

Акустический институт им. академика Н.Н. Андреева

На правах рукописи



**Канев Николай Георгиевич**

**ГАШЕНИЕ ЗВУКА СИСТЕМАМИ ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ  
РЕЗОНАТОРОВ В КАНАЛАХ, ПОМЕЩЕНИЯХ И МЕТАСРЕДАХ**

1.3.7 – Акустика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва 2023

## Оглавление

Введение.....	8
Глава 1. Некоторые способы гашения шума .....	17
1.1. Резонаторы.....	17
1.1.1. Резонатор Гельмгольца.....	18
1.1.2. Резонаторы в каналах .....	21
1.1.3. Резонаторы в помещениях .....	24
1.1.4. Пространственные решетки резонаторов.....	26
1.1.5. Гашение поверхностных волн .....	27
1.1.6. Гашение изгибных волн .....	29
1.1.7. Метаматериалы .....	31
1.2. Активное гашение звуковых полей.....	33
1.2.1. Метод Малюжинца и его развитие .....	33
1.2.2. Метод разделения пространственных гармоник .....	40
1.2.3. Экстремальные задачи гашения .....	41
1.2.4. Локальные активные системы .....	46
1.2.5. Адаптивное управление .....	48
1.2.6. Примеры активных систем .....	49
1.3. Оптимизация импеданса .....	53
1.3.1. Согласование импедансов.....	53
1.3.2. Метод полного согласования импедансов .....	56
1.3.3. Оптимизация импеданса стенок каналов и помещений .....	58
1.4. Выводы к главе 1 .....	61
Глава 2. Активные устройства резонансного типа.....	63
2.1. Концепция управления движением резонатора.....	63

2.1.1. Управление собственной частотой и трением резонатора .....	63
2.1.2. Управление импедансом резонатора .....	66
2.1.3. Активный резонатор .....	68
2.2. Метод выбора конструкции активного резонатора .....	69
2.2.1. Устойчивость .....	70
2.2.2. Робастность .....	71
2.2.3. Влияние обратной связи .....	73
2.2.4. Взаимное расположение приемника и излучателя .....	78
2.3. Активный резонатор для гашения изгибных колебаний стержня .....	83
2.3.1. Постановка задачи гашения .....	83
2.3.2. Конструкция активного резонатора .....	85
2.3.3. Поглощение изгибных волн .....	86
2.3.4. Виброизоляция изгибных волн .....	89
2.4. Выводы к главе 2 .....	92
Глава 3. Гашение звука в узких трубах .....	94
3.1. Дипольный резонатор .....	94
3.1.1. Физические модели .....	94
3.1.2. Монопольно-дипольный резонатор .....	97
3.2. Некоторые задачи гашения .....	99
3.2.1. Рассеяние в бесконечной трубе .....	99
3.2.2. Поглощение в трубе .....	108
3.2.3. Гашение звука, излучаемого из открытой трубы .....	116
3.3. Импеданс излучения в трубе .....	132
3.3.1. Присоединенная масса монополя и диполя в трубе .....	133
3.3.2. Влияние зазора между излучателем и стенками трубы .....	141
3.4. Квадрупольный резонатор .....	148

3.4.1. Механическая модель резонатора .....	148
3.4.2. Импеданс резонатора.....	153
3.4.3. Демонстрационный эксперимент .....	155
3.5. Выводы к главе 3.....	157
Глава 4. Плоские регулярные системы резонаторов.....	159
4.1. Решетки резонаторов .....	159
4.1.1. Оптимизация поглощения.....	159
4.1.2. Поглощающая решетка резонаторов у импедансной поверхности. 166	
4.1.3. Решетка с регулируемым импедансом .....	174
4.2. Активные поверхности.....	176
4.2.1. Поверхность, образованная монополями .....	176
4.2.2. Поверхность, образованная диполями.....	182
4.3. Поверхности с тангенциально реагирующим импедансом .....	186
4.3.1. Физическая постановка .....	186
4.3.2. Тангенциальный импеданс .....	191
4.3.3. Звукопоглощающие свойства поверхностей.....	198
4.3.4. Коэффициент отражения от двоякореагирующей поверхности .....	202
4.3.5. Поверхности, сформированные мультипольными резонаторами ...	204
4.4. Выводы к главе 4.....	206
Глава 5. Гашение звука в каналах .....	208
5.1. Резонаторы в канале .....	208
5.1.1. Двухмодовый волновод.....	208
5.1.2. Гашение звука резонаторами в волноводе .....	211
5.1.3. Периодическая решетка резонаторов на стенке волновода .....	212
5.2. Активная импедансная поверхность.....	222
5.2.1. Поверхность, эквивалентная решетке .....	222

5.2.2. Устойчивость активной поверхности .....	224
5.2.3. Робастность активной поверхности .....	226
5.3. Метод кратных мод (метод Кремера) .....	227
5.3.1. Оптимизация затухания звука в плоском канале .....	227
5.3.2. Оптимизация затухания звука в прямоугольном канале .....	233
5.3.3. Канал с тангенциально реагирующей стенкой .....	239
5.4. Выводы к главе 5 .....	242
Глава 6. Гашение звука в помещениях на низких частотах .....	244
6.1. Поглощение звука резонатором Гельмгольца .....	244
6.1.1. Оптимизация демпфирования низкочастотных мод .....	244
6.1.2. Экспериментальное исследование .....	251
6.2. Активный резонатор .....	258
6.2.1. Оптимизация поглощения одной моды .....	258
6.2.2. Модельный эксперимент .....	265
6.2.3. Демпфирование нескольких мод .....	267
6.3. Импедансные стенки .....	274
6.3.1. Помещение с одной поглощающей стенкой .....	275
6.3.2. Кратные моды помещения .....	279
6.3.3. Задача о минимальном времени реверберации .....	282
6.4. Выводы к главе 6 .....	283
Глава 7. Гашение звука в помещениях на высоких частотах .....	285
7.1. Затухание звука в помещении с импедансными стенками .....	285
7.1.1. Прямоугольное помещение .....	285
7.1.2. Устойчивые лучевые траектории .....	295
7.2. Метод измерения коэффициентов поглощения и рассеяния звука в недиффузном звуковом поле .....	303

7.2.1. Методика.....	303
7.2.2. Экспериментальная проверка метода.....	313
7.2.3. Возможность измерения анизотропии коэффициента рассеяния....	316
7.2.4. Измерения при нормальном падении звуковой волны.....	319
7.3. Приложения в архитектурной акустике.....	326
7.3.1. Неэкспоненциальное затухание звука.....	326
7.3.2. Резонаторы Гельмгольца в помещениях (голосники).....	330
7.3.3. Возможности активных резонансных поглотителей.....	339
7.4. Выводы к главе 7.....	341
Глава 8. Резонаторные метасреды.....	343
8.1. Дисперсия скорости звука в среде с периодической структурой резонаторов.....	343
8.1.1. Монопольные резонаторы.....	343
8.1.2. Замечание о задаче Максвелла.....	346
8.1.3. Дипольные резонаторы.....	347
8.1.4. Монопольно-дипольные резонаторы.....	349
8.1.5. Квадрупольные резонаторы.....	351
8.2. Уравнение Гельмгольца для среды, заполненной мультипольными рассеивателями.....	353
8.3. Дипольная метасреда.....	358
8.3.1. Среда с включениями, отличающимися плотностью.....	359
8.3.2. Неполяризованная метасреда.....	360
8.3.3. Поляризованная метасреда.....	362
8.4. Волны в несжимаемой метасреде.....	366
8.4.1. Метасреда с продольными квадрупольями.....	368
8.4.2. Метасреда с поперечными квадрупольями.....	373

8.5. Выводы к главе 8.....	376
Основные результаты работы .....	377
Литература .....	380

## Введение

### **Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Борьба с шумом уже много десятилетий является одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений современной акустики. К концу XIX века были установлены основные законы акустики, которые позволили разработать и внедрить в практику большое количество различных подходов к гашению звука в прикладных задачах. Для этого используются специальные материалы или конструкции, взаимодействующие со звуковым полем и обеспечивающие эффективное поглощение или рассеяние звуковой энергии. Во второй половине XX века началось интенсивное развитие активных методов гашения акустических полей, основная идея которых заключается в управляемом изменении поля в некоторой области пространства с помощью дополнительных источников звука. В XXI веке повышенное внимание исследователей обращено к созданию метаматериалов – синтетических структур на основе как пассивных, так и активных элементов, обладающих необычными свойствами, которые в некоторых случаях оказываются весьма полезными для борьбы с шумом.

Среди множества средств, применяемых для гашения шума, следует выделить использование резонаторов. Известно, что резонансные рассеиватели с оптимальными параметрами обеспечивают максимально возможное поглощение или рассеяние звука. В свободном пространстве резонансное сечение поглощения и рассеяния для упругих волн любой природы, как объемных, так и поверхностных, зависит только от длины волны и не зависит от размера рассеивателя. Это, во-первых, позволяет считать резонаторы наиболее эффективным средством гашения низкочастотных полей, а, во-вторых, исследование задач о воздействии резонаторов на волновые поля позволяет определить физический предел эффективности гашения. В подавляющем большинстве теоретических и практических исследований используются резонаторы монополюсного типа, для звуковых

волн чаще всего предлагается резонатор Гельмгольца. Хотя из общего представления о гашении звукового поля в некоторой области пространства ясно, что необходимо использовать как монополи, так и диполи. Например, для поглощения звука, распространяющегося в бесконечной трубе, требуется одновременное использование монополюсного и дипольного резонаторов. В связи с этим исследование возможностей дипольных резонаторов, а также резонаторов с более высоким порядком мультипольности и выявление их особенностей и преимуществ для задач гашения звука представляется довольно актуальным.

Резонаторы имеют достаточно большую амплитуду колебаний лишь в окрестности резонансной частоты, а предельные сечения поглощения и рассеяния достигаются только на ней. Поэтому обычные резонаторы применимы лишь для гашения узкополосного шума. Для преодоления этого недостатка предлагаются активные резонаторы – локальные устройства, имеющие резонансный импеданс в широкой полосе частот. Данная концепция доведена до технического воплощения и применяется на практике для гашения звука в узких трубах. Вместе с тем использование активных резонаторов для создания систем большого пространственного масштаба практически не изучено. В первую очередь это связано с тем, что, согласно методу Малюжинца и его развитию, для полного активного гашения требуются нелокально реагирующие системы вторичных источников звука. Прогресс цифровых технологий и возможностей численного эксперимента мотивирует проведение множества исследований, ставящих задачу реализовать полное гашение. Однако результаты, сопоставимые с теоретическими возможностями, в лабораторном или натурном эксперименте пока не достигнуты. Теоретически локально реагирующие активные системы уступают по своим возможностям не локально реагирующим системам, хотя в ряде задач эта разница и не столь велика. Поэтому исследование локально реагирующих активных систем, в частности, состоящих их резонансных

элементов, является актуальным, а их использование перспективным для практической реализации.

### **Основная цель и задачи диссертационной работы:**

Целью диссертации является разработка теоретических основ и установление физических закономерностей использования монополюсных, дипольных и квадрупольных резонаторов в системах пассивного и активного гашения звука в каналах, помещениях и метасредах. Цель работы обуславливает решение следующих задач:

1. Развить известный метод гашения шума и вибрации активными резонаторами, имеющими резонансный импеданс в широкой полосе частот, с точки зрения усовершенствования технологии создания устройств, повышения стабильности и эффективности их работы.
2. Исследовать возможности гашения шума многоэлементными системами активных резонаторов на масштабах, много превышающих длину звуковой волны, и определить теоретические пределы таких возможностей.
3. Поставить и решить задачи об отражении звука от поверхностей, покрытых решетками резонаторов, о распространении звука в каналах и помещениях, стенки которых покрыты резонаторами, об акустических свойствах сред, заполненных резонаторами.
4. Исследовать различные типы резонаторов: монополюсные, дипольные, квадрупольные и в общем случае с произвольным порядком мультиполюсности, а также резонаторные системы на их основе.

### **Научная новизна работы состоит в следующем:**

1. Разработан подход к созданию активно управляемых устройств, называемых активными резонаторами, на основе впервые предложенного критерия робастности, состоящего в количественной оценке параметра робастности системы и выборе такого устройства системы, при котором обеспечивается минимальное значение параметра.

2. Впервые предложен, теоретически и экспериментально исследован квадрупольный акустический резонатор.
3. Впервые показано, что поверхности, покрытые мультипольными резонаторами, имеют отличные акустические свойства, которые не могут быть описаны стандартными импедансными граничными условиями.
4. Впервые введено понятие тангенциального импеданса для поверхностей, реагирующих на касательное акустическое воздействие.
5. Решена задача оптимизации затухания звука в плоском и прямоугольном каналах с нормально и тангенциально реагирующими стенками методом кратных мод и впервые найден максимально достижимый порядок кратности мод.
6. Впервые получены теоретически и проверены экспериментально законы затухания звука в помещениях с импедансными стенками.
7. Предложен и экспериментально проверен новый способ измерения акустических характеристик поверхностей – коэффициентов рассеяния и поглощения звука.
8. Впервые получены уравнения состояния, найдены дисперсионные свойства и обнаружены новые типы волн в средах, заполненных резонаторами различной мультипольности.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты, представленные в работе, могут быть использованы при проектировании пассивных и активных резонансных глушителей для труб; при разработке локально реагирующих систем произвольного масштаба, применяемых для гашения шума в широких каналах и помещениях; для проектирования акустики помещений, особенно для залов, в которых предусмотрено создание недиффузных звуковых полей или переменных акустических условий; при проведении измерений в лабораторных условиях коэффициентов поглощения и рассеяния звука материалов и конструкций; при теоретических исследованиях метаповерхностей и метасред, сформированных резонаторами.

## **Методология и методы исследования**

Для достижения поставленной цели используются методы теоретической акустики и математической физики, в частности, метод Фурье, метод лучевых траекторий в приближении геометрической акустики, для решения некоторых задач использовались методы компьютерного моделирования. Экспериментальные исследования в трубах проведены с помощью метода разделения поля на плоские волны, а в помещениях кривые затухания получены методом интегрирования Шредера. Время реверберации измеряется с помощью стандартизованных методов, основанные на статистической теории реверберации Сэбина. Применены статистические методы обработки экспериментальных данных.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Робастность используется как критерий качества систем активного гашения, для ее количественной оценки предлагается параметр, характеризующий снижение эффективности гашения при наличии ошибок настройки активной системы. Для локальной системы гашения – активного резонатора – данный параметр зависит от типов приемника и излучателя, их взаимного расположения, подбор которых должен осуществляться так, чтобы обеспечить минимальное значение параметра.

2. Согласно результатам экспериментальных исследований применение активных резонаторов для гашения звуковых волн в трубах и изгибных волн в стержнях при условии, что поперечные размеры труб и стержней значительно меньше характерных длин волн, позволяет в 10-15 раз увеличить ширину частотной полосы, в которой происходит эффективное гашение, и на 5-10 дБ степень гашения по сравнению с пассивными резонаторами.

3. Регулярные решетки активных резонаторов с пространственным периодом, меньшим длины звуковой волны, расположенные вблизи границы

с произвольным импедансом, образуют поверхность, акустические свойства которой могут быть описаны однородным эквивалентным импедансом, зависящим как от свойств границы, так и от свойств активных резонаторов. При этом эквивалентный импеданс может принимать любое заданное значение при соответствующем подборе импеданса активных резонаторов, что позволяет создавать поверхности с регулируемым локально реагирующим импедансом.

4. Существуют поверхности, реагирующие на касательное акустическое воздействие, свойства которых могут быть описаны специальным граничным условием, названным тангенциальным импедансом и представляющим отношение параметра, характеризующего касательное воздействие, к нормальной скорости поверхности. Для поверхности, покрытой дипольными резонаторами, таким параметром является сумма вторых частных производных звукового давления по координатам, оси которых являются касательными к поверхности (тангенциальный лапласиан).

5. Максимальное затухание звука в каналах и помещениях, каждая стенка которых имеет однородный импеданс, связано с появлением кратных мод: максимальная кратность для плоского канала составляет 3, для канала прямоугольного сечения – 9, для помещения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, – 27.

6. Затухание звука на высоких частотах в зависимости от времени в помещении в форме прямоугольного параллелепипеда с импедансными стенками происходит по степенному закону, если в помещении есть хотя бы пара абсолютно жестких параллельных стенок, или, в общем случае, когда все стенки имеют конечный импеданс, по экспоненциально-степенному закону.

7. Коэффициенты поглощения и рассеяния звука поверхностей могут быть измерены в недиффузном звуковом поле, имеющем неэкспоненциальный закон затухания. Для этого измеренная кривая затухания сопоставляется с известным теоретическим законом, параметры которого подбираются так, чтобы добиться наилучшего совпадения экспериментальной и теоретической

кривых затухания. Анизотропные свойства поля используются для определения угловой зависимости измеряемых коэффициентов.

8. Существует диапазон частот – полоса запираания – для сред, заполненных бездиссипативными монопольными, дипольными или квадрупольными резонаторами, на которых звуковые волны не распространяются. Ширина полосы запираания зависит от концентрации резонаторов, а также от их собственной частоты и механических параметров.

9. В несжимаемой среде, заполненной квадрупольными резонаторами, существует волновое движение, связанное с колебаниями резонаторов. Волны распространяются на частотах ниже собственной частоты резонаторов, являются поперечными и сильно анизотропными.

**Личный вклад автора.** Все результаты, представленные в диссертации, получены автором лично или при его непосредственном участии. 34 работы (в том числе 17 статей) из 53 выполнены без соавторов. В остальных работах диссертант в значительной мере определял направление исследований, ставил и решал теоретические и экспериментальные задачи, обсуждал и интерпретировал полученные данные.

**Достоверность** ряда теоретических результатов в виде точных аналитических решений задач подтверждается экспериментами, проведенными в рамках диссертационного исследования. Эксперименты, в свою очередь, показали достаточно высокую повторяемость, некоторые из них были независимо повторены в лабораторных условиях другими исследователями. Остальные теоретические результаты подтверждаются прямыми расчетами, имеют ясную физическую интерпретацию и согласуются с результатами других авторов.

**Апробация результатов работы.** Результаты исследований по теме диссертации доложены и обсуждены на следующих конференциях: сессиях

Российского акустического общества (2001, 2003, 2005, 2006, 2019, 2023 гг. – Москва; 2004, 2007 гг. – Нижний Новгород), 2-й Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Защита населения от повышенного шумового воздействия» (Санкт-Петербург, 2009), Научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.В. Римского-Корсакова (Москва, 2010), Международной акустической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Е.Я. Юдина (Москва, 2014), II и III Всероссийских акустических конференциях (Нижний Новгород, 2017; Санкт-Петербург, 2020), 9-й конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» (Светлогорск, 2022), 8-й конференции «Акустика среды обитания» (Москва, 2023), 6<sup>th</sup> and 11<sup>th</sup> European Conference on Noise Control (Tampere, Finland, 2006; Crete, Greece, 2018), 8<sup>th</sup> and 9<sup>th</sup> Conference on Active Noise and Vibration Control Methods (Krakow-Krasiczin, Poland, 2007; Krakow-Zakopane, Poland, 2009), 19<sup>th</sup> and 22<sup>nd</sup> International Congress on Acoustics (Madrid, Spain, 2007; Buenos Aires, Argentina, 2016), International Conference ACTIVE-2009 (Ottawa, Canada, 2009), 39<sup>th</sup>, 46<sup>th</sup> and 49<sup>th</sup> International Congress on Noise Control Engineering (Lisbon, Portugal, 2010; Hong Kong, China, 2017; Seoul, Korea, 2020), Forum Acusticum (Aalborg, Denmark, 2011), International Symposium on Room Acoustics (Amsterdam, Netherlands, 2019), 2<sup>nd</sup> Symposium on the Acoustics of Ancient Theatres (Verona, Italy, 2022), а также на научных семинарах им. проф. С.А. Рыбака «Акустика неоднородных сред» в Акустическом институте (2006, 2010, 2012, 2023 гг.), кафедры акустики МГУ (2006 г.), кафедры экологии и промышленной безопасности МГТУ им. Н.Э. Баумана (2022 г.), акустического отделения ЦАГИ (2023 г.), кафедры акустики ННГУ (2023 г.), Научного центра волновых исследований ИОФ РАН (2023 г.).

**Публикации.** Основные научные результаты диссертационной работы представлены в 53 публикациях, 22 из которых – в рецензируемых научных

изданиях, в т.ч. индексируемых Web of Science и Scopus, патентах на изобретения.

Диссертационная работа состоит из введения, восьми глав и заключения. В главе 1 дается обзор современных методов гашения акустических волн. В главе 2 рассмотрены активные резонаторы – локальные устройства для широкополосного гашения звука. В главе 3 приведены теоретические и экспериментальные результаты по гашению звука одиночными пассивными и активными резонаторами в узких трубах. Глава 4 посвящена регулярным решеткам активных резонаторов, вводится понятие эквивалентного импеданса для таких систем. В главе 5 исследуется задача о гашении звука в многомодовом волноводе с помощью решеток резонаторов и импедансных поверхностей. В главе 6 рассмотрено гашение звука в помещениях в диапазоне, соответствующем области первых собственных частот помещения. В главе 7 продолжено рассмотрение задач гашения звука в помещениях на высоких частотах в лучевом приближении. В главе 8 представлен теоретический анализ акустических свойств сред, имеющих малые включения с резонансными свойствами.

## **Глава 1. Некоторые способы гашения шума**

Методы борьбы с шумом развиваются уже более сотни лет, сегодня известно несколько фундаментальных подходов к решению этой проблемы. Многие подходы развиваются теоретически и на уровне лабораторного эксперимента, но значительная их часть успешно применяется на практике. В настоящей работе гашением звука будем называть успешное решение некоторой задачи о снижении интенсивности звука в некоторой ограниченной или безграничной области пространства без физического отделения этой области от остального пространства.

В основе всех методов гашения лежат два физических механизма. Первый связан с диссипацией звуковой энергии: некоторые среды и механические системы эффективно трансформируют звуковую энергию в другие виды энергии, при этом интенсивность поля снижается во всем пространстве или в некоторой его части. Вторым механизмом является рассеяние на некоторых препятствиях, в этом случае распределение звуковой энергии в пространстве изменяется. Например, из-за дифракции за экраном образуется зона тени – область пространства, для которой решается задача гашения. Кроме этого, изменение условий в среде распространения может оказать влияние на звукоизлучение источников шума, что может привести к снижению излучаемой энергии. Такое воздействие в некоторых случаях позволяет обеспечить требуемое гашение и может быть связано как с диссипативным, так и бездиссипативным механизмами.

Известно довольно много способов гашения шума, ниже рассмотрим только те из них, которые имеют отношение к настоящему исследованию.

### **1.1. Резонаторы**

Резонатором, как правило, называют простейшую колебательную систему с одной степенью свободы и одной собственной (резонансной) частотой, трение в которой так мало, что амплитуда вынужденных колебаний

этой системы на резонансной частоте велика по сравнению с амплитудой вынужденных колебаний на других частотах. В некоторых задачах это свойство резонаторов обеспечивает максимально возможное влияние на колебания системы или среды, с которыми взаимодействует резонатор, поэтому соответствующие эффекты также называют резонансными. В акустике резонаторы нашли широкое применение для гашения колебаний различной природы.

### 1.1.1. Резонатор Гельмгольца

Самым известным акустическим резонатором является резонатор Гельмгольца [261] – замкнутый объем, сообщающийся с окружающим пространством через небольшое отверстие или горло. Г. Гельмгольц использовал небольшие полые стеклянные шары (рис. 1-1 согласно [166]) для выделения отдельных тонов из сложного звука. Широкое отверстие  $a$  воспринимало звуковую волну, а малое отверстие  $b$  связывалось с некоторым приемником, например, ухом. Вместе с тем первые практические рекомендации по использованию резонаторов, подобных резонатору Гельмгольца, по-видимому, содержатся в трактате Витрувия [32], в котором рекомендуется устанавливать медные или глиняные сосуды в особые ниши между сидениями театра для улучшения его акустики.

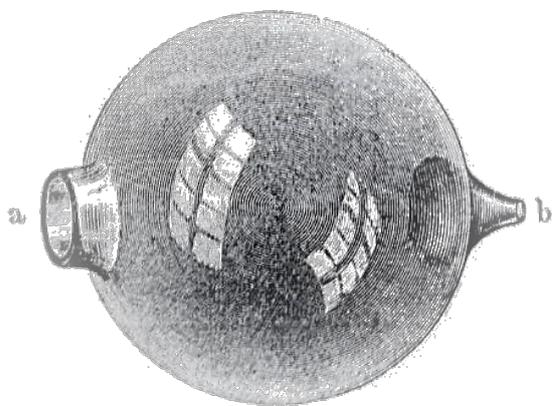


Рис. 1-1. Резонатор Гельмгольца [166]

Если характерный размер объема резонатора Гельмгольца мал по сравнению с длиной волны, то резонатор имеет единственное собственное колебание, при котором среда внутри резонатора остается практически неподвижной, а основное движение среды сосредоточено в его горле. Для окружающего пространства резонатор является

источником объемной скорости, т.е. источником звука монопольного типа. Поэтому резонатор Гельмгольца относится к монопольным резонаторам, как и другой хорошо известный пример резонатора такого типа – газовый пузырек в жидкости.

Замечательной особенностью резонаторов является то, что сечение поглощения и рассеяния звуковых волн не зависит от размера резонатора и его формы, а только от длины волны [53]. В свободном пространстве сечение поглощения монопольного резонатора с оптимальным трением на собственной частоте составляет  $\lambda^2/4\pi$ , где  $\lambda$  – длина звуковой волны. Если резонатор имеет нулевое трение, то его сечение рассеяния будет равно  $\lambda^2/\pi$ . С уменьшением частоты сечение поглощения увеличивается, поэтому резонаторы наиболее эффективны для поглощения низкочастотного звука.

В узких трубах резонаторы являются эффективными отражателями звука. Бездиссипативный резонатор Гельмгольца, установленный в некотором сечении трубы (рис. 1-2, *а*), полностью отражает падающую звуковую волну на собственной частоте, при этом коэффициент отражения по амплитуде будет равен  $-1$ , т.е. резонатор эквивалентен абсолютно мягкой границе. Резонатор с оптимальным трением поглощает лишь половину энергии падающей волны, четверть энергии отражается, и еще четверть проходит за сечение, в котором установлен резонатор. Поэтому одиночный резонатор не является эффективным поглотителем звука в трубах, хотя при установке в жестком торце трубы (рис. 1-2, *б*) и соответствующем подборе трения он полностью поглощает падающую волну.

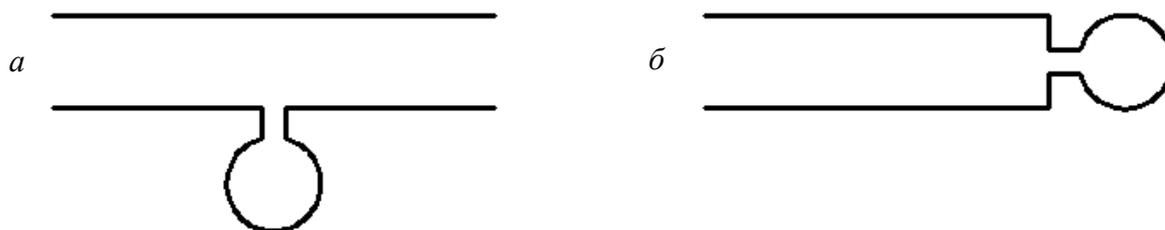


Рис. 1-2. Резонатор Гельмгольца в трубе (*а*) и на торце трубы (*б*)

Резонансное поглощение звука определяется главным образом вязкими потерями в окрестностях горла резонатора, которые в классической работе У. Ингарда [267] представлены в виде суммы двух составляющих. Первая связана с потерями в вязком погранслое на стенке резонатора, в которой расположено горло, а вторая – непосредственно на его кромках. Кроме этого, существует механизм тепловой диссипации в полости резонатора, рассмотренный в работе А.И. Комкина и М.А. Миронова [91], и диссипация на кромках отверстия, теоретически исследованная в работе [229]. Надежного теоретического подхода для вычисления потерь в резонаторе пока не разработано, поэтому основные сведения о потерях резонаторов получают из эксперимента [28, 92, 371]. Для оптимизации поглощения собственных потерь резонаторов бывает недостаточно, для увеличения потерь в горло помещают волокнистые материалы.

Сопротивление излучения резонатора используется при подборе его параметров для эффективного гашения звука, оно зависит от параметров горла и условий, в которых находится резонатор. Реактивная часть импеданса часто описывается концевой поправкой или присоединенной длиной. Присоединенная длина отверстия в бесконечном экране приблизительно найдена Рэлеем [165]; в перегородке, расположенной в поперечном сечении канала – в классических работах В.А. Фока [181], Ф.Карала [295], У. Ингарда [266]. Результаты этих работ обобщены А.И. Комкиным и др. [93], получившими общую формулу для оценки присоединенной длины отверстий с помощью численного эксперимента. Также известны эмпирические формулы для расчета присоединенной длины в зависимости от геометрических параметров горла резонаторов [212, 294]. Если длина волны сопоставима с размером полости резонатора, то необходимо учитывать влияние собственных колебаний полости. Это приводит к дополнительным резонансным частотам, на которых также может наблюдаться эффект гашения звука. В работе А.Селамета и др. [361] теоретически и экспериментально исследовано влияние всех резонансных частот на запирающие в узкой трубе

(рис. 1-2 а). Отдельное внимание уделяется влиянию геометрии переходного участка между основным объемом и горлом резонатора на собственную частоту, учет которой позволяет точнее рассчитывать параметры резонатора, предложенные поправки хорошо согласуются с экспериментом [380]. Горло резонатора является обычно гладкой трубкой с постоянным или плавно меняющимся сечением. В работе [399] численно исследован резонатор с рельефным горлом, показано, что при учете вязких эффектов потери в таком резонаторе существенно возрастают.

В целом теория резонатора Гельмгольца на сегодня всесторонне разработана [213, 267, 370] и нашла свое применение в широкой практике борьбы с шумом: резонаторы используются для создания глушителей различного назначения, облицовок внутренних поверхностей авиадвигателей, звукопоглощающих покрытий для улучшения акустики помещений и многих других задач. Продолжаются исследования работы резонатора Гельмгольца в нелинейном режиме на высоких уровнях звука [300].

### **1.1.2. Резонаторы в каналах**

В одномодовом канале одиночный резонатор Гельмгольца эффективно отражает падающую на него звуковую волну в узкой частотной полосе в окрестности своей резонансной частоты. Для расширения частотного диапазона эффективного отражения используют несколько резонаторов, последовательно установленных вдоль оси трубы или в одном поперечном сечении трубы. Цепочка последовательно установленных одинаковых резонаторов образует волноводный изолятор. Теоретическое объяснение этого эффекта дано в работе М.А. Исаковича [54]: на частотах выше резонансной частоты эффективный импеданс стенки трубы является импедансом массового типа, это приводит к запираанию звуковых волн в широкой полосе частот. Сравнение аналитической модели волноводного изолятора с численным и лабораторным экспериментами, проведенное Р.Р. Залуцкой и М.А. Мироновым [49], показало их хорошее согласие. В эксперименте получено

снижение проходящего через изолятор звука более чем на 15 дБ в октавной полосе частот.

Бесконечные периодические цепочки одинаковых резонаторов Гельмгольца на стенках трубы исследованы в работах Н. Сугимото и Т.Хориока [367], Кс. Ванга [390, 391] и Ч.Мака [207]. Для характеристики затухания звука в такой трубе вводится постоянная распространения. Если она вещественна, то труба оказывается запертой. Выделяют три типа запираения: первый связан с собственными частотами резонаторов – в окрестности этой частоты звук затухает; второй вызван Брегговским рассеянием на периодической структуре и имеет место на частотах, при которых пространственный период решетки кратен половине длины волны; третий тип – это совпадение собственной частоты резонаторов и частоты Брегговского рассеяния. Аналогичные эффекты имеют место в трубах, на стенках которых располагаются такие же структуры дипольных резонаторов, но эффективность гашения системой легких дипольных резонаторов в трубе, заполненной жидкостью, оказывается значительно выше из-за архимедовой силы, обеспечивающей дополнительное взаимодействие резонаторов и среды [329].

Также для расширения частотной полосы используются несколько резонаторов с разными собственными частотами. Если частоты заметно отличаются, то можно считать, что резонаторы работают независимо. Поэтому классическая теория может быть использована непосредственно и дает хорошее согласие с экспериментом [230, 298], в котором исследованы резонаторы Гельмгольца. Подобный результат получается и для четверть-волновых резонаторов разной длины, расположенных эквидистантно вдоль оси трубы [210]. Однако, если резонаторы имеют близкие частоты, то они взаимодействуют друг с другом, что приводит к изменению их резонансных частот. Взаимодействие двух резонаторов в свободном пространстве исследовано Т.Йохансоном и М.Клейнером [274], ими получены соотношения для взаимных импедансов излучения. Взаимодействие двух резонаторов, размещенных в разных сечениях узкой трубы, рассмотрено в работе [251].

Если расстояние между этими сечениями сравнимо с длиной волны, то между ними возникают стоячие волны, которые приводят к увеличению эффективности гашения на некоторых частотах, а на других, наоборот, к уменьшению.

Гашение звука в широких по сравнению с длиной волны каналах при помощи резонаторов также изучается довольно давно [104]. В узкой трубе достаточно одного резонатора, чтобы отразить падающую волну на некоторой частоте. Однако выше первой критической частоты волновода резонатор слабо отражает падающую волну, он рассеивает звук, при котором происходит трансформация нормальных мод низких номеров в нормальные моды высоких номеров. На рис. 1-3 приведена зависимость сечения рассеяния  $\sigma_0$  резонатора Гельмгольца [109], встроенного в стенку канала квадратного сечения со стороной  $H$  и площадью  $S$ , пунктиром показана зависимость относительного сечения рассеяния резонатора в полупространстве. Сечение рассеяния резонатора равно нулю при критических частотах мод, в целом уменьшается с ростом частоты, но по более сложному закону, чем в свободном пространстве.

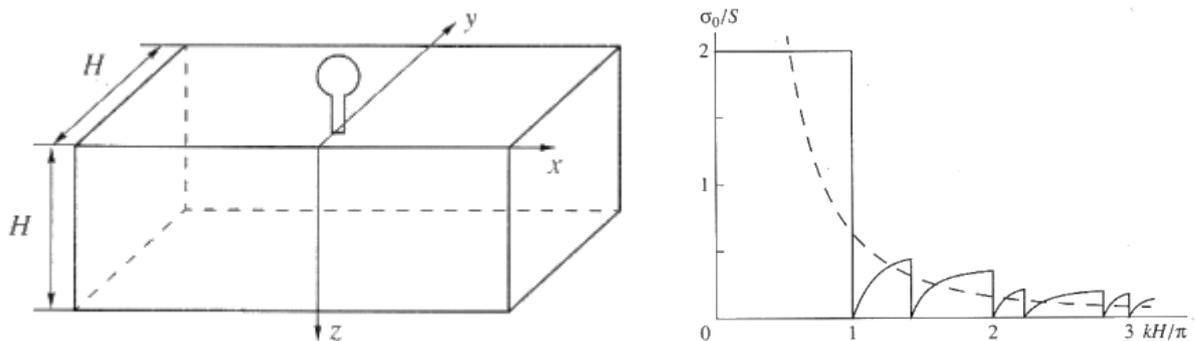


Рис. 1-3. Резонатор Гельмгольца в стенке волновода квадратного сечения и его сечение рассеяния в зависимости от волнового размера сечения канала  $kH$ .

В цикле работ А.Д. Лапина [118, 119, 121, 124, 126] исследованы возможности гашения звука системами резонаторов, расположенных в виде регулярной решетки в одном поперечном сечении или эквидистантной

решетки на стенках канала. Так, в канале прямоугольного сечения решетка с пространственными периодами, не превосходящими длину звуковой волны, полностью отражает нулевую моду. Принцип расположения резонаторов в поперечном сечении канала приведен на рис. 1-4, где звездочками указаны положения резонаторов, размеры маленьких прямоугольников, выделенных пунктиром, должны быть меньше звуковой волны. Для полного поглощения падающей волны необходимы резонаторы двух типов – монопольного и дипольного. Дипольные резонаторы подробно исследуются в настоящей работе.



Рис. 1-4. Расположение резонаторов в поперечном сечении волновода

### 1.1.3. Резонаторы в помещениях

Резонаторы применяются для коррекции звукового поля в помещениях, особенно сильное влияние они оказывают в области низких частот, собственные моды помещения взаимодействуют с резонатором [243]. Поле в прямоугольном помещении с резонатором Гельмгольца получено в работе А.Д. Лапина [111].

Как известно, на низких частотах нормальные частоты помещения расположены далеко друг от друга, поэтому передаточная функция помещения весьма неравномерна. Основная практическая задача заключается в сглаживании передаточной функции, уменьшении резонансных пиков. При правильном подборе параметров резонаторов и их расположения можно добиться существенного улучшения акустических свойств помещений. Предложено несколько подходов к настройке резонаторов. В работе Дж. Клауса и др. [299] найдены оптимальные значения трения резонатора для

минимизации звукового давления в помещении при излучении тонального звука; для минимизации звукового давления в окрестности собственной частоты помещения; для минимизации времени затухания некоторой моды. Собственная частота резонатора существенно изменяется при его перемещении из свободного пространства в помещение, поэтому требуется настройка резонатора, находящегося в помещении. При этом оптимальное трение сильно зависит от того, находится ли частота настройки в окрестности собственной частоты помещения или нет. Эти особенности экспериментально исследованы в работе [265].

Один резонатор способен повлиять лишь на один резонанс помещения, для более значительного поглощения применяются системы резонаторов. Общий теоретический подход для расчета звукового поля в помещении с несколькими резонаторами развит в работе А. Каммингса [225], где предлагается настраивать резонаторы на разные собственные частоты помещения. Более подробный анализ выполнен Дж.Ли и Д.Ченгом [308], основная трудность заключается в сложном взаимодействии нескольких резонаторов и мод помещения. В экспериментальной работе Д.Ли и др. [309] по три резонатора настраиваются на несколько собственных частот помещения, что позволяет сгладить передаточную функцию в области первых резонансов.

Как правило, собственных потерь резонатора недостаточно для обеспечения оптимального значения вещественной части импеданса для гашения низкочастотных мод [396], поэтому для увеличения трения в горле резонатора размещают волокнистый материал. Основная часть звуковой энергии, выводимой из помещения, диссипируется в малом объеме звукопоглощающего материала.

На высоких частотах плотность собственных мод помещений достаточно велика, поэтому одиночные резонаторы незначительно влияют на звуковое поле в помещении. Используются системы резонаторов, т.н.

звукопоглощающие облицовки – покрытия для поверхностей помещений, обеспечивающие эффективное поглощение звука [157,275].

#### **1.1.4. Пространственные решетки резонаторов**

Периодические решетки резонаторов при некоторых условиях эквивалентны импедансным поверхностям, что позволяет осуществлять гашение звуковых волн с широким фронтом, в пределе – плоских волн. Данный подход подробно развит А.Д. Лапиным, ниже дан краткий обзор его работ.

Решетка монополюсных резонаторов с прямоугольной ячейкой, установленная у плоской жесткой поверхности, полностью поглощает падающую под некоторым углом плоскую волну [113]. Для этого сопротивление излучения резонатора должно быть подобрано в зависимости от угла падения волны. Кроме того, пространственные периоды решетки не должны превышать половину длины звуковой волны. Последнее условие является универсальным для всех рассматриваемых здесь задач.

В свободном пространстве решетка бездиссипативных монополюсных резонаторов образует отражающую поверхность для плоской волны [130]. Для поглощения волны требуются резонаторы с диссипацией, однако решетка одинаковых резонаторов в лучшем случае может поглотить лишь половину энергии звуковой волны. Для полного поглощения необходимо дополнительно использовать решетку дипольных резонаторов [131]. При размещении в одной плоскости дипольные и монополюсные резонаторы не взаимодействуют друг с другом, поэтому каждая решетка поглощает по половине звуковой энергии волны, падающей под определенным углом, что при оптимальном трении резонаторов позволяет ее полностью поглотить на их резонансной частоте. Исключением является скользкое падение плоской волны: ее поглощение невозможно. Частный случай нормального падения волны на решетку эквивалентен задаче о поглощении звука в многомодовом

волноводе, где решетка из монополярных и дипольных резонаторов также может полностью поглотить нулевую моду [119, 121].

Также поглощение звука возможно парой решеток односторонних, например монополярных [132] резонаторов. В этом случае одна решетка – дальняя по направлению распространения гасимой волны – должна состоять из бездиссипативных резонаторов, а вторая решетка должна находиться на расстоянии кратном четверти длины волны от первой, и ее резонаторы должны иметь оптимальное трение. Первая решетка является отражающей и гасит звуковое поле за собой, перед ней образуется стоячая волна, а вторая решетка располагается в пучности стоячей волны.

В стоячем звуковом поле, образованном, например, интерференцией падающей и отраженной от стенки с реактивным импедансом волн, решетка монополярных или дипольных резонаторов в пучности стоячей волны может полностью поглотить отраженную волну [129].

### **1.1.5. Гашение поверхностных волн**

Резонаторы также эффективно рассеивают звуковые волны в твердых средах, в частности некоторые виды поверхностных волн. Если резонатор в виде массы на пружине действует по нормали к поверхности твердого тела (рис. 1-5,а), то в однородном полупространстве он создает поле, симметричное относительно точки воздействия, поэтому он называется монополярным. Монополярный резонатор реагирует на смещение границы поверхности. Если такой же резонатор закрепить к несгибаемому стержню, жестко заделанному в поверхность (рис. 1-5,б), то он будет реагировать на наклон поверхности, а его поле будет иметь дипольную характеристику. Комбинация двух резонаторов образует монополярно-дипольный резонатор (рис. 1-5,в).

Сечения рассеяния рэлеевской волны точечными монополярным и дипольным резонаторами найдены А.Д. Лапиным [108] и составляют  $1.1/k_t$  и  $0.5/k_t$  соответственно, где  $k_t = \omega/c_t$ ,  $\omega$  – частота,  $c_t$  – скорость поперечных

волн. Поскольку поля монополя и диполя ортогональны, то сечение рассеяния монополюсно-дипольного резонатора составит  $1.6/k_t$ .

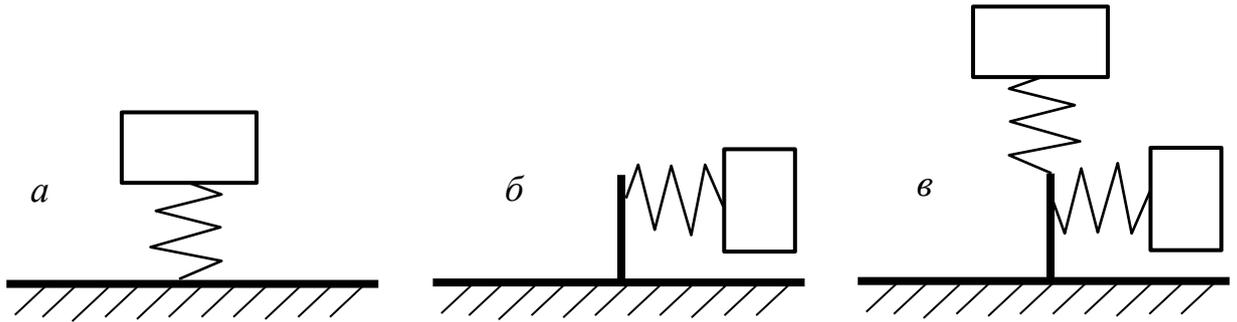


Рис. 1-5. Монопольный (а), дипольный (б) и монополюсно-дипольный (в) резонаторы на поверхности твердой среды

Линейный монополюсный резонатор исследован в работах В.П. Плесского и А.В. Симоньяна [152, 153], где показано, что на резонансной частоте коэффициенты отражения и прохождения рэлеевской волны через резонатор достигают примерно 0.5, при этом половина энергии падающей волны рассеивается в виде объемных волн. Увеличить эффективность отражения можно цепочкой линейных резонаторов, установленных на расстоянии, равном половине длины рэлеевской волны [125]. Коэффициент отражения составляет примерно  $(1 + 1/N)^{-1}$  и стремится асимптотически к единице при увеличении числа цепочек  $N$ .

Задача о рассеянии рэлеевской волны на линейном монополюсно-дипольном резонаторе решена в работе Лапина А.Д. [122], в которой показано, что, во-первых, дипольные резонаторы значительно эффективнее отражают волну, чем монополюсные резонаторы, и, во-вторых, резонаторы с оптимальным трением не отражают и не пропускают падающую волну, ее энергия частично уносится рассеянными объемными волнами и частично поглощается резонаторами.

В твердом слое резонаторы также являются эффективными изоляторами, если он является одномодовой пластиной [107]. В многомодовой пластине значительная часть энергии падающей моды рассеивается в другие

однородные моды и резонаторы перестают быть эффективными изоляторами волн. Для рассеяния мод высоких порядков могут применяться цепочки резонаторов [127]. Монопольно-дипольные резонаторы с определенным трением могут полностью поглотить нулевую симметричную или антисимметричную волну Лэмба [123].

Еще один тип поверхностных волн, для которых известно решение о резонансном поглощении, - гравитационные волны на поверхности несжимаемой жидкости [85]. Сечения поглощения монопольного и дипольного резонаторов составляют  $\lambda/2\pi$  и  $\lambda/\pi$  соответственно и не зависят от глубины погружения резонаторов. Цепочка монопольных и дипольных резонаторов с периодом, не превышающим длину поверхностной волны, способна полностью поглотить волну, падающую по нормали к цепочке.

#### **1.1.6. Гашение изгибных волн**

Достаточно полно исследовано гашение изгибных волн в стержнях и пластинах. В отличие от звуковых волн резонатор монопольного типа (рис. 1-5,а) снижает амплитуду колебаний пластины в окрестности места его крепления, теоретически и экспериментально этот эффект локального ослабления исследован И.И.Клюкиным и Ю.Д. Сергеевым [87]. Для увеличения области локального ослабления могут использоваться системы резонаторов [63], при этом в зависимости от направления прихода гасимой волны положение резонаторов может быть оптимизировано.

Также резонаторы являются поглотителями и изоляторами изгибных волн. Экспериментальное исследование широкополосных поглотителей, состоящих из совокупности резонансных элементов и наносимых на концы стержней или края пластин, проведено В.В. Тютеекиным и А.П. Шкварниковым [169]. Показано, что при длине поглотителя не более  $1/4$  длины изгибной волны на нижней частоте диапазона, ширина полосы эффективного поглощения составляет 1.5-2 октавы.

Одиночный монополюный или дипольный резонатор без трения обеспечивает изоляцию изгибной волны в стержне на своей собственной частоте [114]. Экспериментальное исследование виброизоляции колебания стержня системой резонаторов выполнено М.А. Исаковичем с соавторами [55], получен достаточно широкополосный эффект (волноводная изоляция), аналогичный результату для акустических резонаторов [54]. Для полного поглощения изгибной волны в стержне требуется монополюно-дипольный резонатор (рис. 1-5,в) с оптимальным трением [116].

Эффективность гашения колебаний пластины одиночного резонатора может быть описана сечением поглощения или рассеяния. А.Д. Лапиным найдены эти сечения для продольных и сдвиговых волн [106], установлена их пропорциональность длине сдвиговой волны. Коэффициент пропорциональности является соотношением скоростей продольных, сдвиговых и изгибных волн в пластине.

Цепочки резонаторов на пластинах позволяют гасить колебания в значительной, в пределе бесконечной области. Линейная цепочка бездиссипативных монополюных резонаторов полностью отражает изгибную волну длиной  $\lambda$  на одной частоте [112], если период решетки не превышает  $\lambda(1 + \sin \theta)^{-1}$ , где  $\theta$  – угол падения. Линейная цепочка монополюно-дипольных резонаторов с оптимальным трением полностью поглощает падающую волну [120], а изоляция точечного источника обеспечивается кольцом монополюно-дипольных резонаторов [117].

Для поглощения изгибной волны в пластине одностипными резонаторами необходимо две цепочки [128]: одна из них состоит из бездиссипативных резонаторов, которые полностью отражают падающую волну, а вторая, установленная в пучности стоячей волны, образованной падающей и отраженной волнами, поглощает отраженную волну.

### 1.1.7. Метаматериалы

В 1967 г. В.Г. Веселаго [30] обратил внимание на некоторые необычные свойства сред с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Позже под термином «метаматериалы» стали понимать композитные искусственные кристаллы, построенные из элементов макроскопического размера, погруженных в однородную среду, при этом характерный период решетки кристаллов меньше длин волн электромагнитного излучения [31].

Сравнительно недавно (по оценке Ю.И. Бобровницкого [19] с 2006 года) начались исследования акустических метаматериалов – искусственно создаваемых структур из ячеек малых волновых размеров, имеющих необычные свойства, не встречающиеся в природе у обычных веществ. Колебания отдельных ячеек создают волновое движение всей структуры, которое может быть описано эффективными параметрами сплошной среды, например по критерию равенства дисперсии волн в структуре и среде [17]. В этом смысле метасреды могут обладать отрицательной плотностью или отрицательной сжимаемостью. Дважды отрицательные среды имеют и отрицательную плотность, и отрицательную сжимаемость [27]. Необычные свойства метасред также связаны с анизотропией фазовой и групповой скорости распространения волновых колебаний, вектора которых могут быть не только противоположно направленными, но под углами, отличными от  $180^\circ$  [26]. Кроме этого, в качестве эффективного волнового параметра метасред выступает импеданс [200]. Обзорные работы [231, 253, 312, 319] демонстрируют актуальность исследований в этом направлении.

В качестве ячеек часто применяются резонаторы. Если они расположены на некоторой поверхности, то говорят о метаповерхности, свойства которой могут описываться локальным или нелокальным эффективным импедансом по критерию равенства рассеянного поля. Подбор параметров резонаторов позволяет обеспечить желаемый эффективный импеданс [320], в этом смысле

создание метаповерхностей в некоторых постановках можно отнести к методу согласования импедансов. Также взаимодействие резонаторов позволяет расширить полосу эффективного гашения звука метаповерхностью, по сравнению с решеткой независимо работающих резонаторов [311]. Современные возможности численного моделирования позволяют теоретически синтезировать любые метасреды и находить их оптимальное внутреннее устройство в зависимости от поставленной задачи. Наиболее распространенная постановка – обеспечение максимального поглощения падающего на метаповерхность звука [344]. Применение резонаторов для создания метаповерхностей имеет известный недостаток – узкую частотную полосу эффективной работы. В работе [385] предлагается подстраивать резонансные частоты пьезоэлектрических элементов на доминирующие частоты падающего поля. Для гашения низких частот требуется минимизировать резонансные частоты элементов, для чего применяются резонаторы с квазинулевой жесткостью [208]. С помощью активного управления элементами, названного авторами метадемпфированием, достигаются экстремально высокие показатели демпфирования метаповерхностей и, возможно, других структур [191].

Экспериментальное исследование метаматериалов проводится, как правило, для одномерных задач, в которых требуется погасить проходящий через метасреду звук. Демонстрируются достаточно эффективные результаты, например глушитель для выхода узкой трубы [252].

Интерес исследователей также вызывают акустические метаматериалы мембранного типа [319]. Мембрана конечных размеров является резонатором нулевого объема, имеющим большое количество собственных колебаний, на некоторых из которых можно ожидать существенного гашения звука. Подбор параметров мембраны – формы, размеров, натяжения позволяет регулировать резонансные частоты, а кроме этого, существенное влияние на формы собственных колебаний и собственные частоты оказывают присоединенные массы – грузы, определенным образом закрепленные на поверхности

мембраны [215]. При успешном сближении резонансных частот полоса эффективной работы становится шире, чем совокупная ширина резонансов обычной мембраны в интересующем диапазоне частот [316]. Всесторонне исследован сдвиг собственных частот за счет разного статического давления по обе стороны мембраны [305]. Совокупность маленьких мембранных ячеек образует метаповерхность, акустические характеристики которой могут оптимизироваться [304], например для обеспечения требуемого фронта отраженного поля. В частности, метаповерхности могут использоваться для скрытия некоторых объектов. В работе [242] в численном эксперименте продемонстрирована возможность покрытия твердой рельефной поверхности метаповерхностью, создающей отраженный звук, как от плоской поверхности, поэтому анализ отраженного звука не показывает наличие рельефа.

## **1.2. Активное гашение звуковых полей**

### **1.2.1. Метод Малюжинца и его развитие**

Суть активных методов гашения акустических полей заключается в контролируемом изменении поля в некоторой области пространства с помощью дополнительных излучателей звука. Полное поле, которое является суммой первичного (поле независимо работающих источников) и вторичного (поле дополнительных излучателей звука, амплитуда которых может подбираться нужным образом) полей, должно удовлетворять некоторым заранее заданным условиям. Для создания управляющего сигнала для вторичных (дополнительных) излучателей необходимо иметь информацию об исходном поле, которая может быть получена с помощью вспомогательных приемников.

Общий математически обоснованный метод решения задачи об активном гашении звука в некоторой области пространства впервые предложен Г.Д. Малюжинцем [142-145]. Кратко опишем суть данного метода. Пусть дано некоторое ограниченное тело  $D_0$ , которое находится в

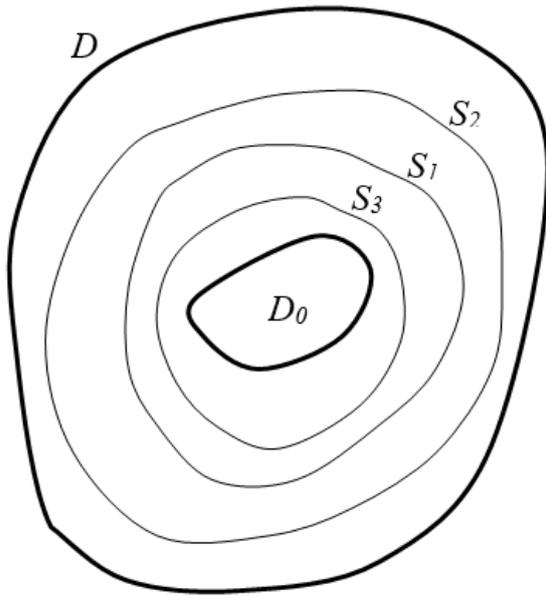


Рис. 1-6. К описанию метода  
Г.Д. Малюжинца

ограниченной области пространства. Пространство вне данной границы обозначается  $D$  (рис. 1-6). Внешние источники, находящиеся в  $D$ , создают поле  $p_0(r)$ . Собственное поле рассеяния или излучения тела обозначим  $p_1(r)$ , полное поле равно  $p(r)=p_0(r)+p_1(r)$ . В первую очередь решается задача о факторизации поля, т.е. об определении  $p_0(r)$  и  $p_1(r)$ . Пусть дана поверхность  $S_1$ , имеющая внешнюю нормаль  $n_1$ , содержащая внутри себя тело  $D_0$  и непересекающаяся с областью  $D$ . Если на поверхности  $S_1$  известны значения полного поля  $p(r)$  и его первой производной  $\partial p(r)/\partial n_1$ , то по этим значениям можно определить  $p_0(r), p_1(r), \partial p_0(r)/\partial n_1, \partial p_1(r)/\partial n_1$  на поверхности  $S_1$ , причем единственным образом [142]. Для компенсации поля тела  $D_0$  на поверхности  $S_2$ , охватывающей  $S_1$  и непересекающейся с  $D$ , распределяются непрерывно монополярные и дипольные излучатели [144]. При этом значения необходимых волновых потенциалов на  $S_2$  задаются через значения полного поля на  $S_1$  [145]. Излучатели должны создавать поле  $\tilde{p}(r)$  равное нулю внутри  $S_2$  и равное  $-p_1(r)$  вне  $S_2$ . Такая односторонне излучающая поверхность называется поверхность Гюйгенса [272]. Следовательно, вне  $S_2$  поле равно  $p(r) + \tilde{p}(r) = p_0(r)$ , т.е. как в отсутствии тела. Аналогичным способом можно погасить поле внешних источников в окрестности тела  $D_0$ . Для этого на поверхности  $S_3$ , охватывающей тело  $D_0$  и лежащей внутри  $S_2$ , располагаются монополярные и дипольные источники, создающие внутри  $S_3$  в окрестности  $D_0$  поле  $-p_0(r)$ , а вне  $S_3$  поле равно нулю. Отметим, что аналогичная задача о гашении звука с помощью поверхностей Гюйгенса, только без факторизации поля, рассмотрена Жесселем [271] и Манжантом [323].

