные маркеры – неустойчивые режимы. Прямые без маркеров – 2π -периодические режимы. Круглые маркеры – 4π -периодические режимы. Параметры: $\gamma = 0.97$. (a) $\lambda = 0.2$. (b) $\lambda = 0.4$. (c) $\lambda = 0.6$ 66
- 3.3 Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, 3$) маятников в системе (3.1) при $N = 3$. (a) Регулярный режим (1:1:1) при $K = 1.6$. (b) Регулярный уединенный режим (2:1) при $K = 1.7$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.4$ 67
- 3.4 (a) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (3.1) при $N = 3$. (b) Локальные максимумы $\dot{\phi}_1$. Синие точки – наследование динамического режима слева направо. Зеленые точки – наследование динамического режима справа налево. Параметры: $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.3$ 67
- 3.5 То же, что и на рисунке 3.4, но для $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.35$ 68
- 3.6 Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, 3$) маятников в системе (3.1) при $N = 3$. Хаотический уединенный режим (2:1). Параметры: $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.35$, $K = 1.76$ 68
- 3.7 То же, что и на рисунке 3.4, но для $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.5$ 69
- 3.8 Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, 3$) маятников в системе (3.1) при $N = 3$. (a) Хаотический режим (1:1:1) при $K = 0.95$. (b) Хаотический режим (1:1:1) с перемежаемостью режимов (1:1:1) и (3:0) при $K = 1.0$. Parameters: $\gamma = 0.8$, $\lambda = 0.5$. . . 70

- 3.9 (a), (b) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов системы (3.1) при $N = 4$. (b) Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) маятников в системе (3.1) при $N = 4$. (c) Регулярный кластерный режим (2:1:1) при $K = 6.0$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.2$ 71
- 3.10 Временная динамика мгновенных частот $\dot{\phi}_n$ ($n = 1, 2, \dots, 7$) маятников в системе (3.1) при $N = 7$. (a) Кластерный режим (4:3) при $K = 5.85$. (b) Кластерный режим (3:2:2) при $K = 6.0$. (c) Уединенное состояние (6:1) при $K = 6.1$. Параметры: $\gamma = 0.97$, $\lambda = 0.2$ 72
- 4.1 Ветви десинхронизированных стационарных решений $r(\epsilon)$ для гауссовского распределения частот с различной шириной γ : показана зависимость стационарного параметра порядка r от нормализованного параметра связи ϵ/γ . Прочие параметры: $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.05$. Кривые получены с помощью аналитического решения (4.23) в первом порядке по μ ; маркеры получены с помощью численных решений уравнения (4.9). Небольшие отклонения аналитического решения от численного заметны только при больших значениях γ 87
- 4.2 Ветви стационарных решений $r(\epsilon)$ для $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.05$ и различных γ в случае распределения Лоренца для частот. Представлены только аналитические решения, полученные из уравнения (4.23), поскольку точное численное решение полной задачи затруднено ввиду широких хвостов распределения. 87

- 4.3 (a) Кривые: ветви стационарных решений $r(\varepsilon)$ для различных μ в бесшумовом случае, полученные аналитически из уравнения (4.36). Связанные маркеры: ветви, полученные в результате прямого численного моделирования ансамбля $N = 10000$ ротаторов при $\mu = 0.1$ в условиях, когда параметр связи ε постепенно увеличивается (метка ' \rightarrow ', маркеры ромба и квадрата) или уменьшается (метка ' \leftarrow ' круглые и треугольные маркеры). На фрагментах (b) и (c) представлены результаты аналогичных численных расчетов для ротаторов с массами $\mu = 0.1$, амплитудой шума $\sigma = 0.2$ и двумя различными ширинами распределения $\gamma = 2$ на (b) и $\gamma = 1$ на (c). Сравнение с теоретическими предсказаниями (пунктирные линии) показывает особенно сильное влияние флуктуаций конечного размера на скачкообразный переход “асинхронность \rightarrow синхронность”; обратный переход близок к точке, предсказанной теорией, даже для не слишком больших популяций. . 90

Приложение А

Аналитическая аппроксимация решения уравнения маятника

В этом приложении описывается асимптотическая процедура, которая позволяет построить аналитические аппроксимации для решений уравнения (1.2) как предельного цикла вращения (на цилиндре). Как отмечалось в разделе 1.1.2, используемый нами подход основан на методе Линдштедта–Пуанкаре. Основная идея метода состоит во введении нового безразмерного времени τ , используя выражение $t = \omega\tau$, где неизвестный параметр ω представляет собой ряд (1.3) по степеням параметра малости $\varepsilon = \lambda/\gamma$. В результате для функции $\phi(\tau)$ получаем следующее уравнение:

$$\phi'' + \varepsilon\gamma\omega\phi' + \omega^2 \sin \phi = \gamma\omega^2. \quad (\text{A.1})$$