Существенным обстоятельством метода Малюжинца является то, что приемная поверхность  $S_1$  не регистрирует поле излучающих поверхностей  $S_2$  и  $S_3$ . Таким образом, исключается возможность самовозбуждения системы через обратную связь между излучателями и приемниками. Как отмечено в [177], решение Малюжинца необходимо исследовать на устойчивость относительно данных  $p(r)$ ,  $\partial p(r)/\partial n_1$  и относительно неточности в задании поверхностей  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Первая задача решена в [177], где показано, что решение устойчиво по отношению к ошибкам измерения полного поля. При этом отклонение компенсационного поля от его оптимального значения тем меньше, чем дальше расположены приемная и излучающая поверхности друг от друга. Влияние случайных ошибок распределения характеристик излучателей на степень гашения исследовано в [48].

М.В. Федорюком предложен и проанализирован метод активного гашения звука, использующий только монопольные излучатели и приемники [179]. Задача решается с помощью двух приемных и двух излучающих поверхностей, непрерывно заполненных точечными монопольными приемниками и излучателями соответственно. Однако в такой системе имеются резонансные частоты, на которых поставленная задача оказывается неразрешимой. Поэтому при использовании данной схемы активного гашения звука необходимо разнести излучатели (приемники) на расстояние не ближе, чем половина длины волны при первой резонансной частоте. Показано, что если две излучающие (приемные) поверхности стягивать друг к другу, то на любой нерезонансной частоте система будет стремиться к монопольно-дипольному варианту решения Малюжинца.

Концепция активного экранирования (active shielding), схожая с задачей Малюжинца, для волн различной природы предложена и развивается С.В. Утюжниковым с коллегами. В работах [355, 356] с помощью метода разностных потенциалов, созданного Рябеньким В.С. [159], в общем виде математически обоснована возможность изоляции одной (внешней) области

пространства от другой (внутренней) слоем вторичных источников, расположенных на границе областей, и рассмотрены примеры гашения акустических полей, а в работе [378] – примеры гашения электростатических и магнитостатических, а также акустических в потоке. Для управления вторичными источниками требуется только информация о полном звуковом поле на границе областей, являющемся суммой «полезного» звука, т.е. поля от источников, расположенных во внутренней области, и шума – поля источников во внешней области, что позволяет обойтись без полной факторизации гасимого и «полезного» звука. Более прикладное описание подхода для звуковых полей с экспериментальной демонстрацией для одномерного случая рассмотрено в работе [314], для трехмерного – экспериментально в [313] и численно в [335]. В общем случае в пространстве может быть несколько защищаемых областей, каждая из которых окружается активным экраном [336]. Гашение нестационарного поля, требующее нелокального управления [379], исследовано в численных экспериментах [401, 402], демонстрирующих значительно меньшую, хотя и ненулевую, эффективность гашения при локальном управлении. Системы активного экранирования с нелокальным управлением, оптимизированные с точки зрения минимизации количества приемников и вторичных источников, рассмотрены в работе [264].

В решении Малюжинца используется непрерывное распределение точечных излучателей по поверхности. Замена непрерывного распределения излучателей на практически осуществимый его дискретный аналог неизбежно приводит к искажению гасящего поля. Однако при достаточной плотности излучателей на поверхности гасящее поле может сколь угодно мало отличаться от поля непрерывно распределенных источников [94]. М.П. Завадская и др. [45] получили оценку расстояния между точечными источниками, распределенными равномерно на окружности, необходимого для достижения удовлетворительной компенсации поля внешних источников внутри данной окружности в двухмерной задаче. Для хорошей аппроксимации

поля излучателей, непрерывно распределенных на окружности, полем излучателей, распределенных на ней дискретно, источники должны быть расположены на расстоянии не более половины длины гасимой волны. Кроме этого, аппроксимация тем лучше (при одинаковом количестве источников), чем дальше точка наблюдения от окружности. Использование дискретной гасящей системы приводит к тому, что компенсирующее поле отличается от нуля на приемной поверхности. Возникающая обратная связь может привести к значительному увеличению ошибки компенсации, а при определенных условиях даже к самовозбуждению системы. В работе [46] показано, что при надлежащей обработке показаний приемников обратная связь может быть устранена. Приемная поверхность, как и излучающая, также практически может быть реализована с помощью дискретного расположения приемников. В работе [95] решена задача о факторизации поля с помощью приемников, расположенных дискретно на двух концентрических сферах.

Впервые поверхность Гюйгенса практически реализована Манжантом [323] для сферически-симметричной задачи. На сферической поверхности диаметром 0,8 м располагались 20 излучателей, которые гасили шум первичного излучателя, расположенного в центре данной сферы. Для узкополосного сигнала степень гашения составила около 20 дБ по всем направлениям, третьоктавный шум снижен на 5-7 дБ. В.В. Тютюкин и А.А. Мазанников [136] реализуют метод Малюжинца для гашения звука на одной частоте при помощи автономной активной системы, в которой прием и излучение поля осуществляется триполями, имеющими кардиоидную характеристику направленности. В работе [137] данный подход усовершенствован: триполи заменены парой монополей с соответствующим управлением, а частотная полоса расширена до 1,5 октавы.

При дискретном расположении приемников и излучателей в решении задачи активного гашения по методу Малюжинца требуется большое число (порядка  $N^2$ , где  $N$  – количество приемников и излучателей) связей между приемниками и излучателями. В работе [47] рассматривается вопрос об

ограничении числа связей для плоской гасящей решетки: оценивается возможность системы, в которой каждый излучатель связан только с ближайшими приемниками.

В ряде случаев, представляющих практический интерес, можно изменить общую постановку задачи «полного» гашения, ограничиваясь гашением поля только по одну сторону от поверхности и не заботясь о неизменности поля по другую ее сторону. Это позволяет располагать на гасящей поверхности только монополюсные излучатели. В работе И.А. Урусовского [174] решена задача о гашении звука внутри или вне заданной сферы при непрерывном и дискретном распределении монополей по поверхности заданной сферы. Для того чтобы погасить  $N$  пространственных гармоник в случае дискретного расположения излучателей, необходимо  $N$  монополей, и, кроме этого,  $N$  приемников звукового давления и  $N$  приемников колебательной скорости.

Общая задача об активном гашении звука в волноводах, основанная на методе Малюжинца, рассмотрена М.В. Федорюком в [178]. Для гашения звука используются приемная и излучающая поверхности, расположенные на поперечных сечениях волновода, на которых непрерывно распределены монополюсные и дипольные излучатели и приемники. Замена непрерывного распределения излучателей и приемников на его дискретный аналог исследована в [140]. Показано, что для гашения всех распространяющихся мод достаточно конечного количества излучателей и приемников, а также выявлен ряд запретов на их расположение. Возможности подхода экспериментально продемонстрированы в работе [139], где описана гасящая система для двухмодового волновода, состоящая из пары монополюсных приемников и пары монополюсных излучателей и настраиваемая на определенную частоту. На частоте настройки обеспечивается снижение поля на 15-20 дБ. Другой метод гашения, в котором используются кольцевые приемники и излучатели, расположенные на стенках волновода, предложен в работе [369]. Однако полного гашения при этом не достигается.

В работе [171] получено решение для изоляции только той части волновода, которая расположена за гасящей поверхностью. Таким образом, в данной постановке снимается требование однонаправленного излучения гасящей поверхностью. Для звукоизоляции волновода необходимо погасить все распространяющиеся в выбранном направлении волны и, если требуется, волны с малым коэффициентом затухания. Если амплитуды распространяющихся волн известны точно, то для гашения данного числа первых мод достаточно такого же числа точечных излучателей, расположенных в одном сечении. Однако в реальных ситуациях поле анализируется с помощью конечного числа приемников, поэтому информация о нем оказывается не точной, и, как следствие, звукоизоляция является не полной, в отличие от теоретического случая непрерывного распределения приемников по сечению волновода, рассмотренного в [175]. При этом имеется ограничение на размещение гасящих источников: их нельзя располагать в узлах одной из погашаемых мод, т.к. в этом случае соответствующую моду нельзя будет погасить. Отказ от однонаправленной излучающей системы ставит вопрос о влиянии обратной связи на устойчивость системы к самовозбуждению. В [172] показано, что при малых отклонениях режима работы гасящих излучателей от требуемого система активной звукоизоляции действует с высокой точностью. Причина отсутствия самовозбуждения состоит в том, что при данном условии амплитуда волны, приходящей от излучателей к приемникам, ослабляется с каждым циклом в петле обратной связи. Если приемники и излучатели расположены в разных сечениях волновода, то для анализа поля необходимо использовать монопольные и дипольные приемники. Но при расположении излучателей и приемников в одном и том же нормальном сечении волновода остается только требование их разнотипности [173]. При таком расположении излучатели не воспринимаются приемниками и, таким образом, не мешают анализу поля, подлежащего гашению, и не создают условий к самовозбуждению.

В методе Малюжинца приемная и излучающая поверхности предполагаются звукопрозрачными, т.е. излучатели, расположенные непрерывно или дискретно, считаются точечными. В большинстве работ влияние дифракционных эффектов, связанных с конечностью размеров излучателей, не учитывается. Влияние размеров излучателя на степень гашения исследована А.И. Бойко и В.П. Ивановым для одномодового волновода в [20], а для многомодового в [21]. В работе [50] решается двумерная задача о гашении звука в малой области, расположенной за ограниченной решеткой вторичных излучателей, а в работе [51] результаты обобщаются на пространственный случай. Учет дифракционных явлений приводит к тому, что вторичные излучатели дают сложную структуру рассеянного поля: они являются излучателями мультипольного типа. Это приводит к тому, что для гашения поля собственной дифракции на излучателе требуется задать специальное распределение нормальной скорости в виде суммы пространственных гармоник. Аналогичный подход развит для решения задачи об активном гашении звукового поля за отверстием в абсолютно жестком экране [52].

### **1.2.2. Метод разделения пространственных гармоник**

В ряде работ предлагается метод разделения падающего поля на пространственные гармоники, позволяющий значительно уменьшить количество связей между вторичными излучателями и приемниками. По данным с приемников производится разложение поля на пространственные гармоники, и затем формируется сигнал для излучателей, необходимый для того, чтобы погасить одну или несколько гармоник. Число гасимых гармоник, как правило, ограничивается волновой плотностью приемников и излучателей, поэтому существенное гашение практически осуществимо для гармоник низкого порядка. Впервые данный подход был использован в работе М.П. Завадской и др. [46] для двухмерного случая, а в работе А.А. Мазанникова и др. [138] он применяется для трехмерного случая, в котором

задача гашения решается при помощи сферических монополярных приемно-излучающих поверхностей с использованием разложения поля по сферическим функциям. Применение данного метода в эллипсоидальной системе координат рассмотрено в [22].

Метод выделения пространственных гармоник применяется для плоских систем (как ограниченных, так и безграничных). Впервые задача о гашении ограниченной решеткой для двухмерного случая решена в [98], а для трехмерного – в [23]. Эффективность и устойчивость таких систем зависит от волнового размера и числа связей, которое определяется числом гасимых гармоник. Модель плоской бесконечной звукопоглощающей поверхности, связанной с приемной поверхностью, расположенной на конечном расстоянии, с непрерывным расположением приемников и излучателей рассмотрена в [168]. Передаточная характеристика между приемной и излучающей поверхностью зависит от угла падения плоской волны. Если этот угол заранее не известен, то система, настроенная на определенный угол падения, при других его значениях не будет полностью гасить падающую волну. Степень гашения зависит не только от отклонения угла падения от значения, на которое настроена система, но и от расстояния между приемной и излучающей плоскостями.

Плоская двумерная решетка экспериментально исследована в [99], где продемонстрирована возможность эффективного гашения гармоник с номерами  $n = 0$  и  $n = 1$ . Степень гашения плоской волны, падающей под соответствующими углами, достигает 20 дБ, при промежуточных углах падения эффективность не менее 5 дБ.

### **1.2.3. Экстремальные задачи гашения**

Несколько отличная постановка задачи активного управления звуковыми полями, иногда называемая теорией экстремальных задач, развивается с начала 1980-х годов [347]. Оптимизация работы вторичных излучателей звука заключается не в гашении звукового поля в некоторой

области пространства, а в минимизации (или максимизации) некоторого функционала, характеризующего работу вторичных излучателей и зависящего от ряда управляющих параметров [238]. Примерами таких функционалов являются звуковая энергия, поглощаемая вторичными излучателями, полная энергия, излучаемая первичными и вторичными излучателями, средняя плотность звуковой энергии в пространстве и т.д. Управляющими параметрами могут служить комплексные амплитуды вторичных излучателей и их координаты. Совокупность значений оптимальных параметров, при которой выбранный функционал достигает экстремального значения, не всегда гарантирует снижение уровня звука. Фоукс-Вильямс [244] показал, что под влиянием вторичных поглощающих излучателей может увеличиваться акустическая нагрузка на первичные излучатели, а мощность, излучаемая ими, возрастать, и при этом общий уровень звука в контролируемом пространстве также увеличивается.

Нельсон, Эллиот и др. исследовали некоторые методы оптимизации амплитуды вторичных излучателей для гашения звука как в свободном пространстве [333], так и в замкнутых помещениях [334]. В работе [228] на основе простейшей одномерной модели (узкая труба, в одном торце которой расположен первичный гармонический излучатель с постоянной амплитудой колебаний, а в другом вторичный излучатель) они проанализировали три стратегии управления звуковым полем в ограниченном пространстве, для которых оптимизируются следующие параметры: 1) звуковое давление около вторичного излучателя, 2) поглощаемая вторичным излучателем звуковая мощность, 3) полная звуковая энергия в данном пространстве. В первом случае обеспечивается локальное гашение звука, при этом энергия из пространства не отводится. Такой подход приводит к тому, что в узкой трубе изменяются резонансные частоты [377], т.е. меняется граничное условие: если вторичный излучатель неподвижен, то граница абсолютно жесткая, а если работает оптимально, то абсолютно мягкая. Аналогичный принцип использует Олсон [339] для активного излучателя в открытом пространстве. Во втором подходе

вторичный излучатель выполняет роль поглотителя, полностью поглощая падающую на него волну. В трубе образуется бегущая волна. Таким образом, поле на резонансных частотах резко снижается, а на антирезонансных возрастает. Управление вторичным излучателем, как и в первом случае, осуществляется локально, поэтому при осуществлении первого и второго подходов вторичные излучатели работают независимо друг от друга. Ряд методов управления локальными поглотителями предложен В.В. Арабаджи [7, 8]. В третьем подходе вторичный излучатель поглощает половину всей энергии в объеме, но данная стратегия, как показывают авторы, противоречит принципу причинности, поскольку при нестационарном рассмотрении данной задачи оказывается, что вторичный излучатель должен начинать свое движение раньше, чем это начнет делать первичный излучатель. Физически реализуемая модификация данного подхода состоит в том, чтобы контролировать полную потенциальную энергию в объеме. Для трубы необходимо использовать набор датчиков давления, распределенных вдоль ее оси, и минимизировать сумму квадратов их показаний. Таким образом, третья стратегия реализует «глобальное» управление звуковым полем.

В работах Стелла и Бернхарда [365, 366] детально исследуется задача о минимизации трех функционалов (полная мощность суммы первичного и вторичного звукового поля, потенциальная энергия суммарного поля, сумма квадратов модулей звукового давления в конечном числе точек) в случае однородного волновода. На основе теории экстремальных задач Г.В. Алексеев и др. разработали численный алгоритм активной минимизации звуковых полей в плоском [2] и осесимметричном [3] слоисто-неоднородных волноводах.

Гашение звука, излучаемого локальным источником, может осуществляться вторичным источником и решеткой микрофонов, расположенных в его окрестности [386]. Амплитуда вторичного источника подбирается так, чтобы минимизировать сумму квадратов давления на микрофонах. Предложенная стратегия решает, хотя и частично, две задачи: в

случае монопольного вторичного источника гасится или минимизируется сферически-симметричная волна, остаточное поле должно быть дипольным, а также за решеткой образуется зона пониженного звукового давления, т.е. решетка выполняет экранирующую функцию.

Создание тихих зон, т.е. участков пространства, где звуковое поле минимизировано, также относится к экстремальным задачам. В простейшей постановке звуковое давление должно быть минимизировано в месте расположения контрольного микрофона. Эллиотом, Джозефом, Балмором и Нельсоном [237], показано, что в условиях диффузного поля зона тишины, в которой обеспечивается снижение первичного звукового поля на 10 дБ и более, представляет собой сферу, диаметр которой составляет лишь одну десятую длины волны. Более подробно данный подход развивается авторами в работе [276], а в работе [236] они рассматривают возможность увеличения зоны тишины посредством управления не только звуковым давлением в некоторой точке, но и градиентом давления. Технически это осуществляется двумя вторичными источниками монопольного типа, в этом случае тихая зона становится цилиндрической. Ось цилиндра совпадает с прямой, на которой расположены излучатели звука, его диаметр составляет примерно одну десятую длины волны, а высота – около половины длины волны. Несколько позже предложено создание тихих зон с помощью микрофона, т.н. виртуального, расположенного вне тихой зоны [297]. С одной стороны, это несколько усложняет управление активной системой, поскольку требуется дополнительная информация о передаточной функции между микрофоном и центром зоны тишины, с другой стороны, это дает возможность изменять положение зоны тишины в реальном времени без физического перемещения микрофонов [346]. Практически тихие зоны могут создаваться, например, около уха человека. Однако в этом случае дифракционное влияние близко расположенных предметов, например головы человека, может существенно снизить размер тихой зоны [250]. Экспериментально удастся получить значительное снижение шума лишь в сравнительно небольшой области [202].

Использование точечных вторичных источников для создания удаленных тихих зон приводит к увеличению звукового поля в окрестности вторичных источников, что считается негативным побочным эффектом. Для его преодоления можно применить распределённые источники [400], например цепочку точечных источников, что позволяет получить максимальный с точки зрения теории размер тихой зоны, но без заметного локального усиления звукового поля.

Экстремальные задачи, в которых оптимизируются не только амплитуды, но и координаты вторичных излучателей, являются в общем случае нелинейными, поэтому для их решения предлагаются, как правило, численные алгоритмы. В работе [190] на примере антенной решетки проведено сравнение двух методов ее решения: градиентного поиска и перебора. Г.В. Алексеевым и др. предложены численные методы решения данной задачи для двумерного [4] и трехмерного [5] слоисто-неоднородных волноводов.

Активное гашение тонального звука в помещении детально рассмотрено в цикле работ [205, 235, 334]. Задача гашения состоит в минимизации полной потенциальной энергии в помещении при заданном распределении первичных и вторичных источников. Показано, что потенциальная энергия является квадратичной функцией вектора амплитуд вторичных источников, и существует такое значение вектора, при котором эта функция имеет минимальное значение. Для существенного снижения потенциальной энергии требуется, чтобы вторичные источники были расположены на расстояниях, превышающих половину длины волны, от первичных источников [334]. Предложенный подход для низкочастотного случая исследован в численном [205] и лабораторном [235] эксперименте для прямоугольного помещения: резонансы помещения могут быть подавлены при правильном выборе положений вторичных излучателей и управляющих приемников.

Для гашения звука в ограниченных помещениях многие методы активного гашения оказываются трудно реализуемыми. Используются

фактически только адаптивные системы, минимизирующие суммарные показания контрольных приемников. Зоммерфельд и др. проводят численный эксперимент [395], в котором минимизируют квадраты давлений в контрольных точках, плотность звуковой энергии и потенциальную звуковую энергию. Первая стратегия приводит к изменению резонансных частот помещения, а вторая и третья к сглаживанию резонансных максимумов. При этом в третьем подходе требуется большое количество микрофонов, в то время как во втором можно обойтись одним или несколькими датчиками плотности звуковой энергии [341]. В работе [342] они в реальном эксперименте исследуют эти три подхода, контролируя полную потенциальную энергию в помещении. Широкополосный шум удалось снизить на 3-4 дБ, а узкополосный – на 14 дБ.

В работе [262] используется решетка вторичных излучателей и две решетки микрофонов для факторизации падающего поля. В помещении размером 12.5x12.2x3.6 м установлено 14 громкоговорителей в виде периодической решетки вблизи одной из стен и две плоские решетки микрофонов на расстоянии 1.5 и 1.0 м от этой стены. Исследовано несколько алгоритмов управления, каждый из которых позволяет в большей или меньшей степени сгладить передаточную функцию помещения в частотном диапазоне 30-120 Гц.

#### **1.2.4. Локальные активные системы**

Впервые практическая реализация идеи активного гашения звука была предложена в 1934 году Люгом [317]. Он запатентовал систему, состоящую из микрофона, линии задержки и излучателя, которая формирует противофазный сигнал для компенсации падающего поля. В начале 50-х годов Олсон и Мэй [339] предложили устройство для локального гашения звука, которое было названо авторами «активный поглотитель звука». Данное устройство состоит из громкоговорителя, на который подается сигнал с микрофона через отрицательную обратную связь. Микрофон располагается вблизи

громкоговорителя, что и обеспечивает локальное гашение. Возможности применения локально гасящих устройств обсуждены в [338].

подавляющее большинство пионерских работ по практической реализации систем активного гашения относится к задаче о гашении звука в одномерном волноводе. В первых работах [209, 273, 347], целью которых являлась демонстрация возможностей систем активного гашения, управление осуществлялось через сигнал, подаваемый на первичный излучатель.

Некоторые исследователи предлагают комбинировать активные и пассивные методы подавления шума, мотивируя свой подход тем, что малую эффективность пассивных методов на низких частотах можно компенсировать с помощью активных устройств. На средних и высоких частотах пассивные средства эффективно подавляют звуковые поля [193], практически не уступая активным методам, а иногда и превосходя их. Гикинг и Лоренц [254, 256] впервые используют комбинацию слоя звукопоглощающего материала и активного излучателя и поглощают распространяющуюся в трубе волну в диапазоне 500-1400 Гц. Тенел и др. [376] с помощью аналогичной конструкции обеспечивают поглощение в диапазоне 200-800 Гц. Бардиссо и др. предлагают относить слой звукопоглощающего материала от вторичного излучателя [194], а в работе [364] они экспериментально реализуют данный подход. Наличие звукопоглощающего слоя усложняет управление вторичным излучателем, что приводит к уменьшению коэффициента звукопоглощения системы на высоких частотах, по сравнению с потенциальной возможностью вторичного излучателя.

В работе В.Д. Белова и др. [10] исследован гибридный звукопоглотитель, состоящий из излучателя и перфорированного гипсового экрана. Такие экраны применяются для акустической отделки помещений и имеют хорошую эффективность (реверберационный коэффициент звукопоглощения) на средних частотах, на низких частотах эффективность несколько меньше. В трубе экран имеет схожие характеристики: на частотах 80-120 Гц коэффициент звукопоглощения составляет примерно 0.6. При расположении

активно-управляемого излучателя за экраном коэффициент звукопоглощения увеличивается до 0.8-0.9.

В первых работах [247] по активному поглощению звука поднимался вопрос: «Куда уходит акустическая энергия?». В гибридных системах энергия частично диссипируется пассивной частью. Для ответа на этот вопрос, касающийся активной части системы, необходимо включать в общую задачу гашения звука физико-механическое устройство вторичного излучателя. Манжант показал [325] на примере динамического громкоговорителя, что баланс энергии в системе «активный поглотитель – среда» сохраняется.

### **1.2.5. Адаптивное управление**

В первых системах для активного гашения звука и вибраций использовались аналоговые устройства для реализации управления излучателями. После того, как в 1977 году была запатентована система [214], в которой управление осуществлялось с помощью цифрового устройства, в большинстве экспериментальных работ стали использоваться именно эти системы. Внедрение микропроцессорных технологий послужило толчком к созданию и разработке адаптивных систем гашения. В общем случае адаптивная система кроме приемной и излучающей поверхности имеет контрольную поверхность, на которой измеряется остаточное после гашения поле. По данным с этой поверхности формируется управляющий сигнал. Общий алгоритм настройки адаптивных систем гашения, работающих во временной области, по минимуму среднего квадрата ошибки создан Уидроу и др. [170]. Адаптивные системы устойчивы к нестабильности параметров распространения колебаний и характеристик преобразователей. Кроме этого, адаптивная система устойчива к самовозбуждению, поскольку минимизация значений поля на контрольной поверхности не может привести к неограниченному увеличению излучаемой мощности. Адаптивные алгоритмы теоретически и экспериментально исследуются в работах Берджеса [206], Росса [353], Рура [354]. Важной характеристикой каждого алгоритма является

скорость сходимости адаптивного процесса [135], которая главным образом определяет качество системы. Г.С. Любашевский и др. показали [134], что для гашения дискретных компонент шума и вибраций алгоритмы адаптивного управления могут быть существенно упрощены, а быстродействие гасящей системы увеличено. В настоящее время адаптивные алгоритмы и практически их реализующие фильтры интенсивно развиваются и усложняются. Основные результаты разработки адаптивных методов описаны в монографиях Видроу и Стейнса [393], Айзермана и др. [268], Кларка, Гиббса и Сондерса [216], Эллиотта [234]. Обзор работ отечественных ученых по адаптивным системам гашения дан в [141].

Адаптивную систему для поглощения звука разработали Ордуна-Бастамант и Нельсон [340]. Жю и др. [403] использовали адаптивную систему для создания требуемого коэффициента (а не только нулевого) отражения от торца с активным излучателем.

### **1.2.6. Примеры активных систем**

Для демонстрации различных методов активного гашения звука исследователями широко используется простейшая модель узкого волновода конечной длины, в один торец которого установлен вторичный излучатель. Левенхолл предложил систему с временной задержкой [233] для поглощения волны, отраженной от торца трубы. Гикинг и Кархер разработали торцевой поглотитель [254], коэффициент отражения которого не превышал 5% в диапазоне 100-1000 Гц. Управление осуществлялось с помощью пары микрофонов, которые разделяли звуковое поле в трубе на падающую и отраженную волны. Подобную поглощающую систему они попытались создать для прямоугольного помещения [255], где использовалась плоская решетка излучателей, расположенная на одной стене. Кертис, Нельсон и Эллиот исследовали экстремальные методы активного гашения звука [227]-самой эффективной стратегией по результатам работы оказалась минимизация потенциальной звуковой энергии в трубе.

В экспериментальных работах, как правило, используются вторичные излучатели монопольного типа, реже – дипольного. С помощью комбинации двух монополей можно создать дипольный или кардиоидный излучатель. Левенхолл предложил помещать датчик звукового давления между двумя противофазно колеблющимися монопольными излучателями [232]. Приемник в данном случае не воспринимает поле дипольного излучателя, что существенно упрощает управление. Возможность применения мультипольных излучателей впервые обсуждается Кемптоном [296], а оптимальное их размещение в пространстве Нельсоном и др. [332]. Болтон и др. в продолжение своей теоретической работы [201] экспериментально продемонстрировали эффективность гашения поля монопольного излучателя [188], при этом они показали, что степень гашения тем выше, чем больше мультипольность вторичного излучателя. Численное сравнение степени гашения поля за отверстием в экране с помощью монопольного, дипольного и кардиоидного излучателя проведено в [240]. При большой апертуре одного вторичного излучателя недостаточно, поэтому применяются решетки таких излучателей. В работе [387] приведены результаты эксперимента, в котором исследовалось прохождение звука через прямоугольное отверстие размером 67x43 см. В плоскости отверстия располагалось 6 источников и 12 управляющих микрофонов, обеспечивающих снижение проходящего через отверстие шума на 10-20 дБ в полосе 100-500 Гц.

Системы активного гашения разрабатываются и для водного пространства, в этом случае применяют отличные технологии приема и излучения звука. Чаще всего используют преобразователи из пьезоматериалов, при этом излучающие и принимающие элементы могут объединяться [219] или располагаться близко друг от друга [263]. Также известны системы на основе магнестрикционных материалов [389], в первую очередь материала Терфенол-Д, имеющего наибольшую магнестрикцию. Задача активного гашения сводится к подавлению поля, отраженного от элемента, и/или поля, прошедшего через элемент, и довольно

успешно реализуется в узком волноводе для одиночных элементов [148] и в широком волноводе для решетки элементов [385].

Несмотря на сложность алгоритмов активного управления и технические трудности в создании систем активного гашения звуковых и вибрационных полей, на сегодняшний день есть ряд успешных решений прикладных проблем с помощью активных методов. Отметим некоторые из них.

Крюгер и Лейснер [301] разработали активный излучатель с локальным управлением, предназначенный для гашения звука, распространяющегося в каналах с воздушным потоком. Эффективность снижения шума составила 5-10 дБ в широкой полосе частот при скорости потока воздуха, не превышающей 20 м/с. Снижение шума в аэроакустических системах требует учета влияния потока среды, которое сказывается в различных аспектах. Псевдошум на датчиках приводит к искажению управляющего сигнала. Для преодоления этого предлагается использовать несколько датчиков, расположенных около участка, в котором необходимо измерить звуковое поле, например около излучателя [195]. Сложение сигналов позволяет повысить отношение сигнал/шум и уменьшить влияние помехи. Другой способ – использование адаптивной подстройки режима работы активной системы под изменяющиеся условия, рассмотренное на примере системы вентиляции в работе [35]. Кроме этого, изменение скорости потока приводит к сдвигу фазы, и это влияние тем выше, чем больше расстояние между вторичным излучателем и приемниками. При этом настройка управляющей системы должна, кроме прочих параметров, зависеть от скорости потока, что делает очевидным преимущество локальных систем, у которых приемники и излучатели расположены рядом [147]. Набег фазы, вызванный изменением скорости потока, в таких системах мал, что упрощает управление. Экспериментальное исследование активного гашения шума в широких трубах применительно к авиадвигателям исследовано в [100], где успешно продемонстрировано гашение на 10-20 дБ для отдельных мод.

Жакоб и Мозер [269, 270] увеличили звукоизоляцию двухслойного окна на 10 дБ, разместив несколько вторичных излучателей между стеклами окна. При этом управление активной системой с упреждением (feedforward control) дало больший результат, по сравнению с системой, управляемой через обратную связь (feedback control). Отметим, что в системах с упреждающим управлением, как правило, известен опорный сигнал, т.е. сигнал, подаваемый на первичный источник, или сигнал, снимаемый непосредственно с излучающего тела, следовательно, активная система успевает подобрать инвертированный сигнал, пока первичный звук дойдет до вторичных излучателей. В системах с обратной связью опорного сигнала нет, поэтому на практике они дают меньший результат. Хотя, как показал Кертис [226], обе системы функционально эквивалентны. Система гашения для вентилируемого окна предложена и исследована в [388]. Входное и выходное отверстия для воздуха максимально разнесены, что позволяет создать своеобразный глушитель с активными и/или пассивными элементами, подбор их параметров позволяет снизить шум, проникающий с улицы.

Куэста и Кобо [223] с помощью активной системы снизили шум генератора, расположенного в закрытом корпусе. Основной шум излучается на резонансных частотах корпуса, поэтому активная система настраивалась, главным образом, на эти частоты, которые были погашены на 20-25 дБ. Отметим, что опорный сигнал снимается прямо с корпуса шумящего генератора. В работе [224] они предложили оптимизированную активную систему для гашения широкополосного шума.

Ониши и др. [337] улучшили работу звукозащитного барьера с помощью вторичных излучателей. Натурные испытания «активного» барьера показали увеличение звукоизоляции на 3-4 дБ на низких частотах, по сравнению с пассивным барьером.

В некоторых случаях достаточно погасить шум на резонансных частотах помещения. Кемп и Кларк [296] успешно снижают шум запуска двигателя: на 10 дБ на резонансной частоте. Возможность снижения шума двигателя в

кабине самолета экспериментально исследуется в работе Эллиотта и др. [239]. Ремингтоном и др. [351] разрабатывается система активного гашения шума локомотива, представляющая собой набор из нескольких излучателей, располагаемых на корпусе локомотива. Снижение шума в дальнем поле составляет до 5 дБА.

Шум, возбуждаемый струями, предлагается снижать с помощью плазменных актюаторов, которые модифицируют свойства воздушного потолка газовыми разрядами [96].

### **1.3. Оптимизация импеданса**

Концепция импеданса впервые предложена Хэвисайдом для электротехники в 1880-х, аналогичное определение для акустических задач введено Вебстером в 1919 [392]. Сегодня понятие импеданса широко используется в акустике.

#### **1.3.1. Согласование импедансов**

Границы, разделяющие среды с различными свойствами, а также препятствия, в некоторых задачах удобно характеризовать акустическим импедансом – отношением давления у границы к скорости в направлении, перпендикулярном поверхности границы. Коэффициенты отражения, прохождения и поглощения при взаимодействии внешней волны с границей выражаются через ее импеданс и также, разумеется, зависят от формы границы. Подбором импеданса можно добиться некоторых желаемых характеристик рассеянного границей и прошедшего через границу поля в зависимости от решаемой задачи или максимально приблизиться к ним. Если желаемые характеристики достигнуты, то соответствующий импеданс называют согласованным. Простейший пример – падение по нормали плоской волны на плоскую границу; для полного поглощения падающей волны необходимо, чтобы импеданс границы был равен произведению плотности

среды, в которой распространяется падающая волна, на скорость звука в ней [53].

Прохождение волн через среду, состоящую из плоских однородных слоев, подробно рассмотрено в классической книге Л.М. Бреховских [24]. Каждый слой характеризуется входным импедансом, что позволяет легко находить коэффициент отражения и прохождения через каждую границу между слоями. Согласование импедансов осуществляется подбором параметров среды, а также толщиной слоя. Так, если толщина слоя такова, что набег фазы волны на ней равен целому числу полупериодов, то при нормальном падении такой слой не оказывает никакого воздействия на падающую волну. Еще один пример согласования импедансов – четвертьволновой просветляющий слой. Если нужно обеспечить полное прохождение монохроматической волны через границу двух любых сред, то можно поместить между ними слой, толщина которого кратна четверти длины волны, а его импеданс равен среднему геометрическому импедансов этих сред.

Для сходящихся сферически- и цилиндрически-симметричных волн можно обеспечить их полное поглощение сферой или цилиндром, центры которых совпадают с центром симметрии волны. Импеданс поверхности сферы или цилиндра, а в общем случае параметры вещества, из которого они состоят, должен иметь определенное комплексное значение [162]. При малых волновых размерах сферы или цилиндра согласованный импеданс обеспечивает полное поглощение сходящейся волны, т.е. отсутствие отраженной расходящейся. Поле сходящейся сферической волны имеет особенность  $1/r$ , цилиндрической -  $1/\sqrt{r}$ , где  $r$  – расстояние до центра, это позволяет получить сверхфокусировку звука, т.е. сконцентрировать энергию волны в области много меньшей длины волны, что экспериментально подтверждено М.Ю. Гуреевым и М.А. Мироновым [41].

В описанных примерах регулировка импеданса осуществляется подбором параметров среды или механических параметров препятствий. С

помощью электромеханических систем можно добиться регулировки импеданса в широком диапазоне значений, а также получить желаемую частотную зависимость импеданса. Первые экспериментальные результаты по настройке импеданса электромеханических преобразователей получены Боббером [198, 199]. Контроль импеданса динамического излучателя с помощью датчика звукового давления, расположенного вблизи его поверхности, рассмотрен в работах [248, 254]. Системы близко расположенных излучателей с настраиваемым импедансом образуют т.н. смарт-структуры и могут применяться, например, для покрытия стенок каналов [218].

Концепция электроакустических поглотителей разрабатывается Лиссеком и др. в различных технологических исполнениях. Основная идея заключается в шунтировании динамического излучателя, при этом параметры шунта могут изменяться активным способом [315] так, чтобы обеспечивать максимальное поглощение падающей волны в узкой трубе. Некоторые значения импеданса могут быть получены даже без использования датчиков поля в окрестности излучателя [204]. Массив электроакустических поглотителей образует поверхность с локально реагирующим активным импедансом [203], также система поглотителей используется для подавления резонансов помещения в низкочастотной области [352]. При высоких уровнях интенсивности звукового поля эффективность звукопоглощения может быть увеличена за счет нелинейных эффектов [257], при этом управление импедансом также оказывается нелинейным, оно осуществляется одновременно по полю, измеренному вблизи излучающей поверхности, и по смещению самой поверхности, измеряемому датчиком в корпусе излучателя. Отметим, что работы Лиссека с соавторами сопровождаются экспериментальными исследованиями, в которых подтверждается эффективность предлагаемых подходов.

Юан применил метод согласования импедансов для поглощения падающей волны [397]. В работе [359] предлагается специальное устройство

электроакустического преобразователя для активного управления импедансом, в котором не используются датчики звукового поля.

### **1.3.2. Метод полного согласования импедансов**

В работе Ю.И. Бобровницкого [11] предложен метод полного согласования импедансов для помещений, позволяющий создать звуковое поле произвольного источника звука в некотором помещении, неотличимое от звукового поля того же источника в другом помещении или в других акустических условиях, например в свободном пространстве. В последнем случае обеспечивается отсутствие отражений от поверхностей помещения, что представляет интерес при создании безэховых камер. Поверхность помещения разбивается на элементы, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, или, в более практичной постановке, без зазоров покрывается вторичными излучателями. На каждый элемент воздействует внешняя сила, формируемая по результатам измерения скорости всех элементов, и при соответствующем ее подборе решается поставленная задача. Существенно, что импедансные матрицы, устанавливающие связь между силами, приложенными к элементам, и их скоростями, в общем случае являются недиагональными и полагаются известными. Поэтому управление полем в помещении является нелокальным, т.е. не существует локально реагирующей поверхности помещения, активной или пассивной, позволяющей создать безэховое помещение.

Подход, предложенный в [11], развивается в [12] для задачи об акустически прозрачном теле. Произвольное тело со свойствами, отличными от свойств среды, в которой оно находится, покрывается тонким покрытием, состоящим из отдельных элементов малого волнового размера. На каждый элемент действует активная сила, сформированная по измеренным значениям скоростей всех элементов или давлений в их окрестности. Вектор измеряемых параметров и вектор сил связаны через соотношение заранее известных импедансных матриц, которые могут быть вычислены или

измерены. Существует такое соотношение, т.е. матрица связи измеряемых параметров и активных сил, при котором рассеянное телом поле отсутствует. Кроме этого, в [12] показано, что не существует пассивного покрытия, которое делало бы тело нерассеивающим в общем случае, а активно управляемое покрытие должно быть глобальным в том смысле, что активная сила на каждом участке поверхности зависит от значений поля, измеренных на всей поверхности. Покрытие из локально управляемых элементов не может обеспечить полной компенсации рассеянного поля. Импедансное покрытие также может настраиваться на максимальное поглощение звуковой мощности, т.е. использоваться для создания наилучшего поглотителя звука [14]. Такой поглотитель также может быть получен только нелокально реагирующим активным покрытием, при этом условия наилучшего поглощения являются резонансными: полный импеданс поглотителя должен быть согласован с полным импедансом излучения, так чтобы их действительные части были равны, а сумма их мнимых частей была равна нулю.

Отметим существенное отличие метода полного согласования импедансов от метода Малюжинца: в нем не требуется предварительная факторизация рассеянной компоненты поля. Тело может быть сделано нерассеивающим с помощью активных сил, приложенных к его поверхности и управляемых текущими значениями полного поля на его поверхности. Однако вместо факторизации звукового поля для успешной реализации метода полного согласования импедансов требуется априорная информация о трех импедансных матрицах: матрице входных поверхностных импедансов тела, матрице внутренних импедансов, матрице импедансов излучения. На основе импедансных матриц развивается теория рассеяния [13] и поглощения звука [14] для решения широкого класса задач, с помощью которой, в частности, проанализированы предельные возможности пассивных рассеивателей и поглотителей [15].

### 1.3.3. Оптимизация импеданса стенок каналов и помещений

Во многих практических задачах требуется снизить звук, распространяющийся по каналам. Для этого используют локальные препятствия, например резонаторы, расширительные камеры и т.п., или системы таких препятствий, а также специальные – импедансные – покрытия стенок каналов. В последнем случае известно два механизма, влияющих на распространение звука. Первый связан с поглощением: звуковая энергия диссипируется стенками, если действительная часть их импеданса ненулевая. Реактивный импеданс стенок может обеспечивать запираание канала, например волноводный изолятор [54] в узкой трубе имеет массовый импеданс в некоторой полосе частот, тогда энергия звука не поглощается, но в канале существуют только неоднородные моды, экспоненциально затухающие вдоль его оси. В общем случае, когда действительная и мнимая части импеданса ненулевые, имеет место комбинация двух механизмов и рассматривается их совместный эффект, называемый затуханием звука.

Задача оптимизации затухания звука формулируется следующим образом: необходимо подобрать такой импеданс стенок, чтобы постоянная распространения некоторой собственной моды имела максимальное значение. Если в канале возбуждаются все моды, то, как правило, оптимизируется затухание наименее затухающей моды. Впервые решение задачи оптимизации получено Кремером [222] для плоского канала, одна из стенок которого импедансная, а другая – жесткая. Им найдено значение импеданса, при котором нулевая мода имеет наибольшее затухание. Позднее это значение стали называть импедансом Кремера, оно, с учетом уточнения Тестера [373], составляет

$$Z = (0.929 + i0.744) \frac{kh}{\pi}, \quad (1.1)$$

где  $h$  – ширина канала,  $Z$  – импеданс, нормированный на волновое сопротивление среды  $\rho c$ ,  $\rho$  и  $c$  – плотность среды и скорость звука в ней,  $k$  – волновое число.

В круглом волноводе с радиусом  $r$  оптимальный импеданс для нулевой моды составляет [373]

$$Z = (0.88 + i0.38) \frac{kr}{\pi}, \quad (1.2)$$

Обобщение результатов для цилиндрического и кольцевого каналов сделано в работе [404]. Один из ключевых результатов заключается в том, что оптимальное затухание связано с появлением двойных мод, образованных слиянием двух простых мод при соответствующем подборе импеданса. Затухание двойной моды соответствует максимуму затухания одной из простых мод и локальному минимуму затухания второй моды. Таким образом, суммарное затухание звука оказывается максимальным, хотя затухание второй моды является наиболее неоптимальным. При этом принципиально возможно слияние трех и более мод, т.е. образование мод более высокого порядка.

Двойные моды связаны с кратными корнями характеристического уравнения для определения постоянной распространения звуковых волн в каналах. Кратные корни для плоского канала подробно исследованы Е.Л. Шендеровым [182, 183] для импедансов разных типов. В плоском канале можно оптимизировать импедансы двух стенок по отдельности, что позволяет получить тройную моду [345].

На высоких частотах для расчета затухания звука в каналах может применяться лучевое приближение. По оценкам Тестера [374] в плоском канале на расстоянии от источника, в три раза превышающем его поперечный размер, звуковое поле, полученное в рамках геометрической акустики, хорошо совпадает с точным решением. Расчет звука в широких каналах с малым поглощением проведен М.В. Сергеевым [160] методом мнимых источников, отличие коэффициента затухания нулевой моды от точного решения составило лишь 0.8, при этом получены простые соотношения для практических и инженерных расчетов.

Влияние воздушного потолка на затухание звука в каналах рассмотрено в работах [133, 156, 331], оптимальные импедансы для плоского канала найдены в [375], для цилиндрического и кольцевого в [34, 349]. В некоторых случаях влияние потока таково [277, 398], что действительная часть оптимального значения импеданса стенок на низких частотах становится отрицательной, поэтому оптимальное затухание может быть получено только с помощью активных методов. На основании известных аналитических моделей распространения звука в каналах предлагается решать обратную задачу: по измерению звукового поля в канале определять неизвестный импеданс его стенок. Такой подход нашел экспериментальное подтверждение [151].

Для широких каналов конечной длины оптимальное затухание мод высокого порядка достигается неоднородным импедансом стенок. Выбор оптимального импеданса может быть осуществлен минимизацией отраженного стенками канала звука от детерминированного источника, т.е. поле в канале должно быть таким же, как в свободном пространстве [146]. Для этого импеданс физической границы канала подбирается так, чтобы давление и нормальная скорость на ней были такими же, как в свободном пространстве от того же источника.

Одиночные резонаторы малоэффективны для гашения звука в многомодовых волноводах. Но в помещениях успешно применяются локальные устройства, чей импеданс и положение оптимизируются так, чтобы максимально задемпфировать собственные колебания помещений [196, 326]. Эффективность гашения звука такими системами может характеризоваться временами затухания отдельных мод [321].

Задача гашения звука в помещениях часто сводится к поглощению отражений от стенок, т.е. к минимизации времени реверберации. В помещениях специального назначения применяется высокоэффективная облицовка из звукопоглощающих материалов [97]. В случае импедансных стенок применяются методы, аналогичные методу Кремера.

#### 1.4. Выводы к главе 1

Методы борьбы с шумом сегодня интенсивно развиваются: усовершенствуются давно известные подходы, а также предлагаются новые идеи, которые стремительно разрабатываются, в первую очередь благодаря возможностям численного моделирования, позволяющим быстро проводить виртуальные эксперименты. Многие решения находят применение в широкой практике. Выделим основные известные способы гашения шума и тенденции в развитии новых подходов, актуальные для настоящей работы.

1. Наиболее эффективным способом гашений звуковых волн является резонансный, в рамках которого, чаще всего, обеспечивается физически максимальное поглощение или рассеяние звука. Для реализации подхода используются малые по сравнению с длиной звуковой волны механические устройства – резонаторы, а также системы резонаторов. Большинство резонаторов, исследуемых и предлагаемых в современной литературе, относится к монопольному типу, но также предлагаются и дипольные резонаторы.

2. Основным недостатком резонаторов является их узкополосность: амплитуда колебаний резонаторов достаточно велика только в малой окрестности резонансной частоты, а максимальная эффективность гашения звука достигается только на одной частоте.

3. Системы, состоящие из большого количества взаимодействующих резонаторов, образуют метасреды и метаповерхности, обладающие специфическими акустическими свойствами, которые в некоторых задачах оказываются полезными для гашения звука.

4. Предложен, разработан и реализован ряд активных методов гашения звуковых полей, некоторые решения доведены до практических внедрений. Вместе с тем теория активных методов развивается гораздо быстрее, чем их практическое воплощение. Это связано главным образом, с тем, что наиболее прогрессивные и универсальные методики требуют технически сложных

систем, состоящих из большого количества излучателей и приемников, а также электрических связей между ними. Прототипы активных систем успешно испытываются на одном или нескольких излучателях и приемниках, но дальнейшее усложнение системы, связанное с увеличением области гашения, сталкивается с технологическими трудностями.

5. Многими исследователями успешно реализованы подходы к созданию локальных устройств – электроакустических резонансных поглотителей или просто активных резонаторов, импеданс которых может регулироваться в широкой полосе частот активным способом в зависимости от решаемой задачи. В литературе представлено несколько способов устройства активных резонаторов, которые успешно прошли экспериментальные испытания, и обширные исследования особенностей их работы. С технической точки зрения задачу о создании одиночного активного резонатора сегодня в целом можно считать выполненной, хотя имеются резервы улучшения качества их работы.

6. Метод согласования импедансов является одним из наиболее перспективных способов активного гашения шума. Во-первых, разработана подробная теория метода, включающая несколько направлений: полное согласование импедансов, поверхности с локально реагирующим импедансом, малые рассеиватели. Поиск оптимального импеданса может осуществляться без рассмотрения самого способа его создания, что позволяет использовать многие известные результаты по оптимизации импедансов, например для каналов и помещений. При этом потенциальная эффективность гашения звука может быть сравнительно легко оценена без анализа всей активной системы. Во-вторых, значительные наработки позволяют с помощью активных методов создать устройства и системы устройств с практически любым импедансом, при этом в широкой полосе частот.

## **Глава 2. Активные устройства резонансного типа**

Резонаторы являются эффективным средством борьбы с шумом и вибрацией во многих задачах, при этом в некоторых случаях степень гашения оказывается максимально возможной. Замечательная особенность резонаторов в том, что сечения рассеяния и поглощения могут многократно превышать их геометрических размер, при этом они пропорциональны квадрату длины волны в трехмерных задачах и длине волны в двумерных. По этой причине резонаторы особенно эффективны на низких частотах.

Основным недостатком резонаторов является узкая полоса эффективного действия: их амплитуда колебаний достаточно велика только в малой окрестности резонансной частоты, а максимальное значение поглощаемой или рассеиваемой мощности достигается только на одной частоте. В настоящей главе развивается метод, позволяющий расширить частотную полосу эффективной работы резонаторов любого типа [84, 293]. Суть метода заключается в управлении движением резонатора в зависимости от некоторых параметров поля колебаний среды в его окрестности. Скорость движения резонатора подбирается таким образом, чтобы она совпадала с его скоростью на резонансной частоте, при этом фактически оптимизируется импеданс резонатора в широкой полосе частот. Предлагаемый подход имеет простой принцип использования: если известно решение некоторой задачи гашения с помощью резонатора, то это решение для его резонансной частоты обобщается на все остальные частоты.

### **2.1. Концепция управления движением резонатора**

#### **2.1.1. Управление собственной частотой и трением резонатора**

Как отмечено в главе 1, одиночные резонаторы в прикладных задачах могут эффективно использоваться при гашении тональных и узкополосных шумов. Трудность практической реализации заключается в том, что требуется достаточно высокая точность настройки резонатора на проблемную частоту.

Настройка резонатора осуществляется изменением его механических параметров, например в случае резонатора Гельмгольца чаще всего регулируют длину, а в общем случае форму, его горла. Разумеется, это усложняет процедуру настройки, поэтому было бы удобно регулировать резонансную частоту, не меняя механических параметров резонатора. Такое управление можно осуществить путем введения обратной связи с регулируемым коэффициентом (подход, широко используемый в системах активного виброгашения [89]).

Продемонстрируем эту возможность на простом примере: тело массой  $m$  на пружине с упругостью  $k$  и трением  $\gamma$  находится под действием силы  $F$ . Уравнение движения резонатора имеет следующий вид

$$m\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + k\xi = F, \quad (2.1)$$

где  $\xi$  – смещение резонатора. Применяя к (2.1) преобразование Фурье по времени, находим следующее выражение для Фурье-компонент смещения резонатора

$$\xi_{\omega} = \frac{F_{\omega}}{-\omega^2 m + k - i\omega\gamma} = \frac{F_{\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2)m - i\omega\gamma}, \quad (2.2)$$

где  $F_{\omega}$  – Фурье-компонента силы,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – резонансная частота.

Введем обратную связь следующим образом. Предположим, что ускорение резонатора  $\ddot{\xi}$  измеряется некоторым образом (например, датчиком ускорения – акселерометром, закрепленным на поверхности резонатора). Сформируем силу, пропорциональную измеряемому параметру, которая действует на резонатор. Коэффициент пропорциональности  $K$  не зависит от частоты и в общем случае может быть комплексным. Поскольку  $K$  связывает силу и ускорение, то он имеет размерность массы. Уравнение движения (2.1) и смещение резонатора (2.2) переписутся следующим образом

$$m\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + k\xi = F + K\ddot{\xi}, \quad (2.1a)$$

$$\xi_{\omega} = \frac{F_{\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2)m - i\omega\gamma + \omega^2 K}. \quad (2.2a)$$

Из (2.2a) следует, что собственная частота резонатора с обратной связью определяется уравнением

$$(\omega_0^2 - \omega^2)m + \omega^2 K = 0 \quad (2.3)$$

и равна

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{m}{m - K}}. \quad (2.4)$$

Новая собственная частота резонатора  $\omega_1$  может регулироваться изменением коэффициента обратной связи  $K$ . Как видно из (2.4), коэффициент обратной связи должен быть действительным, отрицательным – для снижения резонансной частоты, положительным – для ее повышения. Данный подход использован, например, в работе [148] для изменения частоты максимального поглощения волны, распространяющейся в водонаполненной трубе.

Отметим, что введение обратной связи позволяет не только регулировать собственную частоту системы, но и создавать резонанс в системе, которая изначально была нерезонансной. Действительно, предположим, что тело на пружине, уравнение движения которого имеет вид (2.1a), является безмассовым. В этом случае система характеризуется только упругостью и не имеет резонанса. Полагая  $m = 0$ , из (2.1a) получаем уравнение для резонансной частоты  $\kappa + K\omega^2 = 0$ . Таким образом, резонансная частота системы равна  $\omega_1 = \sqrt{-\kappa/K}$ , т.е. коэффициент обратной связи должен быть отрицательным.

Рассмотрим аналогичную задачу, только вместо датчика ускорения будем использовать датчик скорости. Дополнительная сила, действующая на резонатор, пропорциональна скорости; коэффициент пропорциональности не зависит от частоты и имеет размерность массы, умноженной на частоту. Тогда

уравнение движения (2.1) и смещение резонатора (2.2) получают следующий вид

$$m\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + k\xi = F + K\dot{\xi}, \quad (2.1б)$$

$$\xi_{\omega} = \frac{F_{\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2)m - i\omega(\gamma + K) + \omega^2}. \quad (2.2б)$$

Теперь коэффициент обратной связи влияет на трение резонатора. Для увеличения трения резонатора  $K$  должен быть положительным. Очевидно, что несложно повысить трение в резонаторе обычными способами: например, разместить пористый материал в горле резонатора Гельмгольца или добавить демпфер к пружинному резонатору (рис. 1-5,а). Однако, если требуется уменьшить трение, как в задачах о рассеянии звука, когда резонатор должен иметь нулевое трение, то коэффициент  $K$  должен быть отрицательным, что обеспечивается только с помощью активных методов.