Здесь и далее, для удобства, штрих обозначает производную по τ . Предполагая, что рассматриваемый маятник непосредственно перешел в предельный режим, который нас интересует, можем выбрать (без ограничения общности) для $\phi(\tau)$ начальное условие $\phi(0) = 0$ и записать $\phi(\tau)$ в форме (1.4). Это выражение представляет собой ряд по степеням ε , который учитывает особенности искомого решения. Подставляя (1.3) и (1.4) в (A.1) и приравнивая члены одинакового порядка малости по ε к нулю, получаем, что

$$\phi_0'' + \omega_0^2 \sin(\tau + \phi_0) = \gamma\omega_0^2. \quad (\text{A.2})$$

Правая часть равенства (A.2) содержит секулярный член $\gamma\omega_0^2$, который приводит к неограниченному росту компоненты $\phi_0(\tau)$ ($\sim \tau^2$) асимптотического ряда (1.4). Этот факт противоречит как выводам, полученным в результате общего анализа задачи [16; 57; 58], так и результатам прямого численного моделирования. Однако противоречий можно избежать, выбрав $\omega_0 = 0$. Тогда решение уравнения (A.2), удовлетворяющее описанным выше условиям, будет тривиальным, т.е. $\phi_0(\tau) = 0$. Если $\omega_0 = 0$ и $\phi_0(\tau) = 0$, легко проверить, что компонента $\phi_1(\tau)$ также тождественно равна нулю, то есть $\phi_1(\tau) = 0$, и только для второго порядка малости по ε мы получаем следующее выражение:

$$\phi_2'' + \omega_1^2 \sin \tau = \gamma\omega_1(\omega_1 - 1), \quad (\text{A.3})$$

где секулярный член в правой части исчезает при $\omega_1 = 1$. В этом случае в разложении (1.4) появляется нетривиальная компонента, пропорциональная периодической функции

$$\phi_2(\tau) = \sin \tau. \quad (\text{A.4})$$

Выражение (A.4) зануляется в счетном количестве точек (в частности, при $\tau = 0$). Продолжая разложение, можно найти любые необходимые члены ω_j и $\phi_j(\tau)$ асимптотических рядов (1.3) и (1.4). В качестве примера приведем несколько следующих членов (до $o(\varepsilon^7)$) разложения (1.3):

$$\varepsilon^3: \phi_3'' + 2\omega_2 \sin \tau = \gamma\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 0, \phi_3(\tau) = 0,$$

$$\varepsilon^4: \phi_4'' + \gamma \cos \tau + 2\omega_3 \sin \tau + \frac{1}{2} \sin 2\tau = \gamma\omega_3$$

$$\Rightarrow \omega_3 = 0, \phi_4(\tau) = -\gamma + \gamma \cos \tau + \frac{1}{8} \sin 2\tau,$$

$$\varepsilon^5: \phi_5'' + 2\omega_4 \sin \tau = \gamma\omega_4 \Rightarrow \omega_4 = 0, \phi_5(\tau) = 0,$$

$$\varepsilon^6: \phi_6'' - \gamma \cos \tau + \frac{3}{4} \gamma \cos 2\tau + \left(2\omega_5 - \gamma^2 - \frac{5}{16}\right) \sin \tau + \frac{3}{16} \sin 3\tau = \gamma \left(\omega_5 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_5 = \frac{1}{2}, \phi_6(\tau) = \frac{13}{16} \gamma - \gamma \cos \tau + \frac{3}{16} \gamma \cos 2\tau + \left(\frac{11}{16} - \gamma^2\right) \sin \tau + \frac{1}{48} \sin 3\tau.$$

Таким образом, неизвестный параметр ω определяется выражением $\omega = \varepsilon + \varepsilon^5/2 + o(\varepsilon^9)$ а искомое решение уравнения (1.2) (с точностью до порядка ε^3) принимает форму (1.5), (1.6).

Приложение Б

Методы расчета периодических движений и их устойчивости

В данном приложении содержится описание численных методов для расчета нетривиальных периодических движений в ансамблях трех связанных маятников и анализа их линейной устойчивости.

Для нахождения регулярных вращательных мод в цепочке связанных маятников применяется модификация широко используемой схемы для поиска замкнутых предельных циклов в нелинейных динамических системах [63]. Основная идея метода заключается в следующем. Каждое из интересующих нас решений $\phi_j(t)$, в первую очередь, характеризуется своим периодом T (который, строго говоря, неизвестен и должен быть определен в конце численных расчетов) и числом n изменений фаз $\varphi_j(t)$ на 2π за период T . Следовательно, отображение Пуанкаре $\{\varphi_j(0), \dot{\varphi}_j(0)\} \rightarrow \{\varphi_j(T) - 2\pi n, \dot{\varphi}_j(T)\}$ имеет стационарную точку, соответствующую траектории $\{\phi_j(t), \dot{\phi}_j(t)\}$. Используя этот факт, $\phi_j(T) = \phi_j(0) + 2\pi n$ и $\dot{\phi}_j(T) = \dot{\phi}_j(0)$, построим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{P}(T, \{\varphi_{0j}, \dot{\varphi}_{0j}\}) = \begin{bmatrix} \{\varphi_j(T, \{\varphi_{0j}, \dot{\varphi}_{0j}\})\} \\ \{\dot{\varphi}_j(T, \{\varphi_{0j}, \dot{\varphi}_{0j}\})\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{\varphi_{0j} + 2\pi n\} \\ \{\dot{\varphi}_{0j}\} \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где $\{\varphi_j(t), \dot{\varphi}_j(t)\}$ – решение рассматриваемых уравнений (например, (1.1), (1.15) или (3.1)) с начальными условиями $\{\varphi_j(0), \dot{\varphi}_j(0)\} = \{\varphi_{0j}, \dot{\varphi}_{0j}\}$. Следовательно, периодическое решение системы уравнений с периодом T будет корнем (Б.1). В силу трансляционной инвариантности (во времени) одно значение из множества $\{\varphi_{0j}\}$ без потери общности всегда можно принять равным нулю. Для аппроксимации корней $\mathbf{P}(T, \{\varphi_{0j}, \dot{\varphi}_{0j}\})$ используется алгоритм Ньютона–Рафсона [89]. Также следует отметить, что якобиан имеет вид $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{I}} - \widehat{\mathbf{Q}}(T)$, где $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичная матрица, а $\widehat{\mathbf{Q}}(T)$ – матрица, полученная из матрицы монодромии $\widehat{\mathbf{M}}(T)$ (см. определение ниже) заменой одного из столбцов на вектор значений правых частей рассматриваемых уравнений в момент $t = T$. В результате с высокой точностью получаем устойчивые и неустойчивые вращательные моды, являющиеся точными периодическими по времени решениями исследуемой системы. Продолжение этих решений по