Итак, введение обратной связи позволило регулировать собственную частоту резонатора или трение без изменения его механических характеристик (масса и упругость). Обратная связь обеспечивает «активизацию» резонатора в том смысле, что теперь движение резонатора зависит не только от внешней силы, но и от коэффициента обратной связи  $K$ . Далее понятие «активный» резонатор будет введено более точным образом.

### 2.1.2. Управление импедансом резонатора

Исследуем влияние введенной обратной связи на импеданс резонатора в общем случае. Пусть  $V$  – обобщенная скорость резонатора,  $Z$  – его механический импеданс, взаимодействие резонатора с окружающей средой описывается сопротивлением излучения  $Z_r$ . Внешнее поле колебаний среды действует на резонатор обобщенной силой  $F_0$ , тогда уравнение его движения имеет вид

$$ZV = F_0 - Z_r V. \quad (2.5)$$

Рассмотрим два способа формирования обратной связи.

## 1 способ - по движению резонатора

Пусть, как в предыдущем разделе, датчик движения измеряет скорость резонатора  $V$ , пропорционально которой формируется дополнительная сила  $F_1 = KV$ , управляющая движением резонатора. В данном случае коэффициент обратной связи  $K$  имеет размерность импеданса. Добавляя дополнительную силу в правую часть (2.5), найдем уравнение движения

$$ZV = F_0 - Z_r V + KV, \quad (2.6)$$

откуда находим скорость резонатора

$$V = \frac{F_0}{Z + Z_r - K}. \quad (2.7)$$

Со стороны среды на движущийся резонатор действует сила  $F_m = F_0 - Z_r V$ , поэтому его импеданс по отношению к внешнему полю будет равен

$$Z_a = \frac{F_m}{V} = Z - K. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) показывает, как обратная связь влияет на скорость резонатора, а уравнение (2.8), как она влияет на импеданс.

## 2 способ – по полю вблизи резонатора

В этом случае используется датчик, измеряющий поле вблизи резонатора. Полагая, что это поле пропорционально силе  $F_m$ , действующей со стороны среды на резонатор (заранее отметим, что данное предположение справедливо лишь при определенном подборе датчика внешнего поля), определим дополнительную силу в виде  $F_1 = KF_m$ . Теперь коэффициент обратной связи  $K$  является безразмерной величиной. Запишем уравнение движения

$$ZV = F_0 - Z_r V + KF_m, \quad (2.9)$$

найдем скорость резонатора

$$V = \frac{(1 + K)F_0}{Z + Z_r(1 + K)} \quad (2.10)$$

и его импеданс

$$Z_a = \frac{F_m}{V} = \frac{Z}{1 + K}. \quad (2.11)$$

Очевидно, что оба способа введения обратной связи изменяют собственный импеданс резонатора: вместо  $Z$  он становится равным  $Z_a$  согласно (2.8) и (2.11). В принципе подбором частотно-зависимого и комплексного коэффициента обратной связи можно обеспечить любые значения импеданса. Предложенный подход относится к известному методу активного гашения звука – методу согласования импедансов [11, 248], в котором импеданс препятствия, или импедансы элементов препятствия могут регулироваться, и в зависимости от решаемой задачи подбираются определенные их значения.

### 2.1.3. Активный резонатор

Резонатор с импедансом  $Z$  поглощает максимальную энергию внешнего поля при выполнении следующих условий

$$\operatorname{Re} Z = \operatorname{Re} Z_r, \operatorname{Im}(Z + Z_r) = 0. \quad (2.12)$$

Первое уравнение (2.12) определяет оптимальное трение, которое должен иметь резонатор. Второе уравнение (2.12), как правило, выполняется на одной – резонансной – частоте.

Резонатор рассеивает максимальную энергию внешнего поля при следующих условиях

$$\operatorname{Re} Z = 0, \operatorname{Im}(Z + Z_r) = 0. \quad (2.13)$$

Максимальное рассеяние также достигается на резонансной частоте, но только бездиссипативным резонатором. С физической точки зрения трение всегда является ненулевым, поэтому, строго говоря, первое условие (2.13) оказывается невыполнимым для механических систем. Однако введение активного управления, как показано в разделе 2.1.1, позволяет полностью выполнить условие (2.13).

Условия максимального поглощения (2.12) и рассеяния (2.13) часто называются резонансными. Отметим, что в таком же виде они записываются для многоэлементных систем при оптимизации полного импеданса [14]

активной поверхности, только в этом случае величины  $Z$  и  $Z_r$  являются матрицами.

Условия (2.12) и (2.13) позволяют определить коэффициент обратной связи резонатора, рассмотренного в разделе 2.1.2, чтобы обеспечить значения импеданса  $Z_a$ , удовлетворяющие (2.12) или (2.13) в широкой полосе частот. В этом случае резонатор не является пассивным устройством, поскольку его движение определяется не только внешним полем, но и дополнительной силой, которая зависит от свойств самого резонатора и условий гашения. Поэтому естественно такой резонатор назвать «активным».

Итак, **активный резонатор** – это локальное устройство, состоящее из излучателя и приемника, соединенных между собой обратной связью, и обеспечивающее резонансный режим работы (равенство нулю мнимой части полного импеданса и оптимальное трение) в широком диапазоне частот. Локальность в данном случае означает то, что управление движением излучателя зависит только от звукового поля в его окрестности. Вместе с тем, в методе полного согласования импедансов [11] в общем случае требуется нелокальное управление. Резонансность устройства уже нужно понимать в следующем смысле: отношение между силой и скоростью на поверхности устройства должно удовлетворять условию максимального (резонансного) поглощения или рассеяния звука.

## 2.2. Метод выбора конструкции активного резонатора

Активный резонатор состоит из излучателя, близко расположенного к нему приемника и обратной связи, формирующей воздействие на излучатель, управляющее его движением. При этом сам излучатель не должен быть резонансным, поскольку в общем случае произвольный импеданс  $Z$  преобразуется к импедансу  $Z_a$ , удовлетворяющему условиям (2.12) или (2.13). В активном резонаторе, как в любой системе с обратной связью, при определенных условиях могут возникать автоколебания [172], что неприемлемо для активного гашения звука. Кроме этого, для выполнения

(2.12) или (2.13) необходимо точно подобрать коэффициент обратной связи согласно (2.8) или (2.11) в широкой полосе частот. С практической точки зрения необходимо допустить, что всегда есть некоторое отличие между требуемым и фактическим коэффициентом обратной связи, приводящее к снижению эффективности гашения звука. Также фактором, требующим рассмотрения, является выбор положения и типа приемника, поскольку ближнее поле излучателя может иметь неоднородную структуру. Указанные особенности работы и устройства активного резонатора рассмотрены ниже.

### 2.2.1. Устойчивость

Введем характеристическую функцию активного резонатора, являющуюся по сути кольцевой передаточной функцией системы с обратной связью [39]. Функция является произведением чувствительности приемника, коэффициента обратной связи, передаточной функции излучателя и передаточной функции акустического пути от излучателя к приемнику. Нахождение характеристической функции проведем следующим образом.

Пусть на активный резонатор в отсутствие внешнего поля при отключенной обратной связи извне действует некоторая сила  $F_{in}$ , тогда скорость резонатора в соответствии с уравнением движения (2.5) равна  $V = F_{in}/(Z + Z_r)$ . Показания датчика звукового поля равны  $T_a V$ , где  $T_a$  – коэффициент акустической связи излучателя и приемника, включающий чувствительности преобразования излучателя и приемника. Сигнал с приемника передается через обратную связь, характеризуемую коэффициентом  $K$ , и формирует силу  $F_{out} = T_a V K$ , которая воздействовала бы на активный резонатор при включенной обратной связи. Таким образом, характеристическая функция равна

$$H = \frac{F_{out}}{F_{in}} = \frac{T_a}{Z + Z_r} K. \quad (2.14)$$

При управлении по движению резонатора коэффициент  $T_a$  в (2.14) необходимо принять равным 1.

Исследование устойчивости к самовозбуждению активного резонатора проведем с помощью критерия Найквиста для систем с обратной связью [39], согласно которому автоколебания возникают на частотах, для которых набег фазы кратен  $2\pi$ , а кольцевой коэффициент усиления превышает по абсолютному значению 1. В соответствии с критерием Найквиста условие неустойчивости активного резонатора сформулируем следующим образом

$$|H| \geq 1, \arg H = 2\pi n, \quad (2.15)$$

где  $n$  – любое целое число.

Итак, активный резонатор неустойчив и не может применяться для активного гашения звука, если хотя бы на одной частоте рабочего диапазона выполняется условие (2.15).

### 2.2.2. Робастность

Обозначим  $\tilde{K}$  оптимальный коэффициент обратной связи, т.е. при котором выполняются условия резонансного поглощения (2.12) или рассеяния (2.13). Другие величины, соответствующие оптимальной настройке, также будем обозначать волной и называть оптимальными. Так оптимальный импеданс для максимального поглощения согласно (2.12) равен

$$\tilde{Z} = Z_r^*, \quad (2.16)$$

а для максимального рассеяния

$$\tilde{Z} = \operatorname{Im} Z_r^*, \quad (2.17)$$

Настраиваемым параметром в активном резонаторе является коэффициент обратной связи, поэтому возможные неточности настройки могут быть сведены к отличию фактического коэффициента обратной связи от оптимального. Введем ошибку настройки  $\varepsilon$  следующим образом

$$K = \tilde{K}(1 + \varepsilon). \quad (2.18)$$

Найдем отклонение скорости активного резонатора от оптимального значения  $\tilde{V}$  при малой ошибке  $|\varepsilon| \ll 1$ . Подставляя (2.18) в (2.7), найдем относительное отклонение скорости при управлении по движению резонатора

$$\frac{V - \tilde{V}}{V} \approx \frac{\tilde{K}}{Z + Z_r - \tilde{K}} \varepsilon. \quad (2.19)$$

Оптимальный коэффициент обратной связи определяется из (2.8) и равен  $\tilde{K} = Z - \tilde{Z}$ , здесь  $Z_a = \tilde{Z}$  – оптимальное значение импеданса резонатора.

При управлении по полю вблизи резонатора аналогичное отношение найдем из (2.10)

$$\frac{V - \tilde{V}}{V} \approx \frac{\tilde{K}}{1 + \tilde{K}} \varepsilon. \quad (2.20)$$

Из (2.11) определяем, что оптимальный коэффициент обратной связи равен  $\tilde{K} = (Z - \tilde{Z})/Z$ .

Из (2.19) и (2.20) следует, что отличие скорости активного резонатора от оптимального значения пропорционально ошибке его настройки. В линейных задачах амплитуда вторичных источников пропорциональна вторичному полю, поэтому найденные отклонения характеризуют потерю эффективности гашения при ошибках настройки. Важное значение имеет коэффициент пропорциональности перед  $\varepsilon$  в (2.19) и (2.20): чем больше этот коэффициент, тем сильнее отклонение системы от оптимального режима работы. При этом значение коэффициента пропорциональности всегда ненулевое, поскольку он обращается в нуль только при  $\tilde{K} = 0$ , что соответствует ситуации, когда собственный импеданс резонатора  $Z$  является оптимальным и удовлетворяет условиям (2.16) или (2.17). Очевидно, что этот коэффициент является количественной характеристикой устойчивости к ошибкам настройки или робастности, поэтому на его основе может быть сформулирован критерий качества активной системы [292].

Выберем некоторую величину  $E = E(\varepsilon)$ , характеризующую эффективность работы активной системы с обратной связью и зависящую от

ошибки настройки, определяемой (2.18). При малой ошибке величина  $E$  может быть представлена в виде ряда Тейлора

$$E(\varepsilon) = E(0) + E'(0)\varepsilon + \dots \quad (2.21)$$

Как показано выше,  $E'(0) \neq 0$ . Из (2.21) находим относительное отклонение  $E$  от оптимального значения

$$\left| \frac{E(\varepsilon) - E(0)}{E(0)} \right| \approx \mu |\varepsilon|, \quad \mu = \left| \frac{E'(0)}{E(0)} \right|. \quad (2.22)$$

Коэффициент  $\mu$  является количественным критерием робастности активной системы с обратной связью: чем он больше, тем менее устойчива система к неточностям настройки. При выборе способа управления активным резонатором, а также типом излучателя и приемника и их взаимного расположения, можно руководствоваться параметром  $\mu$ , т.е. выбирать такую конструкцию системы, при которой он минимален.

Далее будут рассмотрены различные способы устройства активного резонатора и проанализирована зависимость параметра  $\mu$  в зависимости от особенностей этого устройства, на основании чего будет предложена шкала оценки качества активной системы.

### 2.2.3. Влияние обратной связи

Из (2.19) и (2.20) следует, что критерий робастности  $\mu$  зависит от собственного импеданса резонатора  $Z$ , его сопротивления излучения  $Z_r$  и оптимального импеданса  $\tilde{Z}$ . Продемонстрируем использование этого параметра на примере поглощения звука активным резонатором [58]. Сначала рассмотрим общую задачу, для чего запишем уравнение движения активного резонатора (2.5) в следующем виде

$$(Z + Z_r)V = F_0 + F_a, \quad (2.23)$$

где  $F_0$  – сила, действующая на излучатель со стороны падающей волны,  $F_a$  – сила, управляющая движением излучателя. В практически используемых системах, как правило, механический импеданс излучателя существенно

больше импеданса излучения. Поэтому введем ограничения, упрощающие дальнейшие выкладки,

$$|\operatorname{Re} Z| \gg |\operatorname{Re} Z_r|, |\operatorname{Im} Z| \gg |\operatorname{Im} Z_r|. \quad (2.24)$$

При управлении активным резонатором по полю сила  $F_a$  формируется с помощью сигнала  $Q_s$ , регистрируемого приемником. Под  $Q_s$  может подразумеваться давление или колебательная скорость в зависимости от типа приемника. При этом измеряемое поле является суммой внешнего поля  $Q_0$  и собственного поля излучателя  $Q_a$ . Под внешним полем подразумевается поле при неподвижном излучателе (во внешнее поле входит и поле дифракции на корпусе устройства).

Внешняя сила  $F_0$  пропорциональна внешнему полю  $Q_0$ . Введем коэффициент  $T_0$ , который характеризует связь между этими величинами, т.е.  $Q_0 = T_0 F_0$ .

Собственное поле излучателя  $Q_a$  пропорционально его скорости  $V$ , т.е.  $Q_a = T_a V$ . Коэффициент  $T_a$  описывает акустическую связь между излучателем и приемником. Отметим, что коэффициенты  $T_0$  и  $T_a$  зависят от свойств приемника и излучателя, а также от их взаимного расположения. Суммарный сигнал записывается в виде:

$$Q_s = T_0 F_0 + T_a V. \quad (2.25)$$

Сигнал с приемника формирует управляющую силу  $F_a$  посредством передаточной функции  $H$ :

$$Q_s H = F_a. \quad (2.26)$$

Для решения поставленной задачи необходимо найти значение передаточной функции, при котором поглощаемая мощность  $W = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(F_0 - Z_r V)V^*]$  максимальна. Принимая фазу силы  $F_0$  за нуль, перепишем последнее выражение в виде  $W = \frac{1}{2} [F_0 \operatorname{Re} V - \operatorname{Re} Z_r |V|^2]$ , откуда следует, что функция  $W(V)$  достигает максимального значения при  $\operatorname{Im} V = 0$ . Амплитуду скорости находим из уравнения  $\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} (F_0 - 2 \operatorname{Re} Z_r V) = 0$ , она равна  $\tilde{V} = \frac{F_0}{2 \operatorname{Re} Z_r}$ .

Подставляя (2.25) и (2.26) в (2.23), находим передаточную функцию, обеспечивающую оптимальную скорость  $\tilde{V}$  излучателя,

$$\tilde{H} = \frac{Z - Z_r^*}{2 \operatorname{Re} Z_r T_0 + T_a}. \quad (2.27)$$

Звездочкой обозначается комплексное сопряжение.

Передаточная функция, связывающая сигнал с приемника и управляющую силу, формируется соответствующим подбором коэффициента обратной связи. Вообще говоря, оптимальная передаточная функция  $\tilde{H}$  и оптимальный коэффициент обратной связи  $\tilde{K}$  являются эквивалентными способами описания оптимальной настройки активного резонатора. Ошибка настройки для передаточной функции может быть введена следующим образом

$$Q_s \tilde{H}(1 - \varepsilon) = F_a, \quad (2.28)$$

что эквивалентно (2.18). Комплексная ошибка  $\varepsilon = x + iy$  определяет амплитудные и фазовые отклонения от оптимального режима работы излучателя. Величина  $\varepsilon$  описывает как неточность измерения поля вблизи излучателя, так и неточность настройки управляющей функции.

Подставляя (2.26) и (2.27) в (2.23) с учетом (2.24), найдем зависимость скорости излучателя от ошибки  $\varepsilon$

$$V = \tilde{V} \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{T_a}{2 \operatorname{Re} Z_r T_0} \varepsilon}. \quad (2.29)$$

Из (2.29) получаем параметр робастности для скорости излучателя

$$\mu = \left| \frac{T_a}{2 \operatorname{Re} Z_r T_0} - 1 \right|. \quad (2.30)$$

Как следует из (2.30), отклонение скорости излучателя от оптимального значения при неизменном значении ошибки  $\varepsilon$  тем меньше, чем меньше коэффициент связи  $T_a$ . Если приемник не фиксирует поле излучателя, т.е.  $T_a = 0$ , что соответствует системе с нулевой обратной связью, то  $\mu = 1$ .

Выражение (2.29) позволяет определить диапазон допустимых ошибок  $E$ , при которых некоторая величина, характеризующая эффективность поглощения, например поглощаемая мощность  $W = W(\varepsilon)$ , не менее некоторого заданного значения  $W_0$ . Другими словами, если  $\varepsilon \in E$ , то  $W > W_0$ . С уменьшением коэффициента связи  $T_a$  область  $E$  увеличивается. Если существует такое положение приемника, при котором он не чувствует поле излучателя, то диапазон приемлемых ошибок определяется неравенством

$$x^2 + y^2 < \rho_0^2, \quad (2.31)$$

где  $\rho_0 = \sqrt{1 - \frac{W_0}{W_{max}}}$ ,  $W_{max} = W(0)$  – максимально достигаемая поглощаемая мощность. Таким образом, на плоскости  $xu$  границей области  $E$  является окружность с радиусом  $\rho_0$ .

Другим важным преимуществом конструкции активного поглотителя с оптимальным положением приемника является то, что в системах со стационарной передаточной функцией исключена возможность самовозбуждения [172].

Из (2.30) следует, что возможны такие соотношения параметров  $T_a$  и  $T_0$ , при которых параметр робастности  $\mu$  может принимать нулевые значения, т.е. влияние ошибок настройки становится экстремально малым. Ввиду важности этого результата проанализируем подобную ситуацию отдельно [65].

Параметр  $\mu$  принимает значения, близкие к нулю, если  $2 \operatorname{Re} Z_r T_0 \approx T_a$ . Это означает, что, во-первых, для обеспечения такого режима обратная связь должна быть ненулевой. Во-вторых, как следует из (2.27), кольцевая передаточная функция принимает достаточно большие значения  $|\tilde{H}| \gg 1$ . Это соответствует случаю глубокой обратной связи.

Из теории электрических усилителей известно, что глубокая обратная связь (когда абсолютное значение кольцевой передаточной функции схемы усилителя значительно больше единицы) оказывает стабилизирующее воздействие на коэффициент усиления [184]. Аналогичное действие оказывает

глубокая обратная связь в системе активного гашения звука и повышает ее робастность. Отметим, что получение «идеальной» обратной связи, при которой  $\mu = 0$  и ошибки совершенно не влияют на работу активной системы, с физической точки зрения невозможно, поскольку это потребовало бы бесконечного значения кольцевой передаточной функции (2.27) и бесконечного коэффициента обратной связи. Поэтому для лучшей с точки зрения робастности системы с активной обратной связью должно выполняться условие  $\mu \ll 1$ .

При создании активных систем с глубокой обратной связью необходимо внимательно следить за их устойчивостью, поскольку первое из условий неустойчивости (2.15) заведомо выполняется. Кроме этого, при одинаковой акустической связи  $T_a$  между приемником и излучателем коэффициент обратной связи  $\tilde{K}$  должен иметь большие значения в системе с глубокой обратной связью по сравнению с системой со слабой обратной связью  $T_a \approx 0$ , что обуславливает большие энергетические затраты на реализацию активного гашения.

Приведем краткие результаты аналогичного анализа для управления активным резонатором по его движению. Измеряемая величина – это обобщенная скорость резонатора, поэтому (2.25) можно заменить отношением  $Q_s = V$ . Подставляя его и (2.26) в (2.23), находим оптимальную кольцевую передаточную функцию

$$\tilde{H} = Z - Z_r^*. \quad (2.32)$$

Подставляя (2.26) и (2.32) в (2.23), найдем зависимость скорости излучателя от ошибки  $\varepsilon$

$$V = \tilde{V} \frac{1}{1 - \frac{Z - Z_r^*}{2 \operatorname{Re} Z_r} \varepsilon}. \quad (2.33)$$

Отсюда находим параметр робастности для скорости излучателя

$$\mu = \left| \frac{Z - Z_r^*}{2 \operatorname{Re} Z_r} \right|. \quad (2.34)$$

Если выполняются условия (2.24), то из (2.34) следует, что  $\mu \gg 1$ , поэтому при управлении по движению резонатора чувствительность системы к ошибкам настройки гораздо выше, чем при управлении по полю вблизи резонатора. На этом основании для реализации предлагаемого способа активного гашения звука в воздушном пространстве, когда условия (2.24) заведомо выполняются, управление по полю оказывается более предпочтительным. Однако в системах, в которых  $|Z| \ll |Z_r|$ , например при гашении колебаний в твердых пространствах, параметр робастности может принимать значения  $\mu \sim 1$ .

#### 2.2.4. Взаимное расположение приемника и излучателя

При исследовании активного резонатора пока не накладывалось никаких ограничений на взаимное расположение приемника и излучателя при управлении по полю в конструкции активного резонатора, за исключением требования малости расстояния между ними по сравнению с длиной волны. Кроме этого, тип приемника и излучателя полагался произвольным. Однако, как следует из (2.30), акустическая связь  $T_a$  может оказывать значительное воздействие на качество работы активной системы. Параметр  $T_a$  зависит от структуры ближнего поля излучателя, а также от положения приемника и физической величины, которую он измеряет. Для анализа возможностей подбора параметра  $T_a$  рассмотрим несколько примеров локальных активных поглотителей в свободном пространстве в поле плоской гармонической волны с амплитудой давления  $A$  и частотой  $\omega$ . Ограничиваемся рассмотрением приемников и излучателей только монопольного или дипольного типа и будем называть активный резонатор в зависимости от типа приемника и излучателя. Например, диполь-монопольный резонатор состоит из дипольного приемника и монопольного излучателя.

Начнем с монополь-монопольного активного резонатора. Монопольный излучатель является пульсирующей сферой малого радиуса  $a$ , т.е.  $ka \ll 1$ , где  $k$  – волновое число. Сила, действующая на излучатель со стороны поля,

равна  $F_0 = -A$ , обобщенная скорость равна объемной скорости излучателя  $V = q$ , а импеданс излучения равен [53]:  $Z_r = R \frac{e^{ika}}{ika}$ , где  $R = \frac{k^2}{4\pi} \rho c$  – сопротивление излучения монополя,  $\rho$  – плотность среды,  $c$  – скорость звука в ней. Приемник расположим вблизи поверхности излучателя. Монопольный приемник фиксирует давление, следовательно, коэффициенты в (2.27) равны  $T_0 = -1$  и  $T_a = Z_r$ . Подставляя данные значения в (2.29), находим объемную скорость монопольного излучателя

$$q = \tilde{q} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{2ika}}. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что  $q$  значительно отличается от  $\tilde{q}$ , если абсолютное значение ошибки  $\varepsilon$  сравнимо с  $ka$ . Если требуемое значение относительной эффективности поглощения близко к 1, т.е.  $W_0 \rightarrow W_{max}$ , то допустимые ошибки задаются неравенством  $x^2 + y^2 < (2ka\rho_0)^2$ . Коэффициент акустической связи не зависит от положения приемника относительно излучателя, поэтому оптимального положения приемника не существует – все положения эквивалентны, а радиус области  $E$  уменьшается в  $1/2ka$  раз по сравнению с максимально возможным  $\rho_0$ . Отметим, что с уменьшением волнового размера излучателя увеличивается влияние ошибок на эффективность поглощения, поскольку параметр робастности равен  $\mu = |1 - (2ika)^{-1}| \approx 1/2ka$ .

Рассмотрим диполь-дипольный активный поглотитель (рис.2-1). Дипольный излучатель является сферой малого радиуса  $a$ , осциллирующей со скоростью  $v$ . Угол между моментом диполя и волновым вектором падающей волны обозначим  $\theta$ . Сила, действующая на излучатель со стороны поля [52], равна  $F_0 = i \frac{4\pi}{3} ka^3 A \cos \theta$ , а импеданс излучения  $Z_r = \frac{4\pi}{3} a^2 \rho c \frac{(ka)^4 - i[2ka + (ka)^3]}{4 + (ka)^4}$ .

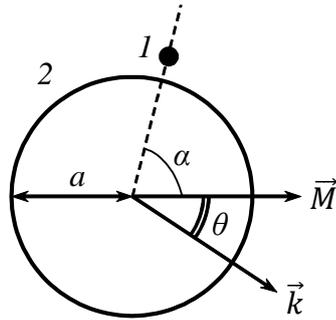


Рис. 2-1. Расположение приемника 1 относительно излучателя 2.  $\vec{M}$  – момент дипольного излучателя,  $\vec{k}$  – волновой вектор падающей волны

Приемник разместим вблизи поверхности излучателя таким образом, чтобы дипольный момент приемника был направлен вдоль дипольного момента излучателя. Положение приемника относительно излучателя характеризуется углом  $\alpha$  между направлением дипольного момента излучателя и прямой, соединяющей центры излучателя и приемника (рис.2-1). Приемник фиксирует компоненту скорости среды, направленную вдоль его момента. Данная компонента скорости среды, обусловленной внешним полем, в точке расположения приемника равна  $\frac{A}{\rho c} \cos \theta$ , следовательно, первый коэффициент в (2.25) равен  $T_0 = \frac{Q_0}{F_0} = -i \frac{3}{4\pi r c k a^3}$ . Проекция скорости среды, вызванной движением излучателя, на момент приемника равна  $u = u_r \cos \alpha + u_\alpha \sin \alpha$ , где  $u_r$  – радиальная компонента скорости,  $u_\alpha$  – угловая. На поверхности сферы эти компоненты равны:  $u_r = v \cos \alpha$  и  $u_\alpha = -\frac{v}{2} \sin \alpha$ . Следовательно, выражение для коэффициента связи  $T_a$  имеет вид  $T_a = \frac{u}{v} = f(\alpha) = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$ . Отметим, что оптимальная передаточная функция (2.27) не зависит от угла падения волны  $\theta$ . Подставив полученные значения в (2.29), найдем скорость излучателя

$$v = \tilde{v} \frac{1 - \varepsilon}{1 - 2if(\alpha) \frac{\varepsilon}{(ka)^3}}. \quad (2.36)$$

Из (2.36) следует, что для диполь-дипольного поглотителя влияние ошибки в общем случае сильнее, чем для монополь-монопольного. При максимальном значении коэффициента связи  $T_a = f(0) = 1$  скорость излучателя существенно отличается от оптимальной, если  $|\varepsilon| \approx (ka)^3$ . Но для диполь-дипольного поглотителя существует положение приемника относительно излучателя, при котором связь между ними нулевая. Оно соответствует нулевому значению функции  $f(\alpha)$ , которое достигается при  $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Таким образом, за счет правильного расположения приемника и излучателя можно существенно увеличить (примерно в  $1/(ka)^3$  раз) допустимые ошибки для диполь-дипольного поглотителя, до значений, определяемых (2.31).

Кратко рассмотрим монополь-дипольный и диполь-монопольный поглотители. Без выкладок, очевидно, что в силу ортогональности монопольного и дипольного полей возможно расположение разнотипных приемников и излучателей, при котором приемник не фиксирует поле излучателя. В монополь-дипольном поглотителе приемник должен располагаться на прямой, проходящей через центр излучателя перпендикулярно его дипольному моменту. В диполь-монопольном поглотителе дипольный момент приемника должен быть перпендикулярен поверхности излучателя. В обоих случаях функция, описывающая акустическую связь между излучателем и приемником в свободном пространстве, имеет угловую зависимость вида  $f(\alpha) = \cos \alpha$ . Отметим, что в работе [173] для активной звукоизоляции волновода использовано подобное расположение разнотипных излучателей и приемников для упрощения анализа поля, подлежащего гашению.

Главное отличие разнотипных комбинаций приемника и излучателя от однотипных заключается в том, что коэффициент  $T_0$  в разнотипной комбинации, а, следовательно, и оптимальная передаточная функция  $\tilde{H}$  зависят от угла падения волны  $\theta$ . Поэтому, если активный поглотитель

настроен на максимальное поглощение волны, падающей под углом  $\theta_0$ , то при других углах падения эффективность его работы уменьшается. Более того, при определенных углах  $\theta$  и  $\theta_0$  возможен переход из поглощающего режима работы в излучающий. Аналогичная ситуация на примере плоских поглощающих активных систем продемонстрирована в [168].

Таким образом, при выборе типов приемников и излучателей при проектировании активного резонатора можно руководствоваться критерием робастности: если с точки зрения задачи активного гашения тип приемника и/или излучателя не имеют принципиального значения, то выбираются такие типы, чтобы при некотором их взаимном расположении параметр  $\mu$  принимал минимальное значение, которое в рассмотренных примерах составляет  $\mu = 1$  при нулевой обратной связи. С этой точки зрения монополь-монопольный активный резонатор является наихудшей системой, поскольку приемник всегда чувствует поле излучателя, и параметр робастности  $\mu \gg 1$ .

В заключении приведем результаты экспериментального исследования, проведенного для оценки минимального значения коэффициента акустической связи  $T_a$  между излучателем и приемником. В качестве образца был использован дипольный излучатель: динамический громкоговоритель с открытой тыльной стороной с трубкой (рис. 3-3). На излучатель, расположенный в свободном пространстве, подавался гармонический сигнал с частотой 300 Гц, при этом волновой размер излучателя составлял  $ka \approx 0,25$ . Результат измерения угловой зависимости показаний дипольного и монопольного приемников, расположенных в ближнем поле дипольного излучателя, приведен на рис. 2-2. Максимальной чувствительности приемника соответствует  $T_a = 0$  дБ. Для монопольного приемника минимальное значение коэффициента связи составило  $-35$  дБ при  $\alpha = 90^\circ$ , а для дипольного  $-18$  дБ при  $\alpha = 55^\circ$ .

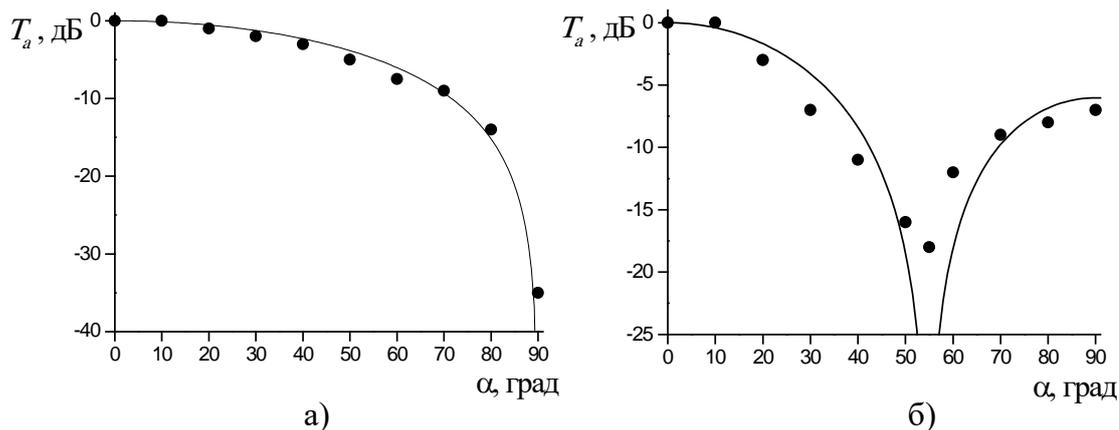


Рис. 2-2. Измеренные коэффициенты акустической связи между дипольным излучателем и монопольным (а) и дипольным (б) приемниками (дипольные моменты излучателя и приемника сонаправлены).

### 2.3. Активный резонатор для гашения изгибных колебаний стержня

Предложенная концепция активных резонаторов применима для любых видов колебаний. Если известно решение задачи о гашении звука обычным резонатором, то оно непосредственно применяется для подбора обратной связи в активном резонаторе согласно (2.8) и (2.11). Описанный метод, очевидно, может быть применен и для задач гашения вибрации, в частности изгибных колебаний стержней и пластин. Возможности резонаторов для гашения изгибных колебаний достаточно широко изучены [81, 112, 164]: они применяются для вибропоглощения и виброизоляции. В настоящей работе основное внимание уделяется гашению звука в воздушной среде, поэтому подробно рассмотрим приложенный подход на примере использования активных резонаторов для гашения изгибных колебаний стержня. Сначала дается общее описание применения метода, а затем приводятся результаты экспериментального испытания активного резонатора.

#### 2.3.1. Постановка задачи гашения

Рассмотрим стержень, в котором распространяется гармоническая изгибная волна с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ . Закрепим к стержню в

некоторой точке излучатель вибрации – актюатор, действующий на стержень перпендикулярно силой  $F_a$ . Тогда уравнение движения излучателя можно записать в общем виде

$$m\ddot{\xi} = -\gamma\dot{\xi} - k\xi + F_a + F. \quad (2.37)$$

где  $m$  – масса излучателя,  $k$  – упругость подвески,  $\gamma$  – коэффициент трения,  $\xi$  – смещение излучателя, равное смещению стержня в точке закрепления излучателя,  $F$  – сила, действующая со стороны стержня на излучатель. Из (1) получаем выражение для импеданса излучателя

$$Z_a = \frac{F}{\dot{\xi}} = Z - \frac{F_a}{\dot{\xi}}. \quad (2.38)$$

где  $Z = -i\omega m + \gamma + \frac{k}{-i\omega}$  – механический импеданс излучателя.

Для того чтобы сформировать силу  $F_a$ , разместим на стержне датчик виброскорости в точке закрепления излучателя. Отношения между измеренной скоростью и силой, действующей со стороны излучателя на стержень, обозначим  $K = F_i/\dot{\xi}$ . Эта величина характеризует обратную связь между приемником и излучателем. Тогда выражение для импеданса излучателя (2.38) примет вид

$$Z_a = Z - K. \quad (2.39)$$

Здесь реализуется схема управления по движению резонатора, поэтому (2.39) фактически совпадает с (2.8).

Из (2.39) следует, что импеданс излучателя может регулироваться путем изменения передаточной функции обратной связи. Если для некоторой задачи гашения необходимо обеспечить импеданс излучателя равный  $Z_a$ , тогда обратная связь должна иметь следующую передаточную функцию

$$K = Z - Z_a. \quad (2.40)$$

Таким образом, для реализации системы активного гашения необходимо обеспечить обратную связь (2.40) в необходимой полосе частот.

### 2.3.2. Конструкция активного резонатора

Для практической реализации представленного метода предлагается следующая конструкция активного резонатора (рис. 2-3). В качестве излучателя применяется динамический актюатор, конструкция которого похожа на конструкцию обычного громкоговорителя. Подвижная часть излучателя – сердечник с катушкой длиной  $l$  – помещена в магнитное поле с индуктивностью  $B$ . Сердечник закреплен на подвеске, упругость которой равна  $k$ . Общая масса подвижной части излучателя –  $m$ , коэффициент трения –  $\gamma$ . Сигнал с приемника – датчика виброскорости – равный  $U_1 = Q\dot{\xi}$ , где  $Q$  – чувствительность приемника, передается на частотный фильтр и усилитель, которые характеризуются коэффициентом передачи  $K$ . В отличие от (2.40) здесь коэффициент обратной связи является безразмерным. С усилителя на излучатель подается управляющий сигнал  $U_2 = KU_1$ . Сила, движущая сердечником, равна

$$F_a = Bl \frac{U_2 - Bl\dot{\xi}}{R}. \quad (2.41)$$

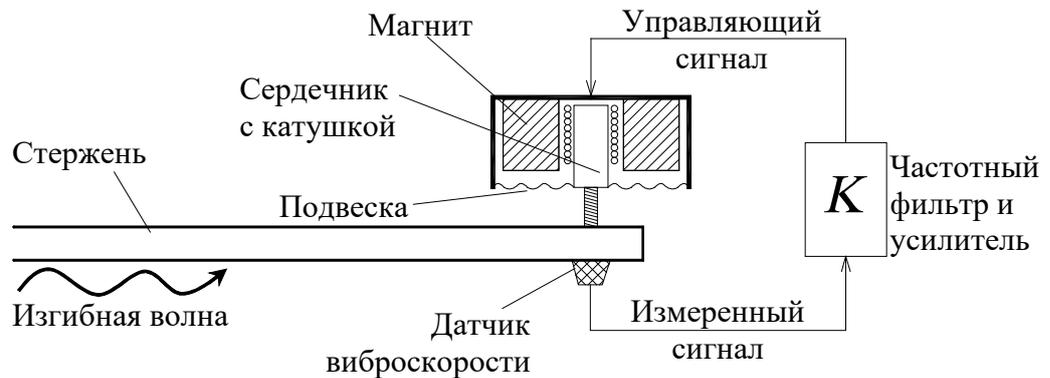


Рис. 2-3. Схема устройства активного резонатора

Подставляя (2.41) в (2.38), находим импеданс активного резонатора

$$Z_a = Z + \frac{(Bl)^2}{R} - \frac{Bl}{R} QK. \quad (2.42)$$

Второе слагаемое в (2.42) является добавкой к коэффициенту трения  $\gamma$ . Далее будем опускать это слагаемое, полагая его включенным в  $\gamma$ . Если для решения поставленной задачи необходимо обеспечить импеданс активного резонатора  $Z_a$ , то коэффициент обратной связи должен иметь следующее значение

$$K = \frac{R}{BlQ} (Z - Z_a). \quad (2.43)$$

Таким образом, найденный коэффициент обратной связи является решением поставленной задачи. Ключевым моментом реализации рассматриваемого метода становится реализация (2.43) в широкой полосе частот.

### 2.3.3. Поглощение изгибных волн

Известно, что одиночный резонатор способен поглотить не более половины мощности падающей на него волны [116]. Поэтому рациональнее использовать резонаторы для поглощения изгибных волн в стержнях конечной длины [169].

В первую очередь найдем условие поглощения резонатором изгибной волны в полубесконечном стержне  $x < 0$ , ось  $x$  направлена вдоль стержня. Поле колебания является суперпозицией падающей волны единичной амплитуды и двух отраженных волн: однородной с амплитудой  $V$ , которая в данном случае является также коэффициентом отражения, и неоднородной с амплитудой  $A$ . Смещение стержня от положения равновесия запишем в следующем виде:

$$w(x) = e^{ikx} + Ve^{-ikx} + Ae^{kx}. \quad (2.44)$$

Резонатор присоединен к концу стержня и действует на него силой  $F$ , перпендикулярной оси  $x$ . Для свободного конца стержня выполняются следующие граничные условия

$$w'' = 0, \quad w''' = -\frac{F}{D}. \quad (2.45)$$

где  $D$  – изгибная жесткость стержня.

Запишем уравнение движения резонатора (2.24) в следующем виде

$$m\ddot{\xi} = -\kappa(\xi - w). \quad (2.46)$$

В (2.46) трение резонатора учтено в виде мнимой добавки  $\delta$  к коэффициенту упругости согласно [16]. Для гармонического случая находим из (2.46) смещение резонатора

$$\xi = \frac{\kappa}{-i\omega Z} w. \quad (2.47)$$

Из (2.47) находим силу, с которой резонатор действует на стержень,

$$F = \kappa(\xi - w) = \frac{i\omega m \kappa}{Z} w. \quad (2.48)$$

Подставляя (2.45) в (2.44) и учитывая (2.48), находим коэффициент отражения

$$V = -\frac{k^3 D(1 - i) + 2i\omega Z}{k^3 D(1 + i) + 2i\omega Z}. \quad (2.50)$$

Падающая волна полностью поглощается, если импеданс резонатора удовлетворяет следующим условиям

$$Z = \frac{k^3 D}{2\omega} (1 + i), \quad (2.51)$$

Для обычного резонатора выражение (2.51) выполняется только на одной частоте. Активный резонатор поглотит всю падающую волну на тех частотах, на которых коэффициент обратной связи принимает следующие значения согласно (2.42)

$$\tilde{K} = \frac{R}{BlQ} \left( Z - \frac{k^3 D}{2\omega} (1 + i) \right). \quad (2.52)$$

Принимая во внимание дисперсионное соотношение  $k \sim \sqrt{\omega}$  для изгибных волн в стержне, найдем частотную зависимость коэффициента обратной связи

$$K(\omega) = -i\omega a_1 + b_1 + \frac{c_1}{-i\omega} - d_1(1 + i)\sqrt{\omega}, \quad (2.53)$$

где  $a_1, b_1, c_1, d_1$  – положительные постоянные коэффициенты.

Выражение (2.53) дает представление о возможностях технической реализации обратной связи, которая может быть выполнена с помощью аналоговых частотных фильтров.

Влияние ошибок настройки на эффективность гашения, т.е. на коэффициент отражения, рассмотренным выше способом: фактический коэффициент обратной связи  $K$  выразим через оптимальный коэффициент обратной связи  $\tilde{K}$  и ошибку настройки  $\varepsilon$  в виде  $K = \tilde{K}(1 + \varepsilon)$ . Подставляя это выражение и (2.52) в (2.42) находим импеданс активного резонатора  $Z_a$ , зависящий от ошибки настройки, и далее, подставляя его в (2.50) находим коэффициент отражения

$$V = \frac{2\omega Z + k^3 D(1 + i)}{-2k^3 D + [2\omega Z + k^3 D(1 + i)]\varepsilon} \varepsilon. \quad (2.54)$$

Из (2.54) следует, что параметр робастности принимает минимальное значение  $\mu \sim 1$ , если  $|Z| \ll k^3 D / \omega$ , т.е. актюатор на рис. 2-3 должен быть достаточно легким и податливым по сравнению с податливостью стержня.

Поглощение изгибных колебаний стержня активным резонатором исследовано экспериментально. На рис.2-4,*a* представлена схема экспериментальной установки. На одном конце алюминиевого стержня длиной 2м и поперечного сечения 20х2 мм расположен динамический излучатель, а на другом – активный резонатор (рис. 2-3), настроенный на максимальное поглощение. Эффективность поглощения определяется по сигналу с вибродатчика, расположенного примерно посередине стержня.

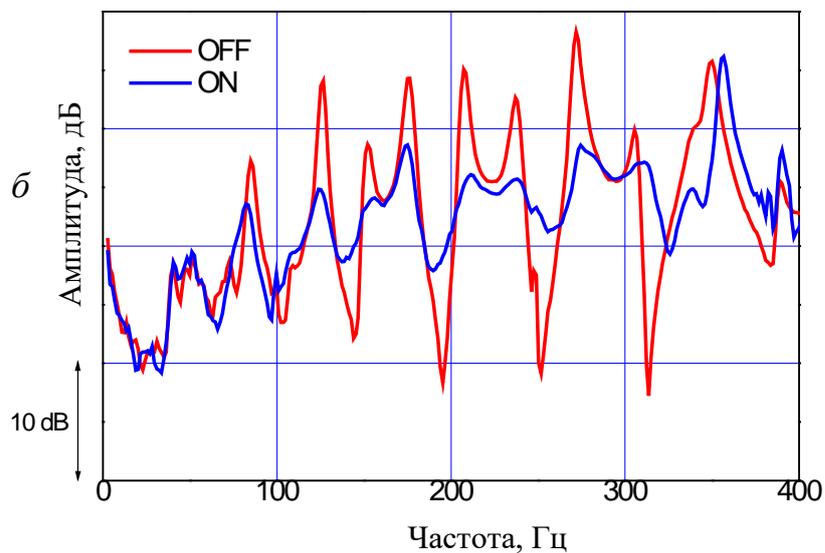
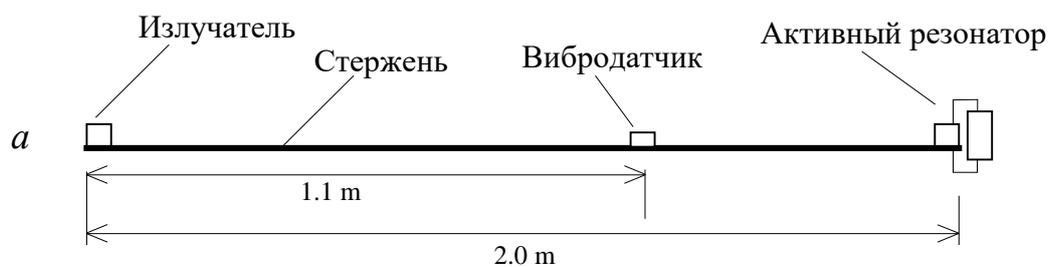


Рис. 2-4. Поглощение изгибных волн в стержне активным резонатором:  
*a* – схема экспериментальной установки;  
*б* – амплитуда сигнала на вибродатчике (OFF – активный резонатор отключен, ON – активный резонатор включен).

На рис.2-4,*б* представлены спектры сигналов вибродатчика. При отключенном активном резонаторе пики на спектре, соответствующие собственным частотам изгибных колебаний стержня, свидетельствуют о малом поглощении в стержне, это означает, что изгибные волны почти полностью отражаются от активного резонатора. При включении активного резонатора высота пиков значительно снижается в полосе частот 80-350 Гц. Полученное снижение соответствует значениям коэффициента отражения 0,05-0,15.

#### 2.3.4. Виброизоляция изгибных волн

Известно, что одиночный резонатор способен полностью отразить падающую на него изгибную волну [114]. Предложенное устройство

активного резонатора (рис. 2-3) также может использоваться для отражения изгибных волн или, другими словами, для виброизоляции.

Пусть в бесконечном стержне распространяется изгибная волна

$$w_0 = \exp(ikx - i\omega t). \quad (2.55)$$

Монопольный резонатор закреплен к стержню в точке  $x = 0$ , тогда полное поле в стержне записывается в следующем виде [111]

$$w_0 = \exp(ikx) + \frac{1}{\frac{4k^3 D}{\omega Z} - 1 - i} [\exp(ik|x|) + i \exp(-k|x|)]. \quad (2.56)$$

Падающая на резонатор волна полностью отражается, если его импеданс равен

$$Z = \frac{4k^3 D}{i\omega}. \quad (2.57)$$

Из (2.57) ясно, что только резонатор с нулевым трением отражает падающую волну и только на одной частоте.

Подставляя (2.57) в (2.43), находим оптимальный коэффициент обратной связи, его частотная зависимость, очевидно, имеет вид (2.53). Наименьшее влияние на эффективность гашения проходящей через резонатор волны оказывают ошибки настройки при выполнении условия  $|Z| \ll k^3 D / \omega$ . В целом отражающий активный резонатор имеет аналогичные характеристики, как и поглощающий, отличаются только оптимальные импедансы (2.51) и (2.57).

На рис. 2-5,*a* представлена схема экспериментальной установки для исследования виброизоляции изгибных волн активным резонатором. В отличие от схемы на рис. 2-4,*a* активный резонатор располагается примерно по середине стержня. На свободном конце стержня размещена пассивная поглощающая структура для подавления отраженной от конца резонатора волны, поэтому за резонатором распространяется только бегущая волна, амплитуда которой и характеризует эффективность виброизоляции. Эффективность гашения изгибных колебаний измеряется вибродатчиком, расположенным за активным резонатором.

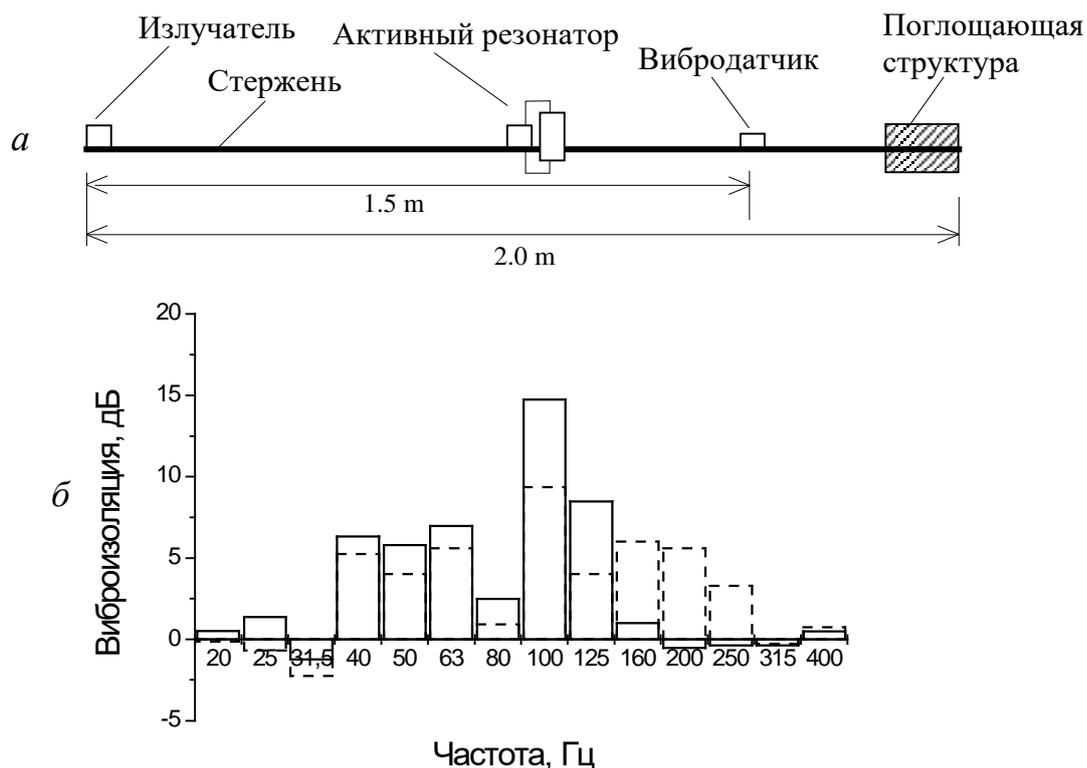


Рис. 2-5. Изоляция изгибных волн в стержне активным резонатором:  
*a* – схема экспериментальной установки;  
*б* – виброизоляция при двух настройках активного резонатора.

На рис. 2-5,*б* представлена частотная зависимость виброизоляции (разность между уровнем вибрации в третьоктавных полосах частот на вибродатчике при отключенном и включенном активном резонаторе), обеспечиваемой активным резонатором при двух различных его настройках. Первая настройка (сплошная линия) обеспечивает максимальную виброизоляцию в одной третьоктавной полосе: 15 дБ на 100 Гц. При второй настройке (пунктирная линия) эффект более широкополосный: 4-9 дБ в диапазоне 40-250 Гц. Исключением является частота 80 Гц, на этой частоте проявляется полуволновой резонанс на фрагменте стержня между излучателем и активным резонатором.

## 2.4. Выводы к главе 2

В главе 2 представлено развитие концепции гашения звука с помощью активного резонатора – локального устройства, имеющего резонансный импеданс в широкой полосе частот, предложенной в 2006 году [59]. Получены следующие основные результаты:

1. В дополнение к известному способу управления импедансом активного резонатора по полю в его окрестности предложен способ управления по движению активного резонатора. Первый способ в большей степени подходит для систем, в которых собственный механический импеданс значительно больше импеданса излучения (например, для гашения звука в воздушной среде). Второй способ – для систем, у которых эти импедансы сопоставимы (например, гашение колебаний в твердых телах).

2. Предложен параметр робастности – величина, характеризующая чувствительность активного резонатора к ошибкам настройки обратной связи. Такие ошибки всегда имеют место, поэтому робастность системы является важным критерием качества при практической реализации активных систем.

3. Проанализировано влияние типов излучателя и приемника активного резонатора, а также их взаимного расположения, на параметр робастности. Показано, что в зависимости от решаемой задачи может быть выбрана конфигурация активного резонатора, при которой параметр робастности принимает минимальное значение, что соответствует наименьшей чувствительности системы к ошибкам настройки.

4. Показано, что системы с глубокой обратной связью наиболее робастны, им соответствуют значения параметра робастности много меньшие 1. Системы с нулевой обратной связью также довольно устойчивы к ошибкам, для них параметр робастности имеет значения порядка 1. Для систем, в которых собственное звуковое поле, измеряемое приемником, значительно больше первичного поля, параметр робастности, как правило, много больше 1, что является показателем низкого качества системы.

5. Предложено осуществлять выбор устройства активного резонатора на основании параметра робастности – он должен принимать минимальное значение при имеющихся ограничениях на выбор типов излучателя и приемника, а также на их взаимное расположение.

6. Концепция активных резонаторов применена для гашения изгибных колебаний стержня. Предложена практическая конструкция активного резонатора с управлением по движению, получены условия его оптимальной работы. Работоспособность данного подхода продемонстрирована на двух экспериментальных примерах: поглощение и изоляция колебаний.

### Глава 3. Гашение звука в узких трубах

Возможности гашения звука резонаторами особенно хорошо проявляются в узких трубах: одиночные резонаторы без трения полностью отражают падающую звуковую волну на собственной частоте. На этом принципе базируется технология реактивных глушителей для большого количества прикладных задач. Активные резонаторы позволяют обеспечить аналогичные эффект в широкой полосе частот.

На практике для разработки глушителей чаще всего используются хорошо известные резонаторы Гельмгольца, четверть- и полуволновые резонаторы, являющиеся резонаторами монопольного типа. Сравнительно недавно предложен акустический резонатор дипольного типа [81], имеющий ряд преимуществ по сравнению с монопольными резонаторами, что позволило разработать системы, состоящие их монопольных и дипольных резонаторов и обладающие большей эффективностью гашения звука по сравнению с системами из однотипных резонаторов [114, 118, 119].

Пассивные и активные резонаторы дипольного типа в узких трубах исследованы в [59], в настоящей главе развиваются полученные ранее результаты.

#### 3.1. Дипольный резонатор

##### 3.1.1. Физические модели

Монопольный излучатель звука, или просто монополь, является источником объемной скорости, дипольный излучатель, или диполь, – источником силы, действующей на окружающую его среду [53]. Простейшей физической моделью монополя являются пульсирующая сфера с неподвижным центром, а диполя – осциллирующая без изменения своего объема сфера. Поэтому простейшей моделью дипольного резонатора можно считать жесткую сферу с массой  $m$  на пружинке с жесткостью  $k$  (рис. 3-1,*a*).