параметру силы связи K в интервале неустойчивости синфазной вращательной моды позволяет проследить все множество нетривиальных периодических движений и проанализировать их бифуркации (см., например, рисунок 1.4).

Линейная (спектральная) устойчивость произвольных (2π -, 4π -, 8π - и др.) периодических движений (на цилиндре) динамической системы исследуется с помощью анализа Флоке. Для этого в заданное периодическое решение $\phi_j(t)$ вносится небольшое возмущение $\delta\varphi_j(t)$. Линеаризованные уравнения, соответствующие системе (1.1), в первом порядке по $\delta\varphi_j(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos\phi_1(t)\delta\varphi_1 &= K \cos[\phi_2(t) - \phi_1(t)] (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ \delta\ddot{\varphi}_2 + \lambda\delta\dot{\varphi}_2 + \cos\phi_2(t)\delta\varphi_2 &= K \cos[\phi_1(t) - \phi_2(t)] (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) \\ &\quad + K \cos[\phi_3(t) - \phi_2(t)] (\delta\varphi_3 - \delta\varphi_2), \\ \delta\ddot{\varphi}_3 + \lambda\delta\dot{\varphi}_3 + \cos\phi_3(t)\delta\varphi_3 &= K \cos[\phi_2(t) - \phi_3(t)] (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_3).\end{aligned}\tag{Б.2}$$

В случае динамической системы (1.15) имеем уравнения:

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\varphi}_j + \lambda\delta\dot{\varphi}_j + \cos\phi_j(t)\delta\varphi_j &= K \cos[\phi_{j-1}(t) - \phi_j(t)] (\delta\varphi_{j-1} - \delta\varphi_j) \\ &\quad + K \cos[\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)] (\delta\varphi_{j+1} - \delta\varphi_j),\end{aligned}\tag{Б.3}$$

с граничными условиями $\delta\varphi_0 = \delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_N = \delta\varphi_{N+1}$. Аналогичные уравнения для динамической системы (3.1) принимают следующую форму:

$$\delta\ddot{\varphi}_j + \lambda\delta\dot{\varphi}_j + \cos\phi_j(t)\delta\varphi_j = \frac{K}{N} \sum_{\tilde{j}=1}^N \cos(\phi_{\tilde{j}} - \phi_j) (\delta\varphi_{\tilde{j}} - \delta\varphi_j).\tag{Б.4}$$

Анализ Флоке уравнений (Б.2) может быть выполнен в силу периодичности траектории $\{\phi_j(t), \dot{\phi}_j(t)\}$. Таким образом, устойчивость рассматриваемого движения определяется спектром оператора Флоке (матрица монодромии) $\widehat{\mathbf{M}}(T)$, задаваемого как

$$\begin{bmatrix} \{\delta\varphi_j(T)\} \\ \{\delta\dot{\varphi}_j(T)\} \end{bmatrix} = \widehat{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \{\delta\varphi_j(0)\} \\ \{\delta\dot{\varphi}_j(0)\} \end{bmatrix}.\tag{Б.5}$$

Собственные значения $\mu_{j'}$ (здесь и далее $j' = 1, \dots, 6$) матрицы монодромии $\widehat{\mathbf{M}}(T)$ называют мультипликаторами Флоке периодического решения $\phi_j(t)$. Из действительности матрицы монодромии следует, что недействительные мультипликаторы $\mu_{j'}$ всегда образуют комплексно-сопряженные пары. Чтобы исследовать устойчивость каждого из обсуждаемых вращательных движений,

численно вычисляются их мультипликаторы Флоке $\mu_{j'}$. Если $|\mu_{j'}| \leq 1$ для всех j' , то вращательный режим линейно устойчив. Стоит отметить, что одно из собственных значений $\mu_{j'}$ должно быть строго равно единице, так как исследуется устойчивость периодического движения. Следовательно, используя этот факт, можно осуществить проверку того, что найденная численно траектория $\{\phi_j(t), \dot{\phi}_j(t)\}$ принадлежит семейству периодических вращений (на цилиндре). Если хотя бы один из мультипликаторов Флоке $\mu_{j'}$ находится вне единичной окружности на комплексной плоскости, то вращательный режим линейно неустойчив.

В качестве характеристики степени синхронизации рассмотрим величину Ξ , которая представляет собой частотную отстройку маятников:

$$\Xi = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n_1, n_2=1}^N \max_{0 < t < T} |\dot{\phi}_{n_1}(t) - \dot{\phi}_{n_2}(t)|, \quad (\text{Б.6})$$

где T – период вращательной моды. Из определения (Б.6) следует, что Ξ принимает неотрицательные значения, а $\Xi = 0$ только в случае синфазного режима. В случае несинфазного режима найдутся два таких элемента n_1 и n_2 , для которых $\dot{\phi}_{n_1} \neq \dot{\phi}_{n_2}$ хотя бы для некоторого временного интервала, и тогда $\Xi > 0$.

Приложение В

Собственные числа и собственные векторы матрицы \mathbf{A}

Для решения задачи о собственных числах и векторах матрицы (1.18) совершим преобразование эквивалентности, используя верхнетреугольную матрицу \mathbf{S} с единичными элементами:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 0 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Тогда эквивалентная матрица $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ равна

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & 1 & -2 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

где верхний левый блок размера $(N-1) \times (N-1)$ – трёхдиагональная матрица Тёплица. Используя известные результаты для трёхдиагональной матрицы Тёплица [90], находим собственные значения μ_n и собственные векторы $\tilde{\mathbf{v}}_n$ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned} \mu_n &= -2 \left[1 + \cos \left(\frac{n\pi}{N} \right) \right], & n &= 1, 2, \dots, N-1. \\ [\tilde{\mathbf{v}}_n]_k &= \begin{cases} (-1)^{k+1} \sin \left(\frac{nk\pi}{N} \right), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{(-1)^{N-n}}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{n\pi}{2N} \right), & \text{если } k = N, \end{cases} \\ \mu_N &= 0, & \tilde{\mathbf{v}}_N &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Собственные числа исходной матрицы (1.18) так же равны μ_n , а собственные векторы \mathbf{v}_n определяются как $\mathbf{v}_n = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{v}}_n$:

$$[\mathbf{v}_n]_k = (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{n\pi}{2N} \right]}{2 \cos \left(\frac{n\pi}{2N} \right)}, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{v}_N = (1, 1, \dots, 1).$$

Выполняя нормировку собственных векторов \mathbf{v}_n для $n = 1, \dots, N-1$, запишем окончательный результат в общем виде:

$$\mu_n = -2 \left[1 + \cos \left(\frac{n\pi}{N} \right) \right], \quad n = 1, \dots, N, \quad (\text{B.5})$$

$$[\mathbf{v}_n]_k = (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \left[(2k-1) \frac{n\pi}{2N} \right], \quad k = 1, \dots, N. \quad (\text{B.6})$$

(при такой записи вектор \mathbf{v}_N остается ненормированным).

Приложение Г

Определение типа несинфазных режимов

Между видом 4π -периодических несинфазных вращений и собственными векторами \mathbf{v}_n существует взаимно однозначная связь, позволяющая определить количество и размер синхронных кластеров. Так количество кластеров $M_n(N)$ несинфазного режима, возникающего в результате развития неустойчивости моды ψ_n ($n = 1, \dots, N-1$), равно числу различных значений, которые принимают компоненты вектора \mathbf{v}_n , т.е.

$$M_n(N) = |\{[v_n]_1, \dots, [v_n]_N\}|. \quad (\text{Г.1})$$

Кроме того, число элементов $N_m^{(n)}(N)$ в m -ом кластере ($m = 1, \dots, M_n$) равно количеству компонент вектора \mathbf{v}_n , принимающих некоторое значение из множества $\{[v_n]_1, \dots, [v_n]_N\}$. Для определения чисел M_n и $N_m^{(n)}$ рассмотрим последовательность, элементы которой задаются выражением (В.6) без ограничения на индекс k : $\dots, [v_n]_{-1}, [v_n]_0, [v_n]_1, [v_n]_2, \dots$. Переписывая (В.6) в виде

$$[v_n]_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left[(2k-1) \frac{(N-n)\pi}{2N} \right], \quad (\text{Г.2})$$

из периодичности функции косинуса легко найти, что введенная последовательность имеет период $\tilde{k} = 2N / \gcd(2N, N-n)$: $[v_n]_{k+\tilde{k}} = [v_n]_k$. Нетрудно заметить, что $3 \leq \tilde{k} \leq 2N$. Кроме того, из симметричности функции косинуса следует, что $[v_n]_0 = [v_n]_1$. Эти два свойства элементов последовательности $\{[v_n]_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ позволяют произвести их разделение на группы с равными значениями. Из свойства периодичности следует, что все элементы с уникальными значениями содержатся в подпоследовательности $[v_n]_1, [v_n]_2, \dots, [v_n]_{\tilde{k}}$. Из условия симметричности следует, что $[v_n]_1 = [v_n]_{\tilde{k}}$, $[v_n]_2 = [v_n]_{\tilde{k}-1}$ и т.д. Таким образом, количество уникальных по значению элементов, то есть число синхронных кластеров $M_n(N) = \left\lfloor \left(\tilde{k} + 1 \right) / 2 \right\rfloor$, или в явном виде

$$M_n(N) = \left\lfloor \frac{N}{\gcd(2N, N-n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (\text{Г.3})$$

Из ограничений для значения периода \tilde{k} следует, что $2 \leq M_n(N) \leq N$, причем $M_n(N) = N$ тогда и только тогда, когда $2N$ и $N-n$ взаимно простые числа.