Запишем уравнение движения дипольного резонатора в общем виде, следуя [53],

$$m\dot{v} = -\mu(\dot{v} - \dot{u}) - \kappa \int v dt - rv + \rho\Omega\dot{u}, \quad (3.1)$$

где  $v$  – скорость резонатора,  $u$  – скорость среды,  $\mu$  – присоединенная масса сферы,  $r$  – коэффициент трения,  $\Omega$  – объем резонатора. В свободном пространстве, как известно, присоединенная масса осциллирующей сферы равна половине массы вытесненной ею среды. Из (3.1) легкой найти силу, с которой резонатор действует на среду

$$F = \mu(\dot{v} - \dot{u}) = \mu(-i\omega) \frac{\omega^2(m - \rho\Omega) - \kappa + i\omega r}{-\omega^2(m + \mu) + \kappa - i\omega r} u. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что сила диполя максимальна, когда действительная часть знаменателя в (3.2) обращается в нуль, т.е. на частоте

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m + \mu}}. \quad (3.3)$$

При  $r \rightarrow 0$  сила диполя становится бесконечной, поэтому естественно назвать частоту  $\omega_0$  собственной или резонансной частотой дипольного резонатора. На резонансной частоте сила диполя равна

$$F = \mu \frac{-\omega^2(\mu + \rho\Omega) + i\omega r}{r} u. \quad (3.4)$$

Сила диполя пропорциональна присоединенной массе, поэтому для увеличения эффективности дипольного резонатора необходимо увеличивать его присоединенную массу. Для этого предложена конструкция резонатора, приведенная на рис. 3-1,б [81]: жесткая трубка длиной  $l$  и поперечного сечения  $\sigma$ , один конец которой затянута мембраной, а другой свободен. Длина трубки должна быть много меньше длины волны, в мембрана может быть расположена в любом сечении трубки. Присоединенная масса определяется объемом среды  $\sigma l$ , заключенной в трубке, и объемом, присоединенным к концам трубки [165], который равен примерно  $0.9\sigma^{3/2}$ . Кроме этого, для увеличения присоединенной массы без увеличения длины резонатора можно

разместить мембрану в жестком экране радиуса  $r$  (рис. 3-1,в) много меньшем длины волны. Воспользовавшись результатами расчета импеданса поршня в жестком экране [158], можно оценить предельный присоединенный объем, который составляет  $\sim 5\sigma^{3/2}$ . Диполи на рис. 3-1,б и 3-1,в фактически имеют нулевой объем, поэтому при расчетах объем  $\Omega$  в уравнении движения (3.1) и в выражении для силы диполя (3.2) следует считать равным нулю.

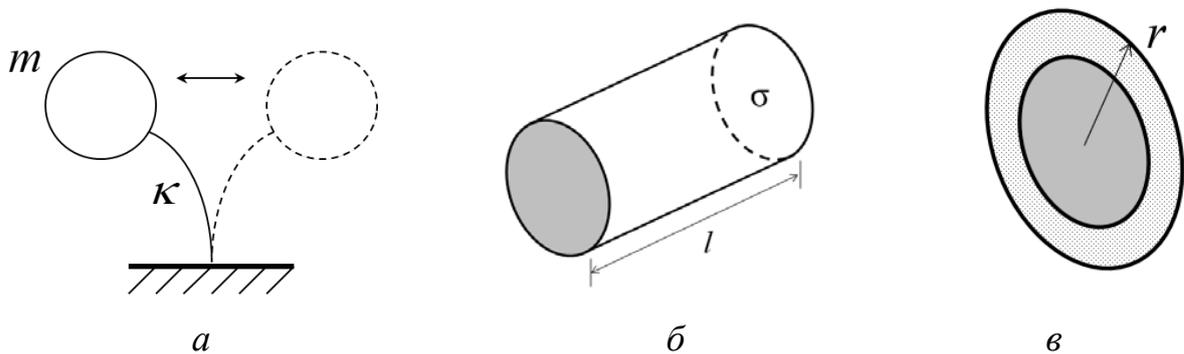


Рис. 3-1. Физические модели дипольного резонатора

Как и монопольные резонаторы (резонатор Гельмгольца или газовый пузырек в жидкости), дипольные резонаторы обладают замечательным свойством – их сечения поглощения и рассеяния максимальны на резонансной частоте и зависят только от длины волны [53]. Бездиссипативный монопольный резонатор в свободном пространстве имеет резонансное сечение рассеяния  $\lambda^2/\pi$ ,  $\lambda$  – длина волны. Если трение в резонаторе совпадает с сопротивлением излучения, то сечение поглощения максимально и составляет  $\lambda^2/4\pi$ .

Свойства дипольного резонатора во многом похожи. Если бездиссипативный резонатор находится в поле плоской волны, то его резонансное сечение рассеяния равно [158]

$$\sigma_s = \frac{4\lambda^2}{3\pi} \cos^2 \theta, \quad (3.5)$$

где  $\theta$  – угол между волновым вектором падающей на резонатор волны и дипольным моментом. Если дипольный резонатор ориентирован вдоль

направления распространения плоской волны, то его сечение рассеяния максимально и равно  $4\lambda^2/3\pi$ , что в  $4/3$  раза превышает резонансное сечение рассеяния монопольного резонатора. Максимальное сечение поглощения достигается при оптимальном трении и составляет

$$\sigma_a = \frac{\lambda^2}{3\pi} \cos^2 \theta, \quad (3.6)$$

что также в  $4/3$  раза больше резонансного сечения поглощения монопольного резонатора.

Однако в диффузном звуковом поле эффективность дипольных резонаторов несколько ниже. Сечения рассеяния и поглощения монополя не зависят от направления падающей волны и поэтому в диффузном поле имеют такие же значения, как и в поле плоской волны. Для получения характеристик дипольного резонатора в диффузном поле необходимо проинтегрировать выражения (3.5) и (3.6) по углу, что дает резонансные сечения рассеяния  $\sigma'_s = 2\lambda^2/3\pi$  и поглощения  $\sigma'_a = \lambda^2/6\pi$ , что в  $2/3$  раза меньше, чем аналогичные характеристики монопольного резонатора.

### 3.1.2. Монопольно-дипольный резонатор

Монопольно-дипольным резонатором называют устройство, совмещающее свойства монопольного и дипольного резонаторов, при этом резонаторы разных типов можно комбинировать несколькими способами.

В работе [114] предлагается несжимаемую сферу (рис. 3-1,а) заменить резонатором Гельмгольца. Фактически такой резонатор представляет комбинацию монопольного и дипольного резонаторов, размещенных в одной точке. В силу ортогональности их полей резонаторы работают независимо, поэтому сечения рассеяния и поглощения, приведенные в предыдущем разделе, можно складывать. В таблице 3-1 приведены резонансные сечения рассеяния и поглощения монопольного-дипольного резонатора в поле плоской волны при сонаправленности волнового вектора и дипольного момента резонатора и в диффузном поле.

Таблица 3-1. Сечения рассеяния и поглощения монополюльно-дипольного резонатора

Звуковое поле	Сечение рассеяния	Сечение поглощения
Плоская волна ( $\theta = 0$ )	$\frac{7}{3\pi} \lambda^2$	$\frac{7}{12\pi} \lambda^2$
Диффузное поле	$\frac{5}{3\pi} \lambda^2$	$\frac{5}{12\pi} \lambda^2$

Рассмотрим два резонатора Гельмгольца с объемными скоростями  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга. Уравнения движения резонаторов имеют вид

$$(Z + Z_r)q_1 + Z_{12}q_2 = -P_1, \quad (3.7)$$

$$(Z + Z_r)q_2 + Z_{12}q_1 = -P_2, \quad (3.8)$$

где  $Z_r$  – импеданс излучения резонатора Гельмгольца,  $Z_{12}$  – взаимный импеданс излучения,  $P_1$  и  $P_2$  – внешнее поле в точках расположения резонаторов. Решение системы (3.7), (3.8) запишем в векторном виде

$$\vec{q} = A_m \vec{q}_m + A_d \vec{q}_d, \quad (3.9)$$

где  $\vec{q} = (q_1, q_2)$ ,  $\vec{q}_m = (1, 1)$ ,  $\vec{q}_d = (1, -1)$ ,

$$A_m = -\frac{P_1 + P_2}{2(Z + Z_r + Z_{12})}, \quad (3.10)$$

$$A_d = -\frac{P_1 - P_2}{2(Z + Z_r - Z_{12})}. \quad (3.11)$$

Система из двух резонаторов имеет два собственных колебания: синфазное  $\vec{q}_m$  и противофазное  $\vec{q}_d$ . Если резонаторы расположены на малом волновом расстоянии друг от друга, то синфазные колебания дадут монополюльное излучение, поэтому естественно соответствующую моду  $\vec{q}_m$  назвать монополюльной. При противофазных колебаниях излучение будет дипольным, поэтому моду  $\vec{q}_d$  назовем дипольной. Коэффициенты  $A_m$  и  $A_d$  являются коэффициентами возбуждения монополюльной и дипольной мод. Таким образом, два взаимодействующих монополюльных резонатора образуют

монополюльно-дипольный резонатор, при этом, как следует из (3.10) и (3.11), собственные частоты монополюльной и дипольной моды несколько отличаются, если  $\text{Im}Z_{12} \neq 0$ .

### 3.2. Некоторые задачи гашения

#### 3.2.1. Рассеяние в бесконечной трубе

Резонатор Гельмгольца, встроенный в стенку трубы, эффективно отражает падающую волну на своей резонансной частоте. При этом коэффициент отражения равен  $-1$ , т.е. монополюльный резонатор эквивалентен абсолютно мягкой стенке на своей резонансной частоте. Рассмотрим отражение звука от дипольного резонатора. Ось  $x$  направим вдоль трубы, резонатор поместим в точке  $x = 0$ . Пусть из полупространства  $x < 0$  на резонатор падает гармоническая волна с амплитудой  $A$ , частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ . Отраженная и прошедшая через сечение, в котором установлен резонатор, волны имеют амплитуды  $B$  и  $C$ . Расчет коэффициентов отражения  $V = B/A$  и прохождения  $W = C/A$  проводится с учетом граничных условий в точке  $x = 0$ : колебательные скорости по обе стороны сечения равны, давление испытывает скачок, равный силе диполя (3.4), деленной на площадь поперечного сечения трубы  $S$ . Опуская элементарные преобразования, запишем коэффициент отражения и прохождения для безобъемного резонатора

$$V = \frac{1}{1 - i \frac{2\rho c S}{\omega \mu} \frac{Z}{Z + i\omega \mu}}, W = \frac{1}{1 - i \frac{\omega \mu}{2\rho c S} \frac{Z + i\omega \mu}{Z}}, \quad (3.12)$$

где  $Z = -i\omega(m + \mu) + r + \frac{\kappa}{-i\omega}$  – импеданс резонатора.

Бездиссипативный резонатор полностью отражает падающую волну на частоте  $\omega_0$ , определяемой (3.3), при этом коэффициент отражения  $V = +1$ , поэтому дипольный резонатор эквивалентен абсолютно жесткой стенке.

Также практический интерес представляет ширина частотной полосы, в которой происходит эффективное рассеяние звука. Для ее оценки запишем

выражение (3.12) для коэффициента прохождения, полагая резонатор бездиссипативным и достаточно легким, т.е.  $m \ll \mu$ , следующим образом

$$W = \frac{1}{1 + i \frac{k\mu}{2S\rho} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}. \quad (3.13)$$

Ширина частотной полосы  $\Delta\omega$ , в которой абсолютное значение коэффициента прохождения не превышает некоторого заданного значения  $w \ll 1$ , т.е.  $|W| \leq w$ , находится из (3.13)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = w \frac{k\mu}{4S\rho}. \quad (3.14)$$

Таким образом, ширина полосы пропорциональна присоединенной массе.

Рассеяние звука дипольным резонатором в узкой трубе исследовано экспериментально [81] на установке «Акустический интерферометр», подробное описание которой приведено в работе [59]. Резонатор в виде трубки с мембраной (рис. 3-1,б) помещался в трубу круглого сечения диаметром 0.1 м. Параметры резонатора, измеренные в свободном пространстве, приведены в таблице 3-2.

Таблица 3-2. Параметры дипольного резонатора в свободном пространстве

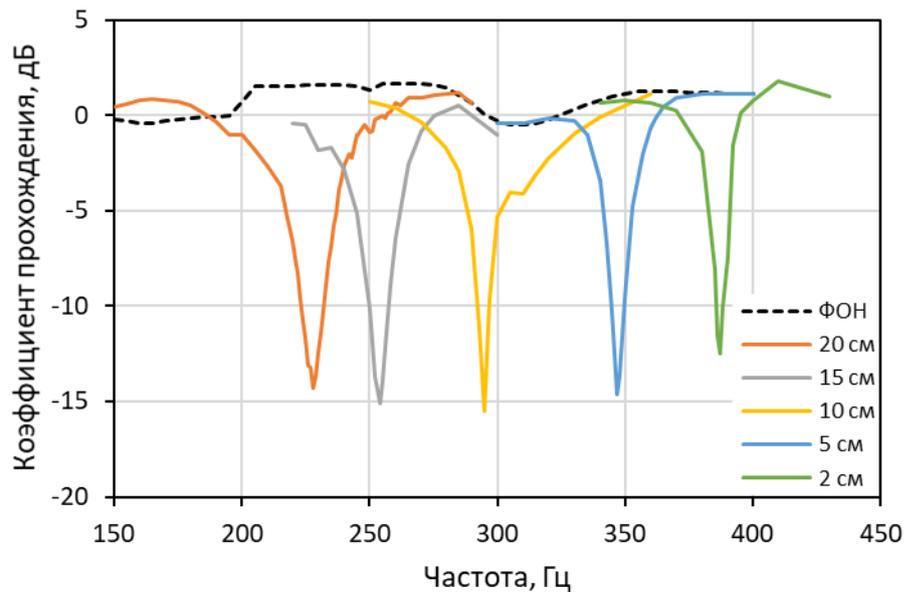
Звуковое поле	Обозначение	Ед. изм.	Значение
Длина	$l$	см	20.0
Площадь мембраны	$\sigma$	см <sup>2</sup>	26.4
Масса мембраны	$m$	г	0.17
Упругость мембраны	$k$	Н/м	2273
Присоединенная масса	$\mu$	г	0.72
Доля «живого» сечения	$1 - \sigma/S$		0.66

Резонатор устанавливается внутри трубы, поэтому частично перекрывает ее сечение. Не перекрытое сечение обычно называют «живым», его площадь составляет 66% от площади поперечного сечения трубы.

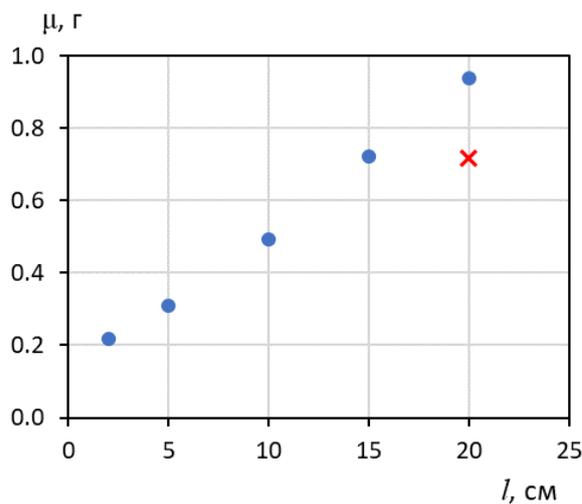
В эксперименте длина трубки  $l$  последовательно уменьшалась без изменения натяжения и массы мембраны. На рис. 3-2,*а* приведены измеренные коэффициенты прохождения для резонаторов разной длины  $l$ . При помещении в трубу резонатора исходной длины его резонансная частота уменьшилась до 228 Гц, что связано с увеличением присоединенной массы. С уменьшением длины трубки присоединенная масса уменьшается, а резонансная частота, наоборот, увеличивается. Эффективность гашения прошедшего звука составляет от 12 до 15 дБ. Кривая «ФОН» соответствует измерениям в трубе без резонатора.

По измеренной резонансной частоте на основании (3.3) рассчитана присоединенная масса диполя в трубе в зависимости от его длины, результаты расчета приведены в графическом виде на рис. 3-2,*б*. Крестиком обозначена присоединенная масса диполя длиной 20 см в свободном пространстве. Присоединенная масса не уменьшается до нулевого значения, поскольку при  $l = 0$  присоединенный объем, как показано выше, составляет примерно  $0.9\sigma^{3/2}$ , что соответствует присоединенной массе 0.08 г.

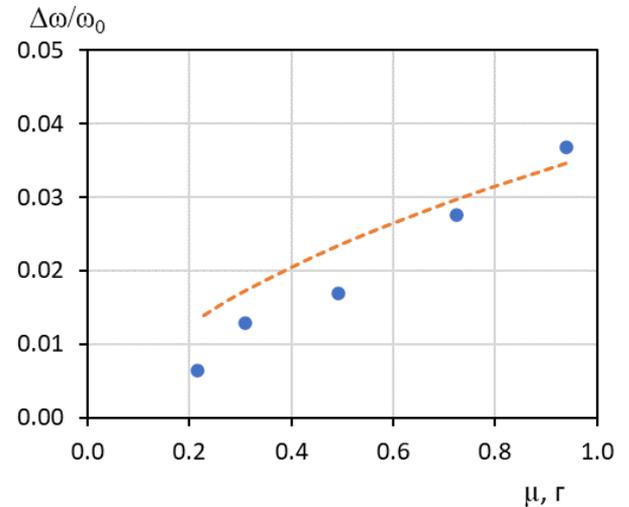
По измеренным кривым на рис. 3-2,*а* найдены частотные полосы эффективного гашения по уровню  $-10$  дБ, что соответствует значению  $w = 0.33$ . На рис. 3-2,*в* приведена зависимость относительной полосы эффективного гашения от присоединенной массы. Пунктиром приведена теоретическая зависимость (3.14) для безмассового резонатора. Измеренная полоса гашения оказалась несколько ниже теоретической, когда присоединенная масса стала сопоставима с собственной массой резонатора.



*a*



*б*



*в*

Рис. 3-2. Коэффициент прохождения через сечение узкой трубы, в котором установлен дипольный резонатор различной длины (*a*); зависимость присоединенной массы от длины резонатора (*б*); зависимость ширины полосы эффективного рассеяния в зависимости от присоединенной массы (*в*).

Из результатов теоретического рассмотрения и экспериментального исследования следуют следующие рекомендации для разработки реактивных глушителей звука для труб на основе дипольного резонатора:

1. Ключевым параметром, определяющим эффективность гашения на резонансной частоте, являются потери в резонаторе; они должны быть минимально возможными.

2. Ключевым параметром, определяющим ширину частотной полосы эффективного гашения, является присоединенная масса; она должна быть максимально возможной.
3. Собственная масса резонатора должна быть много меньше присоединенной массы.

Последний вывод демонстрирует потенциал применения дипольных резонаторов в жидких средах, для которых достаточно просто сделать легкие резонаторы. Например, можно использовать воздухозаполненные сферы (рис. 3-1,*а*) или тонкие резиновые мембраны (рис. 3-1,*б* и 3-1,*в*).

Активный резонатор дипольного типа обеспечивает более высокую эффективность гашения и в более широкой полосе частот [36, 84]. За основу конструкции активного резонатора (рис. 3-3,*а*) принята конструкция дипольного резонатора, изображенная на рис. 3-1,*б*. Вместо натянутой мембраны конец трубки 2 закрывается громкоговорителем 1 с открытой тыльной частью. Сигнал с микрофона 3, расположенного внутри трубки, передается через фильтр обратной связи 4 с частотнозависимым коэффициентом передачи  $K$  и интегрированным усилителем мощности. Важно, что корпус 5 громкоговорителя является звукопрозрачным – это необходимо для обеспечения дипольного излучения.

Коэффициент обратной связи зависит от частоты следующим образом

$$K = \frac{A_0}{-i\omega} \left( -i\omega a_1 + b_1 + \frac{c_1}{-i\omega} \right), \quad (3.15)$$

где  $A_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  – постоянные коэффициенты. Из (3.15) следует, что коэффициент обратной связи является суммой проинтегрированного (умножение на  $-i\omega$ ), проинтегрированного (деление на  $-i\omega$ ) и прямого сигнала. Указанная сумма интегрируется еще один раз (деление на  $-i\omega$ ). Простая структура выражений (3.15) позволяет реализовать фильтр обратной связи на аналоговой основе с использованием простейших элементов: интеграторов, дифференциаторов и усилителей [179].

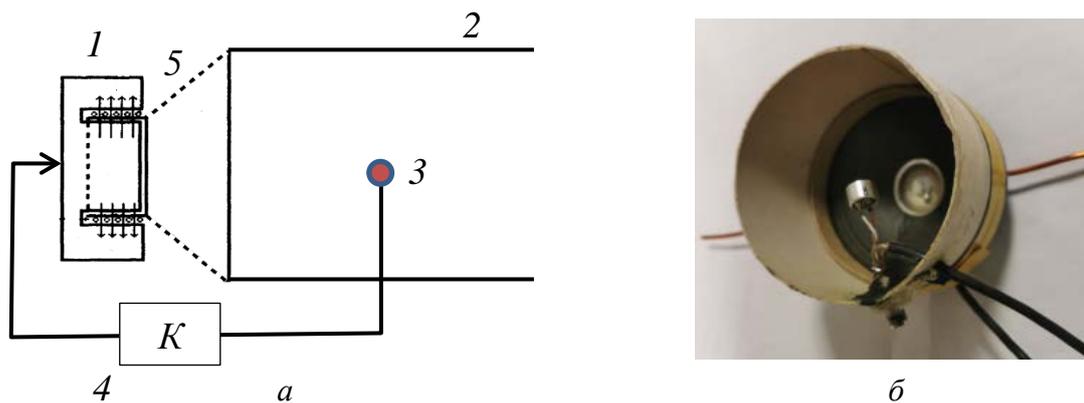


Рис. 3-3. Активный резонатор дипольного типа: схема (а) и фотография (б).

Активный резонатор устойчив к самовозбуждению, поскольку кольцевая передаточная функция при оптимальной настройке равна  $\tilde{H} \approx -1/2$ . Модуль функции  $\tilde{H}$  меньше 1, поэтому существует некоторый запас устойчивости к самовозбуждению. Так, например, для возникновения автоколебаний активного резонатора ошибка в амплитуде коэффициента обратной связи должна превысить 6 дБ. Кроме этого, требуется ошибка в фазе настройки на  $180^\circ$ .

Коэффициент прохождения, характеризующий эффективность гашения, зависит от ошибки настройки  $\varepsilon$ , определенной (2.22), так  $|W| \approx |\varepsilon|/2$  [59]. Отсюда следует, что параметр робастности равен  $\mu = 1/2$ , что соответствует достаточно хорошей устойчивости к ошибкам настройки.

Экспериментальное исследование рассеивающих свойств активного резонатора дипольного типа было проведено на установке, схема которой приведена на рис. 3-4,а. Круглая труба 1 диаметром 16 см и длиной 2,5 м выполняет роль узкого волновода. Источник первичной волны 2 расположен вблизи закрытого конца трубы и имеет размеры существенно меньшие диаметра трубы. Для уменьшения отражения звука от концов волновода и обеспечения режима бегущей волны в оба конца трубы уложен звукопоглощающий материал 3 – вата, причем у открытого конца она заняла часть волновода длиной 40 см. Активный диполь 4 установлен примерно

посередине трубы. Эффективность рассеяния измеряется контрольным микрофоном 5, установленным вблизи звукопоглотителя открытого конца волновода. Измеренный коэффициент прохождения – это разность между уровнями звукового давления на контрольном микрофоне, измеренными при включенном и выключенном активном резонаторе.

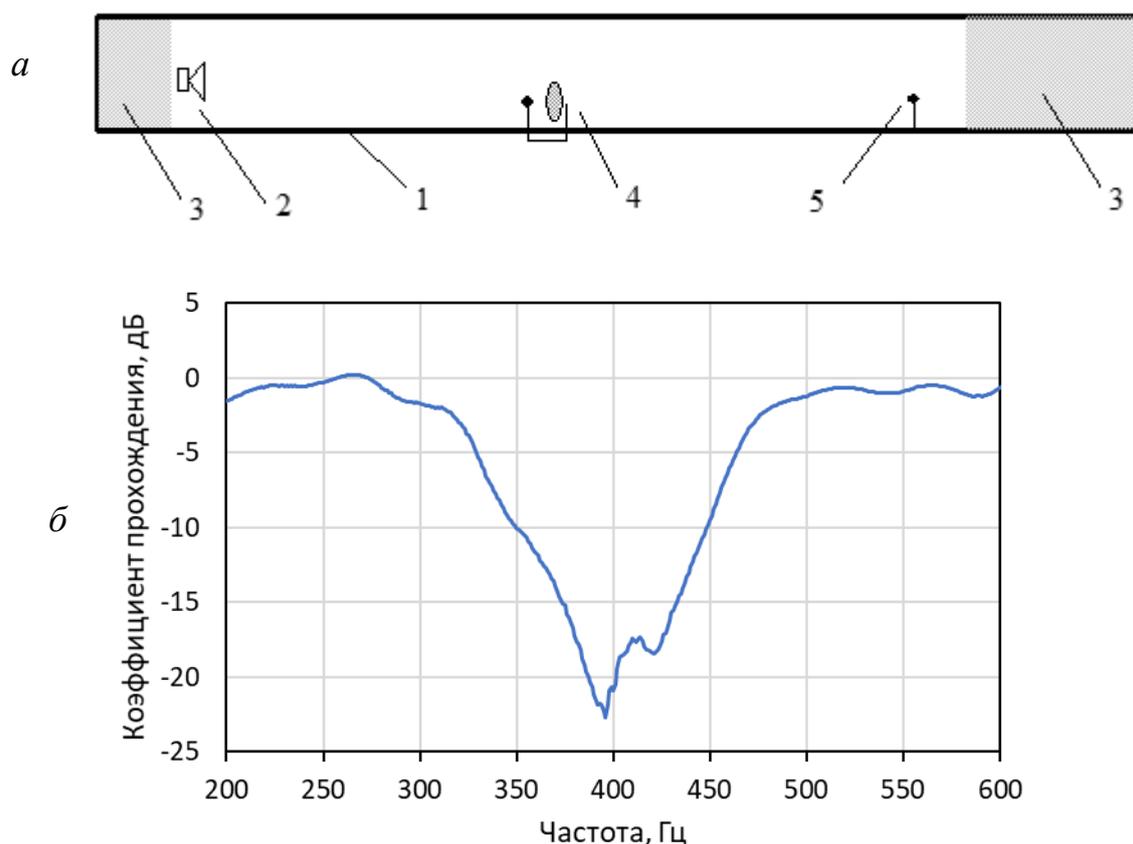


Рис. 3-4. Схема экспериментальной установки для исследования активного резонатора в узкой трубе. 1 – волновод, 2 – первичный излучатель, 3 – звукопоглотитель, 4 – активный резонатор, 5 – контрольный микрофон. (а); измеренный коэффициент прохождения (б).

На рис. 3-4,б приведены результаты измерений коэффициента прохождения. Заметный эффект гашения наблюдается в частотном диапазоне 300-500 Гц. Сравним эффективность гашения пассивным и активным резонаторами одинаковой длины (10 см). Во-первых, максимальная эффективность гашения активным резонатором достигает 22 дБ, а для пассивного (см. рис. 3-2,а кривая «10 см») она составляет около 16 дБ, т.е. эффективность гашения активным резонатором оказалась значительно выше.

Во-вторых, ширина частной полосы эффективного гашения оказалась многократно выше: для порога  $w = 0.33$  диапазон составляет 350-450 Гц, а относительная ширина полосы равна 0.25, что в 15 раз выше аналогичного параметра для пассивного резонатора.

Технологическим развитием данного подхода является усовершенствование конструкции активного резонатора, связанное с выведением вторичного излучателя из объема трубы для того, чтобы освободить сечение. Согласно [81] диполь в виде трубки (рис.3-1,б) может располагаться как внутри трубы, так и вне ее. Замена резонирующей мембраны на динамический излучатель приводит к конструкции, представленной на рис. 3-5 и защищенной патентом РФ №2702252 на изобретение [38]. Ниже приведено описание изобретения и принципа его работы.

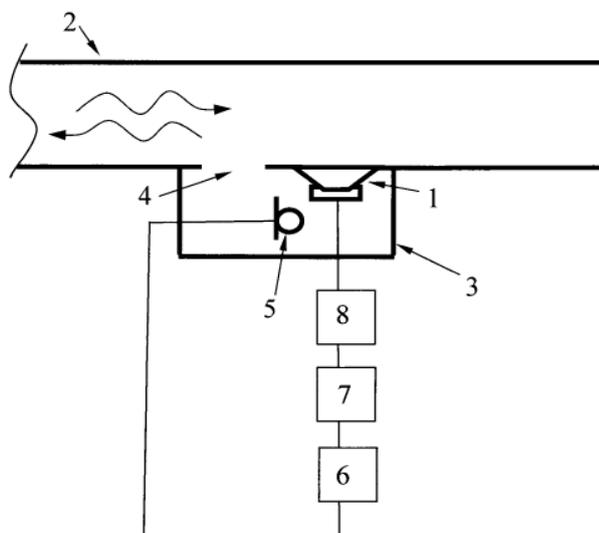


Рис. 3-5. Схема устройства для активного гашения акустических шумов [38].

Устройство для активного гашения акустических шумов в вентиляционных системах (рис. 3-5) содержит громкоговоритель 1, установленный в вентиляционном канале 2 заподлицо в отверстии стенки вентиляционного канала 2 перпендикулярно его оси, корпус 3 с круглым

отверстием 4, совпадающим с отверстием стенки вентиляционного канала 2, приемник давления (микрофон) 5, соединенный последовательно с предварительным усилителем 6 с электрически управляемым коэффициентом передачи, компенсатором 7 и инвертирующим усилителем мощности 8, соединенным с громкоговорителем 1.

Работа устройства происходит следующим образом. Акустические волны, вызванные шумом вентилятора, распространяются по вентиляционному каналу 2 и через отверстие 4 и излучающую поверхность громкоговорителя 1 достигают приемника давления (микрофона) 5. Электрическое напряжение, снимаемое с микрофона 5, усиливается предварительным усилителем 6 с электрически управляемым коэффициентом передачи и через компенсатор 7 поступает на инвертирующий усилитель мощности 8, соединенный с громкоговорителем 1. Громкоговоритель 1, размещенный в герметичном корпусе 3 с круглым отверстием 4, является излучателем дипольного типа и акустически эквивалентен жесткой границе, т.е. коэффициент отражения звуковых волн по давлению близок к +1. Вблизи устройства со стороны падающей (первичной) звуковой волны образуется пучность стоячей волны, что увеличивает уровень звукового давления на управляющем микрофоне 5 на 6 дБ по отношению к уровню звукового давления в падающей волне. При этом расстояния между осями громкоговорителя и отверстия в корпусе составляют много меньше длины волны на верхней граничной частоте подавляемого акустического шума. Увеличение уровня звукового давления на микрофоне 5 на 6 дБ дает возможность увеличить отношение «сигнал-шум» в два раза и тем самым повысить точность управляющего сигнала на громкоговорителе 1.

Размещение микрофона внутри корпуса 3 обеспечивает уменьшение воздействия на него помехи - пульсаций давления турбулентного потока в воздуховоде. Таким образом, данное устройство активного гашения звука существенно, в несколько раз увеличивает динамический диапазон управления системой гашения шума, что позволяет расширить полосу

подавляемых колебаний и тем самым повысить эффективность снижения шума.

### 3.2.2. Поглощение в трубе

Одиночный резонатор монопольного или дипольного типов при оптимальном трении на резонансной частоте может поглотить лишь половину энергии падающей на него волны, при этом четверть энергии отражается в обратном направлении, другая четверть проходит через сечение, в котором установлен резонатор. Два разнотипных резонатора с оптимальным трением, установленные в одном сечении трубы и настроенные на одну и ту же частоту, способны полностью поглощать падающую волну, каждый – по половине падающей звуковой энергии [113, 114]. Также полное поглощение возможно двумя близко (но не в одном сечении) расположенными разнотипными резонаторами.

При использовании двух близко расположенных резонаторов для поглощения звука в трубе возникает требование их разнотипности. Если один из резонаторов, например, монопольный, полностью отражает падающую волну, то падающая и отраженная волны образуют стоячую волну, пучность колебательной скорости которой находится рядом с резонатором. Для того, чтобы поглотить звук, необходимо установить в эту пучность дипольный резонатор, имеющий оптимальное трение. Аналогично, если отражает звук диполь, то около него образуется пучность давления, следовательно, вблизи него должен располагаться поглощающий монополь. Таким образом, один из резонаторов, дальний по направлению падающей волны, должен быть бездиссипативным, а второй должен иметь оптимальное трение – именно он и поглощает всю энергию [82].

Поглощающая система из двух резонаторных элементов, один из которых монополь, а другой – диполь, исследована экспериментально. Монопольный резонатор представляет собой резонатор Гельмгольца – цилиндрический сосуд с круглым отверстием в одном из торцов, затянутым

мембраной, которая используется для увеличения массы в отверстии и регулировки резонансной частоты. Объем сосуда –  $2,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ , площадь отверстия –  $7,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ . Дипольный резонатор имеет конструкцию, приведенную на рис. 3-1,б, длина трубки составляет 2 см и диаметр – 3,7 см (объем внутри трубки –  $2,15 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ). Параметры диполя – резонансная частота, совпадающая с резонансной частотой монополя, и оптимальные потери, необходимые для максимального поглощения – подбираются натяжением мембраны и длиной трубки. Оба резонатора настроены на частоту 316 Гц. Добротность резонаторов измерена по их резонансным кривым. Добротность монополя равна 90, добротность диполя – 30. Расстояние между резонаторами равно 8 см. Объем монополя примерно в 10 раз больше объема диполя (однако по теории [59] оптимальное соотношение объемов равно 2).

Исследование монопольно-дипольного поглотителя проведено на акустическом интерферометре, представляющем круглую трубу диаметром 10 см и длиной 2 м (рис. 3-6,а). В одном конце интерферометра установлен излучатель звука, на который подается широкополосный сигнал, а другой конец заполняется звукопоглощающим материалом для поглощения отраженной волны. Исследуемый образец, т.е. пара резонаторов, устанавливается в середине интерферометра, на расстоянии примерно 1 м от излучателя. Амплитуды бегущих волн  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  измеряются с помощью двух пар микрофонов, по которым, в свою очередь, вычисляются коэффициенты отражения  $V$  и прохождения  $W$ . Коэффициент поглощения определяется по формуле  $\alpha = 1 - |V|^2 - |W|^2$ . Частотная зависимость измеренного коэффициента поглощения приведена на рис. 3-6,б.

Одиночные активные резонаторы также могут поглотить лишь половину энергии падающей волны, хотя и в широкой полосе частот. Поэтому для полного поглощения требуется два разнотипных резонатора. С другой стороны, очевидно, что монопольно-дипольный резонатор (рис. 3-6,а) создает одностороннее излучение, которое также может быть обеспечено двумя

монопольными излучателями с соответствующим подбором их объемных скоростей. Рассмотрим такую конструкцию подробнее.

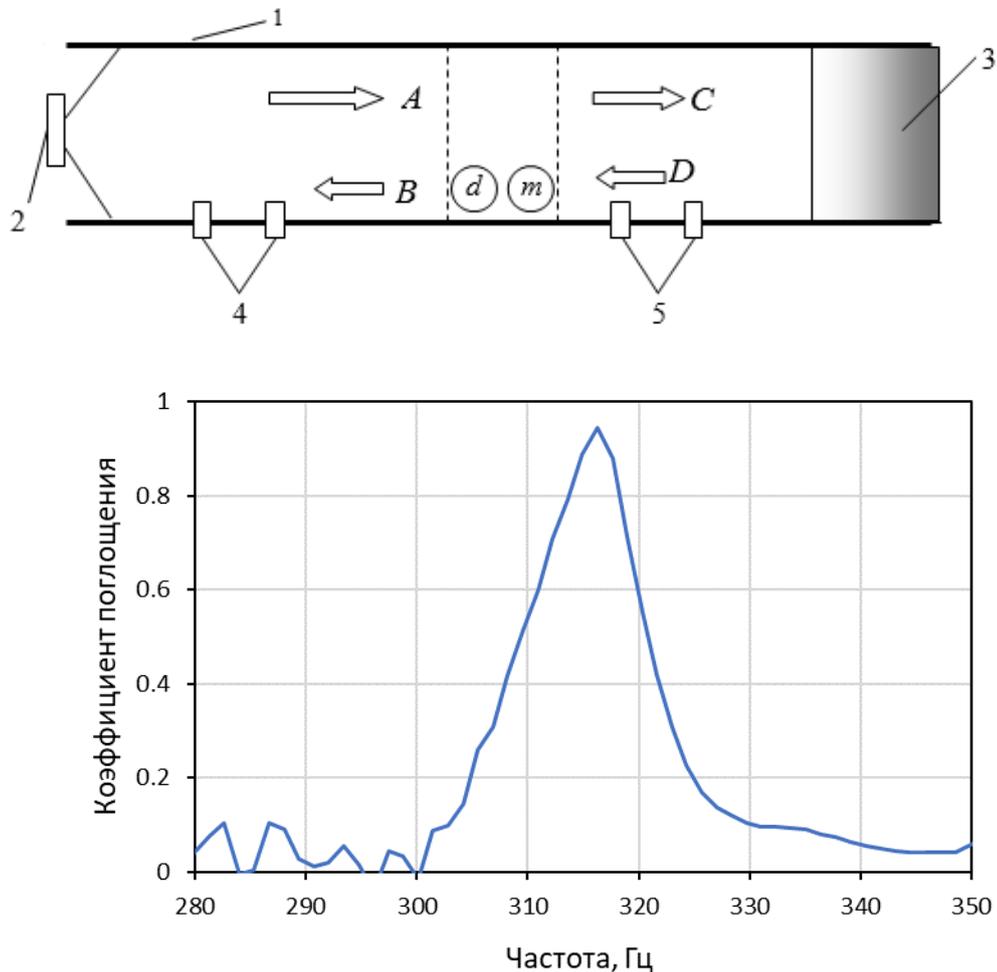


Рис. 3-6. Схема экспериментальной установки для исследования монопольно-дипольного резонатора в узкой трубе. 1 – волновод, 2 – первичный излучатель, 3 – звукопоглотитель, 4 – пара микрофонов, измеряющих коэффициент отражения, 5 – пара микрофонов, измеряющих коэффициент прохождения,  $d$  – дипольный резонатор,  $m$  – монопольный резонатор (а); измеренный коэффициент поглощения (б).

Активный поглотитель состоит из двух излучателей монопольного типа, расположенных в узкой трубе в точках  $x = 0$  и  $x = l$ , объемные скорости которых равны  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 3-7). На поглотитель падает волна  $p = p_0 \exp(ikx - i\omega t)$ , далее временной множитель опускаем. Пусть в некотором сечении трубы  $x = L$ ,  $L > l$  имеется препятствие (мягкая или жесткая стенка,

увеличение/уменьшение сечения трубы, открытый конец и т.п.). Сечение с препятствием характеризуется импедансом  $Z$ .

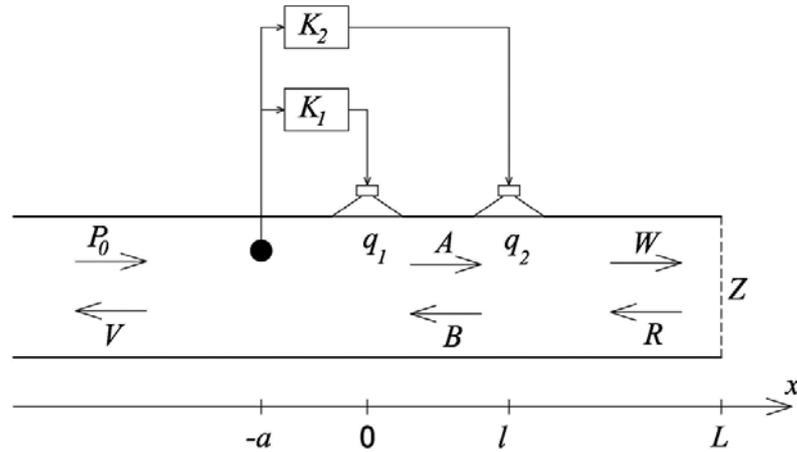


Рис. 3-7. Физическая модель активного поглотителя.

Запишем поле давления и скорости в трубе в следующем виде

$$p(x) = \begin{cases} P_0 e^{ikx} + V e^{-ikx}, & x < 0 \\ A e^{ikx} + B e^{-ikx}, & 0 < x < l, \\ W e^{ikx} + D e^{-ikx}, & l < x < L \end{cases} \quad (3.16)$$

$$v(x) = \frac{1}{\rho c} \begin{cases} P_0 e^{ikx} - V e^{-ikx}, & x < 0 \\ A e^{ikx} - B e^{-ikx}, & 0 < x < l, \\ W e^{ikx} - D e^{-ikx}, & l < x < L \end{cases} \quad (3.17)$$

Граничные условия имеют вид

$$p(-0) = p(+0), \quad (3.18)$$

$$p(l-0) = p(l+0), \quad (3.19)$$

$$\frac{p(L)}{v(L)} = \rho c Z, \quad (3.20)$$

$$v(-0)S = q_1 + v(+0)S, \quad (3.21)$$

$$v(l-0)S = q_2 + v(l+0)S, \quad (3.22)$$

Подставляя (3.16), (3.17) в (3.18 - 3.22), получаем систему из пяти уравнений для пяти неизвестных амплитуд бегущих волн, решение которой имеет вид

$$W = P_0 - \frac{\rho c}{2S} (q_1 + q_2 e^{-ikl}), \quad (3.23)$$

$$V = RW - \frac{\rho c}{2S}(q_1 + q_2 e^{ikl}), \quad (3.24)$$

$$A = P_0 - \frac{\rho c}{2S}q_1, \quad (3.25)$$

$$B = RW - \frac{\rho c}{2S}q_2 e^{ikl}, \quad (3.26)$$

$$D = RW, \quad (3.27)$$

где  $R = \frac{Z-1}{Z+1} e^{2ikL}$  – коэффициент отражения от импедансной границы.

Условие поглощения падающей волны сводится к отсутствию прошедшего и отраженного полей

$$V = 0, W = 0. \quad (3.28)$$

Из (3.23) и (3.24) находим объемные скорости излучателей, требуемые для выполнения условия (3.28)

$$\tilde{q}_1 = i \frac{S}{\rho c} \frac{P_0}{\sin kl} e^{ikl}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{q}_2 = -i \frac{S}{\rho c} \frac{P_0}{\sin kl}. \quad (3.30)$$

Здесь, как и ранее, волной обозначаются величины, соответствующие оптимальному режиму работы активного глушителя, т.е. при котором выполняются условия (3.28).

Для формирования оптимальных объемных скоростей монополей применим датчик давления (микрофон), который поместим в трубе со стороны падающего поля относительно глушителя. Координата микрофона  $x = -a$ . Согласно (3.16) давление на микрофоне имеет значение

$$P_s = P_0 e^{-ika} + V e^{ika}. \quad (3.31)$$

Введем коэффициенты обратной связи  $K_1 = q_1/P_s$  и  $K_2 = q_2/P_s$ , связывающие давление на микрофоне и объемные скорости монополей. Из (3.28 - 3.31) находим оптимальные коэффициенты обратной связи

$$\tilde{K}_1 = -i \frac{\rho c e^{-ik(a+l)}}{S \sin kl}, \quad (3.32)$$

$$\tilde{K}_2 = i \frac{\rho c e^{-ika}}{S \sin kl}. \quad (3.33)$$

Полученные выражения являются решением поставленной задачи поглощения падающей волны. Отметим, что коэффициенты обратной связи не зависят от импеданса границы и от расстояния до нее. В связи с этим предлагаемый активный глушитель может быть применен для любых труб.

Для исследования устойчивости применим критерий Найквиста для кольцевой передаточной функции системы  $H$ , которая является произведением чувствительности приемника, коэффициента обратной связи, передаточной функции излучателя и передаточной функции акустического пути от излучателя к приемнику. Система является неустойчивой, т.е. в ней возникают автоколебания на частотах, для которых  $\arg H = 2\pi n$  и  $|H| \geq 1$ .

Для расчета функции  $H$  рассмотрим задачу при отсутствии падающего поля. Пусть на вход фильтра обратной связи подается сигнал  $P_{in}$ , тогда объемные скорости излучателей будут равны  $q_1 = K_1 P_{in}$  и  $q_2 = K_2 P_{in}$ . Амплитуду  $V$  бегущей в сторону микрофона волны находим из (9). Сигнал на выходе микрофона равен  $P_{out} = V e^{ika}$ . Кольцевая передаточная функция имеет вид

$$H = -\frac{\rho c}{2S} e^{ika} \left( (R + 1)K_1 + (R e^{-ikl} + e^{ikl})K_2 \right). \quad (3.34)$$

Подставляя (3.32) и (3.33) в (3.34), находим оптимальную кольцевую передаточную функцию

$$\tilde{H} = -R e^{ika}. \quad (3.35)$$

Если труба бесконечная или имеет поглощающую границу, то коэффициент отражения  $R = 0$ , следовательно,  $\tilde{H} = 0$  и активный глушитель является устойчивым. Если активный глушитель расположен вблизи открытого конца трубы, коэффициент отражения от которого  $R \approx -1$ , то  $\tilde{H} \approx 1$ , и система оказывается близка к неустойчивости, хотя, строго говоря, критерий Найквиста не выполняется, поскольку  $\arg \tilde{H} \neq 0$  в рабочем диапазоне частот.

Для исследования робастности предложенной системы введем ошибки, характеризующие отклонения коэффициентов обратной связи  $K_1$  и  $K_2$  от оптимальных значений, следующим образом

$$K_1 = \tilde{K}_1(1 + \varepsilon_1), K_2 = \tilde{K}_2(1 + \varepsilon_2). \quad (3.36)$$

Находим объемные скорости излучателей из (3.31) и (3.36), после чего вычисляем амплитуды волн (3.23)-(3.27), распространяющихся в трубе. В первую очередь нас интересуют амплитуды отраженной от активного глушителя волны  $V$  и прошедшей волны  $W$ . При выполнении условий  $kl \ll 1$  и  $ka \ll 1$  находим

$$V \approx P_0 \frac{i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2kl - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}, \quad (3.37)$$

$$W \approx P_0 \frac{(i-1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + ikl(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2ikl + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - kl(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (3.38)$$

Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  т.е. выполняется условие одностороннего излучения, и  $|\varepsilon_1| \ll 1$ , то  $V = 0$  и  $\left|\frac{W}{P_0}\right| \sim \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Амплитуда коэффициента прохождения пропорциональна ошибке настройки.

Если  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , т.е. объемные скорости монополей имеют разные отклонения от оптимального значения,  $\left|\frac{W}{P_0}\right| \sim \left|\frac{V}{P_0}\right| \sim \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2kl}$ . Коэффициенты отражения и прохождения примерно в  $(2kl)^{-1}$  больше ошибки настройки.

Таким образом, предложенная система для активного поглощения звука в трубе требует более точной настройки одностороннего излучения, чем инвертированного поля. Безразмерный параметр  $\mu$ , характеризующий робастность гашения прошедшего поля односторонним излучателем, имеет значение  $\mu \sim 1$ , что является довольно высоким показателем и подтверждает перспективность технологической реализации предложенной системы.

Технологическим развитием данного подхода стала разработка звукопоглощающего устройства, схема которого представлена на рис. 3-8, защищенного патентом РФ №2709606 на изобретение [39]. Ниже приведено описание изобретения и принципа его работы.

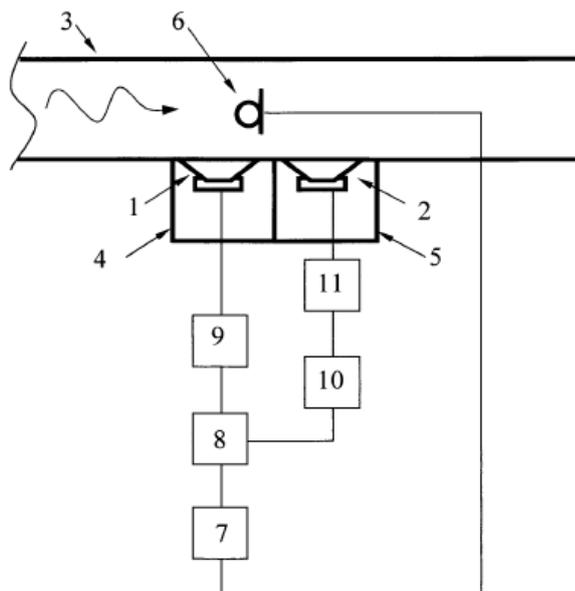


Рис. 3-8. Схема устройства для активного поглощения шума [39].

Устройство для активного гашения акустических шумов в вентиляционных системах содержит два громкоговорителя 1 и 2, установленные в вентиляционном канале 3 заподлицо в отверстиях стенки вентиляционного канала 3 перпендикулярно его оси, герметичные корпуса 4 и 5, в которых размещены громкоговорители 1 и 2, приемник давления (микрофон) 6, соединенный последовательно с предварительным усилителем 7 с электрически управляемым коэффициентом передачи, компенсатором 8 и инвертирующим усилителем мощности 9, соединенным с громкоговорителем 1, и фазовращатель 10, вход которого соединен с выходом компенсатора 8, а выход фазовращателя 10 соединен последовательно с дополнительным усилителем мощности 11 и вторым громкоговорителем 2.

Работа устройства происходит следующим образом. Акустические волны, вызванные шумом вентилятора, распространяются по вентиляционному каналу 3 и достигают приемника давления (микрофона) 6. Электрическое напряжение, снимаемое с микрофона 6, усиливается предварительным усилителем 7 с электрически управляемым коэффициентом передачи и через компенсатор 8 поступает на инвертирующий усилитель

мощности 9 и вход фазовращателя 10. С выхода инвертирующего усилителя мощности 9 сигнал поступает на вход громкоговорителя 1, а с выхода фазовращателя 10 сигнал поступает на усилитель мощности 11 и затем на громкоговоритель 2. Громкоговоритель 2, размещенный в герметичном корпусе 5, является отражателем звуковой волны. Громкоговоритель 1, размещенный в герметичном корпусе 4, является поглотителем звуковой волны, отраженной от громкоговорителя 2. В вентиляционном канале 3 отсутствует волна, отраженная от устройства в направлении обратном направлению распространения падающей волны. Звуковое поле в вентиляционном канале 3 между источником шума (вентилятором) и устройством является спектром бегущих волн, стоячие волны на этом участке канала отсутствуют. Таким образом, данное устройство активного гашения звука не приводит к образованию стоячих волн в вентиляционном канале и исключает усиление звука на резонансных частотах, зависящих от расстояния между источником шума (вентилятором) и громкоговорителями 1 и 2, что позволяет существенно, в несколько раз, увеличить эффективность гашения шума на этих частотах и обеспечить высокую эффективность подавления шума во всем рабочем диапазоне частот.

### **3.2.3. Гашение звука, излучаемого из открытой трубы**

В разделе 3.2.1 показано, что одиночный монополюсный или дипольный резонатор без внутренних потерь, расположенный в узкой бесконечной трубе, полностью отражает падающую звуковую волну на своей резонансной частоте. При этом частотная полоса эффективного рассеяния для обоих типов резонаторов одинакова [59]. Однако для гашения звука на выходе трубы конечной длины тип резонатора имеет существенное значение. В самом деле, монополюсный резонатор возбуждается давлением внешнего поля, дипольный резонатор – колебательной скоростью. Поскольку коэффициент отражения волны по давлению от открытого конца трубы близок к  $-1$ , то у конца трубы возникает узел звукового давления и пучность колебательной скорости

стоячей волны. Монопольный резонатор, расположенный у выхода узкой трубы, в минимуме давления, слабо возбуждается звуковым полем. Дипольный резонатор, помещенный в этом же месте, находится в максимуме колебательной скорости и возбуждается значительно сильнее. Поэтому применение дипольного резонатора для гашения звука на выходе трубы должно быть более эффективным [83]. Заметим, что и монопольные резонаторы также могут использоваться для гашения шума, излучаемого из выхода трубы [9]. При этом на собственной частоте резонатора излучаемый трубой звук усиливается, но, начиная с некоторой частоты, несколько выше резонансной, степень гашения звука становится положительной.

### **Пассивный резонатор**

В работах [59, 83] подробно изложена теория гашения звука резонатором, расположенным в узкой трубе около ее выхода. Приведем кратко основные результаты. Монопольный или дипольный резонатор без потерь отражает полностью падающую волну на своей резонансной частоте. Прошедшая через сечение, в котором установлен резонатор, волна оказывается полностью погашенной, поэтому на выходе трубы звуковое поле равно нулю, и в открытое пространство звук из открытой трубы не излучается. Существенная разница между резонаторами двух типов возникает при сравнении ширины частотной полосы эффективного гашения. Так ширина полосы, в которой степень гашения излученного из трубы звука составляет не менее 6 дБ, для резонатора Гельмгольца и дипольного резонатора составляет соответственно

$$\Delta_m \approx \frac{k\Omega}{4S} kb, \quad \Delta_d \approx \frac{k\mu}{2S\rho}. \quad (3.39)$$

где  $\Omega$  – объем резонатора Гельмгольца,  $b$  – радиус трубы круглого сечения. Из (3.39) следует, что при равных объемах этих устройств ( $\Omega = \mu/\rho$ ) эффективность дипольного резонатора, в смысле ширины полосы, в  $2/kr$  раз превышает эффективность монопольного резонатора. Напомним, что в

бесконечной трубе монополюный и дипольный резонаторы с равными объемами одинаково эффективны [77].

Экспериментальные исследования показали [79], что дипольный резонатор в виде конструкции, представленной на рис. 3-1,б, обеспечивает снижение излучаемого из открытой трубы шума на 18-27 дБ. Максимальное гашение наблюдается, когда резонансная частота диполя совпадает с одной из резонансных частот трубы, в этом случае резонатор меняет граничное условие на конце трубы: открытый конец трубы является мягкой границей, а дипольный резонатор эквивалентен жесткой границе. Фактически происходит изменение спектра собственных колебаний среды в трубе: одна из собственных частот смещается, что приводит к дополнительному эффекту гашения, составляющему около 9 дБ. Относительная ширина частотной полосы гашения по уровню 10 дБ составляет примерно 0.04, что сопоставимо с эффективностью гашения звука дипольным резонатором в бесконечной трубе (рис. 3-2,в).