Далее, значение $[v_n]_m$ ($m = \overline{1, M_n}$) при $k = \overline{1, N}$ встречается $\left(\left\lfloor (N - m) / \tilde{k} \right\rfloor + 1\right) + \left(\left\lfloor \left(N - \left(\tilde{k} - m + 1\right)\right) / \tilde{k} \right\rfloor + 1\right)$ раз, если $m \neq (\tilde{k} + 1) / 2$, и $\left(\left\lfloor (N - m) / \tilde{k} \right\rfloor + 1\right)$ раз в случае $m = (\tilde{k} + 1) / 2$. После элементарных упрощений имеем

$$N_m^{(n)}(N) = \frac{1}{1 + \delta_{2m, \tilde{k}+1}} \left(\left\lfloor \frac{N - m + 1}{\tilde{k}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N + m - 1}{\tilde{k}} \right\rfloor \right). \quad (\Gamma.4)$$

Подставляя период \tilde{k} и производя упрощения, окончательно находим

$$N_m^{(n)} = \begin{cases} \gcd(2N, N - n), & \text{если } m \neq \frac{N}{\gcd(2N, N - n)} + \frac{1}{2}, \\ \gcd(2N, N - n) / 2, & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (\Gamma.5)$$

Из последнего выражение следует простое правило, описывающее кластерный режим, возникающий в связи с неустойчивостью моды ψ_n . Такой режим имеет $M_n(N)$ кластеров (см. выше). Если $\frac{N}{\gcd(2N, N - n)} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ (или эквивалентно $N / \gcd(2N, N - n) = M_n(N)$), то все $M_n(N)$ кластером содержат по $\gcd(2N, N - n)$ элементов. В противном случае $M_n(N) - 1$ кластеров содержат по $\gcd(2N, N - n)$ элементов и один кластер содержит $\gcd(2N, N - n) / 2$ элементов.

Приложение Д

Анализ устойчивости режимов (2:1) и (1:1:1)

Д.1 Режим (2:1)

Рассмотрим уединенное состояние (2 : 1), когда сосуществуют два кластера: $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \phi_1(t)$, $\varphi_3(t) = \phi_2(t)$. Построим асимптотическое разложение для $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ в случае $\lambda \ll \gamma$. Представим силу связи в виде $K = \frac{\gamma^2}{4\lambda^2} + \Delta K$, где первое слагаемое $\frac{\gamma^2}{4\lambda^2}$ с точностью до двух ведущих порядков определяет середину диапазона значений силы связи K , при которых синфазное периодическое движение неустойчиво (см. (3.9)), ΔK – отклонение от этого значения. Учитывая, что $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)}$, и предполагая для простоты, что начальное условие $(\phi_1 - \phi_2)'|_{t=0} = 0$, построим два асимптотических решения ϕ_m^+ и ϕ_m^- , используя методы, описанные выше для случая $\lambda \ll \gamma$:

$$\begin{aligned}
\phi_1^\pm(\tau) &= 2\tau - \arccos(\pm\gamma_1) + \frac{2\lambda}{3\gamma} A_2^\pm \cos \tau \\
&+ \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{24\gamma_1} \left(36\gamma_1 \mp (A_2^\pm)^2 \right) - \gamma \cos 2\tau \pm \gamma_1 \sin 2\tau \right] \\
&+ A_2^\pm \frac{\lambda^3}{\gamma^3} \left[\pm \frac{16}{15} \gamma_1 + B_2^\pm \cos \tau - \frac{\gamma}{2} \sin \tau \right. \\
&\left. - \frac{1}{72} \left((A_2^\pm)^2 \mp 12\gamma_1 \right) \cos 3\tau + \frac{\gamma}{6} \sin 3\tau \right] + O(\lambda^4), \\
\phi_2^\pm(\tau) &= 2\tau - \arccos(\pm\gamma_1) - \frac{4\lambda}{3\gamma} A_2^\pm \cos \tau \\
&+ \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{24\gamma_1} \left(36\gamma_1 \mp (A_2^\pm)^2 \right) - \gamma \cos 2\tau \pm \gamma_1 \sin 2\tau \right] \\
&+ A_2^\pm \frac{\lambda^3}{\gamma^3} \left[\pm \frac{16}{15} \gamma_1 - 2B_2^\pm \cos \tau + \gamma \sin \tau \right. \\
&\left. + \frac{1}{36} \left((A_2^\pm)^2 \mp 12\gamma_1 \right) \cos 3\tau - \frac{\gamma}{3} \sin 3\tau \right] + O(\lambda^4),
\end{aligned} \tag{Д.1}$$