Из теории следует, что дипольный резонатор должен быть расположен как можно ближе к выходу трубы, предельное расположение – непосредственно на срезе трубы. С другой стороны, очевидно, что в этом случае будет излучаться некоторая звуковая энергия, поскольку на срезе трубы колебательная скорость не будет равна нулю на выходном сечении. Рассмотрим этот случай для дипольного резонатора нулевой толщины (рис. 3-1,в) в следующей постановке (рис. 3-9). Полубесконечная круглая труба с радиусом  $b$  встроена в бесконечный жесткий экран. На выходе трубы в плоскости экрана установлен круглый диск с радиусом  $a$ .

Дальнее поле звукового давления, создаваемого круглым поршнем радиуса  $a$ , колеблющегося с частотой  $\omega$  и амплитудой скорости  $V$ , в сферических  $(r, \theta)$  координатах известно:

$$p(\theta, r, a) = -i\omega\rho a^2 V \frac{e^{ikr} J_1(ka \sin \theta)}{r ka \sin \theta}. \quad (3.40)$$

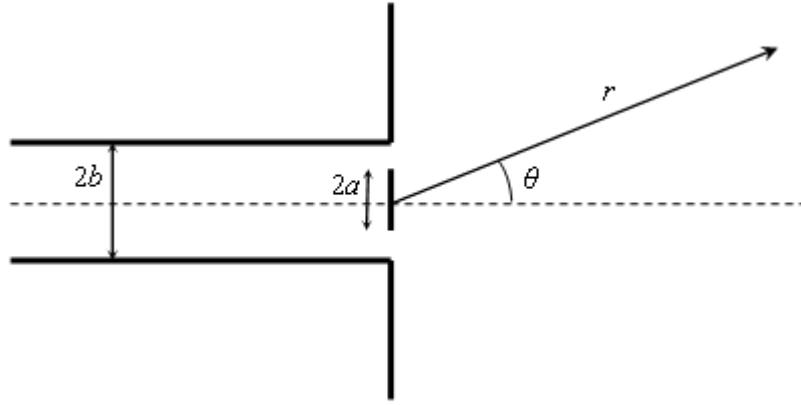


Рис. 3-9. Диполь на выходе трубы.

Введем фактор направленности излучения

$$\Phi(\theta, a) = 2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}, \quad (3.41)$$

который при малых  $ka$  равен

$$\Phi(\theta, a) = 1 - \frac{(ka)^2}{8} \sin^2 \theta. \quad (3.42)$$

Если диск на рис. 3-9 неподвижен и зазор между ним и экраном мал, то скорость среды в зазоре можно считать постоянной по всей его площади. Излучатель можно считать кольцом, движущимся со скоростью  $V$ . Очевидно, что его поле кольцевого излучателя – это разность поля поршня радиуса  $b$ , движущегося со скоростью  $V$ , и поршня радиуса  $a$ , движущегося со скоростью  $-V$ , которое имеет вид

$$p_r(\theta, r) = p(\theta, r, b) - p(\theta, r, a).$$

Теперь подберем такую скорость движения поршня, чтобы суммарная объемная скорость поршня и кольцевого излучателя была равна нулю. Объемная скорость кольца равна  $V\pi(b^2 - a^2)$ , тогда скорость поршня должна быть равна  $-V(b^2 - a^2)/a^2$ . Поле такого излучателя равно

$$p_d(\theta, r) = p_r(\theta, r) - \frac{b^2 - a^2}{a^2} p(\theta, r, a) = p(\theta, r, b) - \frac{b^2}{a^2} p(\theta, r, a).$$

Подставляя в это уравнение выражение для поля (3.40), получим

$$p_d(\theta, r) = -\frac{1}{2} i \omega \rho b^2 V \frac{e^{ikr}}{r} (\Phi(\theta, b) - \Phi(\theta, a)). \quad (3.43)$$

Для малого волнового размера излучателя находим

$$p_a(\theta, r) = \frac{1}{16} i \omega \rho b^2 V \frac{e^{ikr}}{r} k^2 (b^2 - a^2) \sin^2 \theta. \quad (3.44)$$

Диаграмма излучения похожа на дипольную, кроме этого, кольцо и поршень образуют два близко расположенных противофазных монополя с одинаковыми объемными скоростями.

Эффективность гашения излученного звука определим как отношение амплитуды волны, излученной диполем, к амплитуде волны, излученной кольцом. Снижение уровня звукового давления в зависимости от направления составляет

$$L(\theta) = -20 \log \left| \frac{p_a(\theta, r)}{p_r(\theta, r)} \right|. \quad (3.45)$$

При малом волновом размере диполя снижение составляет

$$L(\theta) = -20 \log \left( \frac{1}{8} (kb)^2 \sin^2 \theta \right). \quad (3.46)$$

Далее рассмотрим снижение звуковой энергии, излучаемой из трубы в свободное пространство. Мощность излучения поршня радиуса  $a$  в экране составляет

$$W = \frac{\pi}{4} \omega \rho k a^4 V^2 \int_0^{\pi/2} \Phi^2(\theta, a) \sin \theta d\theta. \quad (3.47)$$

Отсюда находим площадь излучения кольца

$$W_r = \frac{\pi}{4} \omega \rho k V^2 \int_0^{\pi/2} [b^2 \Phi(\theta, b) - a^2 \Phi(\theta, a)]^2 \sin \theta d\theta, \quad (3.48)$$

и мощность излучения диполя

$$W_d = \frac{\pi}{4} \omega \rho k b^4 V^2 \int_0^{\pi/2} [\Phi(\theta, b) - \Phi(\theta, a)]^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.49)$$

Для излучателей с малыми волновыми размерами находим приближенные выражения

$$W_r \approx \frac{\pi}{4} \omega \rho k V^2 (b^2 - a^2)^2, \quad (3.50)$$

$$W_d \approx \frac{\pi}{256} \omega \rho k (kb)^4 V^2 (b^2 - a^2)^2 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta d\theta. \quad (3.51)$$

Значения интеграла в (3.51) составляет  $8/15 \approx 1/2$ .

Эффективность гашения определим следующим образом

$$L_w = -10 \log \left| \frac{W_d}{W_r} \right|. \quad (3.52)$$

Для малых излучателей оно составит

$$L_w \approx -10 \log \frac{(kb)^4}{128}. \quad (3.53)$$

Оценка (3.53) дает достаточно малую величину: даже при  $kb \sim 1$  снижение излученного из трубы звука составит примерно 20 дБ. Поэтому для узких труб наличием излученного звука при расположении резонатора на срезе трубы можно пренебречь. В целом (3.52) и (3.52) могут рассматриваться в качестве предельно достижимого эффекта гашения при расположении дипольного резонатора на выходе трубы.

Проведена экспериментальная проверка полученного результата для дипольного резонатора, установленного на срезе трубы в постановке задачи на рис. 3-9. Дипольный резонатор в виде, представленном на рис. 3-1,б, с трубкой длиной 2, 6 и 13 см с радиусом  $r = 40$  мм и радиусом мембраны 32 мм, устанавливался на выходе круглой трубы радиусом 100 мм. На рис. 3-10 приведены измеренные на расстоянии 1 м от выхода трубы спектры шума, излученного из трубы в свободное пространство звука. На резонансной частоте снижение уровня звукового давления составило около 30 дБ. В таблице 3-3 приведены характеристики эффективности гашения: резонансные частоты, снижение уровня звукового давления на резонансной частоте, полоса, в которой обеспечивается снижение излучаемого из трубы шума на 10 дБ и более, а также относительная ширина полосы – отношение полосы к резонансной частоте.

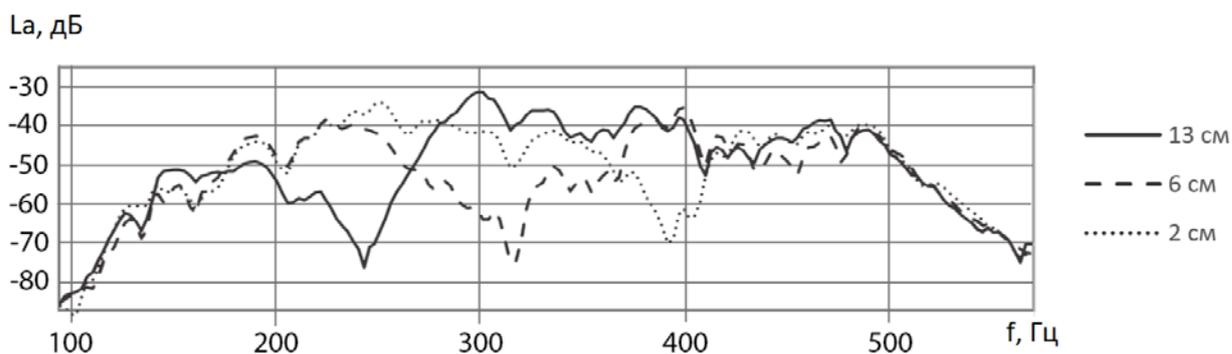


Рис. 3-10. Снижение шума, излучаемого из открытой трубы, дипольным резонатором разной длины

Таблица 3-3. Резонансные частоты и полосы гашения для резонаторов различной длины

Длина резонатора, см	Резонансная частота, Гц	Снижение на резонансной частоте, дБ	Диапазон снижения уровня шума на 10 дБ, Гц	Отн. полоса
2	387,6	27,0	363-401	0,12
6	312,2	27,6	250-335	0,27
13	236,8	37,7	202-264	0,26

Полученные результаты показывают, что уменьшение длины резонатора приводит к снижению его эффективности. Это связано с тем, что ширина полосы гашения обуславливается присоединенной массой диполя, которая главным образом определяется массой воздуха в трубке. При этом существенно повышается резонансная частота из-за снижения полной массы резонатора. Отметим, что некоторое влияние на присоединенную массу и резонансную частоту оказывает также положение резонатора относительно оси трубы [61].

Излученное из трубы поле исследовано в следующем эксперименте – измерения звукового давления проведены по дуге окружности с радиусом 0,3 м с шагом  $10^\circ$  (рис. 3-11,а). Измерения в указанных точках проведены для резонатора диаметром 8 см и длиной 6 см, установленного на выходе трубы. Результаты измерений для разности уровней звукового давления в точке измерения для открытого конца трубы с резонатором и без него на частоте 245

Гц, т.е. для эффективности  $L_{эф}$ , дБ гашения излученного звука, в десяти точках (от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  с шагом  $10^\circ$ ) в виде графика представлены на рис. 3-11,б.

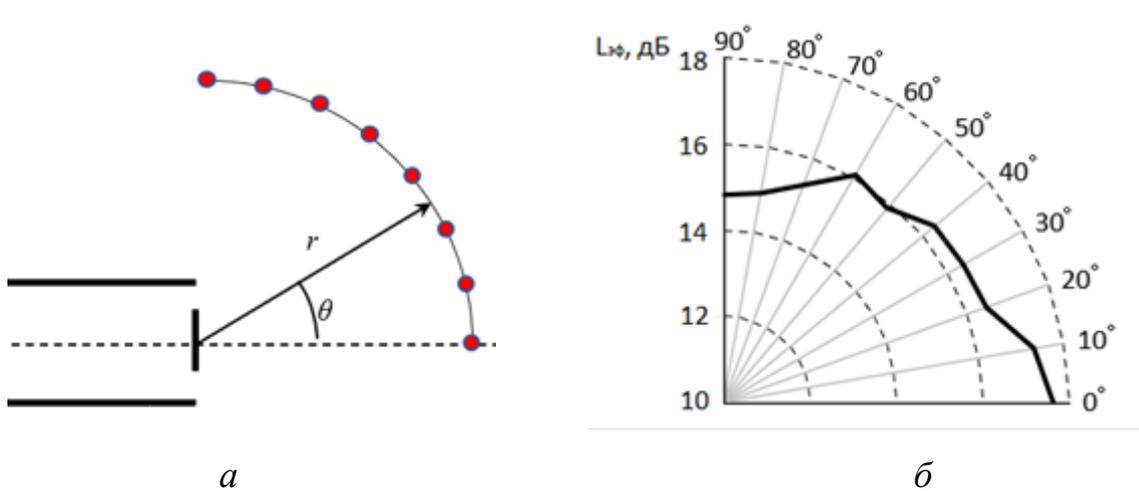


Рис. 3-11. Измерение характеристики направленности гашения звука (б), излученного из открытой трубы, дипольным резонатором (а)

По графику можно сделать вывод, что эффективность гашения шума при перемещении микрофона от положения на оси трубы постепенно падает и достигает своего минимума при угле  $\theta = 90^\circ$ , что качественно подтверждает теоретический результат. При этом эффективность снижается примерно на 3 дБ.

### Активный резонатор

Полученный результат для пассивного дипольного резонатора можно непосредственно применить для активного резонатора. Однако в данном случае преимущество дипольного резонатора по отношению к монопольному не столь очевидно: если для возбуждения колебаний пассивного резонатора его необходимо размещать в пучности стоячей волны, то амплитуда колебаний активного резонатора может быть задана любой. В связи с этим рассмотрим процедуру выбора оптимальной конструкции активного резонатора в данной задаче более детально, что также позволит продемонстрировать применение критерия робастности, описанного в разделе 2.2.2.

Для проектирования системы активного гашения шума, излучаемого из открытого конца узкой трубы, состоящей из одного вторичного излучателя и управляющего приемника (система SISO), необходимо выбрать типы излучателей и приемников. В первую очередь воспользуемся результатом, приведенным в разделе 2.2.4, где показано, что влияние неточностей настройки зависит от отношения вторичного и первичного поля в точке расположения приемника.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим полубесконечную трубу радиуса  $b$ . Ось  $x$  направим по оси трубы. На выходе трубы в точке  $x = L$  выполняется соотношение между давлением  $P$  и колебательной скоростью  $v$

$$Z = \rho c \frac{P}{v} \Big|_{x=L} \approx (kb)^2 - ikb. \quad (3.54)$$

Пусть в трубе распространяется волна  $P_0 \exp(ikx)$ . Расположим в точке  $x = 0$  вторичный излучатель (см. рис. 3-12). Поля давления и колебательной скорости в трубе при  $x < 0$  для монопольного излучателя с производительностью  $P_m = \rho c \frac{q}{2S}$ , где  $q$  – объемная скорость,  $S = \pi b^2$ , имеют вид

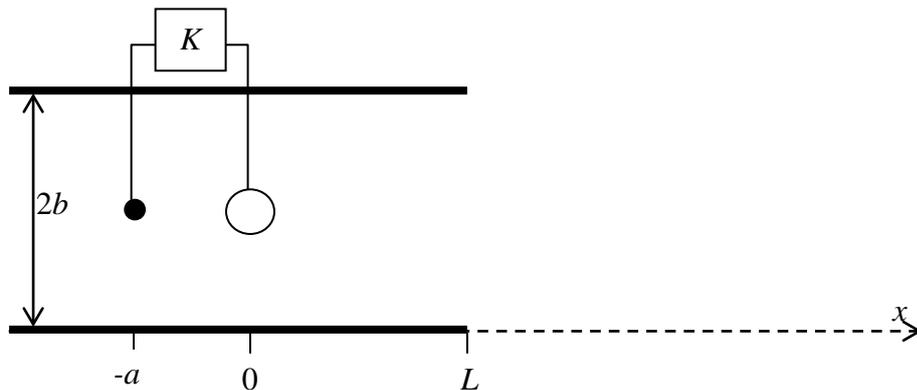


Рис. 3-12. Вторичный излучатель у выхода узкой трубы

$$P(x) = P_0(e^{ikx} - \gamma e^{-ikx}) + P_m(1 - \gamma)e^{-ikx}, \quad (3.55)$$

$$v(x) = \frac{P_0}{\rho c}(e^{ikx} + \gamma e^{-ikx}) - \frac{P_m}{\rho c}(1 - \gamma)e^{-ikx}, \quad (3.56)$$

где  $\gamma = \frac{1-Z}{1+Z} e^{2ikL}$ .

Поля давления и колебательной скорости в трубе при  $x < 0$  для дипольного излучателя с производительностью  $P_d = -i\omega\rho \frac{M}{2S}$ , где  $M$  – момент диполя, имеют вид

$$P(x) = P_0(e^{ikx} - \gamma e^{-ikx}) - P_d(1 + \gamma)e^{-ikx}, \quad (3.57)$$

$$v(x) = \frac{P_0}{\rho c}(e^{ikx} + \gamma e^{-ikx}) + \frac{P_d}{\rho c}(1 + \gamma)e^{-ikx}, \quad (3.58)$$

Первое слагаемое в уравнениях (3.55)-(3.58) описывает первичное поле, а второе слагаемое – вторичное поле. Далее будем обозначать производительность вторичного излучателя  $P_1$ , т.е. в зависимости от типа излучателя  $P_1 = P_m$  или  $P_1 = P_d$ .

Скорость среды на выходе трубы, определяющая звуковую мощность, излученную в открытое пространство, равна

$$v_L = 2 \frac{e^{ikL}}{\rho c(1 + Z)} (P_0 + P_1). \quad (3.59)$$

Таким образом, для того чтобы погасить излучаемый из трубы звук, необходимо, чтобы производительность вторичного излучателя была равна

$$P_1 = -P_0. \quad (3.60)$$

Расположим приемник, управляющий движением излучателя, слева от излучателя в точке  $x = -a$ . Согласно (2.25) сигнал, измеряемый приемником, можно представить в виде суммы первичного и вторичного полей  $Q_s = T_0 P_0 + T_1 P_1$ .

Введем безразмерный параметр  $\tau = T_1/T_0$ , характеризующий соотношение вторичного и первичного полей в точке расположения приемника. Из результатов раздела 2.2.3 известно, чем меньше  $\tau$ , тем выше робастность системы. В таблице 3-4 приведены выражения для параметра  $\tau$  для всех комбинаций излучателей и приемников.

В длинноволновом случае возможны следующие допущения:  $ka \ll 1$ ,  $kr \ll 1$ ,  $kL \ll 1$ ,  $1 + \gamma \approx 2$ ,  $1 - \gamma = \delta \approx -2ik(r + L)$ ,  $|\delta| \ll 1$ . В таблице

3-4 также приведены значения  $\tau_{low}$  для длинноволнового случая. Из таблицы 3-4 следует, что наименьшая акустическая связь между излучателем и приемником будет в системе, которая состоит из монопольного излучателя и дипольного приемника.

Найдем эффективность гашения звука, излучаемого из трубы. Введем относительную эффективность гашения

$$W = \frac{v_L}{v_{0L}} = 1 + \frac{P_1}{P_0}, \quad (3.61)$$

где  $v_{0L}$  – скорость среды на выходе трубы в отсутствии вторичного излучателя,  $v_L$  определяется (3.59). Система гашения работает эффективно, если  $|W| \ll 1$ .

Таблица 3-4

		Приемник	
		Монополь	Диполь
Излучатель	Монополь	$T_0 = e^{-ika} - \gamma e^{ika}$ $T_1 = (1 - \gamma)e^{ika}$ $\tau = \frac{1 - \gamma}{e^{-2ika} - \gamma} \sim 1$ $\tau_{low} \sim 1$ $\mu \ll 1$	$T_0 = \frac{1}{\rho c} (e^{-ika} + \gamma e^{ika})$ $T_1 = -\frac{(1 - \gamma)}{\rho c} e^{ika}$ $\tau = -\frac{1 - \gamma}{e^{-2ika} + \gamma}$ $\tau_{low} \sim -\frac{\delta}{2}$ $\mu = 1$
	Диполь	$T_0 = e^{-ika} - \gamma e^{ika}$ $T_1 = -(1 + \gamma)e^{ika}$ $\tau = -\frac{1 + \gamma}{e^{-2ika} - \gamma} \sim 1$ $\tau_{low} \sim -\frac{2}{\delta}$ $\mu \gg 1$	$T_0 = \frac{1}{\rho c} (e^{-ika} + \gamma e^{ika})$ $T_1 = \frac{(1 + \gamma)}{\rho c} e^{ika}$ $\tau = \frac{1 + \gamma}{e^{-2ika} + \gamma}$ $\tau_{low} \sim 1$ $\mu \ll 1$

Связь между приемником, измеряющим сигнал  $Q_s$ , и производительностью вторичного излучателя описывается коэффициентом обратной связи  $K$

$$Q_s K = P_1. \quad (3.62)$$

Из (3.59) и (3.62) находим производительность  $P_1$ , и, подставляя ее в (3.61), находим эффективность гашения

$$W = 1 + \frac{T_0 K}{1 - T_1 K}. \quad (3.63)$$

Звук, излучаемый из трубы, гасится активной системой полностью, т.е.  $W = 0$ , если коэффициент обратной связи равен

$$\tilde{K} = \frac{1}{T_1 - T_0}. \quad (3.64)$$

Волной, как и ранее, обозначаем величины, соответствующие оптимальной настройке активной системы, т.е. полному гашению излучаемого из трубы звука.

Из (3.63) и (3.64) находим зависимость эффективности гашения от ошибки настройки  $\varepsilon$ , определяющей фактический коэффициент обратной связи  $K = \tilde{K}(1 + \varepsilon)$ ,

$$W = \frac{\tau - 1}{1 + \tau\varepsilon} \varepsilon. \quad (3.64)$$

Проанализируем (3.64) для случая малых ошибок  $|\varepsilon| \ll 1$ . Зададим пороговое значение эффективности гашения  $W_0$ ,  $0 < W_0 \ll 1$  и найдем диапазон ошибок, при которых обеспечивается заданная эффективность, т.е.  $|W| < W_0$ .

Если  $|\tau| \ll 1$ , то  $W \approx -\varepsilon$ . Следовательно, необходимая эффективность обеспечивается при ошибках  $|\varepsilon| < W_0$ . Заметим, что этот результат справедлив и для системы без обратной связи, т.е. для  $\tau = 0$  (например для активной системы, состоящей из разнотипных приемников и излучателей, расположенных в одном сечении бесконечной трубы). Параметр робастности (2.22) в этом случае равен  $\mu = 1$ .

Если  $\tau \approx 1$ , то  $W \approx \alpha\varepsilon$ , где  $\alpha = \tau - 1$ ,  $\mu = |\alpha| \ll 1$ . В этом случае заданная эффективность  $W_0$  обеспечится при ошибках  $|\varepsilon| < W_0/|\alpha|$ . Таким образом, в этом случае диапазон допустимых ошибок увеличивается в  $1/|\alpha|$  по сравнению со случаем  $|\tau| \ll 1$ . Значительное стабилизирующее воздействие на работу активной системы оказывает глубокая обратная связь, необходимая для оптимальной работы системы при  $\tau \sim 1$ . Действительно, глубину обратной связи характеризует величина  $T_1K$ , которая, по сути, является кольцевой передаточной функцией активной системы. Вблизи оптимальной настройки она равна

$$T_1K = \frac{T_1}{T_1 - T_0} (1 + \varepsilon) = \frac{\tau}{\tau - 1} (1 + \varepsilon) \approx \frac{1}{\alpha}. \quad (3.65)$$

Следовательно,  $|T_1K| \approx |1/\alpha| \gg 1$ , что соответствует глубокой обратной связи.

Если  $|\tau| \gg 1$ , то  $W \approx \tau\varepsilon/(\tau\varepsilon + 1)$ . Заданная эффективность  $W_0$  обеспечивается при условии  $|\tau\varepsilon| < W_0$ , которое определяет диапазон допустимых ошибок  $|\varepsilon| < W_0/|\tau|$ . Таким образом, этот диапазон в  $|\tau|$  раз меньше по сравнению с системой, в которой слабая акустическая связь между излучателем и приемником ( $|\tau| \ll 1$ ). Параметр робастности принимает достаточно большие значения  $\mu = |\tau| \gg 1$

Таким образом, с точки зрения робастности активной системы наиболее предпочтительными являются комбинации одностипных приемников и излучателей. При этом есть существенная разница между системами с приемником и излучателем разного типа: система, состоящая из диполя-приемника и монополя-излучателя, оказывается более стабильной, чем система, состоящая из монополя-приемника и диполя-излучателя.

Также важным критерием качества активной системы является ее устойчивость. Система является неустойчивой, если кольцевая передаточная функция  $T_1K$  хотя бы на одной частоте действительна, положительна и равна единице или больше нее. При оптимальной настройке активной системы

$$T_1 \tilde{K} = \frac{\tau}{\tau - 1}. \quad (3.66)$$

В длинноволновом случае имеем выражения для функции  $T_1 \tilde{K}$  для рассмотренных комбинаций приемников и излучателей, представленные в таблице 3-5. Для качественного сравнения значения функций приведены на комплексной плоскости (рис. 3-13). В двухбуквенном обозначении устройства активного резонатора первая буква обозначает тип приёмника, а вторая – тип излучателя.

Таблица 3-5

		Приемник	
		Монополь	Диполь
Излучатель	Монополь	$T_1 \tilde{K} \approx -\frac{L+r}{a}$	$T_1 \tilde{K} \approx -ik(L+r)$
	Диполь	$T_1 \tilde{K} \approx 1 - \frac{1}{2}k(L+r+a)$	$T_1 \tilde{K} \approx \frac{1}{ika}$

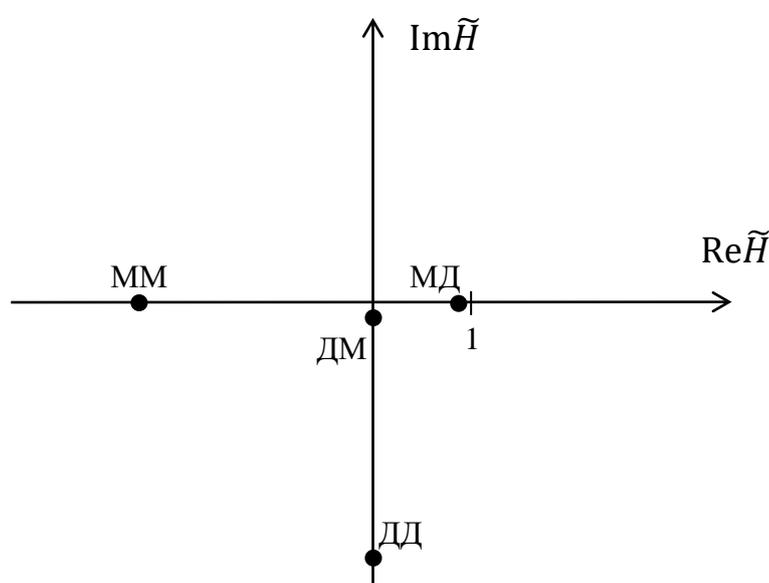


Рис. 3-13. Значения кольцевой передаточной функции на низких частотах для различных комбинаций приемников и излучателей (первая буква – приемник, вторая - излучатель)

Таким образом, все рассмотренные системы устойчивы при оптимальной настройке. Но при этом разнотипные системы (МД и ДМ) оказываются ближе других к потере устойчивости.

Влияние ошибок настройки на эффективность гашения звука, излученного из открытой трубы, также исследовано экспериментально [292]. Схема эксперимента приведена на рис. 3-14,*а*. В круглой трубе длиной 1.4 м и диаметром 10 см около открытого конца установлен монополюсный излучатель на расстоянии 10 см от среза, управляемый монополюсным (комбинация ММ системы «приемник-излучатель») или дипольным (комбинация ДМ) приемником. На противоположном конце трубы установлен излучатель звука. Контроль эффективности гашения осуществляется микрофоном, установленным на расстоянии 0.5 м от среза трубы.

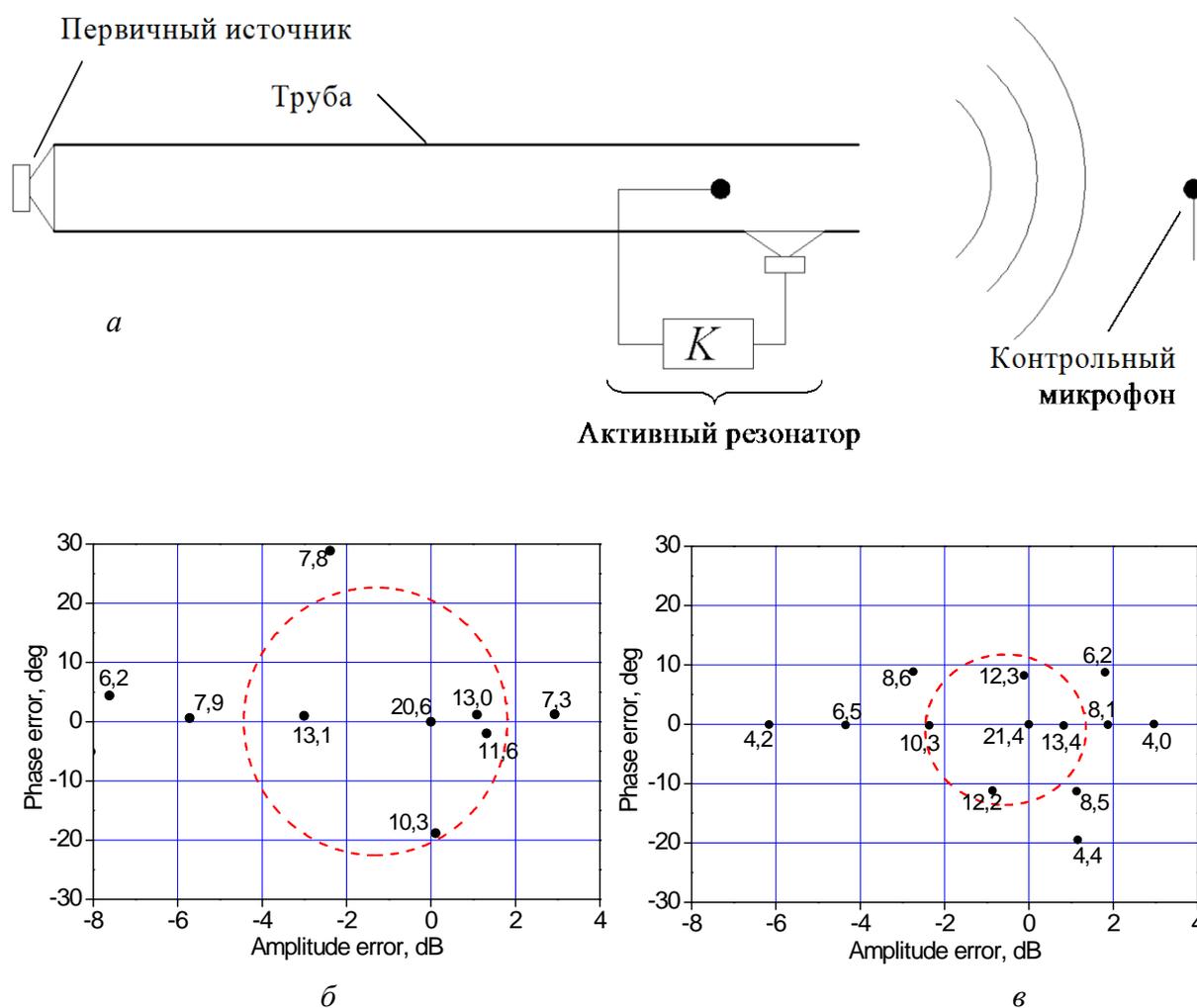


Рис. 3-14. Схема эксперимента (*а*) и эффективность снижения шума, дБ, в зависимости от ошибки настройки монополюсно-монополюсного (*б*) и дипольно-монополюсного (*в*) активного резонатора.

Измерения эффективности гашения шума, т.е. разности уровней звукового давления при включенном и выключенном активном резонаторе, проведены на частоте 440 Гц. Результаты измерений приведены для ММ активного резонатора, являющегося системой со слабой обратной связью, на рис. 3-14,б, для ДМ активного резонатора, имеющего глубокую обратную связь, – на рис. 3-14,в. Каждая точка на графиках соответствует ошибке настройки, т.е. отклонению коэффициента обратной связи от оптимального значения, при котором достигается максимальное гашение. Число рядом с каждой точкой обозначает эффективность гашения в дБ. Окружности, обозначенные пунктиром, показывают область ошибки, при которой эффективность гашения составляет не менее 10 дБ. Полученные результаты демонстрируют, что область допустимых ошибок для системы с глубокой обратной связью значительно больше, чем для системы со слабой обратной связью.

Активный резонатор дипольного типа также исследован экспериментально [290]. Резонатор установлен в центре сечения среза трубы, как схематично показано на рис. 3-9. Контроль эффективности гашения производился на расстоянии 0.5 м от выхода трубы (рис. 3-13,а). На рис. 3-15,а представлены спектры шума при включенном и выключенном активном резонаторе, а на рис. 3-15,б – эффективность гашения.

Излучаемый шум значительно снижен в частотном диапазоне 400-800 Гц, ширина полосы эффективного гашения составляет примерно одну октаву, что значительно превышает полосу для пассивного резонатора (рис. 3-10).

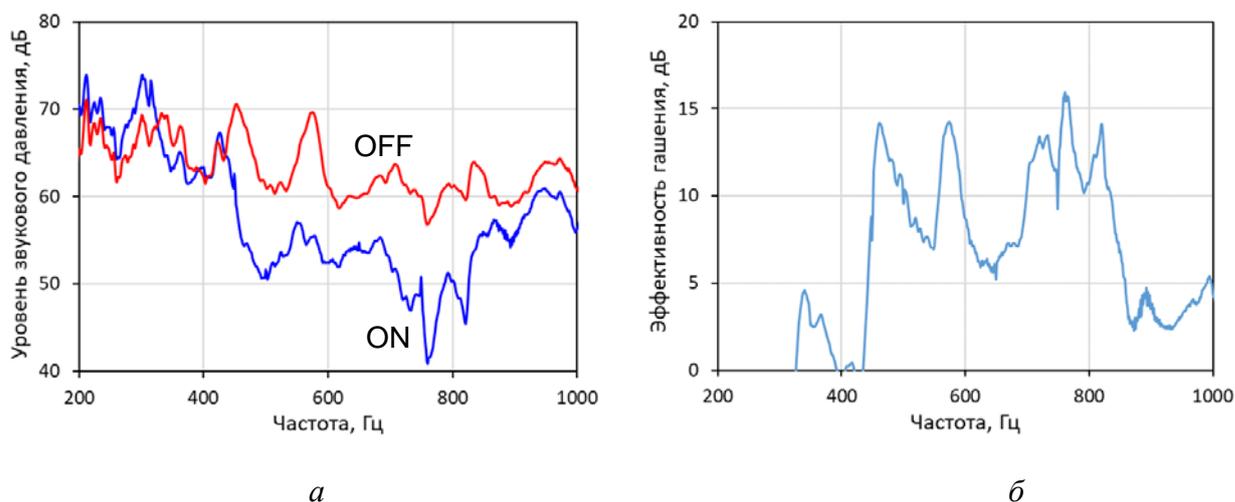


Рис. 3-15. Снижение шума, излучаемого из открытой трубы, дипольным активным резонатором: спектр излученного шума при выключенном (OFF) и включенном (ON) активном резонатора (а) и эффективность гашения (б).

### 3.3. Импеданс излучения в трубе

Импеданс излучения дипольных и монопольных источников в трубе существенно отличается от импеданса излучения в свободном пространстве. Реактивная часть импеданса излучения влияет на резонансную частоту, учет этого влияния особенно необходим при расчете пассивных резонаторов. Регулировка импеданса активного резонатора (2.8) или (2.11) должна компенсировать акустическую нагрузку на излучатель со стороны трубы, однако в системах с низкой робастностью ( $\mu \gg 1$ ) требуется довольно высокая точность настройки, поэтому в общем случае необходим учет импеданса излучения и в активных системах также.

Импеданс излучения сферических монополя и диполя хорошо известен [53] также, как и для резонатора Гельмгольца. Для дипольного резонатора нулевой длины (рис. 3-1,б) в свободном пространстве можно воспользоваться результатами работы [328], в которой найден импеданс излучения диска в круглом жестком экране.

В настоящем разделе приведены результаты теоретического и экспериментального исследования импеданса излучения монополей и

диполей в трубах [60, 61]. Влияние реактивной нагрузки сводится к появлению присоединенной массы и ее зависимости от положения резонатора в трубе. Также рассмотрен случай узкого зазора между излучателем и стенками трубы [62], что также встречается в системах гашения звука (например, рис. 3-9).

### 3.3.1. Присоединенная масса монополя и диполя в трубе

Хорошо известно, что условия излучения звука в свободном пространстве и в узких трубах существенно отличаются. Так, при помещении монополя с заданной объемной скоростью из свободного пространства в узкую трубу излучаемая звуковая мощность увеличивается в  $\lambda^2/\pi S$  раз [53], где  $S$  – площадь поперечного сечения трубы,  $\lambda$  – длина звуковой волны. Это связано с возрастанием активной нагрузки (вещественная часть сопротивления излучения). Вместе с тем должна изменяться и реактивная нагрузка (мнимая часть сопротивления излучения). Для излучателей малых волновых размеров реактивное сопротивление описывается, как правило, присоединенной массой. В работе [108] найдена присоединенная масса резонатора Гельмгольца, т.е. монополя, расположенного на стенке волновода.

В работе [118] получены выражения для присоединенной массы пульсирующей и осциллирующей сферы радиуса  $a$ , помещенной в геометрическом центре волновода прямоугольного сечения. Радиус сферы полагается малым по сравнению с длиной волны и поперечным размером волновода. Рассмотрим одномодовый волновод квадратного сечения со стороной  $d$ . В волноводе может распространяться только плоская волна, если выполняется условие  $kd < \pi$ , где  $k$  – волновое число. В этом случае остальные моды волновода являются экспоненциально затухающими. Именно они и определяют присоединенную массу излучателя. Согласно [118] присоединенная масса монополя  $\mu_m$  и диполя  $\mu_d$  в одномодовом волноводе (узкой трубе) определяются следующими выражениями

$$\mu_m = 4\mu_{0m} \frac{a}{d} \sum_{n=0, m=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-2\pi \frac{a}{d} \sqrt{n^2 + m^2 - (kd/2\pi)^2}\right)}{\sqrt{n^2 + m^2 - (kd/2\pi)^2}}, \quad (3.67)$$

$$\mu_d = 8\pi\mu_{0d} \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sum_{n=0, m=1}^{\infty} \exp\left(-2\pi \frac{a}{d} \sqrt{n^2 + m^2 - (kd/2\pi)^2}\right). \quad (3.68)$$

где  $\mu_{0m} = 4\pi\rho a^3$  и  $\mu_{0d} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$  – присоединенная масса монополя и диполя в свободном пространстве [53]. Очевидно, что присоединенная масса малых излучателей, т.е. для которых выполняется условие  $ka \ll 1$ , не зависит от сжимаемости среды, поэтому учитывать сжимаемость не будем и положим  $k = 0$  в (3.67) и (3.68). Отметим, что учет сжимаемости практически не влияет на результат вычислений по формулам (3.67) и (3.68), если  $kd < 1$ .

На рис. 3-16 приведена зависимость присоединенной массы монополя и диполя в трубе квадратного сечения от размера излучателя. Значения присоединенной массы  $\mu$ , вычисленные по формулам (3.67) и (3.68), нормируются на значение присоединенной массы излучателя  $\mu_0$  в свободном пространстве. Как следует из рис. 3-16, присоединенная масса монополя в трубе меньше, чем в свободном пространстве. Присоединенная масса диполя, напротив, при помещении его в трубу увеличивается. При уменьшении размера излучателя или при увеличении поперечного сечения трубы, т.е. при  $a/d \rightarrow 0$ , присоединенная масса стремится к значению  $\mu_0$ .

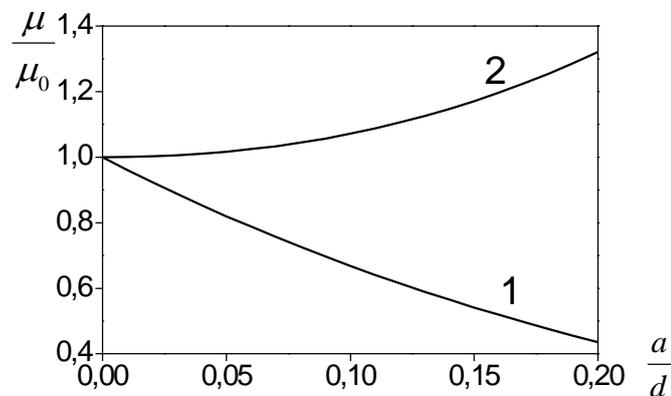


Рис. 3-16. Присоединенная масса монополя (1) и диполя (2) в трубе в зависимости от их размеров.

Экспериментальное исследование изменения присоединенной массы проведено с помощью монопольного и дипольного резонатора. Собственная частота резонатора (3.3) определяется его упругостью  $k$ , массой  $m$  и присоединенной массой  $\mu$ .

Изменение условий излучения влияет только на присоединенную массу, и ее изменение однозначно связано с изменением собственной частоты. В качестве дипольного резонатора использовалась трубка, один конец которой затянут упругой мембраной, а другой конец открыт (рис. 3-1,б). Монопольный резонатор имеет подобную конструкцию, с тем отличием, что свободный конец трубки закрыт жесткой стенкой. Радиус трубки дипольного резонатора равен 4,2 см, а монопольного – 6,5 см. Длина трубки в обоих случаях составляет 8 см. Для того, чтобы отношение размера резонатора к поперечному размеру трубы в обоих случаях было одинаковым, исследования дипольного резонатора проводились в круглой трубе диаметром 10 см, а монопольного в трубе диаметром 15 см.

На рис. 3-17 сопоставлены собственные частоты монопольного (проколотые точки) и дипольного резонаторов в трубе  $f_p$ , расположенных у ее стенки, и в свободном пространстве  $f_s$ . Сплошная линия соответствует прямой  $f_p = f_s$ . Как видно на рис. 3-17, собственная частота монопольного резонатора в трубе выше, чем в свободном пространстве, а собственная частота дипольного резонатора – ниже. Таким образом, присоединенная масса монополя в трубе меньше, чем у монополя в свободном пространстве, а присоединенная масса диполя больше, что согласуется с (3.67) и (3.68). Нетрудно видеть, что экспериментальные точки довольно точно укладываются на прямые (пунктирные линии), уравнения которых имеют следующий вид: для монопольного резонатора  $f_p = 1,33f_s$ , для дипольного резонатора  $f_p = 0,95f_s$ .

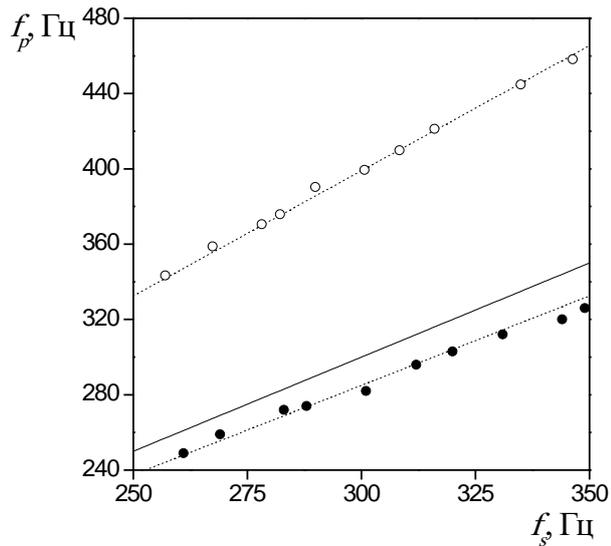


Рис. 3-17. Сравнение собственных частот монопольного (○) и дипольного (●) резонаторов в свободном пространстве  $f_s$  и в трубе  $f_p$ .

Как следует из (3.3), отношение полной массы резонатора  $m + \mu$  в трубе и в свободном пространстве при неизменной упругости равно

$$\frac{m + \mu_p}{m + \mu_s} = \left( \frac{f_s}{f_p} \right)^2. \quad (3.69)$$

Отношение (3.69) для монопольного резонатора составляет 0.57, а для дипольного 1.11.

В описанном эксперименте резонаторы располагались у стенки трубы. Очевидно, что при перемещении резонатора от края трубы к центру условия излучения должны изменяться, и, как следствие, может изменяться его присоединенная масса. Для определения характера зависимости присоединенной массы от положения резонатора относительно стенок трубы была проведена серия измерений его собственной частоты при различном отnose от оси трубы (рис. 3-18).

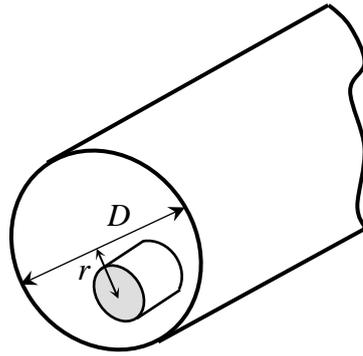


Рис. 3-18. Положение резонатора относительно оси трубы.

На рис. 3-19 приведены результаты измерений. Расстояние между осью круглой трубы и осью цилиндрического резонатора  $r$  нормировано на диаметр трубы  $D$ . На рис. 3-19,а и 3-19,б представлены значения собственных частот монопольного и дипольного резонатора в зависимости от положения в сечении трубы, описываемого параметром  $r/D$ . На рис. 3-19,а и 3-19,б видно, что при перемещении монопольного и дипольного резонатора от оси трубы к ее стенке собственная частота резонатора уменьшается. На рис. 3-19,в представлено относительное изменение полной массы резонатора  $M = m + \mu$  при смещении резонатора в сечении трубы, найденное по результатам измерений  $M(r)/M(0) = [f_0(0)/f_0(r)]^2$ , где  $f_0(r)$  – экспериментально найденная зависимость собственной частоты резонатора  $f_0$  от положения  $r$ . Таким образом, масса резонатора имеет минимальное значение, когда резонатор расположен в центре сечения трубы, и увеличивается по мере приближения к стенкам трубы. При расположении резонатора вплотную к стенке его масса максимальна. Заметим, что это изменение присоединенной массы монополя и диполя значительно меньше изменения присоединенной массы при перемещении излучателя из свободного пространства в трубу.

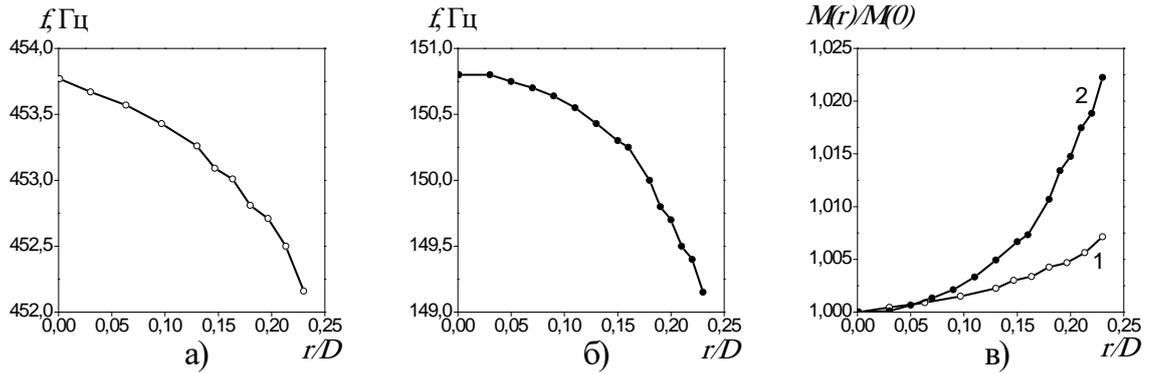


Рис. 3-19. Зависимость собственной частоты (а – монопольного, б – дипольного) резонатора от его положения в сечении узкой трубы. Относительное изменение (в) полной массы (1 – монопольного, 2 – дипольного) резонатора.

Полученный результат качественно поясним на простом расчетном примере. Рассмотрим двумерный волновод шириной  $H$  с абсолютно жесткими стенками (рис. 3-20,а), в котором распространяется только нулевая мода, т.е.  $kH < \pi$ . В волновод поместим плоский излучатель шириной  $a$ . Расположение излучателя в сечении  $x = 0$  будем характеризовать расстоянием  $r$  между центром излучателя и осью волновода (пунктирная линия на рис. 3-20,а). Координаты концов излучателя равны

$$z_1 = (H - a)/2 - r, z_2 = (H + a)/2 - r.$$

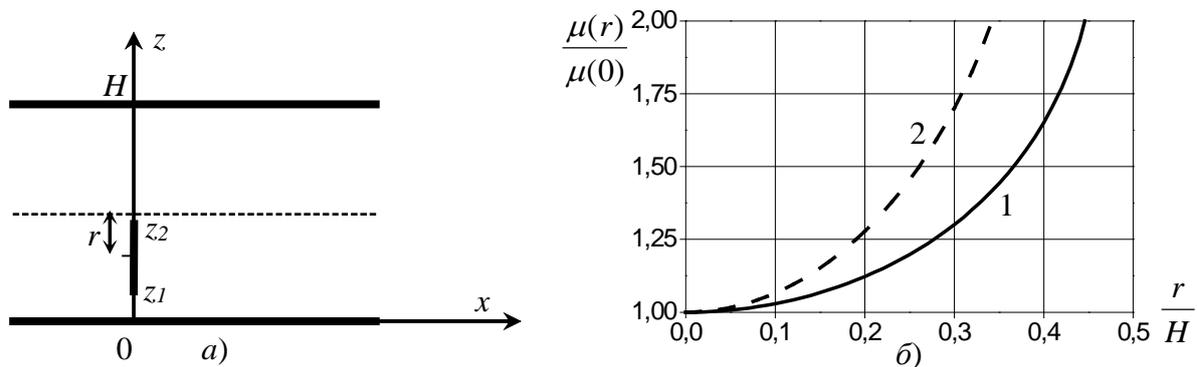


Рис. 3-20. Излучатель в волноводе – двумерная задача (а). Зависимость присоединенной массы излучателя от его положения относительно оси волновода (б): размер излучателя  $a/H = 0.1$  (1) и  $a/H = 0.3$  (2)

Очевидно, что значения  $r$  ограничены следующим неравенством  $|r| \leq (H - a)/2$ .

Для монополя, т.е. пульсирующего излучателя, граничное условие в виде распределения скорости в сечении волновода  $x = 0$  записывается следующим образом

$$u_z = 0, \quad u_x = \begin{cases} v, & \text{при } z_1 < z < z_2, \quad x = +0 \\ -v, & \text{при } z_1 < z < z_2, \quad x = -0 \\ 0, & \text{при } 0 < z < z_1 \text{ и } z_2 < z < H \end{cases}. \quad (3.70)$$

Объемная скорость монополя равна  $2va$ .

Для диполя, т.е. осциллирующего излучателя, скорость среды в сечении  $x = 0$  не будет равна нулю. Для простоты предположим, что скорость среды  $v_m$  в данном сечении направлена вдоль оси  $x$ , а вдоль оси  $z$  имеет одинаковые значения. Иными словами, примем поршневу модель движения в сечении  $x = 0$ . Значение скорости среды должно быть таково, чтобы объемная скорость в сечении была равна нулю, т.е.  $av + (H - a)v_m = 0$ . Граничное условие для скорости среды при  $x = 0$  имеет вид

$$u_z = 0, \quad u_x = \begin{cases} v, & \text{при } z_1 < z < z_2 \\ -\frac{a}{H - a}v, & \text{при } 0 < z < z_1 \text{ и } z_2 < z < H \end{cases}. \quad (3.71)$$

Граничные условия (3.70) и (3.71) задают полное поле в волноводе  $p(x, z)$ , которое может быть найдено методом Фурье. Сила, действующая на излучатель со стороны среды, равна

$$F = \int_{z_1}^{z_2} [p(-0, z) - p(+0, z)] dz. \quad (3.72)$$

Импеданс излучателя равен  $Z = -F/v$ , его присоединенная масса  $\mu = -\text{Im } Z/\omega$ . Используя (3.72), находим присоединенную массу монополя и диполя

$$\mu_m = \rho a^2 \frac{2}{kH} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi_n/k)^2 - 1}} \left( \frac{\sin \xi_n z_2 - \sin \xi_n z_1}{\xi_n a} \right)^2, \quad (3.73)$$

$$\mu_a = \rho a^2 \frac{2}{kH - ka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi_n/k)^2 - 1}} \left( \frac{\sin \xi_n z_2 - \sin \xi_n z_1}{\xi_n a} \right)^2. \quad (3.74)$$

где  $\xi_n = \pi n/H$  - собственные волновые числа затухающих мод волновода. Присоединенная масса излучателя в волноводе определяется затухающими модами и зависит от положения  $r$ . При этом активная часть импеданса  $Z$  не зависит от положения излучателя, поскольку определяется только модой  $n = 0$ , и, следовательно, интеграл (3.72) имеет одинаковое значение для всех  $r$ . Отметим, что импеданс поршневого излучателя в многомодовом волноводе и в свободном пространстве найден в работах [110, 266, 327].

Определим зависимость присоединенной массы от положения излучателя. В (3.73) и (3.74) можно пренебречь сжимаемостью и перейти к пределу  $k \rightarrow 0$ . Заметим, что если излучатель расположен в центре волновода, т.е. если  $r = 0$ , то сумма в (3.73) и (3.74) равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} \left( \frac{\sin(\xi_n a/2)}{\xi_n a/2} \cos \frac{\pi n}{2} \right)^2. \quad (3.75)$$

В этой сумме слагаемые с нечетными номерами равны нулю, следовательно, присоединенная масса при таком положении излучателя определяется только четными модами волновода.

Пусть излучатель расположен у стенки волновода, т.е.  $r = (H - a)/2$ , тогда сумма в (3.73) и (3.74) равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} \left( \frac{\sin \xi_n a}{\xi_n a} \right)^2. \quad (3.76)$$

В этом случае каждая мода вносит вклад в присоединенную массу излучателя, которая, следовательно, должна быть больше, чем при расположении излучателя на оси волновода. Нетрудно видеть, что значение суммы (3.76) в два раза превышает значение суммы (3.75).

Как следует из (3.73) и (3.74), значения присоединенной массы монополя и диполя отличаются только численным множителем. Если присоединенную массу излучателя  $\mu(r)$ , расположенного на расстоянии  $r$  от оси волновода,

нормировать на присоединенную массу излучателя  $\mu(0)$ , расположенного в центре волновода, то это отношение для обоих типов излучателей будет одинаковым. На рис. 3-20,б представлена зависимость отношения  $\mu(r)/\mu(0)$  от безразмерного расстояния  $r/H$  для двух размеров излучателя  $a/H = 0,1$  и  $a/H = 0,3$ . Для указанных размеров смещение относительно центра волновода может принимать следующие значения  $0 \leq r/H \leq 0,45$  и  $0 \leq r/H \leq 0,35$  соответственно. Сопоставляя теоретический расчет (рис. 3-20,б) с экспериментальными результатами (рис. 3-19,в), можно отметить качественное совпадение хода зависимости присоединенных масс от расстояния  $r$ . Однако количественно эти зависимости очень сильно отличаются, что вызвано, вероятно, отличием модовой структуры в трехмерном круглом волноводе и в рассмотренной модели двумерного волновода.

### 3.3.2. Влияние зазора между излучателем и стенками трубы

Теоретически и экспериментально показано, что присоединенная масса диполя в узкой трубе больше, чем в свободном пространстве. Однако данный результат получен для диполя, размер которого много меньше поперечного размера трубы, и не является универсальной закономерностью. Например, в предельном случае, когда поршень полностью перекрывает сечение трубы, его присоединенная масса равна нулю. Представляет интерес проследить, например в контексте задачи, рассмотренной в разделе 3.2.3, как происходит переход от возрастания присоединенной массы при увеличении размера диполя к ее стремлению к нулю при полном перекрывании поршнем трубы. Для определения зависимости присоединенной массы диполя в узкой трубе от его размера решим задачу об излучении звука плоским поршнем в круглой трубе с жесткими стенками.

Рассмотрим бесконечную круглую трубу радиуса  $R$  с акустически жесткими стенками, ось  $z$  цилиндрической системы координат направим по оси трубы (рис. 3-21). Пусть в сечении трубы  $z = 0$  расположен круглый,

бесконечно тонкий поршень радиуса  $a$ , совершающий колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой скорости  $V$ . Рассмотрим осесимметричную задачу, т.е. случай, когда центр поршня лежит на оси трубы. Поле звукового давления и  $z$ -компоненты колебательной скорости можно представить с помощью функций Бесселя нулевого порядка [145]

$$p(r, z) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0 \left( \lambda_n \frac{r}{R} \right) e^{\pm i k_n z}, \quad (3.77)$$

$$v(r, z) = \frac{1}{\omega \rho} \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n J_0 \left( \lambda_n \frac{r}{R} \right) e^{\pm i k_n z}. \quad (3.78)$$

где  $\lambda_n$  – корни уравнения  $J_1(\lambda) = 0$ ,  $k_n = \sqrt{k^2 - (\lambda_n/R)^2}$ ,  $k = \omega/c$ . Верхний знак в (3.77) и (3.78) соответствует  $z \geq 0$ , нижний знак соответствует  $z \leq 0$ .

Граничное условие для сечения  $z = 0$  имеет вид

$$\begin{cases} v(r) = V, & r \leq a, \\ p(r) = 0, & a < r \leq R. \end{cases} \quad (3.79)$$

Второе условие в (3.79) следует из непрерывности давления (1) при  $z = 0$ ,  $a < r \leq R$ .

Отметим, что более простая задача о поршне в экране, т.е. для граничного условия  $v(r) = V$  при  $r \leq a$  и  $v(r) = 0$  при  $a < r \leq R$ , рассмотрена в [266].

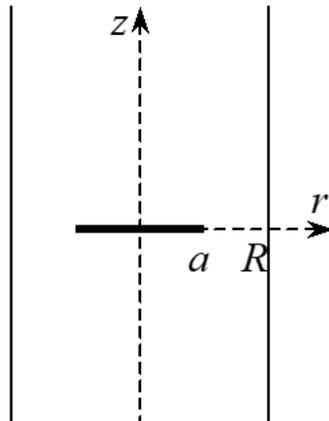


Рис. 3-21. Поршень в круглой трубе.

Поставленная задача сводится к нахождению коэффициентов  $A_n$ . Введем безразмерные величины  $A'_n = A_n/\omega\rho VR$ ,  $k' = kR$ ,  $k'_n = k_nR = \sqrt{k'^2 - \lambda_n^2}$ ,  $r' = r/R$ ,  $a' = a/R$  и, подставляя (3.77) и (3.78) в (3.79), получим

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A'_n k'_n J_0(\lambda_n r') = 1, & 0 \leq r' \leq a', \\ \sum_{n=0}^{\infty} A'_n J_0(\lambda_n r') = 0, & a' < r' \leq 1. \end{cases} \quad (3.80)$$

Таким образом, смешанные граничные условия (3.79) приводят к парным сумматорным уравнениям (3.80). Некоторые подходы к решению таких уравнений изложены в [176]. Аналитическое решение (3.80) довольно громоздко, поэтому найдем коэффициенты  $A'_n$  численным способом. Для этого ограничим количество рассматриваемых мод числом  $N + 1$ , т.е.  $n = 0, 1, \dots, N$ . На отрезке  $r' \in [0, 1]$  выберем  $N + 1$  точек следующим образом  $r'_m = m/N$ , где  $m = 0, 1, \dots, N$ . Тогда (3.80) сводится к уравнению

$$\widehat{M}\vec{A}' = \vec{I}, \quad (3.81)$$

где  $\vec{A}'$  – вектор искомых коэффициентов, элементы матрицы  $\widehat{M}$  равны  $M_{mn} = k'_n J_0(\lambda_n r'_m)$  при  $r'_m \leq a'$  и  $M_{mn} = J_0(\lambda_n r'_m)$  при  $r'_m > a'$ , элементы вектора  $\vec{I}$  равны  $I_m = 1$  при  $r'_m \leq a'$  и  $I_m = 0$  при  $r'_m > a'$ .

Найденные из (3.81) амплитуды  $A'_n$  позволяют определить давление и скорость в сечении трубы  $z = 0$ . Из (3.77) и (3.78) получаем

$$p(r') = \omega\rho RV \sum_{n=0}^N A'_n J_0(\lambda_n r'), \quad p(r') = \omega\rho RV \sum_{n=0}^N A'_n J_0(\lambda_n r'). \quad (3.82)$$

Приведем пример распределения давления и  $z$ -компоненты колебательной скорости в сечении, в котором расположен поршень, для узкой трубы. Результат расчета для поршня радиуса  $ka = 0.2$  и трубы радиуса  $kR = 0.4$ , проведенного с учетом 201 моды трубы ( $N = 200$ ), представлен на рис. 3-22. Распределение давления приведено при  $z = +0$  и имеет противоположный

знак при  $z = -0$ . Давление непрерывно по  $r$ , в то время как скорость имеет разрыв при  $r = a$ . Вблизи кромки поршня  $v \sim (r - a)^{-1/2}$  при  $r \rightarrow a + 0$ .

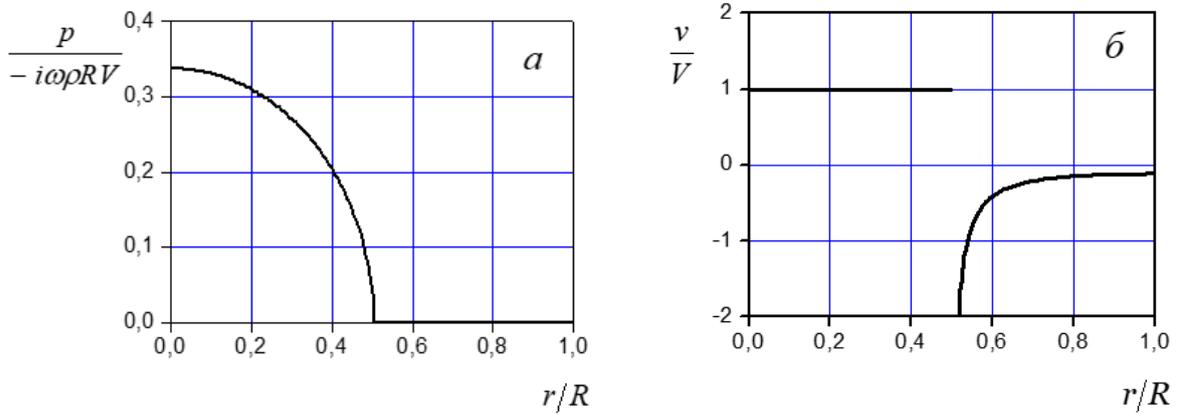


Рис. 3-22. Распределение давления (а) и  $z$ -компоненты скорости (б) в сечении трубы  $z = 0$ .

Силу, действующую на поршень со стороны среды, найдем из (3.82)

$$F = -4\pi \int_0^a p(r)rdr = -4\pi\omega\rho R^3V \sum_{n=0}^{\infty} A'_n h_n. \quad (3.83)$$

где  $h_n = \int_0^a J_0(\lambda_n r)rdr$ . Импеданс поршня равен

$$Z = -\frac{F}{V}. \quad (3.84)$$

Введем безразмерный импеданс  $Z' = Z/4\pi\omega\rho R^3$ . На рис. 3-23,а и 3-23,б представлена зависимость действительной и мнимой части безразмерного импеданса поршня от его размера для трубы различного радиуса:  $kR = 1$ ,  $kR = 2$ ,  $kR = 3.8$ . Последнее значение выбрано вблизи первого радиального резонанса трубы, для которого  $kR = 3.8302$ . На рис. 3-23,в приведена зависимость присоединенной массы поршня  $\mu = -\text{Im } Z/\omega$ , нормированной на присоединенную массу поршня в свободном пространстве  $\mu_0$ , расчет которой проведен в [149]. Как следует из рис. 3-23,в, присоединенная масса поршня в трубе больше, чем его присоединенная масса в свободном пространстве, при малом радиусе поршня по сравнению с радиусом трубы, что согласуется с результатами экспериментальной работы [61]. При увеличении

размера поршня присоединенная масса достигает максимума, а затем уменьшается. Обратим внимание, что присоединенная масса поршня, радиус которого близок к радиусу трубы, т.е. при  $a \rightarrow R$ , не стремится к нулю, хотя, очевидно, что  $\text{Im } Z = 0$  при  $a = R$ . Для детального исследования данного результата, полученного численно, рассмотрим случай малого зазора между поршнем и стенкой трубы, т.е. при  $\delta = 1 - a/R \ll 1$ , в приближении  $kR < 1$ .

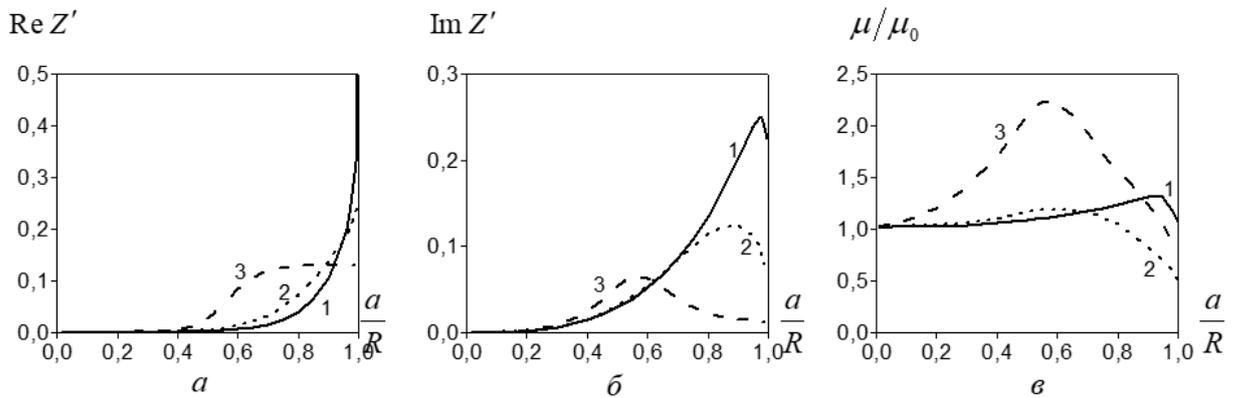


Рис. 3-23. Активный (а) и реактивный (б) импеданс поршня и присоединенная масса (в) в сечении  $z = 0$  в зависимости от его радиуса для различных размеров трубы:  $kR = 1$  (1),  $kR = 2$  (2),  $kR = 3.8$  (3).

Для определения амплитуд собственных мод трубы предположим, что скорость среды в малом зазоре между стенкой трубы и поршнем постоянна и равна  $u$  (поршневое приближение). В этом случае для сечения  $z = 0$  граничное условие имеет вид:  $v(r) = V$  при  $r \leq a$  и  $v(r) = u$  при  $a < r \leq R$ . Тогда из (3.78) находим

$$A_n = \frac{\omega \rho}{k_n D_n} [V(\Delta_n - Y_n) + u Y_n]. \quad (3.85)$$

где  $D_n = \int_0^1 J_0^2(\lambda_n r) r dr$ ,  $\Delta_n = \int_0^1 J_0(\lambda_n r) r dr$ ,  $Y_n = \int_a^1 J_0(\lambda_n r) r dr$ . Очевидно, что  $\Delta_n = \frac{1}{2}$  при  $n = 0$ ,  $\Delta_n = 0$  при  $n \neq 0$ . Поскольку  $a' = 1 - \delta$ , то  $Y_0 = \delta - \frac{\delta^2}{2}$  и  $Y_n = -\frac{1-\delta}{\lambda_n} J_1((1-\delta)\lambda_n)$  при  $n \geq 1$ . Около кромки поршня давление должно

быть равно нулю, поэтому, подставляя (3.85) в (3.77), из условия  $p(R - \delta R) = 0$  получаем

$$u = V \left( 1 - \frac{1}{kS} \right), \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} kS &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0((1-\delta)\lambda_n)Y_n}{k_n D_n} \approx \\ &\approx 2\delta - \delta^2 + ikR(1-\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0((1-\delta)\lambda_n)J_1((1-\delta)\lambda_n)}{\lambda_n^2 D_n}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Численный анализ показывает, что при  $\delta \rightarrow 0$  сумму в правой части (3.87) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0((1-\delta)\lambda_n)J_1((1-\delta)\lambda_n)}{\lambda_n^2 D_n} \approx -C\delta \ln \delta. \quad (3.88)$$

где  $C$  – постоянная.

Подставляя (3.86) в (3.85), находим коэффициенты  $A_n$ , а также распределение давления  $p(r)$  в сечении трубы  $z = 0$ . Сила, действующая на поршень, имеет вид

$$F = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^a J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) r dr = -4\pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\Delta_n - Y_n). \quad (3.89)$$

Подставляя (3.89) в (3.84), находим выражение для импеданса поршня

$$\begin{aligned} Z &= 4\pi R^2 \omega \rho \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Delta_n - \frac{Y_n}{kS} \right) \frac{\Delta_n - Y_n}{k_n D_n} = \\ &= 4\pi R^3 \omega \rho \left[ \frac{(1-\delta)^2}{2kR} \left( 1 - \frac{2\delta - \delta^2}{kS} \right) - i \frac{1}{kS} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^2}{\lambda_n D_n} \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Поскольку сумма в правой части (3.90) пропорциональна  $\delta^2 \ln \delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ , а  $kS \sim \delta \ln \delta$ , то последнее слагаемое в (3.90) стремится к нулю как  $\delta$ . Из (3.90) получаем

$$Z = 4\pi R^3 \omega \rho \frac{1}{2kR} \left( 1 - \frac{2-\delta}{2-ikRC \ln \delta} \right) =$$

$$= 2\pi R^2 \rho c \frac{2\delta + C^2(kR)^2(\ln \delta)^2 - ikRC \ln \delta \cdot (2 + \delta)}{4 + C^2(kR)^2(\ln \delta)^2}. \quad (3.91)$$

Здесь интересно не только поведение мнимой части (присоединенной массы), но и вещественной части – радиационного трения. В формулу входят два малых параметра:  $\delta$  и  $kR$ , и поведение компонент оказывается весьма прихотливым. Активная часть импеданса равна

$$\operatorname{Re} Z = 2\pi R^2 \rho c \frac{2\delta + C^2(kR)^2(\ln \delta)^2}{4 + C^2(kR)^2(\ln \delta)^2}. \quad (3.92)$$

Если зафиксировать  $\delta (\delta \ll 1)$  и затем уменьшать  $kR$ , то в пределе получится импеданс значительно меньший характеристического:  $\operatorname{Re} Z \xrightarrow{kR \rightarrow 0} \pi R^2 \rho c \cdot \delta$ , т.е.  $\delta/2$  раз меньше импеданса поршня без зазора.

Если же зафиксировать  $kR$  и затем уменьшать  $\delta$ , то получим в пределе  $\operatorname{Re} Z \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi R^2 \rho c$  – импеданс в отсутствие зазора.

Реактивный импеданс характеризуется присоединенной массой поршня. Нормируя мнимую часть (3.91) на присоединенную массу поршня в свободном пространстве [150]  $\mu_0 = \frac{8}{3} \rho R^3 (1 - \delta)^3$ , получаем

$$\frac{\mu}{\mu_0} = -\frac{\operatorname{Im} Z}{\mu_0 \omega} = -\frac{3\pi}{2} \frac{C \ln \delta}{4 + C^2(kR)^2 \ln^2 \delta}. \quad (3.93)$$

Выражение (3.93) определяет присоединенную массу поршня при малом зазоре между поршнем и стенками трубы. На рис. 3-24 приведена зависимость присоединенной массы от ширины зазора для трех волновых размеров трубы. При этом аналитический результат для  $kR = 1$  хорошо согласуется с численным (см. рис. 3-23,в). Из (3.93) следует, что присоединенная масса максимальна при величине зазора  $\delta_m = \exp(-2/CkR)$  и равна  $\frac{3\pi}{8} \frac{1}{kR} \mu_0$ . Таким образом, с уменьшением  $kR$  максимум функции  $\mu(\delta)$  быстро стремится к нулю, а его значение – к бесконечности. Поэтому в узких трубах, для которых  $kR \ll 1$ , присоединенная масса поршня любого размера больше, чем его присоединенная масса в свободном пространстве. При уменьшении зазора и фиксированном  $kR$  присоединенная масса стремится к нулю как  $1/|\ln \delta|$ .

Заметим, что для уточнения характера зависимости импеданса поршня от ширины зазора необходимо более строгое нахождение асимптотики (3.88).

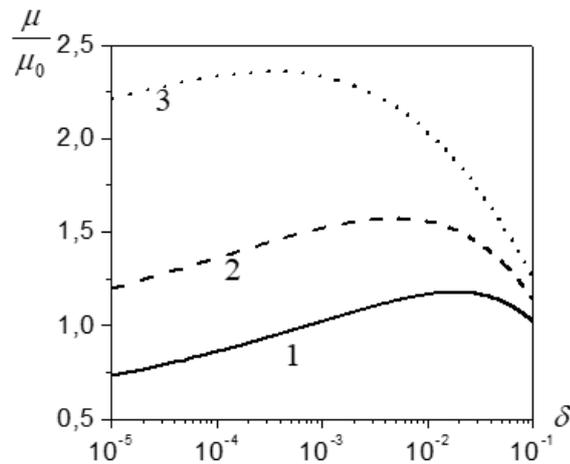


Рис. 3-24. Зависимость присоединенной массы поршня от ширины зазора для различных размеров трубы:  $kR = 1$  (1),  $kR = 0.75$  (2),  $kR = 0.5$  (3).

Итак, найден импеданс излучения поршня в трубе. Показано, что в случае малого зазора между поршнем и стенками узкой трубы присоединенная масса поршня значительно увеличивается по сравнению с его присоединенной массой в свободном пространстве. В рассмотренной задаче поршень является дипольным излучателем. Следовательно, результат заключается также и в том, что присоединенная масса диполя в узкой трубе всегда больше его присоединенной массы в свободном пространстве. Этот теоретический результат подтверждает результаты экспериментальной работы [61].

### 3.4. Квадрупольный резонатор

#### 3.4.1. Механическая модель резонатора

Приближенно квадруполь можно представить в виде двух противофазных диполей, при этом они могут осциллировать вдоль прямой, соединяющей центры диполей, или поперек ей.

Рассмотрим две несжимаемые сферы, соединенные пружиной, работающей на сжатие (рис. 3-25,а). У такой системы есть две степени свободы и два собственных движения. Первое соответствует поступательному

движению с нулевой собственной частотой и не представляет интерес с точки зрения колебаний. Второе собственное движение - это противофазное колебание сфер, которое дает квадрупольное излучение. Такое движение назовем продольными колебаниями, а прямую, соединяющую центры сфер, - осью квадруполя.

Теперь пусть сферы соединены стерженьком, работающим на изгиб, при этом стерженек имеет жесткое скрепление со сферами (рис. 3-25,б). Тогда в системе возникают колебания при поперечных смещениях сфер относительно оси квадруполя. Полагаем, что движение сфер строго поступательное, без поворотов.



Рис. 3-25. Продольный (а) и поперечный (б) квадрупольный резонатор

Квадрупольным резонатором назовем систему, состоящую из двух несжимаемых сфер, соединенных пружиной, работающей на сжатие и на изгиб. Движение резонатора можно представить в виде двух колебаний - продольного и поперечного. Далее определим квадрупольный момент некоторых конструкций резонатора.

### Продольный квадруполь

Рассмотрим два диполя с одинаковым моментом  $\mu$ , находящихся на оси  $x$ . Векторы дипольных моментов направлены по оси  $x$  (рис. 3-26,а) навстречу друг другу. Также каждый диполь можно представить в виде пары противофазных монополей с амплитудой объемной скорости  $q$  (рис. 3-26,б) на расстоянии  $d$  друг от друга.

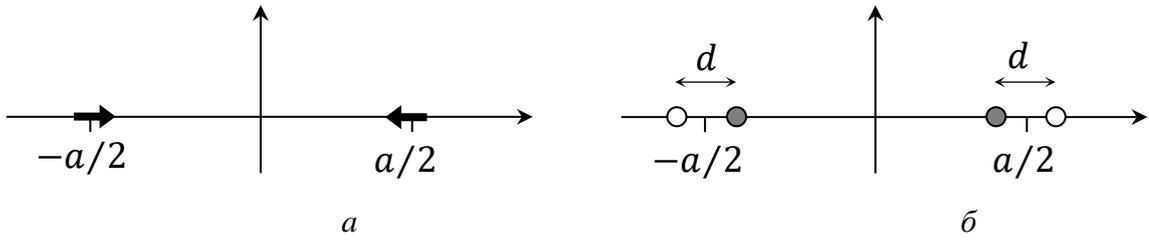


Рис. 3-26. Продольный квадруполь, состоящий из двух диполей (а) или четырех монополей (б).

Пронумеруем монополи в порядке возрастания координаты  $x$ . Тогда их объемные скорости и координаты равны  $q_1 = q_4 = q, q_2 = q_3 = -q, x_1 = -(a + d)/2, x_2 = -(a - d)/2, x_3 = (a - d)/2, x_4 = (a + d)/2, y_i = z_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ .

Для вычисления компонент тензора квадрупольного момента воспользуемся известной формулой

$$D_{\alpha\beta} = \sum q x_{\alpha} x_{\beta}, \quad (3.94)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - обозначения координат, соответствующие координате  $x$  при  $\alpha = \beta = 1$ , координате  $y$  при  $\alpha = \beta = 2$  и координате  $z$  при  $\alpha = \beta = 3$ . Суммирование в (3.94) ведется по всем монопольным источникам.

Из (3.94) находим

$$D_{xx} = \sum_{i=1}^4 q_i x_i^2, \quad (3.95)$$

остальные компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  равны нулю. Вычислив (3.95), получаем  $D_{xx} = 2adq = 2aM$ . Введем величину  $D_{||}$ , характеризующую амплитуду колебаний квадруполя в направлении его оси и называемую для краткости продольный момент. Если ось квадруполя совпадает с осью  $x$ , то тензор квадрупольного момента имеет вид

$$\hat{D}_{\parallel} = \begin{pmatrix} D_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

### Поперечный квадруполь

Теперь рассмотрим два диполя, моменты которых направлены вдоль оси  $y$  в противоположных направлениях (рис. 3-27,*а*) или четыре монополя (рис. 3-27,*б*). Эти модели описывают квадруполь, совершающий поперечные колебания в плоскости  $xu$ .

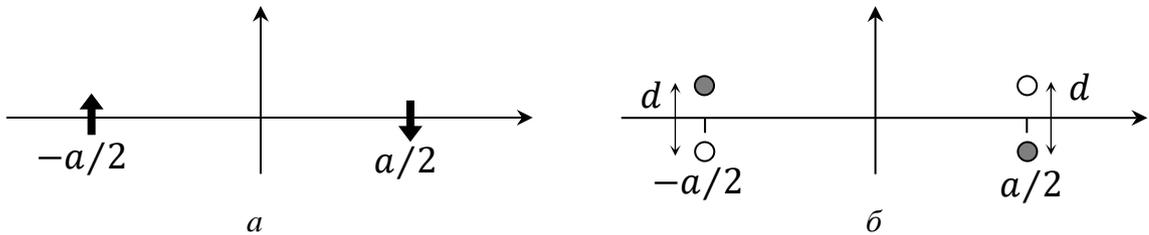


Рис. 3-27. Поперечный квадруполь, состоящий из двух диполей (*а*) или четырех монополей (*б*)

Объемные скорости и координаты монополей равны  $q_1 = q_3 = q$ ,  $q_2 = q_4 = -q$ ,  $x_1 = x_2 = -a/2$ ,  $x_3 = x_4 = a/2$ ,  $y_1 = y_4 = -d/2$ ,  $y_2 = y_3 = d/2$ ,  $z_i = 0$ .

Из (3.94) находим

$$D_{xy} = D_{yx} = \sum_{i=1}^4 q_i x_i y_i, \quad (3.97)$$

остальные компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  равны нулю. Вычислив (3.97), получаем  $D_{xy} = adq = a\mu$ . Введем поперечный момент  $D_{\perp}$ , характеризующий амплитуду колебаний квадруполя поперек его оси. Если поперечные колебания квадруполя происходят в плоскости  $xu$ , то тензор квадрупольного момента имеет вид

$$\hat{D}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & D_{\perp} & 0 \\ D_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

Амплитуду колебаний квадрупольного момента, колеблющегося и в продольном, и в поперечном направлениях, зададим двумя независимыми величинами - поперечным и продольным моментами. Из (3.96) и (3.97) находим тензор квадрупольного момента для резонатора, совершающего продольные колебания вдоль оси  $x$ , а поперечные в плоскости  $xu$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{\parallel} & D_{\perp} & 0 \\ D_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Ориентацию резонатора в пространстве можно задать тремя углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ . В общем случае тензор квадрупольного момента можно найти путем последовательного умножения тензора (3.99) на три матрицы вращения, определяемые углами Эйлера. Таким образом, пять величин  $D_{\parallel}$ ,  $D_{\perp}$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  однозначно определяют квадрупольный момент и, следовательно, поле квадрупольного момента.

Для справки приведем матрицу вращения вокруг оси  $x$  на угол  $\psi$

$$M_{\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

### **Связанный квадруполь**

В рассмотренной конструкции резонатора продольные и поперечные колебания происходят независимо. Представляет интерес рассмотреть такую конструкцию, колебания вдоль взаимоперпендикулярных направлений которой связаны. Простейшая конструкция такой системы приведена на рис. 3-28,а. Четыре несжимаемые сферы расположены в вершинах квадрата, соединенные нерастяжимыми стержнями на шарнирном закреплении. Две противоположные сферы соединены пружиной, работающей на сжатие. В такой конфигурации сферы могут передвигаться только вдоль диагоналей квадрата, на которых они расположены, при этом абсолютные значения их скоростей одинаковы. Схема эквивалентных диполей с дипольным моментом  $M$  приведена на рис. 3-28,б, пружина расположена на оси  $x$ . Квадрупольный момент пары диполей на оси  $x$  определяется тензором (3.96). Квадрупольный

момент пары диполей на оси  $y$  легко получается из тензора (3.96), его компоненты равны  $D_{yy} = -D_{||}$ . Отсюда находим тензор квадрупольного момента для рассматриваемого резонатора

$$\hat{D}_+ = \begin{pmatrix} D_+ & 0 & 0 \\ 0 & -D_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

где  $D_+ = 2aM$ .

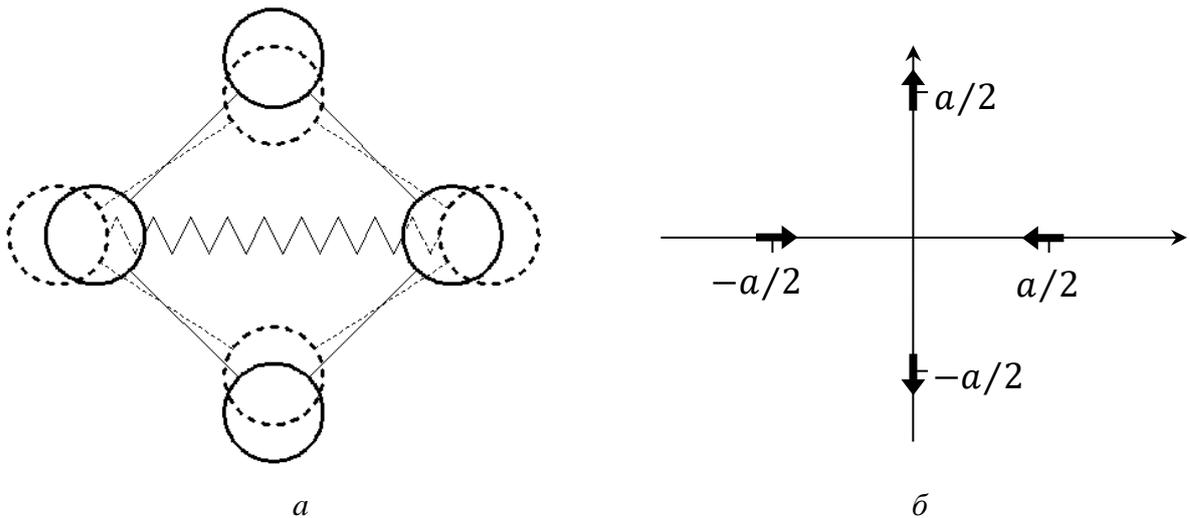


Рис. 3-28. Квадрупольный резонатор (а) и схема эквивалентных монополей (б)

### 3.4.2. Импеданс резонатора

Рассмотрим движение резонатора, вызываемое внешним звуковым полем. Продольные колебания (рис. 3-25,а) определяются скоростью среды в направлении  $x$ , обозначаемой  $v_x$ . Сферы имеют одинаковую по абсолютному значению скорость  $u$ . Для определенности примем, что сфера, расположенная в точке  $x_1 = -a/2$ , имеет скорость  $u$ , а сфера, расположенная в точке  $x_2 = a/2$ , имеет скорость  $-u$ . Сжатие пружины составляет  $w = 2u/(-i\omega)$ . Ближнее поле сфер быстро уменьшается с расстоянием (обратно пропорционально кубу расстояния для сферы), поэтому пренебрежем взаимным влиянием сфер друг на друга через звуковое поле. В этом случае уравнение движения сферы в точке  $x_1$  имеет вид [53]

$$m\dot{u} = -Kw - \gamma u - \mu(\dot{u} - \dot{v}_x) + \rho\Omega\dot{v}_x. \quad (3.101)$$

где  $m$  - масса сферы,  $K$  - жесткость пружины на сжатие,  $\gamma$  - коэффициент трения,  $\Omega$  - объем сферы,  $\mu$  - присоединенная масса колеблющейся сфера,  $\rho$  - плотность среды.

Уравнение движения второй сферы имеет такой же вид, только в (3.101) надо заменить  $u$  на  $-u$ . Проинтегрировав уравнения движения по времени, вычтем одно из другого и получим следующее отношение

$$2u \left( m + \mu - \frac{2K}{\omega^2} + \frac{\gamma}{-i\omega} \right) = (\mu + \rho\Omega) \left( v_x \left( -\frac{a}{2} \right) - v_x \left( \frac{a}{2} \right) \right). \quad (3.102)$$

С учетом разложения  $v_x(a) = v_x(0) + a \partial v_x(0)/\partial x$  находим скорость сферы

$$u = i\omega \frac{a}{2} \frac{\mu + \rho\Omega}{\gamma - i\omega \left( m + \mu - \frac{2K}{\omega^2} \right)} \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (3.103)$$

Как показано выше, продольный момент связан с дипольными моментами  $M$  сфер отношением  $D_{||} = 2aM$ . Сфера радиуса  $r$  имеет момент  $M = 2\pi r^3 u$ , ее присоединенная масса  $\mu = \rho\Omega/2$ . Выражая скорость среды через давление  $i\omega\rho v_x = \partial P/\partial x$ , введем продольный импеданс квадрупольного резонатора следующим образом

$$Z_{||} = \frac{\partial^2 P/\partial x^2}{D_{||}} = \frac{4}{(3a\Omega)^2} \left[ \gamma - i\omega \left( m + \mu - \frac{2K}{\omega^2} \right) \right]. \quad (3.104)$$

Поперечные колебания резонатора (рис. 3-25,б) определяются скоростью среды в направлении  $y$ , обозначаемой  $v_y$ . Теперь сфера в точке  $x_1$  имеет скорость  $u$ , направленную вдоль  $y$ , а скорость другой сферы равна  $-u$  и также направлена вдоль  $y$ . Уравнение движения при поперечных колебаниях имеет вид (3.102), в котором  $\gamma$  и  $K$  коэффициент трения и жесткость пружины при изгибе, а  $v_x$  нужно заменить на  $v_y$ . Поперечный момент равен  $D_{\perp} = aM$ , скорость среды  $i\omega\rho v_y = \partial P/\partial y$ , что позволяет определить поперечный импеданс по аналогии с продольным

$$Z_{\perp} = \frac{\partial^2 P / \partial x \partial y}{D_{\perp}} = \frac{8}{(3a\Omega)^2} \left[ \gamma - i\omega \left( m + \mu - \frac{2K}{\omega^2} \right) \right]. \quad (3.105)$$

Если пружина резонатора имеет одинаковые трение и жесткость на сжатие и на изгиб, то имеет место простая связь  $Z_{\perp} = 2Z_{\parallel}$ .

Для расчета импеданса связанного квадрупольного резонатора (рис. 3-28) в правую часть уравнения движения (3.101) добавляем силу, с которой поле действует на сферы, расположенные на оси  $y$ , и которая передается со сменой знака на две другие сферы. С учетом этого получаем следующее выражение для импеданса

$$Z_{+} = \frac{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}}{D_{+}} = \frac{4}{(3a\Omega)^2} \left[ \gamma - 2i\omega \left( m + \mu - \frac{K}{\omega^2} \right) \right]. \quad (3.106)$$

Выражения вида (3.104), (3.105), (3.106) могут использоваться для описания механических свойств квадрупольного простого устройства.

### 3.4.3. Демонстрационный эксперимент

Экспериментальное исследование гашения звука квадрупольным резонатором было проведено в узкой трубе в постановке, примененной для измерения акустических свойств дипольного резонатора (раздел 3.2.1). Исследуемый резонатор выполнен в виде мембраны, натянутой на короткую трубку (рис. 3-1, б). Диаметр мембраны – 5 см, длина трубки – 1 см. Резонатор помещался в узкую трубу, уровень звукового давления (УЗД) измерялся за сечением, в котором установлен резонатор. Измерения проведены для трех положений резонатора: (1) поперек трубы, (2) резонатор повернут относительно оси трубы на  $45^{\circ}$ , (3) резонатор повернут относительно оси трубы на  $90^{\circ}$ , т.е. он расположен вдоль оси трубы. На рис. 3-29 схематично показано три положения резонатора в трубе. На рис. 3-30 результаты измерения уровня звукового давления за сечением, в котором установлен резонатор.

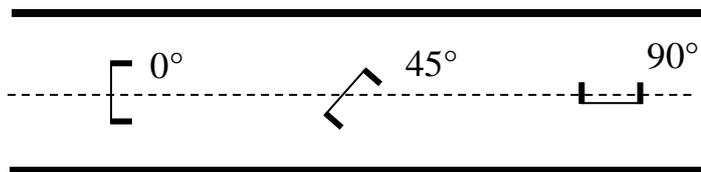


Рис. 3-29. Положения резонатора в трубе

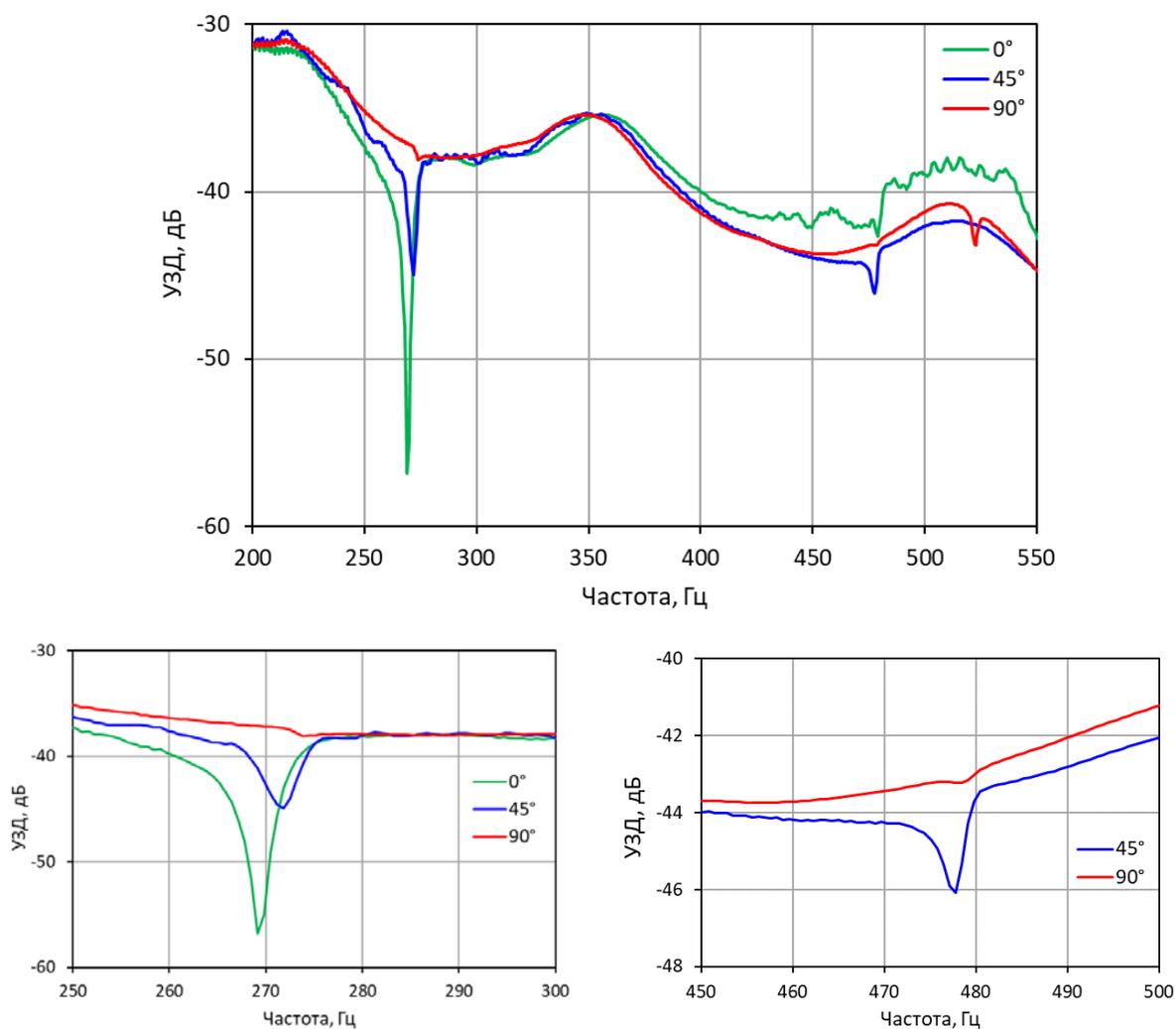


Рис. 3-30. Результаты измерения звука в трубе за сечением, в котором установлен резонатор

При положении  $0^\circ$  возбуждается собственное колебание мембраны (1,0) на частоте 269 Гц, на которой резонатор является диполем (рис. 3-1,б). На резонансной частоте наблюдается значительное снижение уровня звукового

давления за сечением, в котором расположен резонатор. При положении  $45^\circ$  возбуждаются собственные колебания мембраны (1,0) и (1,1) на частотах 272 и 477 Гц. На первой частоте резонатор является дипольным, при этом эффективность гашения звука резонатором несколько снижается, поскольку амплитуда возбуждаемых колебаний снижается. На второй частоте резонатор является квадрупольным и при положении  $45^\circ$ , как и дипольный резонатор рассеивает звук. Снижение уровня звукового давления за резонатором на его резонансной частоте составляет 2.4 дБ. При положении  $90^\circ$  очевидно, что моды (1,0) и (1,1), поэтому рассеяние звука на соответствующих собственных частотах отсутствует.

### **3.5. Выводы к главе 3**

В главе подробно исследованы возможности гашения шума пассивными и активными резонаторами в трубах. Основные теоретические и экспериментальные результаты состоят в следующем:

1. Один резонатор способен полностью отразить падающую на него волну, тем самым обеспечив изоляцию фрагмента трубы, расположенного за ним. При этом пассивный резонатор обеспечивает полную изоляцию только на одной частоте, активный резонатор – в широкой полосе частот.

2. Два близко расположенных резонатора монопольного и дипольного типов образуют монопольно-дипольный резонатор, который при оптимальных параметрах обеспечивает полное поглощение волны, распространяющейся в трубе.

3. Для гашения шума, излучаемого из открытой трубы в свободное пространство, более предпочтительным является применение дипольного резонатора при его установке на выходе трубы. При этом поле, излученное из трубы, не является нулевым – оно имеет дипольную диаграмму направленности с нулем на оси трубы.

4. Получены успешные экспериментальные подтверждения предложенных методов гашения шума в узких трубах как пассивными, так и

активными резонаторами. Степень гашения шума составляет 10-30 дБ на собственной частоте пассивных резонаторов с шириной полосы эффективного гашения, достигающей одной трети октавы, для активных резонаторов снижение шума составляет 5-25 дБ в широкой полосе частот. Представлены патентные разработки, выполненные на основании теоретического рассмотрения и лабораторных опытов.

5. Исследован импеданс излучения монополей и диполей в трубах различной конфигурации, что приоритетно важно для пассивных резонаторов, поскольку сопротивление излучения, точнее его мнимая часть, как правило, описываемая присоединенной массой, существенно влияет на их собственную частоту, что необходимо учитывать при проектировании резонансных глушителей. Коэффициент обратной связи активных резонаторов зависит от импеданса излучения, поэтому полученные результаты также необходимы для правильной настройки активных резонаторов.

6. Проведено теоретическое и экспериментальное сравнение присоединенной массы монополя и диполя в трубе и свободном пространстве. При перемещении излучателя из свободного пространства в трубу его присоединенная масса диполя уменьшается, а присоединенная масса монополя, напротив увеличивается.

7. Установлена зависимость присоединенной массы излучателя от его положения в сечении трубы: при расположении на оси трубы она минимальна, а при расположении у стенок достигает максимального значения.

8. Получены выражения для импеданса излучения поршня, расположенного в трубе с малым зазором от стенок.

9. Предложен акустический квадрупольный резонатор. Физически такой резонатор может быть представлен двумя диполями, соединенными пружиной, работающей на сжатие или на изгиб. Приведены результаты эксперимента по гашению звука в трубе квадрупольным резонатором.

## **Глава 4. Плоские регулярные системы резонаторов**

В настоящей главе рассматриваются регулярные плоские системы пассивных и активных резонаторов.

### **4.1. Решетки резонаторов**

#### **4.1.1. Оптимизация поглощения**

Максимальное сечение поглощения одиночного резонатора достигается на его собственной частоте при равенстве сопротивления трения резонатора сопротивлению излучения и зависит только от длины волны. Увеличение числа резонаторов приводит к увеличению суммарного сечения поглощения, при этом сопротивление излучения резонаторов зависит от их взаимного расположения. Поэтому оптимизация поглощения звука системой, состоящей из нескольких резонаторов, заключается не только в правильном подборе коэффициента трения, но и в правильном размещении резонаторов относительно друг друга. В работе [56] показано, что в результате взаимодействия двух резонаторов суммарное сечение может быть увеличено более чем в два раза по сравнению с сечением поглощения одиночного резонатора.

В безграничном пространстве или в области, ограниченной некоторой поверхностью так, что характерные линейные размеры данной области существенно превышают рассматриваемые длины волн, для обеспечения эффективного поглощения звука необходимо использовать набор из большого, в пределе бесконечного, числа резонаторов. Ниже рассматривается бесконечная плоская решетка сферических монополярных резонаторов, определяется оптимальный коэффициент трения и максимальное значение поглощаемой мощности [57].

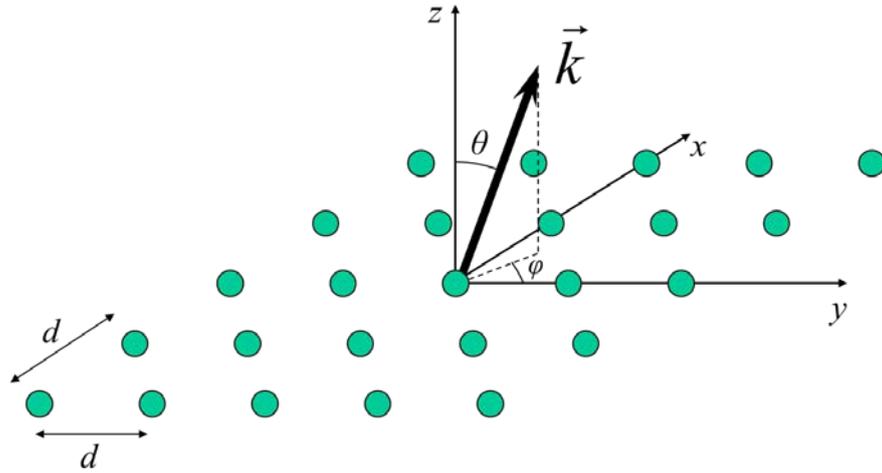


Рис. 4-1. Плоская решетка монополей

Пусть решетка расположена в плоскости  $z = 0$ , а ее период по осям  $x$  и  $y$  равен  $d$  (рис. 4-1). Каждый резонатор характеризуется эффективным импедансом  $Z_0$ , который равен отношению полной радиальной силы, действующей на сферу, к объемной скорости этой сферы. Из полупространства  $z > 0$  на решетку падает плоская гармоническая звуковая волна единичной амплитуды

$$p_0 = \exp[ik(x \cos \phi \sin \theta + y \sin \phi \sin \theta - z \cos \theta)], \quad (4.1)$$

где  $\theta$  - угол между волновым вектором и осью  $z$ ,  $\phi$  - угол между осью  $x$  и проекцией волнового вектора на плоскость  $xy$ ,  $k = \omega/c$  - волновое число,  $\omega$  - частота звука,  $c$  - скорость звука. Воспользуемся результатами, полученными в работе [132] для решетки малых рассеивателей, и запишем выражения для вещественной и мнимой частей импеданса излучения монополя  $Z_r$ , расположенного в рассматриваемой решетке

$$R = \text{Re } Z_r \approx \frac{2\pi R_0}{(kd)^2} \sum_{n,m} \frac{1}{\kappa_{n,m}}, \quad (4.2)$$

$$X = \text{Im } Z_r \approx -\omega\mu \frac{1}{2d^2ka} \times$$

$$\times \sum_{n,m} \frac{1}{|\kappa_{n,m}|} \int_0^{\pi/2} J_0 \left( \sqrt{1 - \kappa_{n,m}^2} ka \sin \vartheta \right) \exp[-|\kappa_{n,m}| ka \cos \vartheta] \sin \vartheta d\vartheta, \quad (4.3)$$

где  $\kappa_{n,m} = \sqrt{1 - \left(\cos \phi \sin \theta + \frac{2\pi}{kd} n\right)^2 - \left(\sin \phi \sin \theta + \frac{2\pi}{kd} m\right)^2}$ ,  $a$  - радиус сферического монополя,  $\mu = 4\pi a^3 \rho$  - присоединенная масса одиночного монополя,  $R_0 = \rho c (ka)^2$  - сопротивление излучения одиночного монополя,  $\rho$  - плотность среды,  $J_0(\sqrt{1 - \kappa_{n,m}^2} ka \sin \vartheta)$  - функция Бесселя. В формуле (4.2) суммирование производится по всем  $n$  и  $m$ , при которых  $\kappa_{n,m}$  - вещественное, в формуле (4.3) суммирование производится по всем  $n$  и  $m$ , при которых  $\kappa_{n,m}$  - мнимое.

Сопротивление излучения резонатора (4.2) зависит не только от периода решетки, но и от угла падения звуковой волны  $\theta$ . Функция  $R(kd)$  является разрывной, и на критических частотах, при которых  $\kappa_{n,m} = 0$ , сопротивление излучения резонатора решетки обращается в бесконечность. Взаимное влияние резонаторов решетки не только изменяет сопротивление излучения, но и изменяет присоединенную массу (4.3). При этом на критических частотах присоединенная масса становится бесконечной [53].

Интенсивное поглощение звука резонатором происходит при взаимной компенсации реактивных импедансов  $Z$  и  $Z_0$  и при равенстве их активных компонент, т.е. при выполнении соотношений (2.12). Сечение поглощения каждого резонатора при этом равно

$$\sigma = \sigma_0 \frac{R_0}{R \cos \theta}, \quad (4.4)$$

где  $\sigma_0 = \pi/k^2$  – сечение поглощения одиночного монополя. Очевидно, что сечение поглощения резонатора  $\sigma$  также зависит от периода решетки и угла падения.

Найдем коэффициент звукопоглощения решетки резонаторов  $\alpha$  - отношение плотности потолка, поглощенного решеткой, к плотности потолка падающей волны. Коэффициент  $\alpha$  можно выразить отношением сечения поглощения резонатора к площади одной ячейки решетки. На рис. 4-2 представлена зависимость коэффициента поглощения от периода решетки при оптимальном трении в резонаторе на его собственной частоте для различных

углов падения плоской волны. Решетка поглощает половину мощности падающей волны, если выполняется соотношение

$$kd < \frac{2\pi}{1 + \sin \theta}, \quad (4.5)$$

т.е. эффективность поглощения не зависит от плотности заполнения решетки (число резонаторов на единицу площади решетки). При большем периоде решетки, как видно на рис. 4-2, эффективность поглощения резко падает. Решетка резонаторов эффективно поглощает нормально падающую волну, если ее период не превышает половину длины волны. В предельном случае скользящего падения ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ) коэффициент поглощения стремится к значению  $1/2$  для всех  $kd$ . Но на всех критических частотах коэффициент звукопоглощения обращается в нуль. Отметим, что если данная решетка расположена у абсолютно жесткой поверхности и выполняется условие (4.5), то она полностью поглощает падающую волну [113].

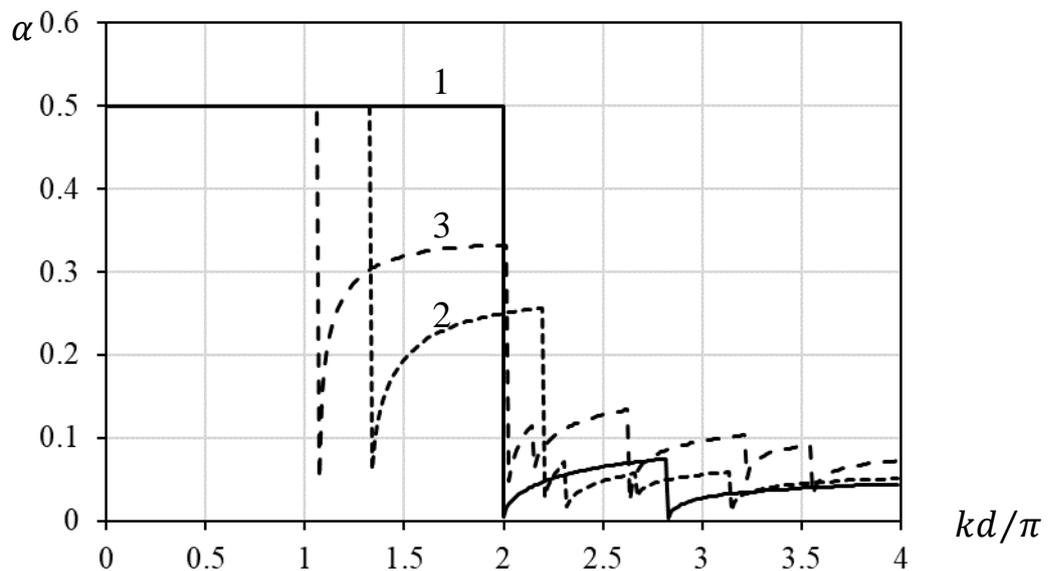


Рис. 4-2. Коэффициент поглощения решетки резонаторов при различном угле падения волны:  $\theta = 0^\circ$  (1),  $\theta = 30^\circ$  (2),  $\theta = 60^\circ$  (3).

Для пассивных резонаторов условие  $\text{Im}(Z + Z_0) = 0$  выполняется на одной частоте, поэтому решетка будет эффективно поглощать звук только на

этой частоте. Обеспечить выполнение данного условия в широкой полосе частот можно с помощью активного резонатора, который компенсирует реактивную составляющую полного импеданса  $Z + Z_0$ , а также обеспечивает необходимую действительную часть собственного импеданса  $Z_0$ . Другими словами, активный резонатор задает коэффициент трения  $\gamma$  как функцию, зависящую от частоты. Конструктивно удается обеспечить только простые зависимости вида  $\gamma(\omega) = A\omega^q$ , где  $A$  - константа,  $q = 0,1,2$ . Отметим, что активный резонатор управляется локально, следовательно, управление каждым активным резонатором в решетке не зависит от управления другими резонаторами.

Собственная масса активных резонаторов существенно превышает их присоединенную массу, поэтому можно пренебречь влиянием присоединенной массы на управление. Но на критических частотах присоединенная масса бесконечна, поэтому активное управление не обеспечивает большой коэффициент поглощения решетки в окрестности критической частоты. Рассмотрим две возможные настройки активного резонатора.

Пусть активный резонатор имеет коэффициент трения равный сопротивлению излучения одиночного монополя  $\gamma(\omega) = R_0$ , т.е. активный резонатор настроен на максимальное звукопоглощение в отсутствие других резонаторов. Зависимость коэффициента трения от частоты в данном случае квадратичная ( $q = 2$ ). На рис. 4-3,а приведена зависимость коэффициента звукопоглощения от периода решетки при различных углах падения плоской волны. Максимальное поглощение достигается только при одном значении  $kd$  и при условии, что угол падения не превышает некоторого значения ( $\sim 60^\circ$ ).

Теперь пусть активный резонатор настроен так, что его коэффициент трения равен сопротивлению излучения монополя в решетке до первой критической частоты при нормальном падении звуковой волны.

Следовательно,  $\gamma(\omega) = \frac{2\pi}{(kd)^2} R_0 = \rho c \frac{2\pi a^2}{d^2}$ , т.е. коэффициент трения не зависит

от частоты ( $q = 0$ ). На рис. 4-3,б демонстрируется коэффициент поглощения решетки при различных углах падения. Решетка эффективно поглощает волну на всех докритических частотах. Таким образом, данная настройка обеспечивает режим работы близкий к оптимальному (рис. 4-2). Отличие заключается в том, что максимальное значение коэффициента поглощения уменьшается с отклонением угла падения от оптимального значения для данной настройки. Вопросы зависимости управления активными звукопоглощающими решетками от угла падения плоской волны подробно освещены в работе [168].