где

$$A_2^\pm = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \left(\Delta K \pm \frac{\gamma_1}{2} \right), \quad (\text{Д.2})$$

$$B_2^\pm = -\frac{3}{5(A_2^\pm)^2} - \frac{71}{720}(A_2^\pm)^2 \pm \left(\frac{7}{15}\gamma_1 - \frac{\gamma^2}{10\gamma_1} \right), \quad (\text{Д.3})$$

$$\tau = \left\{ \frac{\gamma}{2\lambda} - \frac{\lambda}{\gamma} \frac{(A_2^\pm)^2}{18} - \frac{\lambda^3}{\gamma^3} \left[\frac{1}{4} + \frac{(A_2^\pm)^2}{18} \left(3B_2^\pm - \frac{(A_2^\pm)^2}{9} \right) \right] + O(\lambda^5) \right\} t, \quad (\text{Д.4})$$

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (\text{Д.5})$$

Таким образом, существует два уединенных состояния (2 : 1). Решение ϕ_m^+ соответствует 4π -периодическому режиму, возникающему в результате бифуркации удвоения периода из синфазного вращения $\phi(t)$ при $K = K_1$. Аналогично, решение ϕ_m^- соответствует 4π -периодическому режиму, возникающему в результате обратной бифуркации удвоения периода при $K = K_2$.

Далее, используя метод, описанный в разделе 3.1.3, исследуем устойчивость полученных решений ϕ_m^\pm . Для внутренней устойчивости (см. (3.15)) первого решения ϕ_m^+ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{in} &= 0, \\ \Lambda_2^{in} &= -\lambda, \\ \Lambda_{3,4}^{in} &= -\frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma^2} (A_2^+)^2} \right) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (\text{Д.6})$$

Аналогично, для второго ϕ_m^- :

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{in} &= 0, \\ \Lambda_2^{in} &= -\lambda, \\ \Lambda_{3,4}^{in} &= -\frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\gamma_1}{\gamma^2} (A_2^-)^2} \right) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

Для внешней устойчивости движения ϕ_m^+ двухмаятникового кластера (см. (3.17)) имеем следующие характеристические показатели:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{ex} &= \lambda^3 \frac{(A_2^+)^4}{72\gamma^4} \left(\gamma_1 - \frac{(A_2^+)^2}{12} \right) + O(\lambda^4), \\ \Lambda_2^{ex} &= -\lambda - \lambda^3 \frac{(A_2^+)^4}{72\gamma^4} \left(\gamma_1 - \frac{(A_2^+)^2}{12} \right) + O(\lambda^4). \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

И для ϕ_m^- :

$$\begin{aligned}\Lambda_1^{ex} &= -\lambda^3 \frac{(A_2^-)^4}{72\gamma^4} \left(\gamma_1 + \frac{(A_2^-)^2}{12} \right) + O(\lambda^4), \\ \Lambda_2^{ex} &= -\lambda + \lambda^3 \frac{(A_2^-)^4}{72\gamma^4} \left(\gamma_1 + \frac{(A_2^-)^2}{12} \right) + O(\lambda^4).\end{aligned}\tag{Д.9}$$

Д.2 Режим (1:1:1)

Методы исследования устойчивости режима (1 : 1 : 1) полностью аналогичны. Поэтому данный раздел содержит лишь краткое описание основных результатов по устойчивости движения (1 : 1 : 1).

Вновь выражая силу связи K через ΔK , учитывая, что $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = \phi_3^{(0)}$, и приняв начальные условия $(\phi_1 - \phi_3)'|_{t=0} = 0$, получим два решения ϕ_m^+ и ϕ_m^- :

$$\begin{aligned} \phi_1^\pm(\tau) &= 2\tau - \arccos(\pm\gamma_1) + A_3^\pm \frac{\lambda}{\gamma} \cos \tau \\ &+ \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{32\gamma_1} \left(48\gamma_1 \mp (A_3^\pm)^2 \right) - \gamma \cos 2\tau \pm \gamma_1 \sin 2\tau \right] \\ &+ A_3^\pm \frac{\lambda^3}{\gamma^3} \left[B_3^\pm \cos \tau - \frac{3}{4}\gamma \sin \tau \right. \\ &\left. - \frac{1}{64} \left((A_3^\pm)^2 \mp 16\gamma_1 \right) \cos 3\tau + \frac{\gamma}{4} \sin 3\tau \right] + O(\lambda^4), \\ \phi_2^\pm(\tau) &= 2\tau - \arccos(\pm\gamma_1) + \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{32\gamma_1} \left(48\gamma_1 \mp (A_3^\pm)^2 \right) \right. \\ &\left. - \gamma \cos 2\tau \pm \gamma_1 \sin 2\tau \right] + O(\lambda^4), \end{aligned} \tag{Д.10}$$

$$\begin{aligned} \phi_3^\pm(\tau) &= 2\tau - \arccos(\pm\gamma_1) - A_3^\pm \frac{\lambda}{\gamma} \cos \tau \\ &+ \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{32\gamma_1} \left(48\gamma_1 \mp (A_3^\pm)^2 \right) - \gamma \cos 2\tau \pm \gamma_1 \sin 2\tau \right] \\ &- A_3^\pm \frac{\lambda^3}{\gamma^3} \left[B_3^\pm \cos \tau - \frac{3}{4}\gamma \sin \tau \right. \\ &\left. - \frac{1}{64} \left((A_3^\pm)^2 \mp 16\gamma_1 \right) \cos 3\tau + \frac{\gamma}{4} \sin 3\tau \right] + O(\lambda^4), \end{aligned}$$