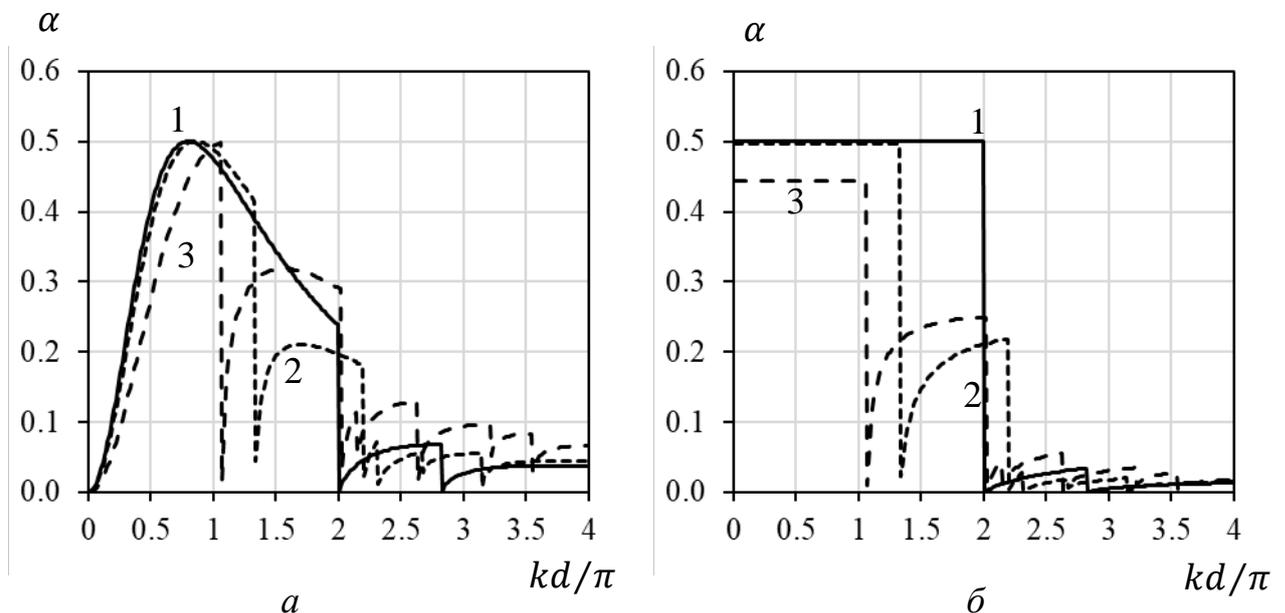


Рис. 4-3. Коэффициент поглощения решетки активных резонаторов (а: настройка  $\gamma(\omega) = R_0$ , б: настройка  $\gamma(\omega) = 2\pi R_0/(kd)^2$  при различном угле падения волны.  $\theta = 0^\circ$  (1),  $\theta = 30^\circ$  (2),  $\theta = 60^\circ$  (3).

Кратко рассмотрим регулярную линейную систему – цепочку резонаторов с периодом  $d$ . Угол между прямой, на которой расположена цепочка, и волновым вектором падающей плоской волны равен  $\theta$ . Как и в случае решетки, соседние резонаторы изменяют сопротивление излучения друг друга и присоединенную массу. Опуская математические выкладки, отметим отличия звукопоглощающих свойств плоских и линейных систем резонаторов.

На критических частотах сопротивление излучения резонатора цепочки равно сопротивлению излучения одиночного резонатора, а скачок значений сопротивления излучения при переходе через критические частоты конечен, в отличие от резонатора решетки, для которого сопротивление излучения на критической частоте бесконечно. На критических частотах присоединенная масса резонатора цепочки бесконечна, поэтому он не может скомпенсировать ее своей упругостью, а, следовательно, поглощать звук в резонансном режиме.

В качестве количественной характеристики эффективности поглощения звука цепочкой резонаторов рассмотрим отношение мощности, поглощенной единицей длины цепочки, к плотности потока мощности падающей волны. Обозначим это отношение, имеющее размерность длины,  $\alpha'$ . Очевидно, что  $\alpha' = \sigma/d$ , где  $\sigma$  - сечение поглощения резонатора цепочки. До первой критической частоты, при выполнении условия (4.5), величина  $\alpha'$  не зависит от плотности заполнения – количества резонаторов на единицу длины. При нормальном падении волны это значение равно  $\alpha' = 1/k$ .

При всех значениях параметра  $kd$ , превышающих первое критическое значение, сопротивление излучения резонатора цепочки  $R$  мало отличается от сопротивления излучения одиночного резонатора  $R_0$ . Поэтому при  $kd > 2\pi/(1 + \sin \theta)$ , можно считать, что резонаторы работают независимо.

Оптимальная настройка цепочки активных резонаторов зависит от периода цепочки и угла падения плоской волны. На низких частотах активный резонатор должен иметь коэффициент трения равный сопротивлению излучения резонатора цепочки, т.е.  $\gamma(\omega) = \frac{\pi}{kd} R_0 = \rho \pi k a \frac{a}{d}$  (при этом  $q = 1$ ). Но для частот, превышающих первое критическое значение, более предпочтительна настройка  $\gamma(\omega) = R_0$  ( $q = 2$ ). На рис. 4-4 представлена зависимость величины  $\alpha'$ , нормированной на значение  $\alpha'_{opt}$  при оптимальной настройке активных резонаторов, от параметра  $kd$  для предлагаемых настроек при нормальном падении плоской волны.

Таким образом, для оптимизации поглощения звука системой активных резонаторов во всем диапазоне частот при настройке параметров каждого резонатора необходимо учитывать их взаимное влияние на низких частотах (до первой критической частоты), а на высоких считать, что резонаторы независимы. Это приводит к некоторому усложнению зависимости  $\gamma(\omega)$ .

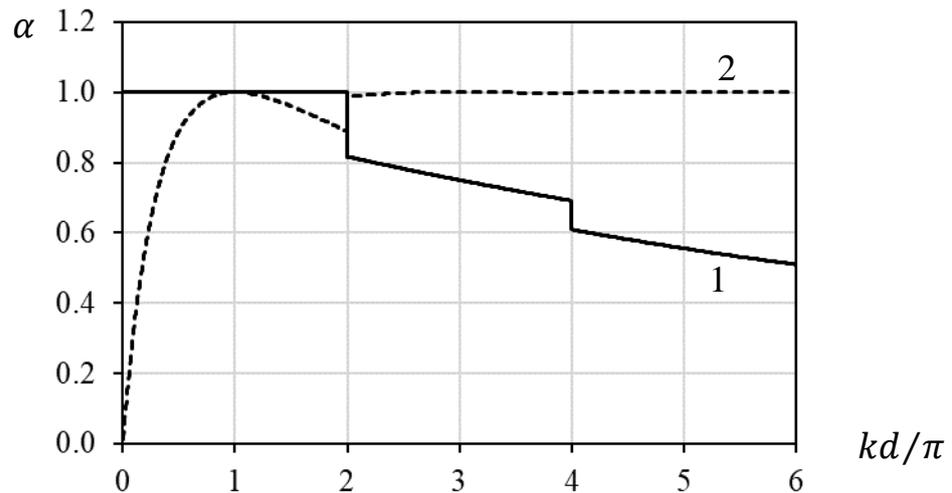


Рис. 4-4. Эффективность поглощения цепочкой активных резонаторов при различной настройке при нормальном падении плоской волны.  $\gamma(\omega)=\pi R_0/(kd)$  (1),  $\gamma(\omega)=R_0$  (2).

#### 4.1.2. Поглощающая решетка резонаторов у импедансной поверхности

В цикле работ А.Д. Лапина и М.А. Миронова [130-132] продемонстрированы возможности поглощения и рассеяния звука решетками monopольных и дипольных резонаторов. В частности, решетка однотипных резонаторов, расположенная на определенном расстоянии от жесткой поверхности или рассеивающей решетки резонаторов, способна полностью поглотить плоскую волну, падающую под определенным углом, на резонансной частоте.

В некоторых случаях активные методы гашения звука применяются как дополнительная мера для пассивных средств гашения звука [10, 248, 249].

Активные устройства могут поглотить остаточную энергию, непоглощенную пассивной конструкцией. В развитие данного подхода рассмотрим задачу о поглощении плоской волны решеткой активных резонаторов, расположенной вдоль импедансной поверхности [71].

Поверхность с импедансом  $Z$  расположена в плоскости  $z = 0$ . Первичное звуковое поле в полупространстве  $z > 0$  представим в виде двух плоских волн: падающей на поверхность и отраженной от нее. Опуская временной множитель, запишем поле давления

$$P_I = e^{ik_x x + ik_y y - ik_z z} + V e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}, \quad (4.6)$$

$$V = \left( \frac{Z}{\rho \omega} k_z - 1 \right) / \left( \frac{Z}{\rho \omega} k_z + 1 \right), \quad (4.7)$$

где  $k_x, k_y, k_z$  – проекции волновых векторов на оси  $x, y, z$ ,  $V$  – коэффициент отражения.

Пусть активные монополярные резонаторы расположены в плоскости  $z = d$  в точках  $x_s = sa$  и  $y_q = qb$ , где  $s, q$  – целые числа,  $a, b$  – пространственные периоды решетки (рис. 4-5,а). Все активные резонаторы одинаковы и характеризуются импедансом  $Z_0$ , который может принимать заданные значения в широкой полосе частот.

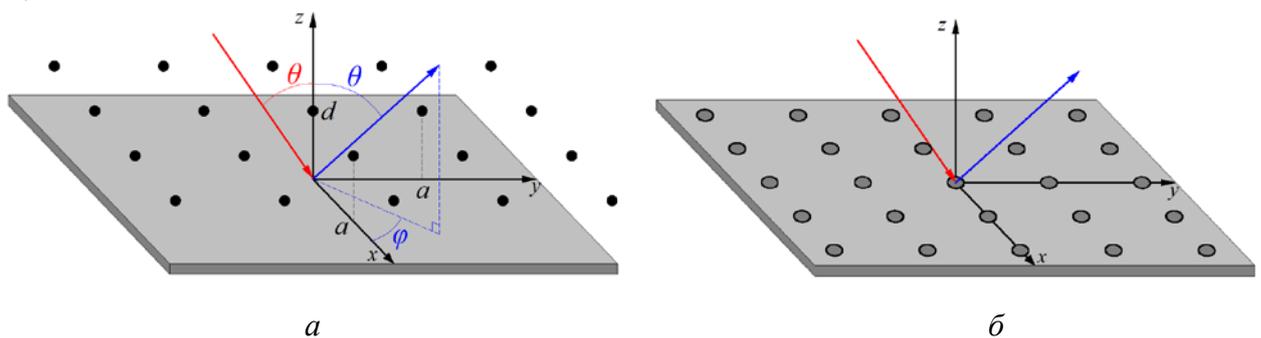


Рис. 4-5. Решетка резонаторов у импедансной поверхности (а) и встроенная решетка (б)

В работах [130-132] найдено поле решетки монополярных резонаторов в свободном пространстве. Добавив к нему отраженную от импедансной

поверхности волну, получим поле решетки монополей, т.е. вторичного звукового поля,

$$P_{II} = -\frac{\omega\rho}{2ab(Z_0 + Z_r)}(e^{-ik_z d} + Ve^{ik_z d}) \times \\ \times \sum_{n,m} \frac{1}{k_z^{nm}} \left( e^{ik_z^{nm}(z-d)} + \frac{k_z^{nm} Z/\rho\omega - 1}{k_z^{nm} Z/\rho\omega + 1} e^{ik_z^{nm}(z+d)} \right) e^{ik_x^n x + ik_y^m y}, \quad (4.8)$$

где  $k_x^n = k_x + 2\pi n/a$ ,  $k_y^m = k_y + 2\pi m/b$ ,  $k_z^{nm} = \sqrt{k^2 - (k_x^n)^2 - (k_y^m)^2}$ ,  $n, m$  – целые числа,  $Z_r$  – импеданс излучения монополя в решетке, вблизи импедансной поверхности. Для малого монополя сопротивление излучения равно приближенно [132]

$$Z_r = Z_{r0} + \frac{\omega\rho}{2ab} \sum_{n,m} \frac{e^{2ik_z^{nm}d}}{k_z^{nm}} \frac{k_z^{nm} Z/\rho\omega - 1}{k_z^{nm} Z/\rho\omega + 1}. \quad (4.9)$$

где  $Z_{r0}$  – импеданс излучения монополя в решетке в свободном пространстве. Приведем выражения для вещественной и мнимой части импеданса  $Z_{r0}$  для сферического монополя радиуса  $r$ , найденные в [130, 132]

$$R = \text{Re}Z_{r0} = \frac{\omega\rho}{2ab} \sum_{n,m} \frac{1}{k_z^{nm}}, \quad (4.10)$$

$$X = \text{Im}Z_{r0} = \\ = -\frac{\omega\rho}{2ab} \sum_{n,m} \frac{1}{|k_z^{nm}|} \int_0^{\pi/2} J_0(k_{xy}^{nm} r \sin\alpha) \exp[-|k_z^{nm}| r \cos\alpha] \sin\alpha d\alpha, \quad (4.11)$$

где  $k_{xy}^{mn} = \sqrt{(k_x^m)^2 + (k_y^n)^2}$ . В (4.10) суммируются только те члены, для которых  $\text{Im} k_z^{nm} = 0$ , а в (4.11) – те члены, для которых  $\text{Re} k_z^{nm} = 0$ .

Вторичное поле (4.8) при  $z > d$  состоит из однородных и неоднородных плоских волн, уходящих от решетки. Для решения задачи гашения волны, отраженной от поверхности, необходимо, во-первых, сформировать волну, противофазную отраженной волне первичного поля, а во-вторых, исключить излучение звука решеткой в других направлениях. Нетрудно видеть, что

нулевая волна ( $n = m = 0$ ) является однородной и ее направление совпадает с направлением отраженной волны. Поэтому для выполнения первого условия гашения достаточно подобрать необходимую амплитуду и фазу нулевой волны. Для выполнения второго условия достаточно, чтобы ненулевые плоские волны решетки были неоднородными, для этого пространственные периоды решетки не должны превышать половину длины звуковой волны  $\lambda$ .

Полагая, что  $a, b < \lambda/2$ , находим из (4.8) однородное поле решетки в полупространстве  $z > d$

$$P_{II} = -\frac{R}{(Z_0 + Z_r)} (e^{-ik_z d} + V e^{ik_z d})^2 e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}, \quad (4.12)$$

где  $R = \frac{\omega \rho}{2abk_z}$  согласно (4.10).

Уходящая от поверхности волна является суммой отраженной волны первичного поля и излучаемой решеткой волной (4.12). Амплитуда этой волны равна

$$A = V - \frac{R}{(Z_0 + Z_r)} (e^{-ik_z d} + V e^{ik_z d})^2, \quad (4.13)$$

Задача гашения волны, отраженной от поверхности, сводится к выполнению условия

$$A = 0. \quad (4.14)$$

Найдем из (4.13) импеданс монополя, при котором выполняется (4.14)

$$\tilde{Z}_0 = \frac{R}{V} (e^{-ik_z d} + V e^{ik_z d})^2 - Z_r. \quad (4.15)$$

Таким образом, при размещении решетки активных монополярных резонаторов вдоль поверхности с произвольным импедансом и их соответствующей настройке можно добиться полного поглощения падающей волны в широком частотном диапазоне.

Далее рассмотрим случай малого волнового расстояния между поверхностью и решеткой активных резонаторов, т.е.  $kd \ll 1$ . Также для упрощения выкладок предположим, что импеданс поверхности  $Z$  является вещественным,  $\text{Im } Z = 0$ . При достаточном удалении монополей друг от друга

$a, b \gg r$  влиянием неоднородных волн на импеданс излучения можно пренебречь, для этого учтем только слагаемое  $n = m = 0$  в сумме в (4.9), что дает

$$Z_r = (1 + V)R + iX. \quad (4.16)$$

Из (4.15) находим оптимальный импеданс монополя

$$\tilde{Z}_0 = \frac{1 + V}{V}R - iX. \quad (4.17)$$

Если поверхность абсолютно жесткая, т.е.  $V = 1$ , то оптимальный импеданс равен  $\tilde{Z}_0 = 2R - iX$ . Выполняется обычное условие резонансного поглощения: компенсация мнимой части импеданса излучения и равенство действительных частей импеданса излучения и импеданса резонатора.

В случае поглощающей поверхности  $V = 0$  и  $\tilde{Z}_0 = \infty$ , это означает, что монополь должен оставаться неподвижным.

Коэффициент отражения  $V$  в зависимости от импеданса поверхности  $Z$   $Z$  может принимать значения от -1 до 1. Из сравнения (4.16) и (4.17) ясно, что в общем случае действительная часть оптимального импеданса резонатора не должна совпадать с сопротивлением излучения. Это связано с тем, что в поставленной задаче максимизируется энергия, поглощаемая всей системой (поверхность + решетка), а не только поглощаемая решеткой.

Перейдем к углу  $\theta$  между волновым вектором падающей волны и поверхностью, тогда  $k_z = k \cos \theta$ . Если  $Z > \rho c / \cos \theta$ , то  $V > 0$  и  $\text{Re}\tilde{Z}_0 > 0$ . Очевидно, что решетка активных резонаторов поглощает некоторую долю энергии падающей волны, остальную поглощает поверхность. Если  $Z < \rho c / \cos \theta$ , то  $V < 0$  и  $\text{Re}\tilde{Z}_0 < 0$ . Следовательно, активные резонаторы в этом случае не являются поглотителями, а, напротив, излучают звуковую энергию. Это означает, что всю энергию падающей волны, а также энергию, излученную решеткой, поглощает поверхность. Также оказывается, что при таком импедансе невозможно осуществить полное поглощение падающей волны при помощи пассивных резонаторов, поскольку их сопротивление излучения не бывает отрицательным.

Пусть решетка активных резонаторов настроена на полное поглощение волны, падающей под углом  $\theta_0$ . Мнимая часть оптимального импеданса активного резонатора (4.17) слабо зависит от угла падения  $\theta$ , поэтому из (4.16) и (4.17) находим

$$\tilde{Z}_0 + Z_r = (1 + V(\theta))R(\theta) + \frac{1 + V(\theta_0)}{V(\theta_0)}R(\theta_0). \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.13), находим коэффициент отражения волны, падающей под углом  $\theta$

$$A = \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\cos \theta + \cos \theta_0}. \quad (4.19)$$

Отметим, что эффективность гашения не зависит от импеданса поверхности, это означает, что решетка активных резонаторов совместно с поверхностью с произвольным импедансом формируют в плоскости  $z = d$  поверхность с импедансом  $Z = \rho c / \cos \theta_0$ .

Рассмотрим кратко поглощение звука решеткой активных резонаторов дипольного типа вблизи поверхности, т.е.  $kd \ll 1$ . Расположение дипольных резонаторов в решетке такое же, как и расположение монопольных, их дипольный момент направлен вдоль оси  $z$ . Опуская выражения для поля решетки в общем случае, приведем амплитуду отраженной волны для случая, когда пространственные периоды решетки не превышают половину длины звуковой волны,

$$A = V + \frac{R_d}{(Z_0 + Z_r)}(1 - V)^2. \quad (4.20)$$

$$Z_r = (1 - V)R + iX. \quad (4.21)$$

Здесь  $Z_r$  – импеданс излучения диполя в решетке в присутствии импедансной поверхности,  $R$  и  $X$  – действительная и мнимая части импеданса излучения диполя в решетке в свободном пространстве [131].

Из (4.20) и (4.21) находим оптимальный импеданс диполя, при котором обеспечивается полное поглощение падающей волны

$$\tilde{Z}_0 = \frac{V-1}{V}R - iX. \quad (4.22)$$

Если поверхность абсолютно мягкая, т.е.  $V = -1$ , то оптимальный импеданс равен  $\tilde{Z}_0 = 2R - iX$ . Как и в случае монопольных активных резонаторов при некотором значении импеданса поверхности действительная часть оптимального импеданса должна быть отрицательной, а именно при  $Z > \rho c / \cos \theta$ . Зависимость амплитуды отраженной волны от угла падения  $\theta$  при настройке на максимальное поглощение волны, падающей под углом  $\theta_0$ , имеет вид (4.19).

Важным критерием качества активной системы гашения звука является робастность – степень влияния ошибок настройки на эффективность гашения. В рассматриваемой задаче эффективность гашения определяется амплитудой отраженной волны  $A$ , настройка активных резонаторов задается оптимальным импедансом (4.17) или (4.22). Оценим параметр робастности  $\mu$ .

Пусть фактический импеданс активного резонатора  $Z_0$  отличается от оптимального значения  $\tilde{Z}_0$  на величину  $\varepsilon \tilde{Z}_0$ , т.е.

$$Z_0 = \tilde{Z}_0(1 + \varepsilon). \quad (4.23)$$

При малых ошибках  $\varepsilon$  амплитуда отраженной волны может быть записана в виде

$$|A| \approx \frac{1}{\mu} |\varepsilon|. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.23) в (4.13) или (4.20), для случая  $kd \ll 1$  находим

$$\mu = \left| \frac{(1 \pm V)^2}{V(1 \pm V \mp iV X/R)} \right|. \quad (4.25)$$

Верхний знак в (4.25) соответствует решетке активных резонаторов монопольного типа, нижний знак – решетке активных резонаторов дипольного типа,  $R$  и  $X$  также выбираются для соответствующего типа резонаторов. Для предельного случая  $X \ll R$  из (4.25) получаем  $\mu = |(1 \pm V)/V|$ . В противоположном случае  $X \gg R$  находим  $\mu = |(1 \pm V)^2/(V^2 X/R)|$ .

Для поверхности с высокими поглощающими свойствами, для которой  $|V| \ll 1$ , параметр робастности имеет достаточно большие значения. Это связано с тем, что поглощение падающей волны производится, главным образом, самой поверхностью, а решетка активных резонаторов поглощает (или излучает при отрицательном значении действительной части оптимального импеданса) лишь малую часть энергии падающей волны, поэтому ошибки настройки незначительно влияют на амплитуду отраженной волны  $A$ .

В более важном с практической точки зрения случае слабопоглощающих поверхностей робастность системы значительно зависит от импеданса поверхности. Так для жестких поверхностей, коэффициент отражения от которых  $V \approx 1$ , параметр  $\mu$  решетки активных монополярных резонаторов принимает значение от  $4R/X$  до 2 в зависимости от отношения  $R/X$ . В то время как для решетки активных дипольных резонаторов  $\mu \rightarrow 0$ . Таким образом, решетка монополярных резонаторов существенно более устойчива к ошибкам настройки по сравнению с решеткой дипольных резонаторов. В случае мягкой поверхности  $V \approx -1$ , и напротив параметр робастности для решетки дипольных резонаторов имеет большие значения по сравнению с решеткой монополярных резонаторов.

Таким образом, показано, что плоская решетка активных резонаторов монополярного или дипольного типа позволяет в широкой полосе частот полностью поглотить плоскую звуковую волну, падающую под определенным углом на поверхность с произвольным импедансом. В результате взаимодействия импедансной поверхности и решетки активных резонаторов формируется поверхность, совпадающая с плоскостью решетки, с требуемым акустическим импедансом. При этом с точки зрения робастности для жестких поверхностей более предпочтительно применение активных резонаторов монополярного типа, а для мягких поверхностей – активных резонаторов дипольного типа.

### 4.1.3. Решетка с регулируемым импедансом

Подбором импеданса активного резонатора можно обеспечить достаточно произвольный импеданс поверхности, на которой расположена решетка резонаторов (рис. 4-5). Рассмотрим задачу о настройке решетки активных резонаторов, расположенный у импедансной поверхности, на некоторое значение импеданса [281]. Как и прежде, внешнее поле задается уравнениями (4.6) и (4.7), поле решетки – уравнением (4.8).

Амплитуда отраженной волны  $A$  определяется уравнением (4.13), отсюда можно найти импеданс поверхности с решеткой резонаторов  $Z'$

$$\frac{Z'}{\rho c} = \frac{1 + A}{(1 - A)\cos\theta}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.13) в (4.26), найдем функцию  $Z' = Z'(Z, Z_0)$ , связывающую полный импеданс поверхности, взаимодействующей с решеткой резонаторов, с собственным импедансом поверхности  $Z$  и импедансом активных резонаторов  $Z_0$ . Регулировка импеданса  $Z'$  производится настройкой активного резонатора, т.е. подбором импеданса  $Z_0$ , при этом величина  $Z$  является заданной и неизменной.

Наибольший практический смысл имеет значительное изменение акустических свойств поверхности. Например, использование поглощающей решетки около отражающей поверхности, тогда возможно изменение характеристик поверхности: при работающей активной системе поверхность поглощает звук, а при неработающей – отражает. Эта задача рассмотрена в разделе 4.1.2, а теперь рассмотрим противоположную задачу: отражающая решетка вблизи поглощающей поверхности. Для упрощения расчетов предположим, что импеданс поверхности равен  $Z = \rho c$ . Из (4.7) находим коэффициент отражения  $V(k_z) = (k_z/k - 1)/(k_z/k + 1)$ . Коэффициент отражения от поверхности с решеткой равен 1, если сумма амплитуд волны, рассеянной решеткой  $P_{0,0}$ , и отраженной поверхностью волны, задаваемой

вторым слагаемым в правой части (4.6), также равна 1. Подставляя в (4.13) условие  $A = 1$ , находим оптимальный импеданс активного резонатора:

$$\tilde{Z}_0 = \frac{R}{V-1} (e^{-ik_z d} + V e^{ik_z d})^2 - Z_r. \quad (4.27)$$

В ряде практических задач, например в области архитектурной акустики, требуется ненаправленное рассеяние звука, иногда называемое диффузным рассеянием, без поглощения звуковой энергии. Отметим несколько факторов, позволяющих использовать решетки в качестве звукорассеивающих поверхностей. Во-первых, если пространственный период решетки превышает половину длины волны, то часть звуковой энергии переизлучается в направлениях, отличных от направления отраженной волны. Согласно (4.8) некоторые ненулевые спектры  $(n, m)$  соответствуют однородным плоским волнам. На рис. 4-6 приведены примеры рассеянных волн при различных углах  $\theta$  и  $\varphi$  падения первичной волны и периода решетки  $ka$ . Показаны три направления падающей волны:  $\theta = 0$  (нормальное падение);  $\theta = \pi/4$  и  $\varphi = \pi/2$ ;  $\theta = \pi/4$  и  $\varphi = \pi/4$ ; а также три периода решетки  $ka = 0.5; 1.5; 2.5$ .

Во-вторых, каждый резонатор является источником сферической волны, но периодическая решетка одинаковых резонаторов излучает плоскую волну, поэтому некоторая нерегулярность в решетке или в настройках резонатора приведет к уменьшению интенсивности отражения в зеркальном направлении. Приведем некоторые простые оценки. Пусть решетка активных резонаторов расположена около поглощающей поверхности, для обеспечения диффузного рассеяния звуковая энергия, излучаемая решеткой, должна быть равна энергии падающей волны. Плотность энергии падающей волны единичной амплитуды равна  $W_i = 1/2\rho c$ . Звуковая энергия, излучаемая монополем с объемной скоростью  $Q$ , равна  $w_m = \rho c k^2 Q^2 / 8\pi$ . Количество резонаторов на единицу площади равно  $N = a^{-2}$ , энергия, излучаемая с единицы площади, равна  $w_m N$ . Таким образом, амплитуда объемной скорости должны быть равна  $|Q| = \frac{2\sqrt{\pi}a}{\rho\omega}$ ,

а фаза для каждого активного резонатора может несколько отличаться, что можно осуществить, например, введением фазовой поправки  $f(s, q)$ , где  $s$  и  $q$  номера резонатора в решетке, к импедансу резонатора  $Z_{s,q} = Z_0 e^{if(s,q)}$ , где  $Z_0$  – импеданс резонатора, при котором излучается энергия  $w_m$ .

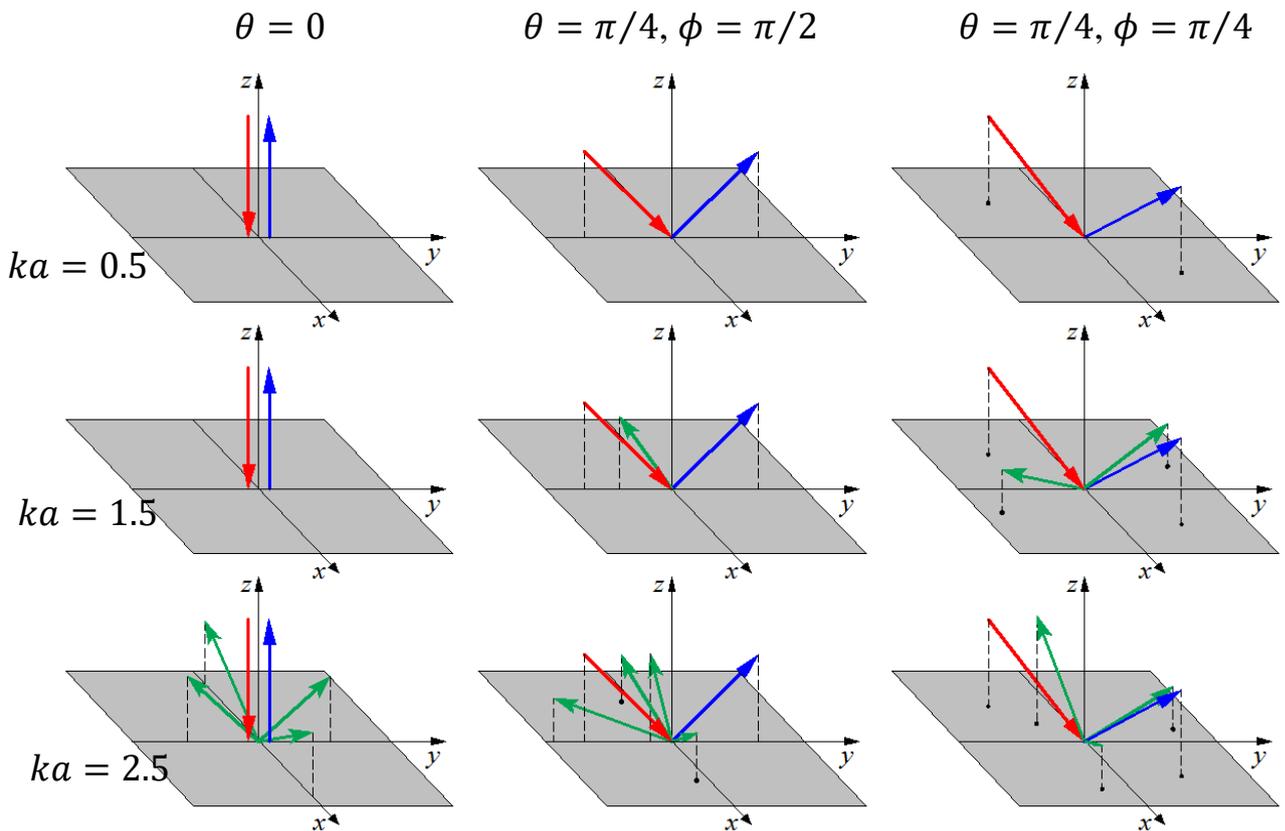


Рис. 4-6. Падающая (красная стрелка) и отраженные (синие стрелки – зеркальное отражение, зеленые стрелки – Брэгговские волны) плоские волны.

## 4.2. Активные поверхности

### 4.2.1. Поверхность, образованная монополями

Рассмотрим задачу в двумерной постановке. Пусть в жесткую поверхность  $x = 0$  встроены поршни шириной  $2a$  с одинаковым импедансом  $Z$ , расстояние между соседними поршнями  $L$ . Номер поршня  $n$  определяет координату его центра  $x_n = nL$  (рис. 4-7). Скорость поршней обозначим  $v_n$ .

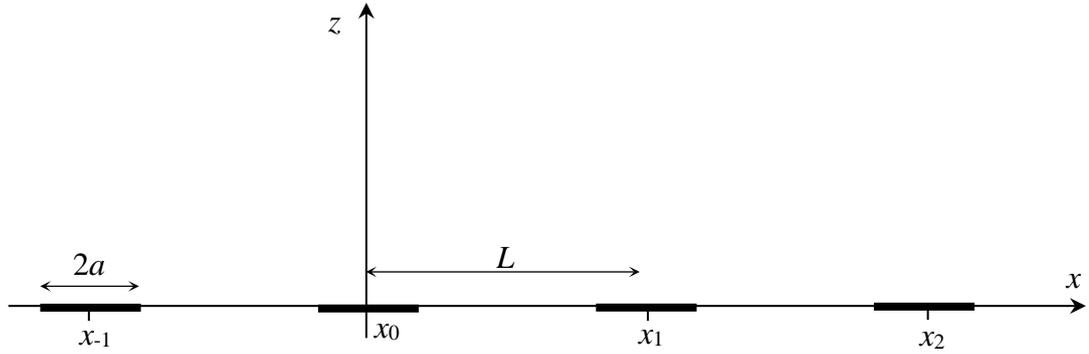


Рис. 4-7. Поверхность с активными монополярными резонаторами

На поверхность с поршнями падает плоская волна  $P_0 e^{i\xi_0 x - i\kappa_0 z}$ ,  $\xi_0^2 + \kappa_0^2 = k^2$ , которую также можно задать через угол падения  $\theta$ , тогда  $\xi_0 = k \sin \theta$ ,  $\kappa_0 = k \cos \theta$ . Поле давления в полупространстве  $z \geq 0$ , определяемое падающей волной, отраженной волной от неподвижной границы и полем монополей, записывается в виде

$$P = P_0 e^{i\xi_0 x - i\kappa_0 z} + P_0 e^{i\xi_0 x + i\kappa_0 z} + P_1. \quad (4.28)$$

Воздействие падающей волны на поверхность периодически вдоль оси  $x$ , в связи с этим скорость поршней определяется пространственным периодом, т.е.  $v_n = v e^{i\xi_0 L n}$ . С учетом этого поле, излучаемое решеткой монополей, легко получить методом Фурье

$$P_1 = 2\nu\rho cka \sum_n \frac{g(\xi_n)}{\kappa_n} e^{i\xi_n x + i\kappa_n z}. \quad (4.29)$$

где  $\xi_n = \xi_0 + 2\pi n/L$ ,  $\kappa_n = \sqrt{k^2 - \xi_n^2}$ ,  $g(\xi) = \frac{\sin \xi a}{\xi a}$ .

Найдем силу, действующую на поршень, проинтегрировав давление на его поверхности, и представим ее в виде

$$F = - \int_{-a}^a P|_{z=0} dx = -F_0 - Z_r \rho c v, \quad (4.30)$$

где  $F_0 = 4aP_0 g(\xi_0)$ ,  $Z_r$  - импеданс излучения поршня в решетке, нормированный на  $\rho c$  и равный

$$Z_r = 4ka^2 \sum_n \frac{g^2(\xi_n)}{\kappa_n}. \quad (4.31)$$

Из уравнения движения  $Zv = -F$  находим скорость поршня  $v = -F_0/(Z + Z_r)$ . Подставляя скорость  $v$  в (4.29), находим полное поле (4.28), что и является решением задачи. Исследуем это решение.

Спектр (4.29) содержит только одну однородную волну, если для  $n \neq 0$  выполняется условие  $|\xi_n| > k$ . В этом случае выражение (4.28) для полного поля принимает вид

$$P = P_0 e^{i\xi_0 x - i\kappa_0 z} + P_0 \left( 1 - 8ka^2 \frac{g(\xi_0)}{(Z + Z_r)\kappa_0} \right) e^{i\xi_0 x + i\kappa_0 z}. \quad (4.32)$$

Выражение в скобках в (4.32) является коэффициентом отражения, который обращается, во-первых, в нуль при  $\text{Im}(Z + Z_r) = 0$ , что соответствует резонансному условию (2.12). Во-вторых, необходимы оптимальные потери  $\text{Re}Z = R$ , сопротивление излучения  $R$  находим из (4.31)

$$R = \text{Re}Z_r = 4ka^2 \frac{g^2(\xi_0)}{\kappa_0} \approx \frac{4a^2}{\cos\theta}. \quad (4.33)$$

Для полного поглощения падающей волны необходимо, чтобы импеданс монополей удовлетворял стандартным условиям (2.12) для поглощающего резонатора. В этом смысле монополи с оптимально подобранным импедансом являются резонаторами, а саму поверхность можно называть резонансной. Если потери в резонаторах нулевые, т.е.  $\text{Re}Z = 0$ , то коэффициент отражения равен -1, поэтому резонансная поверхность эквивалентна мягкой границе.

Мнимая часть импеданса излучения (4.33) равна

$$X = \text{Im}Z_r = -4a^2 \sum_{n \neq 0} \frac{g^2(\xi_n)}{\sqrt{\left(\sin\theta + \frac{2\pi n}{kL}\right)^2 - 1}}. \quad (4.34)$$

При  $n \gg 1$  члены ряда, суммируемого в (4.34), уменьшаются как  $n^{-3}$ , поэтому ряд сходится.

Отдельный интерес представляет наиболее плотная расстановка поршней на поверхности, в которой отсутствуют зазоры между поршнями, т.е. период решетки равен размеру поршня  $L = 2a$ . Тогда  $\xi_n a = k a \sin\theta + \pi n$  и

$g^2(\xi_n) \approx (k a \sin \theta)^2 / \xi_n^2$ . С учетом суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \approx 1.2$  находим из (4.34) мнимую часть импеданса излучения

$$X \approx -0.32 a^2 (k a)^3 \sin^2 \theta. \quad (4.35)$$

Таким образом, вещественная часть импеданса излучения монополя в плотной решетке значительно больше мнимой, их соотношение составляет  $X/R \approx 0.08 (k a)^3 \sin^2 \theta \cos \theta$ .

Рассмотрим работу активной резонансной поверхности. Пусть приемник звукового давления расположен около центра поршня на рис. 4-7, тогда давление на приемнике активного резонатора с номером  $n = 0$  находим из (4.28), оно равно

$$P_s = 2P_0 \left( 1 - 4ka^2 \frac{g(\xi_0)}{Z + Z_r} \sum_n \frac{g(\xi_n)}{\kappa_n} \right). \quad (4.36)$$

Введем коэффициент обратной связи  $K$  между сигналом с приемника и дополнительной силой, действующей на поршень, уравнение движения имеет вид

$$(Z + Z_r)v = -F_0 + P_s K. \quad (4.37)$$

Подставляя (4.36) в (4.37), находим оптимальный коэффициент обратной связи для максимального поглощения, при котором скорость поршня принимает значение  $\tilde{v} = -F_0/2R$

$$\tilde{K} = \frac{2ag(\xi_0) \left( 1 - \frac{Z + Z_r}{2R} \right)}{1 - 4ka^2 \frac{g(\xi_0)}{Z + Z_r} \sum_n \frac{g(\xi_n)}{\kappa_n}}. \quad (4.38)$$

Принимая во внимание условие (2.12), получаем из (4.38) приближенное выражение для коэффициента обратной связи  $\tilde{K} \approx -ag(\xi_0) Z/R$ . Для резонаторов малого волнового размера полагаем  $g(\xi_0) \approx 1$  и получаем зависимость оптимальной обратной связи от угла падения

$$\tilde{K} \approx -\frac{\cos \theta}{4a} Z. \quad (4.39)$$

Исследование устойчивости выполним способом, описанным в 2.2.1, на основании критерия Найквиста. В отсутствие внешнего поля действуем на

резонатор силой  $F_{in}$ , которая вызовет его движение со скоростью  $v = F_{in}/(Z + Z_r)$ . Излучаемое активной поверхностью поле определяется (4.29) и в точке расположения приемника имеет значение  $P_s$ . Дополнительная сила, созданная обратной связью равна  $F_{out} = P_s K$ . Находим кольцевую передаточную функцию

$$H = \frac{F_{out}}{F_{in}} = 2K \frac{ka}{Z + Z_r} \sum_n \frac{g(\xi_n)}{\kappa_n}. \quad (4.40)$$

В режиме поглощения коэффициент обратной связи имеет значение (4.39), поэтому кольцевая передаточная функция с учетом (2.12) равна  $\tilde{H} \approx -1/2$ , т.е. активная резонансная поверхность является устойчивой системой.

Теперь рассмотрим робастность активной поверхности. Критерием качества примем коэффициент отражения от поверхности  $V$ , который определяется выражением в скобках в (4.32). Как обычно, вводим ошибку настройки  $\varepsilon$ , определяющую фактический коэффициент обратной связи  $K = \tilde{K}(1 + \varepsilon)$ . Подставляя это выражение в (4.36), находим скорость поршня  $v$ , далее из (4.37) и (4.38) находим коэффициент отражения

$$V = 1 + 2ka \frac{-F_0/P_0 + 2K g(\xi_0)}{Z + Z_r} \frac{1}{\kappa_0}. \quad (4.41)$$

С учетом (2.12) и малого размера поршня из (4.41) находим  $V \approx -\varepsilon$ , поэтому параметр робастности активной резонансной поверхности равен  $\mu = 1$ .

Очевидно, что поверхность, составленная из поршней с импедансом  $Z$ , установленных без зазоров, эквивалентна поверхности с локально реагирующим импедансом  $Z'$ , при этом  $Z' \rightarrow Z/(2a)^2$  при  $ka \rightarrow 0$ . Однако при конечном размере поршней импедансы  $Z'$  и  $Z$  несколько отличаются, найдем это отличие. Эквивалентность поверхности с импедансом  $Z'$  будем понимать в том смысле, что коэффициент отражения от нее такой же, как от поверхности, составленной из поршней. При падении плоской волны под углом  $\theta$  на поверхность с импедансом  $Z'$  коэффициент отражения равен [53]

$$V = \frac{Z' \cos \theta - 1}{Z' \cos \theta + 1}. \quad (4.42)$$

Коэффициент отражения от поверхности, составленной из поршней с размером  $2a$  и импедансом  $Z$ , равен

$$V = 1 - 8a^2 \frac{g(\xi_0)}{(Z + Z_r) \cos \theta}. \quad (4.43)$$

Приравнивая (4.42) и (4.43), находим импеданс эквивалентной поверхности

$$Z' = \frac{Z}{(2a)^2 g(\xi_0)} + \frac{Z_r}{(2a)^2 g(\xi_0)} - \frac{1}{\cos \theta}. \quad (4.44)$$

Очевидно, что  $Z'$  определяется, главным образом, первым слагаемым в правой части (4.44), два других слагаемых являются малой величиной по сравнению с  $Z/(2a)^2$ . В связи с этим удобно ввести параметр  $\Delta = Z' - Z/(2a)^2$ , характеризующий отличие импеданса эквивалентной поверхности от импеданса поверхности, составленной из дискретных монополей с размером  $ka \ll 1$ . Из (4.44) находим:

$$\Delta \approx \left( \frac{Z}{(2a)^2} + \frac{1}{\cos \theta} \right) \frac{(ka)^2}{6} \sin^2 \theta. \quad (4.45)$$

Для поглощающей поверхности импеданс монополей должен быть равен  $Z = R$ , в этом случае параметр  $\Delta$  составляет

$$\Delta \approx \frac{(ka)^2}{3} \sin \theta \operatorname{tg} \theta. \quad (4.46)$$

Значение  $\Delta$  зависит не только от размера поршней, но и от угла падения волны  $\theta$ . Так при нормальном падении  $\Delta = 0$ , поэтому поверхность может состоять из поршней любого размера, в том числе и превышающем длину волны.

Таким образом, поверхность, составленная из монополей с импедансом  $Z$ , может быть заменена поверхностью с локально реагирующим импедансом  $Z' = Z/(2a)^2$  с точностью  $\Delta$ , определяемой (4.45). Для монополей, настроенных на максимальное поглощение, точность замены на

эквивалентную поверхность задается (4.46). Применение понятия эквивалентной поверхности позволяет в некоторых случаях упростить расчеты.

#### 4.2.2. Поверхность, образованная диполями

Поле диполя, расположенного близи жесткой поверхности, определяется проекцией его момента на поверхность и фактически является полем диполя, момент которого направлен вдоль поверхности [53]. Рассмотрим поверхность со встроенными в нее диполями в следующей постановке (рис. 4-8). Дипольный излучатель образован двумя противофазно колеблющимися поршнями шириной  $a$ , расположенными рядом друг с другом. Скорость диполя в точке  $x = 0$  равна

$$v_0 = \begin{cases} v, & 0 < x < a \\ -v, & -a < x < 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Поле в полупространстве  $x > 0$  определяется выражением (4.28), требуется найти составляющую  $P_1$ , определяемую движением диполей. Скорости остальных излучателей согласно теореме Флоке равны  $v_n = v_0 e^{i\xi_0 L n}$ .

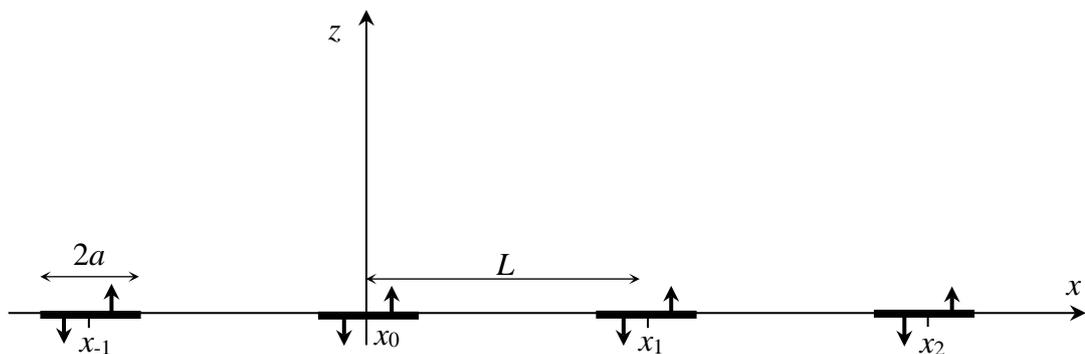


Рис. 4-8. Поверхность с диполями

Поле  $P_1$  легко найти методом Фурье, оно имеет вид (4.29), в котором необходимо применить следующую функцию

$$g_1(\xi) = i \frac{\cos \xi a - 1}{\xi a}. \quad (4.48)$$

Найдем воздействие со стороны звукового поля  $P_1$  на диполь. В первую очередь найдем силы, действующие на противофазно колеблющиеся поршни.

$$F_+ = - \int_0^a P_1|_{z=0} dx, \quad F_- = - \int_{-a}^0 P_1|_{z=0} dx. \quad (4.49)$$

Пусть импеданс излучения каждого поршня равен  $Z_r/2$ , тогда уравнение движения поршня  $0 < x < a$  имеет вид  $Z_r v/2 = F_+$ , а уравнение движения поршня  $-a < x < 0$  имеет вид  $-Z_r v/2 = F_-$ . Разность уравнений движения дает следующее выражение для импеданса излучения, нормированного на  $\rho c$ ,

$$Z_r = \frac{\Delta F}{v} = -4ka^2 \sum_n \frac{g_1^2(\xi_n)}{\kappa_n}, \quad (4.50)$$

где  $\Delta F = F_+ - F_-$ .

Выражение для импеданса излучения диполя (4.50) имеет такую же структуру, как и выражение (4.31) для импеданса излучения монополя, за исключением вида функции  $g(\xi)$ . Из (4.50) следует, что диполь реагирует на градиент давления вдоль оси  $x$ . Для малого волнового размера диполя можно принять  $\xi a \ll 1$  и получить из (4.48) приближенное выражение  $g_1(\xi) \approx -i\xi a/2$ , для монополя в этом случае она равна  $g(\xi) \approx 1$ .

Воздействие со стороны падающего поля, задаваемого двумя первыми слагаемыми в (4.28), найдем в виде разности сил, действующих на поршни,

$$\Delta F_0 = - \left[ \int_0^a 2P_0 e^{i\xi_0 x} dx - \int_{-a}^0 2P_0 e^{i\xi_0 x} dx \right] = -4aP_0 g_1(\xi_0). \quad (4.51)$$

Из уравнения движения находим скорость  $v = -\Delta F_0/(Z + Z_r)$ . Подставляя скорость  $v$  в (4.29), находим полное поле (4.28), что и является решением задачи. Пусть спектр (4.29) содержит только одну однородную волну, т.е. для  $n \neq 0$  выполняется условие  $|\xi_n| > k$ . В этом случае выражение (4.28) для полного поля принимает вид

$$P = P_0 e^{i\xi_0 x - i\kappa_0 z} + P_0 \left( 1 + 8ka^2 \frac{g_1(\xi_0)}{(Z + Z_r)\kappa_0} \right) e^{i\xi_0 x + i\kappa_0 z}. \quad (4.52)$$

Выражение в скобках в (4.52) является коэффициентом отражения, который обращается, во-первых, в нуль при  $\text{Im}(Z + Z_r) = 0$ , что соответствует резонансному условию (2.12). Во-вторых, необходимы оптимальные потери  $\text{Re}Z = R$ , сопротивление излучения  $R$  находим из (4.50)

$$R = \text{Re}Z_r = -4ka^2 \frac{g_1^2(\xi_0)}{\kappa_0} \approx (ka)^2 \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\cos \theta}. \quad (4.53)$$

Отсюда следует, что при нормальном падении  $\theta = 0$  сопротивление излучения равно нулю, диполи не поглощают звук, что и было физически очевидно заранее, поскольку градиент давления вдоль оси  $x$  в этом случае нулевой. Также поверхность с диполями не поглощает звук при скользящем падении, поскольку при  $\theta \rightarrow \pi/2$  сопротивление излучения становится бесконечным. Таким образом, поверхность из диполей может поглощать звук только при наклонном падении. Для полного поглощения падающей волны необходимо, чтобы импеданс диполей удовлетворял стандартным условиям (2.12) для поглощающего резонатора. При такой настройке, как и в случае поверхности с монополями с оптимально подобранным импедансом, поверхность можно называть резонансной. Такие поверхности могут быть сформированы из точечных дипольных резонаторов, момент которых направлен вдоль поверхности, или мембранами, второе собственное колебание которых также является диполем [286].

Рассмотрим работу активной резонансной поверхности на примере монополюсно-дипольных активных резонаторов. Пусть приемник звукового давления расположен около стыка противофазно колеблющихся поршней на рис. 4-8, тогда давление на приемнике активного резонатора с номером  $n = 0$  находим из (4.28), оно равно

$$P_s = 2P_0 \left( 1 + 4ka^2 \frac{g_1(\xi_0)}{Z + Z_r} \sum_n \frac{g_1(\xi_n)}{\kappa_n} \right). \quad (4.54)$$

Введем коэффициент обратной связи  $K$  между сигналом с приемника и дополнительной силой, действующей на поршень, уравнение движения имеет вид

$$(Z + Z_r)v = -\Delta F_0 + P_s K. \quad (4.55)$$

Подставляя (4.54) в (4.55), находим оптимальный коэффициент обратной связи для максимального поглощения, при котором скорость поршня принимает значение  $\tilde{v} = -\Delta F_0/2R$

$$\tilde{K} = \frac{2ag_1(\xi_0) \left( \frac{Z + Z_r}{2R} - 1 \right)}{1 + 4ka^2 \frac{g_1(\xi_0)}{Z + Z_r} \sum_n \frac{g_1(\xi_n)}{\kappa_n}}. \quad (4.56)$$

Принимая во внимание условие (2.12), получаем из (4.56) приближенное выражение для коэффициента обратной связи  $\tilde{K} \approx -ag_1(\xi_0)Z/R$ . Для резонаторов малого волнового размера диполя получаем зависимость оптимальной обратной связи от угла падения

$$\tilde{K} \approx -i \frac{\text{ctg}\theta}{2ka^2} Z. \quad (4.57)$$

Абсолютное значение коэффициента обратной связи для монопольно-дипольного активного резонатора примерно в  $(ka)^{-1}$  раз выше, чем у монопольно-монопольного (4.39), что связано с необходимостью большей амплитуды колебаний диполя для излучения нулевой волны такой же амплитуды.

Монопольный приемник не измеряет собственное поле излучателя, поэтому обратная связь между ними нулевая. Однако поле других диполей в решетке ненулевое в точке расположения приемника. При достаточно большом удалении, т.е. при периоде решетки  $L$ , значительно превышающем габариты диполя  $2a$ , суммарное поле можно считать малой величиной, поэтому система монопольно-дипольных активных резонаторов имеет слабую обратную связь, что означает ее устойчивость по критерию Найквиста, а также дает оценку параметра робастности  $\mu \approx 1$ .

Постановка задачи о поверхности со встроенными диполями (рис. 4-8) не позволяет заменить ее поверхностью с эквивалентным импедансом, как это было сделано для поверхности с монополями, поскольку диполи реагируют на градиент давления по направлению вдоль поверхности. Поэтому при плотной расстановке диполей поверхность имеет необычные акустические свойства: фактически она реагирует на тангенциальное воздействие. Полученный результат представляет отдельный интерес, который требует специального рассмотрения, приведенного в следующем разделе.

### **4.3. Поверхности с тангенциально реагирующим импедансом**

#### **4.3.1. Физическая постановка**

Диполи, встроенные в плоскую поверхность (рис. 4-8), остаются неподвижными при нормальном падении звуковой волны, а значит и вся поверхность остается неподвижной, т.е. не реагирующей на нормальное воздействие. Моменты диполей направлены вдоль поверхности, поэтому их движение вызывается проекцией градиента давления на поверхность, следовательно, движение поверхности вызывается касательным или тангенциальным воздействием. В первую очередь рассмотрим физические системы, обеспечивающие такие свойства поверхностей.

Наиболее очевидная система – это поверхность, покрытая дипольными резонаторами [286]. В этом случае противофазные поршни на рис. 4-8 заменяются резонаторами той или иной конструкции. Отметим, что подобные системы на стенках узкой трубы исследованы в работе М.А. Миронова [329]. Простейшая система – дипольный резонатор в виде несжимаемой сферы, закрепленной жестким стерженьком к поверхности (рис. 4-9). При этом резонатор может иметь разные степени свободы. Например, если стерженек может одинаково изгибаться во всех направлениях, то поверхность одинаково реагирует на падающие волны с любых направлений. Однако, если он может изгибаться только во одной плоскости, например в плоскости  $xz$ , то и

наибольшая реакция поверхности на внешнее воздействие будет от волн, волновые вектора которых лежат в этой плоскости. Волны же с волновыми векторами, лежащими на плоскости  $yz$ , перпендикулярной плоскости движения резонатора, не вызывают никакого движения поверхности. В этом смысле тангенциально реагирующая поверхность может быть поляризованной в направлении  $x$ .