где

$$A_3^\pm = 4\sqrt{\frac{6}{5} \left(\Delta K \pm \frac{\gamma_1}{2} \right)}, \tag{Д.11}$$

$$B_3^\pm = -\frac{6}{5(A_3^\pm)^2} - \frac{11}{128} (A_3^\pm)^2 \pm \left(\frac{7}{10}\gamma_1 - \frac{3\gamma^2}{20\gamma_1} \right), \tag{Д.12}$$

$$\tau = \left\{ \frac{\gamma}{2\lambda} - \frac{\lambda}{\gamma} \frac{(A_3^\pm)^2}{24} - \frac{\lambda^3}{\gamma^3} \left[\frac{1}{4} + \frac{(A_3^\pm)^2}{12} \left(B_3^\pm - \frac{(A_3^\pm)^2}{24} \right) \right] + O(\lambda^5) \right\} t. \tag{Д.13}$$

В случае режима (1 : 1 : 1) имеются только кластеры, образованные одним маятником. Для этого решения ϕ_m^+ характеристические показатели

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{in} &= 0, \\
\Lambda_2^{in} &= -\lambda, \\
\Lambda_3^{in} &= -\lambda^3 \frac{(A_3^+)^4}{128\gamma^4} \left(\gamma_1 - \frac{(A_3^+)^2}{16} \right) + O(\lambda^4), \\
\Lambda_4^{in} &= -\lambda + \lambda^3 \frac{(A_3^+)^4}{128\gamma^4} \left(\gamma_1 - \frac{(A_3^+)^2}{16} \right) + O(\lambda^4), \\
\Lambda_{5,6}^{in} &= -\frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3\gamma_1}{4\gamma^2} (A_3^+)^2} \right) + O(\lambda^2).
\end{aligned} \tag{Д.14}$$

Соответственно для ϕ_m^- :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{in} &= 0, \\
\Lambda_2^{in} &= -\lambda, \\
\Lambda_3^{in} &= \lambda^3 \frac{(A_3^-)^4}{128\gamma^4} \left(\gamma_1 + \frac{(A_3^-)^2}{16} \right) + O(\lambda^4), \\
\Lambda_4^{in} &= -\lambda - \lambda^3 \frac{(A_3^-)^4}{128\gamma^4} \left(\gamma_1 + \frac{(A_3^-)^2}{16} \right) + O(\lambda^4), \\
\Lambda_{5,6}^{in} &= -\frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3\gamma_1}{4\gamma^2} (A_3^-)^2} \right) + O(\lambda^2).
\end{aligned} \tag{Д.15}$$

Приложение Е

Вывод параметра порядка подгруппы с помощью разложения моментов

Начнем с общей редукции стохастического уравнения второго порядка

$$\mu \ddot{\phi} + \dot{\phi} = F(\phi, t) + \sigma \zeta(t)$$

к уравнению первого порядка, верного для малых μ . Плотность вероятности $P(\phi, \dot{\phi}, t)$ подчиняется соответствующему уравнению Фоккера–Планка

$$\partial_t P + \partial_\phi (\dot{\phi} P) + \partial_{\dot{\phi}} (\mu^{-1}(-\dot{\phi} + F)P) = \mu^{-2} \sigma^2 \partial_{\dot{\phi}}^2 P. \quad (\text{E.1})$$

Будем использовать метод моментов, описанный в [91].

Сначала введем моменты скоростей:

$$w_m(\phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\phi} \dot{\phi}^m P(\phi, \dot{\phi}, t).$$

Согласно (E.1), эти моменты подчиняются следующим уравнениям:

$$\partial_t w_0 + \partial_\phi w_1 = 0, \quad (\text{E.2})$$

$$w_1 + \mu \partial_t w_1 = F w_0 - \mu \partial_\phi w_2, \quad (\text{E.3})$$

$$w_m + \frac{\mu}{m} \partial_t w_m = F w_{m-1} - \frac{\mu}{m} \partial_\phi w_{m+1} + (m-1) \frac{\sigma^2}{\mu} w_{m-2} \text{ при } m \geq 2. \quad (\text{E.4})$$

Чтобы использовать малость параметра μ , удобно ввести перемасштабированные моменты

$$w_m = \begin{cases} \frac{1}{\mu^{m/2}} W_m & \text{при четных } m, \\ \frac{1}{\mu^{(m-1)/2}} W_m & \text{при нечетных } m. \end{cases}$$

В терминах моментов W_m , уравнения (E.2)–(E.4) могут быть переписаны в форме, свободной от особенностей

$$\partial_t W_0 + \partial_\phi W_1 = 0,$$

$$W_1 = F W_0 - \partial_\phi W_2 - \mu \partial_t W_1,$$

$$W_m = (m-1) \sigma^2 W_{m-2} + \mu \left(F W_{m-1} - \frac{1}{m} \partial_\phi W_{m+1} - \frac{1}{m} \partial_t W_m \right) \quad \text{при четных } m,$$

$$W_m = (m-1) \sigma^2 W_{m-2} + F W_{m-1} - \frac{1}{m} \partial_\phi W_{m+1} - \frac{\mu}{m} \partial_t W_m \quad \text{при нечетных } m.$$

Поскольку мы ищем поправки первого порядка по μ , перепишем эту систему, сохраняя только соответствующие члены

$$\begin{aligned}\partial_t W_0 + \partial_\varphi W_1 &= 0, \\ W_1 &= F W_0 - \partial_\varphi W_2 - \mu \partial_t W_1, \\ W_2 &= \sigma^2 W_0 + \mu \left(F W_1 - \frac{1}{2} \partial_\varphi W_3 - \frac{1}{2} \partial_t W_2 \right), \\ W_3 &\approx 2\sigma^2 W_1 + F W_2 - \frac{1}{3} \partial_\varphi W_4, \\ W_4 &\approx 3\sigma^2 W_2.\end{aligned}$$

Начиная с подстановки выражения для W_4 в уравнение для W_3 , находим

$$\begin{aligned}W_3 &\approx 2\sigma^2 W_1 + F W_2 - \sigma^2 \partial_\varphi W_2, \\ W_2 &\approx \sigma^2 W_0 + \mu \left[-\frac{\sigma^2}{2} \partial_t W_0 + F (F W_0 - \sigma^2 \partial_\varphi W_0) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_\varphi (F W_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^4}{2} \partial_\varphi^2 W_0 - \sigma^2 \partial_\varphi (F W_0 - \sigma^2 \partial_\varphi W_0) \right], \\ W_1 &\approx F W_0 - \sigma^2 \partial_\varphi W_0 + \mu \left[-(\partial_t F + F \partial_\varphi F) W_0 + \sigma^2 (\partial_\varphi F) \partial_\varphi W_0 \right].\end{aligned}$$

Окончательно, в первом порядке по μ получаем следующее уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения фаз $\rho(\varphi, t) \equiv W_0(\varphi, t)$:

$$\partial_t \rho + \partial_\varphi [(F(1 - \mu \partial_\varphi F) - \mu \partial_t F) \rho] = \sigma^2 \partial_\varphi [(1 - \mu \partial_\varphi F) \partial_\varphi \rho].$$

Соответствующее уравнение Ланжевена имеет вид

$$\dot{\varphi} = F - \mu \left(\partial_t + F \partial_\varphi + \frac{\sigma^2}{2} \partial_\varphi^2 \right) F + \sigma \sqrt{1 - \mu \partial_\varphi F} \xi(t).$$

Далее, аналогично процедуре, описанной в разделе 3.1, перейдем во вращающуюся систему отсчета, вводя $\theta = \varphi - \psi$, где $\dot{\psi} = \Omega$. В этой системе отсчета примем $F = \nu - A \sin \theta$ и будем искать стационарное решение $\rho_0(\theta)$, удовлетворяющее следующему уравнению

$$0 = -\partial_\theta [(1 + \mu A \cos \theta) (\nu - A \sin \theta) \rho_0] + \sigma^2 \partial_\theta [(1 + \mu A \cos \theta) \partial_\theta \rho_0]. \quad (\text{E.5})$$

Решение (E.5), удовлетворяющее периодичности $\rho_0(\theta) = \rho_0(\theta + 2\pi)$, имеет вид (см. [92])

$$\rho_0(\theta|\omega) = \frac{1}{Z} e^{V(\theta)/\sigma^2} \int_\theta^{\theta+2\pi} d\theta' (1 - \mu A \cos \theta') e^{-V(\theta')/\sigma^2}, \quad (\text{E.6})$$

где $V(\theta) = \nu\theta + A \cos \theta$, и Z – нормировочная константа,

$$Z = 2\pi^2 e^{-\pi\nu/\sigma^2} \left\{ 2I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}} \left(-\frac{A}{\sigma^2} \right) I_{-i\frac{\nu}{\sigma^2}} \left(-\frac{A}{\sigma^2} \right) - \mu A \left[I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}} \left(-\frac{A}{\sigma^2} \right) I_{-i\frac{\nu}{\sigma^2}} \left(-\frac{A}{\sigma^2} \right) + I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}} \left(-\frac{A}{\sigma^2} \right) I_{1-i\frac{\nu}{\sigma^2}} \left(-\frac{A}{\sigma^2} \right) \right] \right\}$$

(см. 6.681.3 и 8.511.4 в [93]). Аналогичные интегралы появляются при вычислении параметра порядка $\langle e^{i\theta} \rangle$ согласно (E.6); получаемое выражение совпадает с выражением для $a_{0,1}(\omega)$ (формула (4.23)) с точностью до нормировки.