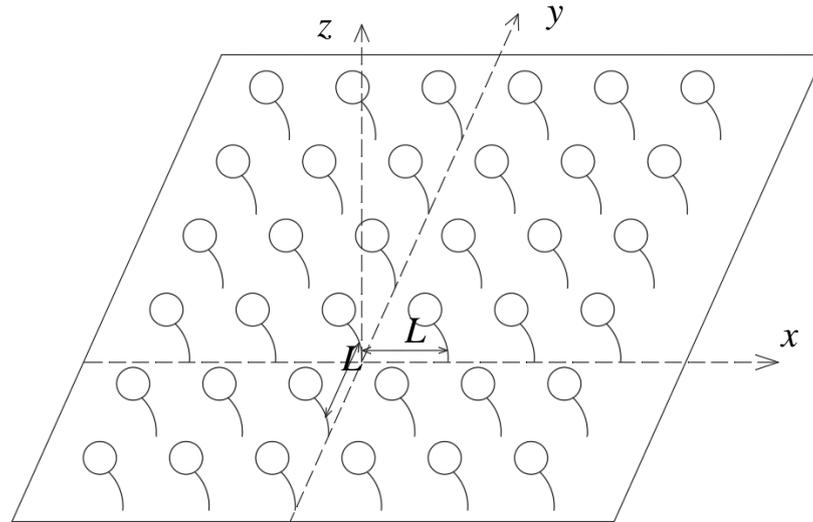


Рис. 4-9. Поверхность, покрытая дипольными резонаторами

Далее рассмотрим механическую систему из двух поршней, максимально близкую к постановке на рис. 4-8. На рис. 4-10 показан один резонатор, состоящий из двух поршней массой  $m/2$ , каждый из которых может двигаться только поступательно вдоль оси  $z$  и закреплен к жесткой поверхности пружиной жесткостью  $k/2$ . Поршни соединены нерастяжимой нитью через блок, что обеспечивает одинаковую по абсолютному значению скорость движения поршней. Очевидно, собственная частота такого резонатора равна  $\omega_0^2 = k/m$ . При размещении резонаторов на плоскости, как показано на рис. 4-10,а, их дипольные моменты направлены вдоль оси  $y$ , поэтому поверхность оказывается поляризованной в направлении  $y$ . Для того, чтобы поверхность реагировала на волны, приходящие со всех направлений, дипольный момент половины резонаторов, например, выбранных в

шахматном порядке, необходимо ориентировать вдоль оси  $x$ . Также отметим, что аналогичную систему образуют два близко расположенных резонатора Гельмгольца (рис. 4-10,в). Как показано в разделе 3.1.2, одним из собственных движений системы из двух резонаторов являются их противофазные колебания.

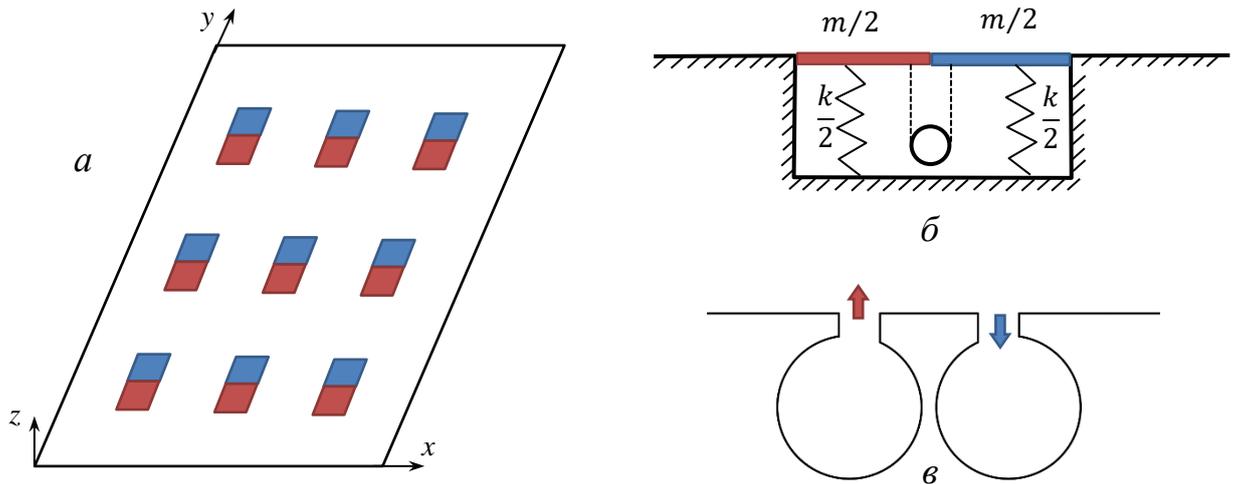


Рис. 4-10. Поверхность, покрытая дипольными резонаторами (а), и устройство одного резонатора (б) или двух противофазных резонаторов Гельмгольца (в)

Третий вариант создания поверхности с тангенциально реагирующим импедансом состоит в использовании мембранных элементов. Решение задачи о собственных колебаниях мембраны, закрепленной по краям, хорошо известно [102]. В одномерном случае (рис. 4-11,а) собственные колебания задаются синусами, целое число полупериодов которых укладывается на длине мембраны. Если мембрана встроена в жесткий бесконечный экран, то на первой резонансной частоте ( $n = 1$ ) она является источником объемной скорости для обоих полупространств, разделенных экраном. На второй резонансной частоте ( $n = 2$ ) объемная скорость равна нулю, но антисимметричные колебания относительно центра мембраны формируют два противофазных источника объемной скорости с центрами на расстоянии, равном половине длины мембраны. Таким образом, второе собственное колебание создает дипольное излучение в оба полупространства. Колебания

двумерной круглой мембраны (рис. 4-11,б) в экране также создают дипольное излучение, при этом колебания мембраны одинаково возбуждаются звуковыми волнами, пришедшими с различных направлений. Экран со встроенными круглыми мембранами (рис. 4-11,в) образует неполяризованную тангенциально реагирующую поверхность на соответствующей резонансной частоте. Для поляризации импеданса можно применить мембраны в форме эллипса, тогда колебания вида на рис. 4-11,б будут возникать на двух разных частотах: колебания вдоль длинной оси эллипса будут более низкочастотными по сравнению с колебаниями вдоль короткой оси. Если эллипс ориентировать длинной осью вдоль оси  $x$  (рис. 4-11,в), то импеданс поляризован вдоль оси  $x$  на низкой частоте и вдоль оси  $y$  – на высокой.

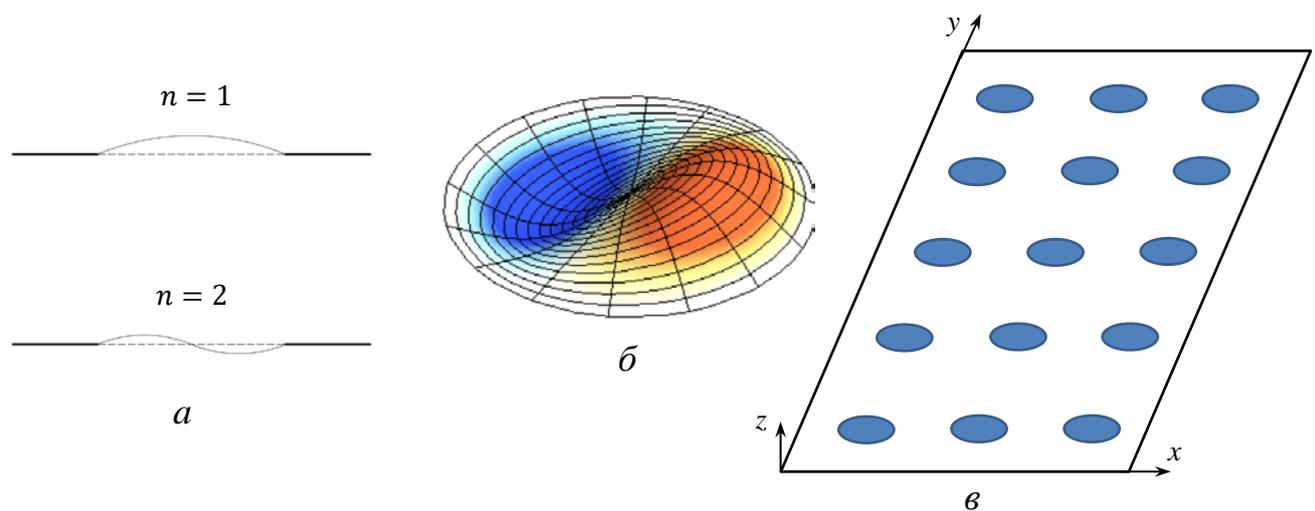


Рис. 4-11. Мембрана, встроенная в жесткий экран (а), собственное колебание (1,1) круглой мембраны (б) и поверхность с встроенными мембранами (в)

Для поверхности со встроенными мембранами определим их мультипольные моменты. Пусть круглая мембрана радиуса  $a$  расположена в жестком экране в плоскости  $xu$ , центр мембраны совпадает с центром начала координат. Как известно [102], колебания мембраны с закрепленными краями определяется набором собственных функций, запишем три из них для скорости в направлении  $z$ :

$$v_{01} = vJ_0\left(\pi\beta_{01}\frac{r}{a}\right),$$

189

$$v_{11} = v \cos \varphi J_1 \left( \pi \beta_{11} \frac{r}{a} \right),$$

$$v_{21} = v \cos 2\varphi J_2 \left( \pi \beta_{21} \frac{r}{a} \right),$$

где  $v$  - амплитуда скорости колебаний мембраны,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  - расстояние до ее центра,  $\varphi$  - угол между осью  $x$  и направлением на точку с координатами  $(x, y)$ ,  $\beta_{01} \approx 0.765$ ,  $\beta_{11} \approx 1.22$ ,  $\beta_{21} \approx 1.63$ .

Колебание  $v_{01}$  соответствует монополюному излучению с объемной скоростью

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a v_{01} r dr = \frac{2J_1(\pi\beta_{01})}{\beta_{01}} v a^2.$$

Дипольному излучению соответствует колебание  $v_{11}$ , при этом дипольный момент направлен вдоль оси  $x$  и равен

$$D = - \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^a x v_{11} r dr = - \frac{J_2(\pi\beta_{11})}{\beta_{11}} v a^3.$$

Излучение звука при колебаниях  $v_{21}$  является квадрупольным. Две компоненты тензора квадрупольного момента отличны от нуля

$$Q_{xx} = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^a x^2 v_{21} r dr = \frac{J_3(\pi\beta_{21})}{2\beta_{21}} v a^4, \quad Q_{yy} = -Q_{xx}.$$

На резонансных частотах колебаний  $v_{01}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{21}$  мембрана является монополюльным, дипольным или квадрупольным резонатором соответственно.

Отметим некоторое сходство рассмотренных поверхностей (рис. 4-9, 4-10, 4-11) с облицовкой жесткой поверхности, выполненной из водоподобного материала и контактирующей с жидкой средой [44]. Звуковые колебания в жидкости легко возбуждают звуковые колебания в облицовке, далее энергия продольных волн благодаря граничному условию на жесткой поверхности преобразуется в сдвиговые. Таким образом, падающая на облицовку звуковая волна испытывает не только нормальное сопротивление, вызванное сжатием

облицовки, но и касательное к поверхности сопротивление, обусловленное склейкой облицовки с поверхностью.

В электродинамике рассматриваются метаповерхности, состоящие из набора нанорезонаторов, характеризуемых электрическим диполем и магнитным диполем. В длинноволновом случае свойства такой поверхности описываются импедансным оператором [245].

#### 4.3.2. Тангенциальный импеданс

Для описания свойств поверхности, реагирующей на тангенциальное воздействие, полезно ввести некоторую величину, аналогичную импедансу. Согласно классическому определению [53] импедансом поверхности называют отношение гармонически меняющегося давления на поверхности к вызываемой этим давлением нормальной скорости поверхности. Если на поверхности с однородными акустическими свойствами, расположенной в плоскости  $z = 0$  декартовой системы координат, звуковое давление имеет распределение  $\hat{P}(x, y) = P e^{ik_x x + ik_y y}$ , образованное, например, интерференцией падающей и отраженной плоских волн, тогда вертикальное смещение поверхности будет равно  $\hat{v}_z(x, y) = v_z e^{ik_x x + ik_y y}$ . Импеданс поверхности определяется выражением

$$Z_{\perp} = \frac{P}{v_z}. \quad (4.58)$$

Давление  $\hat{P}(x, y)$  в каждой точке поверхности создает силу, действующую на поверхность по нормали, что вызывает движение среды. Поэтому естественно назвать такой импеданс нормальным и обозначить его индексом « $\perp$ ». Выражение (4.58) также справедливо и для локально реагирующей поверхности, только в этом случае величины  $P$  и  $v_z$  определяются для некоторой точки поверхности, а не являются амплитудами плоских волн  $\hat{P}(x, y)$  и  $\hat{v}_z(x, y)$ .

Перейдем к тангенциально реагирующей поверхности. Пусть сначала поверхность не является поляризованной, т.е. одинаково реагирует на волны, приходящие с любых направлений.

Традиционная физическая модель диполя – несжимаемая осциллирующая сфера [53]. Если на сферу действует сила, создаваемая, например, пружиной и возвращающая сферу к начальному положению, то такая система становится резонатором. Сфера, закрепленная к жесткой поверхности на стерженьке, совершающем изгибные колебания, является дипольным резонатором [81]. Далее рассмотрим два типа дипольных резонаторов. Резонаторы первого типа могут колебаться только вдоль одного направления. Если стерженек имеет поперечное сечение в виде вытянутого прямоугольника, то стерженек изгибается только вдоль короткой стороны; его колебаниями вдоль длинной стороны пренебрежем. Резонаторы второго типа могут осциллировать в любом направлении на некоторой плоскости. Очевидно, что это происходит, если стерженек имеет круглое поперечное сечение. Из физических соображения ясно, что резонаторы второго типа одинаково реагируют на акустические возмущения, пришедшие с разных направлений, а движение резонаторов первого типа зависит от направления распространения звуковой волны.

Рассмотрим квадратную решетку с пространственным периодом  $L$  сфер радиуса  $a$  (рис. 4-9), закрепленных стерженьками к абсолютно жесткой поверхности, лежащей в плоскости  $z = 0$ . Считая высоту стерженька малой по сравнению с длиной звуковой волны, будем полагать, что резонаторы расположены в точках с координатами  $(Ls, Lq, 0)$ . Пара целых чисел  $s$  и  $q$  определяет резонатор в решетке. Пусть на поверхность падает плоская гармоническая волна с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой звукового давления  $A$ . Отраженная от жесткой поверхности волна имеет такую же амплитуду. Запишем поле звукового давления в полупространстве  $z \geq 0$  без учета резонаторов в виде

$$P_0 = Ae^{i(\xi_0 x + \zeta_0 y - \kappa_0 z)} + Ae^{i(\xi_0 x + \zeta_0 y + \kappa_0 z)}. \quad (4.59)$$

Также падающую волну можно задать волновым числом  $k^2 = (\omega/c)^2 = \xi_0^2 + \zeta_0^2 + \kappa_0^2$ , углом падения  $\theta$  и углом  $\varphi$ , характеризующим направление распространения волны (4.59). Введенные величины связаны между собой следующими соотношениями  $\xi_0 = k \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\zeta_0 = k \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\kappa_0 = k \cos \theta$ . Кроме этого, удобно использовать вектор единичной длины  $\tau_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ , направление которого совпадает с направлением проекции волнового вектора падающей волны на поверхность.

Возмущение (4.59) вызывает движение резонаторов, которое охарактеризуем дипольным моментом  $D_{sq}$ . Согласно теореме Блоха запишем  $D_{sq} = De^{i(\xi_0 s L + \zeta_0 q L)}$ , здесь  $D$ ,  $D = |\mathbf{D}|$  – дипольный момент резонатора с номером  $s = q = 0$ . Дифференцируя известное выражение для поля решетки монополей [71, 126], найдем поле, излучаемое дипольными резонаторами,

$$P_1 = -\frac{\omega \rho}{L^2} \mathbf{D} \nabla \left( \sum_{n,m} \frac{e^{i(\xi_n x + \zeta_m y + \kappa_{nm} z)}}{\kappa_{nm}} \right), \quad (4.60)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $n, m$  – целые числа,  $\xi_n = \xi_0 + 2\pi n/L$ ,  $\zeta_m = \zeta_0 + 2\pi m/L$ ,  $\kappa_{nm} = \sqrt{k^2 - \xi_n^2 - \zeta_m^2}$ . Поле (4.60) является суперпозицией плоских волн. Если период решетки менее половины длины звуковой волны, то однородным является только нулевой спектр  $n = m = 0$ . Далее будем рассматривать решетки, в которых расстояние между соседними резонаторами не превышает половину длины волны.

Полное звуковое поле равно  $P = P_0 + P_1$ . Для его расчета необходимо найти дипольный момент. Сделаем это для резонаторов, которые могут колебаться только вдоль одного направления. Если стерженек имеет поперечное сечение в виде вытянутого прямоугольника, то стерженек изгибается только вдоль короткой стороны; его колебаниями вдоль длинной стороны пренебрежем. Зададим направление, вдоль которого резонатор совершает колебания, вектором единичной длины  $\tau$ . Уравнение движения резонатора запишем, следуя [329],

$$M\dot{v} = -K \int v dt - \gamma v - \mu(\dot{v} - \dot{u}) + \rho\Omega\dot{u}, \quad (4.61)$$

где  $v$  – скорость резонатора,  $u$  – скорость среды в окрестности резонатора вдоль вектора  $\tau$ ,  $M$ ,  $\Omega$  – масса и объем сферы,  $K$  – жесткость пружины,  $\gamma$  – коэффициент трения,  $\mu$  – присоединенная масса.

Дипольный момент связан со скоростью сферы отношением  $\mathbf{D} = 2\pi a^3 \mathbf{v}$ .

Из (4.61) получаем

$$D = -i\omega \frac{a(\mu + \rho\Omega)}{2Z} u, \quad (4.62)$$

$$Z = \frac{1}{4\pi a^2} \left[ \gamma - i\omega \left( M + \mu - \frac{K}{\omega^2} \right) \right]. \quad (4.63)$$

где  $Z$  – импеданс резонатора.

Давление и скорость среды связаны отношением  $i\omega\rho\mathbf{u} = \nabla P$ , скорость среды вдоль дипольного момента равна  $u = \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}$ . Подставляя эти выражения в (4.62), находим дипольный момент резонатора, возникающий под воздействием поля (4.59),

$$D = -ika \frac{\mu + \rho\Omega}{\rho} \frac{2A}{Z + Z_r} \sin\theta \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}_0, \quad (4.64)$$

$$Z_r = R + iX = \frac{a\omega(\mu + \rho\Omega)}{L^2} \left[ \frac{k^2 \sin^2\theta}{\kappa_0} (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}_0)^2 - i \sum_{n,m \neq 0} \frac{(\xi_n \cos\varphi + \zeta_m \sin\varphi)^2}{\alpha_{nm}} \right], \quad (4.65)$$

где  $Z_r$  – импеданс излучения,  $\alpha_{nm}^2 = -\kappa_{nm}^2$ .

Подставляя (4.73) в (4.60), находим амплитуду нулевого спектра

$$P_1^{(0)} = -\frac{2R}{Z + Z_r} A. \quad (4.66)$$

Амплитуда отраженной волны равна  $A + P_1^{(0)}$ , что дает выражение для коэффициента отражения плоской волны от поверхности, покрытой резонаторами,

$$V = \frac{Z + iX - R}{Z + iX + R}. \quad (4.67)$$

Рассмотрим отражение звука на резонансной частоте, определяемой из уравнения  $\text{Im}(Z + Z_r) = 0$ . Введем безразмерный вещественный импеданс резонатора  $Z' = \text{Re}ZL^2 / (ka\omega(\mu + \rho\Omega))$  и угол  $\psi$  между векторами  $\mathbf{\tau}$  и  $\mathbf{\tau}_0$ . Тогда из (4.67) получаем зависимость коэффициента отражения от направления падающей волны

$$V = \frac{Z' \cos \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{Z' \cos \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \psi}. \quad (4.68)$$

Коэффициент отражения зависит, во-первых, от угла падения  $\theta$ : при нормальном падении  $V = 1$ , поскольку движение диполей не возбуждается, и поверхность остается жесткой для падающей волны. Во-вторых, коэффициент отражения зависит от направления распространения волны относительно направления колебаний сфер. Если волна падает поперек дипольного момента, т.е.  $\psi = \pi/2$ , то  $V = 1$  при любом угле падения  $\theta$ .

Итак, рассмотренная поверхность реагирует на наклонное падение звуковой волны, при этом очевидно, что акустические свойства поверхности нельзя описать некоторым эквивалентным импедансом, определяемым как отношение давления около поверхности к ее нормальной скорости, поскольку такой импеданс дает зависимость коэффициента поглощения от угла падения, отличную от (4.68).

Из практических соображений акустические свойства микронеоднородных поверхностей описывают макроскопическими параметрами, например, некоторым эквивалентным импедансом [360]. Эквивалентность применения импеданса в каждом случае требует особых оговорок, в настоящей работе поверхности будем считать эквивалентными, если в дальнем поле они создают одинаковое поле, или, другими словами, они имеют одинаковый коэффициент отражения  $V$ .

Граничное условие на импедансной поверхности принято задавать в виде отношения

$$Z_{\perp} = -\frac{P}{v_z}, \quad (4.69)$$

где  $P$  – звуковое давление у поверхности,  $v_z$  – ее нормальная скорость. Знак « $\rightarrow$ » возникает поскольку волна, падающая из полупространства  $z > 0$  на поверхность  $z = 0$ , оказывает воздействие на поверхность в отрицательном направлении оси  $z$ . Это воздействие приложено по нормали к поверхности и вызывает ее движение, поэтому естественно величине  $Z_{\perp}$  дать уточненное название – нормальный импеданс.

Коэффициент отражения плоской волны, задаваемой первым слагаемым в правой части (4.59), от поверхности  $z = 0$ , на которой выполняется граничное условие (4.69), хорошо известен

$$V = \frac{Z_{\perp} \cos \theta - \rho c}{Z_{\perp} \cos \theta + \rho c}. \quad (4.70)$$

Теперь зададим граничное условие на поверхности  $z = 0$  в виде

$$Z_{\parallel} = -\frac{\Delta_{\tau} P}{v_z}, \quad (4.71)$$

где  $\mathbf{\tau}$  – некоторый известный вектор единичной длины, лежащий в плоскости  $xy$ ,  $\Delta_{\tau} = \tau_x^2 \partial^2 / \partial x^2 + \tau_y^2 \partial^2 / \partial y^2$ .

Коэффициент отражения от такой поверхности равен

$$V = \frac{Z_{\parallel} \cos \theta - \rho c k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{Z_{\parallel} \cos \theta + \rho c k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi}, \quad (4.72)$$

где  $\psi$  угол между векторами  $\mathbf{\tau}$  и  $\mathbf{\tau}_0$ . Нетрудно заметить, что выражения (4.68) и (4.72) имеют одинаковую зависимость от углов  $\theta$  и  $\psi$  и совпадают, если  $Z_{\parallel} = \rho c k^2 Z'$ . В оговоренном смысле граничное условие (4.71) является эквивалентной заменой поверхности с решеткой дипольных резонаторов.

Таким образом, мы можем охарактеризовать поверхность с достаточно сложной микроскопической структурой (рис. 4-9) простым граничным условием (4.71), которое в физическом смысле является отношением воздействия, касательного к плоскости, к ее нормальной скорости. Поэтому назовем величину  $Z_{\parallel}$  тангенциальным импедансом, а поверхность с граничным условием (4.71) тангенциально реагирующей.

Проведем краткое сравнение выражений (4.70) и (4.72). При нормальном падении коэффициент отражения от тангенциально реагирующей поверхности всегда равен +1, а при отражении от нормально реагирующей поверхности его абсолютное значение меньше 1, если  $\text{Re}Z_{\perp} \neq 0$ . При скользком падении  $\theta \rightarrow \pi/2$  коэффициент отражения от поверхностей обоих типов  $V \rightarrow -1$ , т.е. поверхности ведут себя как мягкая граница. Для полного поглощения падающей волны мнимые части импедансов  $Z_{\perp}$  и  $Z_{\parallel}$  должны быть равны нулю, при этом действительная часть нормального импеданса должна быть не менее  $\rho c$ . Но для любого значения действительной части тангенциального импеданса существуют углы (за исключением  $\theta = 0$  и  $\psi = \pi/2$ ), при которых происходит полное поглощение падающей волны.

Для характеристик поверхности граничным условием (4.72) необходимо знать значение параметра  $Z_{\parallel}$  и направление  $\mathbf{\tau}$ . В случае резонаторной поверхности (рис. 4-9) вектор  $\mathbf{\tau}$  задает направление дипольного момента резонаторов. Зафиксированная ориентация диполей создает выделенное направление, определяющее анизотропные отражающие свойства поверхности. По аналогии с электродинамикой, называемой среды, в которых электрический дипольный момент по разным причинам упорядочен, поляризованными, рассматриваемую поверхность можно назвать поляризованной, а  $\mathbf{\tau}$  – вектором поляризации. Поверхность тем лучше взаимодействует с падающей волной, чем ближе направление ее распространения к вектору поляризации.

Рассмотренная поверхность с резонаторами поляризована, поскольку устройство резонатора таково, что он может колебаться только в одном направлении. Резонаторы второго типа – с круглым сечением стерженька – одинаково реагируют на воздействие с любых направлений. В первом приближении можно считать, что векторы  $\mathbf{\tau}$  и  $\mathbf{\tau}_0$  совпадают [130], поэтому  $\psi = 0$ , а коэффициент отражения от поверхности с учетом этого определяется

формулой (4.66). У такой поверхности нет выделенного направления  $\mathbf{t}$ , ее назовем неполяризованной.

Граничное условие для неполяризованной тангенциально реагирующей поверхности легко получаем из (4.80)

$$Z_{\perp} = -\frac{\Delta_{xy}P}{v_z}, \quad (4.73)$$

где  $\Delta_{xy} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  - касательный лапласиан.

Коэффициент отражения от неполяризованной поверхности определяется выражением (4.72), в котором  $\psi = 0$ . На рис. 4-12 приведен расчет зависимости коэффициента отражения от угла падения для нормально и тангенциально реагирующих поверхностей с вещественными импедансами  $Z_{\perp}/(\rho c) = Z_{\parallel}/(\rho c k^2) = 2$ .

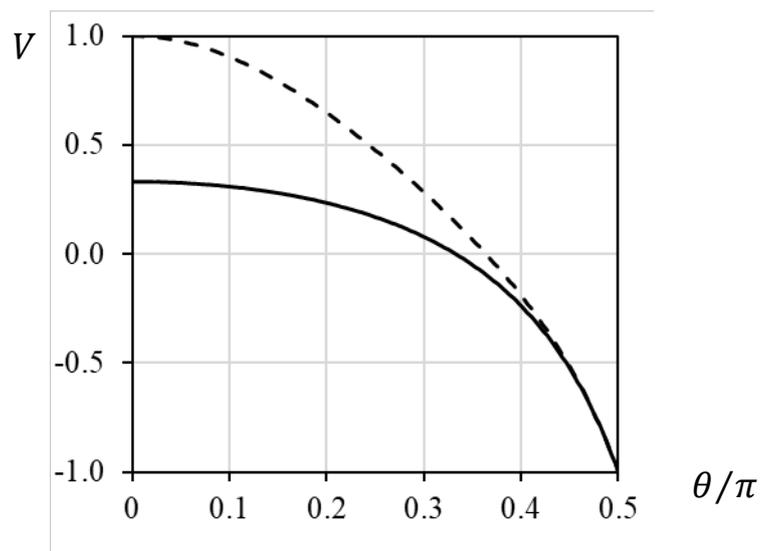


Рис. 4-12. Коэффициент отражения от нормально (1) и тангенциально (2) реагирующих поверхностей.

Близкий по смыслу импеданс для описания взаимодействия звукового поля в потоке с поверхностью предложен в работе [186].

### 4.3.3. Звукопоглощающие свойства поверхностей

Исследуем простейшие свойства тангенциально реагирующих поверхностей. В первую очередь найдем коэффициент отражения плоской волны от плоской границы, характеризуемой импедансом, нормированным на

$\rho c$ . Пусть граница расположена в плоскости  $z = 0$  декартовой системы координат, волновой вектор падающей на границу волны единичной амплитуды лежит в плоскости  $xz$ , при этом  $\theta$  – угол между нормалью к поверхности и волновым вектором. Поле давления в полупространстве  $z > 0$  имеет вид

$$P = e^{ikx \sin \theta - ikz \cos \theta} + V e^{ikx \sin \theta + ikz \cos \theta}. \quad (4.74)$$

Для нормально реагирующей поверхности граничное условие имеет вид (4.69), с учетом которого из (4.74) найдем коэффициент отражения

$$V = \frac{Z_{\perp} \cos \theta - 1}{Z_{\perp} \cos \theta + 1}. \quad (4.75)$$

Если поверхность с тангенциальным импедансом неполяризована, то на границе выполняется условие (4.71), что дает следующий коэффициент отражения

$$V = \frac{Z_{\parallel} \cos \theta - \sin^2 \theta}{Z_{\parallel} \cos \theta + \sin^2 \theta}. \quad (4.76)$$

Из (4.76) следует, что при нормальном падении  $\theta = 0$  коэффициент отражения  $V = 1$ , т.е. поверхность является абсолютно жесткой. При скользком падении  $\theta \rightarrow \pi/2$  коэффициент отражения  $V \rightarrow -1$ , т.е. граница становится мягкой, как и нормально реагирующая поверхность. Для любого вещественного значения  $Z_{\parallel}$  существует угол  $\theta_0$ , при котором коэффициент отражения равен нулю. Для нормально реагирующих поверхностей, как следует из (4.75), это возможно только для  $Z_{\perp} \geq 1$ .

Построим зависимости коэффициента отражения от угла падения, ограничившись вещественными значениями импедансов. На рис. 4-13 представлены зависимости коэффициентов отражения и поглощения от угла падения волны для нормально и тангенциально реагирующих поверхностей.

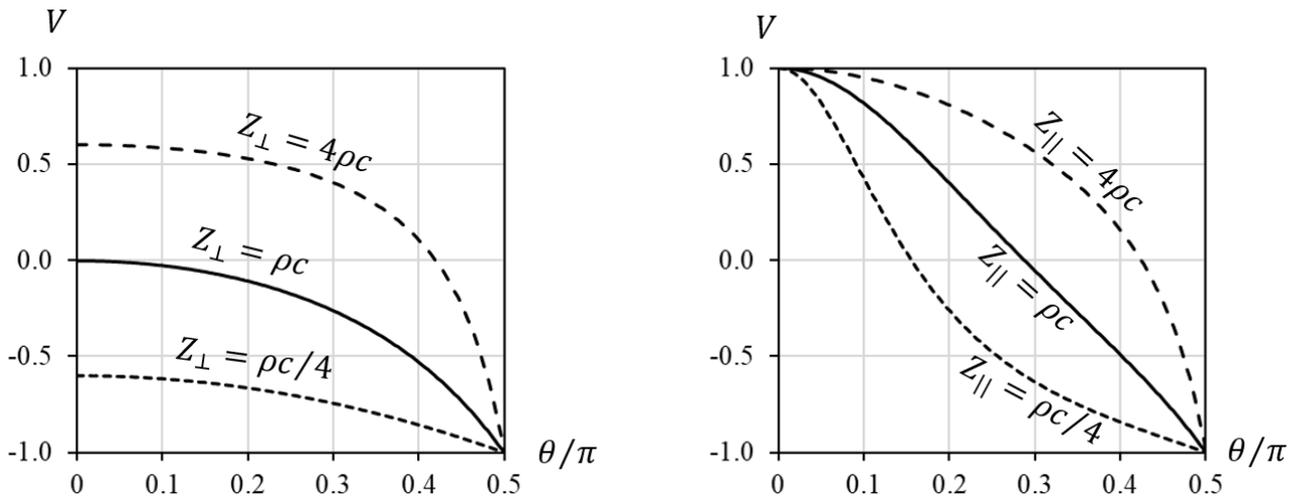


Рис. 4-13. Коэффициент отражения и поглощения нормально и тангенциально реагирующих поверхностей при различных значениях импеданса.

Для оценки звукопоглощающих свойств поверхности введем также коэффициент звукопоглощения  $\alpha = \sqrt{1 - |V|^2}$ .

Коэффициент отражения от тангенциально реагирующей поверхности принимает все значения от 1 до -1 при любом значении импеданса. Наибольшее поглощение звука такой поверхностью происходит на углах, близких к  $\theta_0$ , определяемых из уравнения  $\text{tg } \theta_0 = Z_{\parallel}$ .

Коэффициент отражения от поляризованной поверхности определяется выражением (4.72). На рис. 4-14 приведены зависимости коэффициентов отражения от угла падения  $\theta$  для трех значений угла  $\varphi$  и двух значений импеданса  $Z_{\parallel}$ . Коэффициент отражения слабо изменяется в довольно широком диапазоне углов  $\varphi$ , поэтому поляризованная поверхность эффективно поглощает звук, приходящий со многих направлений. Ясно, диаграмма направленности поглощения имеет дипольный характер.

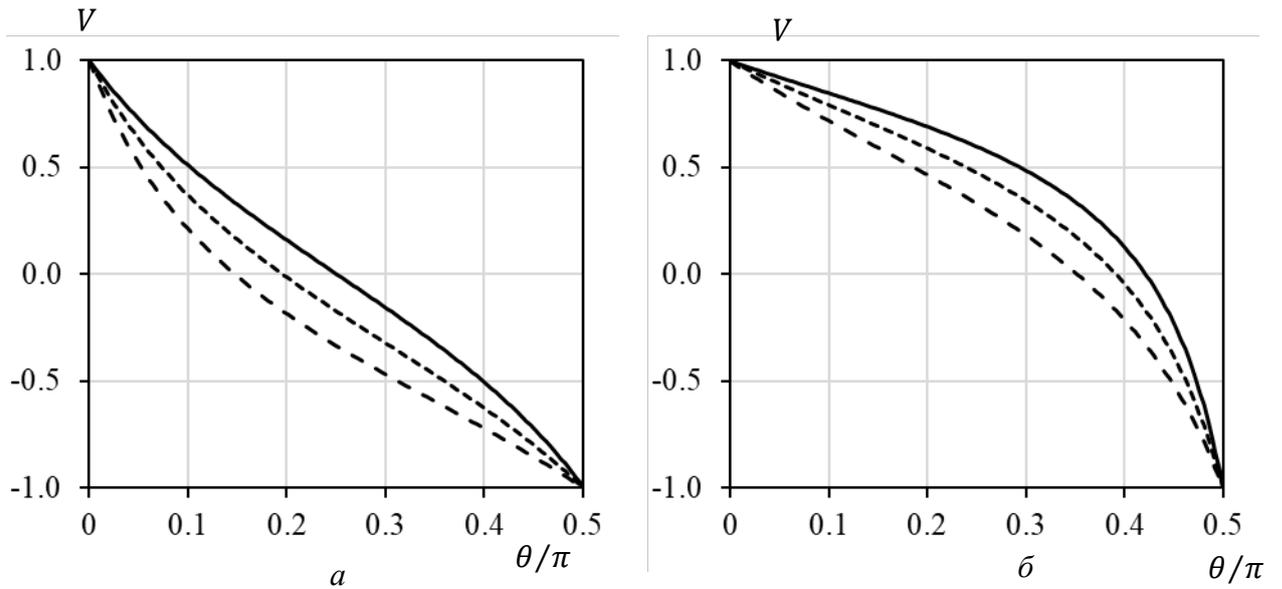


Рис. 4-14. Коэффициент отражения от поляризованной тангенциально реагирующей поверхности с импедансом  $Z_{\parallel} = 1$  (а) и  $Z_{\parallel} = 4$  (б) для трех значений угла между вектором поляризации и направлением падающей волны:  $\varphi = 0$  (—),  $\varphi = \pi/4$  (- -),  $\varphi = \pi/3$  (- - -).

Наконец, рассмотрим взаимодействие тангенциально реагирующей поверхности с диффузным звуковым полем, которое может быть представлено в виде непрерывного изотропного спектра плоских волн. В этом случае используется коэффициент диффузного поглощения – коэффициент звукопоглощения, усредненный по всем направлениям. Он вычисляется по формуле

$$\alpha_d = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha d\theta d\varphi. \quad (4.77)$$

Коэффициент поглощения  $\alpha_d$  нормально реагирующей поверхности и неполяризованной тангенциально реагирующей поверхности зависит только от угла  $\theta$ . Расчет по (4.77) для вещественных импедансов  $Z_{\perp}$  и  $Z_{\parallel}$  приведен на рис. 4-15.

Коэффициент диффузного поглощения не достигает 1 ни при каких параметрах. Для нормально реагирующей поверхности его максимальное значение составляет 0.89 при значении импеданса  $Z_{\perp} = 1.63$ . Для

тангенциально реагирующей поверхности оно составляет 0.61 при  $Z_{\parallel} = 0.86\rho c$ .

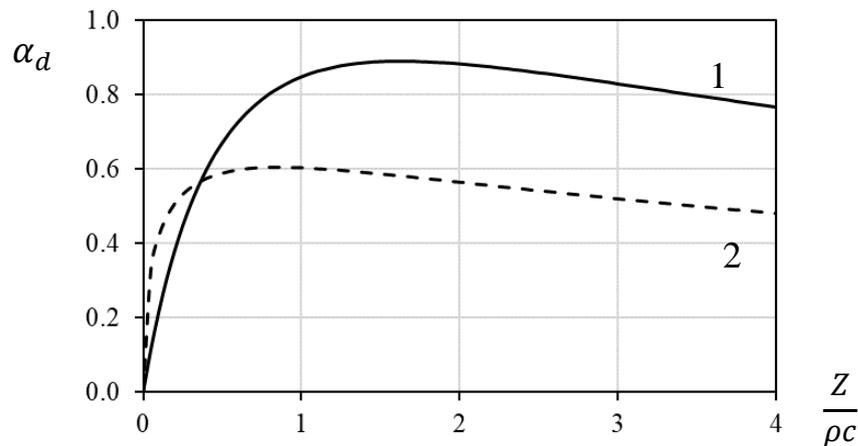


Рис. 4-15. Коэффициент диффузного поглощения звука поверхностями с нормальным импедансом (1) и неполяризованным и поляризованным тангенциальным импедансом (2).

#### 4.3.4. Коэффициент отражения от двоякореагирующей поверхности

В общем случае поверхность может реагировать на нормальное и тангенциальное воздействие одновременно. Физически такая двояко реагирующая поверхность может быть выполнена из двух периодических решеток резонаторов монопольного и дипольного типов, встроенных в твердую поверхность. Период обеих решеток не превышает половину длины звуковой волны. В силу ортогональности звуковых полей решетки монополей и диполей не взаимодействуют друг с другом, что позволяет легко описать свойства такой поверхности с помощью нормального и тангенциального импедансов.

Рассмотрим неполяризованную поверхность на плоскости  $z = 0$ , реакция которой на нормальное воздействие описывается импедансом  $Z_{\perp}$ , а на тангенциальное – импедансом  $Z_{\parallel}$ . Звуковое давление у поверхности вызывает ее движение с нормальной скоростью  $P/Z_{\perp}$ , а градиент давления от волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , вызывает движение со скоростью  $\partial^2 P / \partial x^2 / (ikZ_{\parallel})$ . Складывая скорости, вызванные двумя способами воздействия, запишем граничное условие в следующем виде

$$\frac{P}{Z_{\perp}} + \frac{\partial^2 P / \partial x^2}{ikZ_{\parallel}} = v_z. \quad (4.78)$$

С помощью (4.78) легко найти коэффициент отражения плоской волны от двойко реагирующей поверхности

$$V = \frac{Z_{\perp}Z_{\parallel} \cos \theta - Z_{\parallel} - Z_{\perp} \sin^2 \theta}{Z_{\perp}Z_{\parallel} \cos \theta + Z_{\parallel} + Z_{\perp} \sin^2 \theta}. \quad (4.79)$$

Переход к поверхности с нормальным импедансом происходит в пределе  $Z_{\parallel} \rightarrow \infty$ , тогда (4.79) принимает обычный вид (4.76). При  $Z_{\perp} \rightarrow \infty$  коэффициент отражения (4.79) переходит в (4.76) для поверхности с тангенциальным импедансом. При нормальном падении коэффициент отражения зависит только от импеданса  $Z_{\perp}$ , при скользящем падении  $V \rightarrow -1$ .

Полное поглощение обеспечивается только при одном угле падения  $\theta$  и при условии  $Z_{\perp} \geq 1$ . На рис. 4-16 приведены зависимости коэффициента отражения для вещественных значений  $Z_{\perp}$  и  $Z_{\parallel}$ . Обратим внимание на соотношение  $Z_{\perp} \geq 1$  и  $Z_{\parallel} \ll 1$ , при котором поглощающие свойства поверхности становятся очень узконаправленными: падающая волна эффективно поглощается только при угле  $\theta$  близком к нулю.

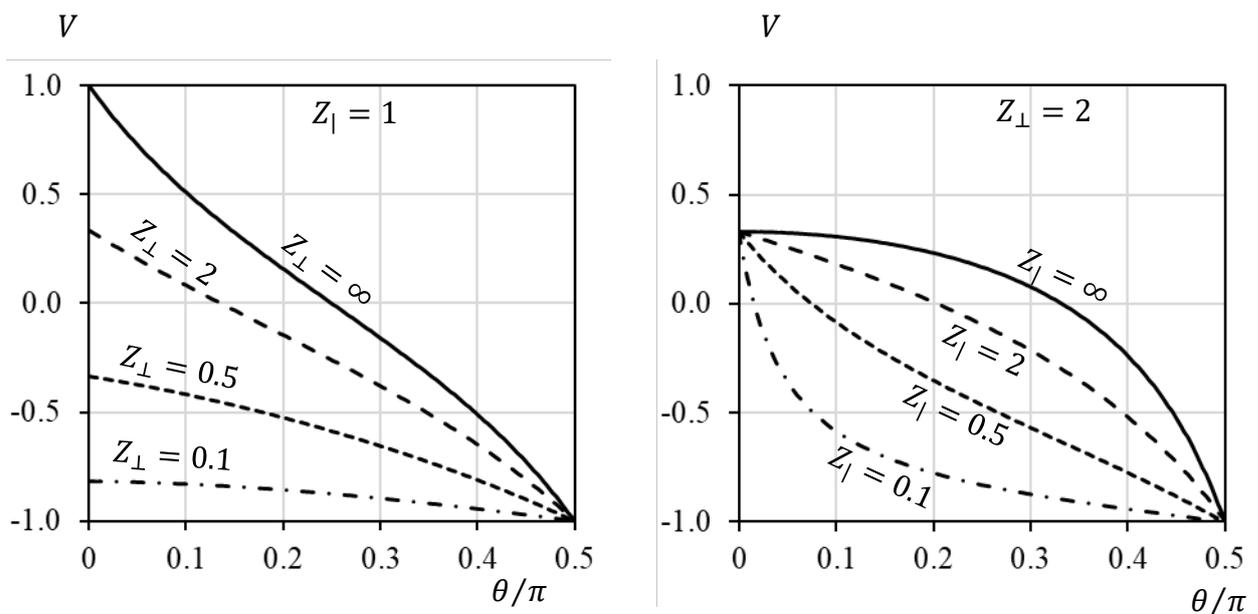


Рис. 4-16. Коэффициент от двойко реагирующей поверхности.

### 4.3.5. Поверхности, сформированные мультипольными резонаторами

Импедансные свойства поверхностей, покрытых монопольными и дипольными резонаторами, существенно отличаются. Очевидно, что другими свойствами будут и поверхности, покрытые резонаторами более высокого порядка мультипольности. Рассмотрим сначала квадрупольные резонаторы, а затем в общем виде мультипольные резонаторы.

Пусть продольные квадрупольные резонаторы (рис. 3-25,а) расположены на жесткой поверхности в виде квадратной решетки с периодом  $L$ . Ось резонаторов ориентирована по оси  $x$ , поэтому поверхность поляризована. Поле, рассеянное резонаторами, получим из (4.60) дифференцированием

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega \rho}{L^2} Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{n,m} \frac{e^{i(\xi_n x + \zeta_m y + \kappa_{nm} z)}}{\kappa_{nm}} \right), \quad (4.80)$$

где  $Q$  – квадрупольный момент.

Из уравнения движения резонатора (3.101) получаем квадрупольный момент

$$Q = \frac{2}{Z_Q} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (4.81)$$

где  $P = P_0 + P_1$  – полное звуковое поле,  $P_0$  определяется (4.59).

Из (4.80) и (4.81) находим коэффициент отражения

$$V = \frac{Z_Q \cos \theta - \rho c k^4 \sin^4 \theta \cos^4 \psi}{Z_Q \cos \theta + \rho c k^4 \sin^4 \theta \cos^4 \psi}, \quad (4.82)$$

где  $\psi$  – угол между осью  $x$  и проекцией волнового вектора падающей волны на плоскость  $xu$ .

Поверхность с квадрупольными резонаторами также является тангенциально реагирующей, но коэффициент отражения от нее отличается от коэффициента отражения (4.72) от поверхности, покрытой дипольными резонаторами.

Для поперечных квадрупольных резонаторов получаем следующие выражения для поля и момента

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega \rho}{L^2} Q \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \sum_{n,m} \frac{e^{i(\xi_n x + \zeta_m y + \kappa_{nm} z)}}{\kappa_{nm}} \right), \quad (4.83)$$

$$Q = \frac{2}{Z_Q} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}. \quad (4.84)$$

Из (4.83) и (4.84) получаем коэффициент отражения

$$V = \frac{Z_Q \cos \theta - \rho c k^4 \sin^4 \theta \cos^2 \psi \sin^2 \psi}{Z_Q \cos \theta + \rho c k^4 \sin^4 \theta \cos^2 \psi \sin^2 \psi}. \quad (4.85)$$

Для квадрупольных резонаторов зависимость от угла падения  $\theta$  одинакова. Зависимость от угла  $\psi$  определяется диаграммой направленности квадрупольного поля.

Коэффициент отражения от неполяризованных поверхностей можно получить из (4.82) и (4.85), положив  $\psi = 0$ . При этом коэффициенты отражения оказываются одинаковыми.

В общем случае, когда поверхность покрыта периодической решеткой одинаковых резонаторов, порядок мультипольности которых равен  $\sigma$ , имеющих зафиксированное направление момента, т.е. для поляризованной поверхности, поле решетки резонаторов записывается в виде

$$P_{1,s} = \frac{(-1)^\sigma \omega \rho}{\sigma! L^2} Q_{\sigma s} \frac{\partial^\sigma}{\partial x^s \partial y^{\sigma-s}} \left( \sum_{n,m} \frac{e^{i(\xi_n x + \zeta_m y + \kappa_{nm} z)}}{\kappa_{nm}} \right), \quad (4.86)$$

где  $s$  – параметр, определяемый устройством резонатора и принимающий целое значение от 0 до  $\sigma$ . Импеданс записываем по аналогии с (4.81), (4.82)

$$Q_{\sigma s} = \frac{\sigma!}{(-1)^\sigma Z_{\sigma s}} \frac{\partial^\sigma P}{\partial x^s \partial y^{\sigma-s}}. \quad (4.87)$$

Коэффициент отражения от такой поверхности запишем в следующем виде

$$V = \frac{Z_{\sigma s} \cos \theta - \rho c k^{2\sigma} \sin^{2\sigma} \theta F(\psi)}{Z_{\sigma s} \cos \theta + \rho c k^{2\sigma} \sin^{2\sigma} \theta F(\psi)}, \quad (4.88)$$

$$F(\psi) = \cos^{2s} \psi \sin^{2(\sigma-s)} \psi. \quad (4.89)$$

Функция  $F(\psi)$  является диаграммой направленности мультиполя  $(\sigma, s)$ . Если устройство резонаторов таково, что они одинаково реагируют на звук, приходящий с любых направлений, то поверхность является неполяризованной и  $F(\psi) = 1$ . В этом случае коэффициент отражения зависит только от угла падения  $\theta$ .

Выражение (4.88) дает коэффициент отражения от поверхности, покрытой  $\sigma$ -польными резонаторами. Только для  $\sigma = 0$  поверхность является нормально реагирующей, для всех  $\sigma \neq 0$  поверхность является тангенциально реагирующей, но при этом для каждого порядка мультипольности  $\sigma$  будет свое определение тангенциального импеданса, имеющего общий вид

$$Z_{||} = \frac{1}{v_z} \frac{\partial^{2\sigma} P}{\partial x^{2s} \partial y^{2(\sigma-s)}}. \quad (4.90)$$

#### 4.4. Выводы к главе 4

В главе рассмотрены регулярные плоские системы из резонаторов – решетки, расположенные вблизи некоторой поверхности с произвольным импедансом или интегрированные в эту поверхность.

1. Показано, что решетка резонаторов наиболее эффективно поглощает или рассеивает звук, если ее пространственный период не превышает половину длины звуковой волны. Рассчитаны коэффициенты поглощения решеток с произвольным периодом, найдено оптимальное трение резонаторов для обеспечения максимального поглощения.

2. Решетка активных резонаторов, расположенная около поверхности с произвольным импедансом, может изменять акустический импеданс поверхности, обеспечивая некоторое требуемое значение. Показана устойчивость и достаточная робастность системы, состоящей из независимо работающих активных резонаторов.

3. Рассмотрены поверхности с интегрированными активными монопольными и дипольными резонаторами. Показано, что при достаточно

плотном расположении резонаторов акустические свойства поверхности могут быть описаны эффективным импедансом, не учитывающим дискретную структуру активной системы. Получена оценка точности такой замены.

4. Поверхности с интегрированными дипольными резонаторами различного устройства реагируют не на нормальное к поверхности воздействие, а на воздействие по касательной к поверхности, т.е. на тангенциальное возмущение.

5. Введено понятие поверхности с тангенциально реагирующим импедансом. Такая поверхность может быть поляризованной, если дипольные моменты резонаторов направлены вдоль одного направления, или неполяризованной, если дипольные резонаторы одинаково реагируют на воздействие со стороны звуковых волн, пришедших с различных направлений. Приведены примеры физических систем, позволяющих реализовать такие поверхности.

6. Введено понятие тангенциального импеданса для характеристики акустических свойств тангенциально реагирующих поверхностей – отношение второй производной звукового давления по направлению вдоль поверхности к нормальной скорости поверхности.

7. Получены коэффициенты отражения и поглощения плоских звуковых волн, а также коэффициент диффузного поглощения звука плоских тангенциально реагирующих поверхностей.

8. Введено понятие двояко реагирующей поверхности, свойства которой описываются одновременно нормальным и тангенциальным импедансом. Получено выражение для коэффициента отражения от такой поверхности.

9. Получены в общем виде выражения для тангенциального импеданса поверхностей, покрытых линейными резонаторами произвольной мультипольности.

## Глава 5. Гашение звука в каналах

Распространение звука в волноводах с податливыми стенками изучается теоретически и экспериментально уже много десятилетий [6, 104, 192, 222, 373]. В каналах, ширина которых превышает половину длины звуковой волны, звуковое поле представляется в виде совокупности собственных решений волнового уравнения с граничными условиями – собственных мод колебаний или просто мод. Сложная структура звукового поля, в отличие, например, от узких труб, не позволяет предложить универсальные решения по гашению звука в широких каналах, поэтому исследуются различные подходы к звукоизоляции. С практической точки зрения наиболее целесообразно применять специальные облицовки стенок волновода без установки каких-либо устройств в его сечении. В настоящем разделе рассматриваются системы на основе резонаторных элементов, встраиваемые в стенки канала и обеспечивающие гашение звука, распространяющегося по каналу.

### 5.1. Резонаторы в канале

#### 5.1.1. Двухмодовый волновод

Рассмотрим плоский волновод шириной  $h$ , в котором распространяются две моды. Ось  $x$  направим вдоль одной из стенок, ось  $z$  перпендикулярна оси  $x$ . Если в волноводе распространяются две моды с произвольными амплитудами  $A_0$  и  $A_1$ , то поле давления имеет вид

$$P_0 = A_0 e^{ikx} + A_1 e^{i\xi x} \cos \frac{\pi z}{h}, \quad (5.1)$$

где  $\xi = \sqrt{k^2 - (\pi/h)^2}$ .

Расположим точечные монопольные излучатели на стенках волновода в точках  $(0,0)$  и  $(0,d)$ . Поле, создаваемое этими излучателями, также представим в виде суперпозиции мод

$$P_1 = B_0 e^{ik|x|} + B_1 e^{i\xi|x|} \cos \frac{\pi z}{h} + C_0 e^{ik|x-d|} + C_1 e^{i\xi|x-d|} \cos \frac{\pi z}{h}, \quad (5.2)$$

где  $B_0, B_1$  и  $C_0, C_1$  - амплитуды мод, создаваемых монополями, находящимися в точках  $(0,0)$  и  $(0,d)$  соответственно. Амплитуды связаны следующим образом:  $B_1 = \gamma B_0, C_1 = \gamma C_0$ , где

$$\gamma = \frac{\xi^2 \sin kd}{2k^2 \sin \xi d}. \quad (5.3)$$

Гашение звука за монополями означает, что при  $x > d$  амплитуды обеих мод равны нулю. Подставляя (5.1) и (5.2) в равенство  $P_0 + P_1 = 0$  при  $x > d$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A_0 + B_0 + C_0 e^{-ikd} = 0 \\ A_1 + B_1 + C_1 e^{-i\xi d} = 0' \end{cases} \quad (5.4)$$

в которой с учетом (5.3) есть два неизвестных параметра, например,  $B_0$  и  $C_0$ .

Выпишем решение (5.4)

$$B_0 = \frac{A_0 e^{ikd} - A_1 \gamma e^{i\xi d}}{e^{i\xi d} - e^{ikd}}, C_0 = \frac{A_0 - A_1 \gamma}{e^{-i\xi d} - e^{-ikd}}. \quad (5.5)$$

Найдем амплитуды  $B_0$  и  $C_0$  при  $kd \ll 1$ . Из (5.3) получаем  $\gamma \approx \xi/2k$ , а из (5.5) следующие отношения

$$B_0 \approx -C_0 \approx \frac{A_0 - A_1 \xi/2k}{i(\xi - k)d}. \quad (5.6)$$

Из (5.6) следует, что  $|B_0|, |C_0| \gg |A_0|, |A_1|$ , т.е. амплитуды вторичных волн для полного гашения прошедшего поля должны быть значительно больше амплитуд первичных волн (5.1).

При выполнении (5.4) волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси  $x$ , можно считать отраженными. Введем амплитуды отраженных волн  $V_0 = |B_0 + C_0 e^{ikd}|$ ,  $V_1 = |B_1 + C_1 e^{i\xi d}|$ . На рис. 5-1 приведены зависимости амплитуд  $V_0$  и  $V_1$  от расстояния между монополями  $kd$  для волновода шириной  $kh = 4$  и двух видов падающего поля (5.1): в первом случае в волноводе распространяется только нулевая мода ( $A_0 = 1, A_1 = 0$ ), а во втором – две моды с одинаковыми амплитудами ( $A_0 = A_1 = 1$ ). Практически при любых расстояниях между монополями энергия отраженных волн выше энергии падающих, поэтому с точки зрения оптимизации

импеданса вторичных излучателей требуются системы с отрицательной действительной частью импеданса. Это в принципе можно реализовать при помощи активного управления импедансом, однако такой подход противоречит основной идее гашения звука, поскольку это связано с излучением в пространство звуковой энергии, многократно превышающей энергию первичного поля.

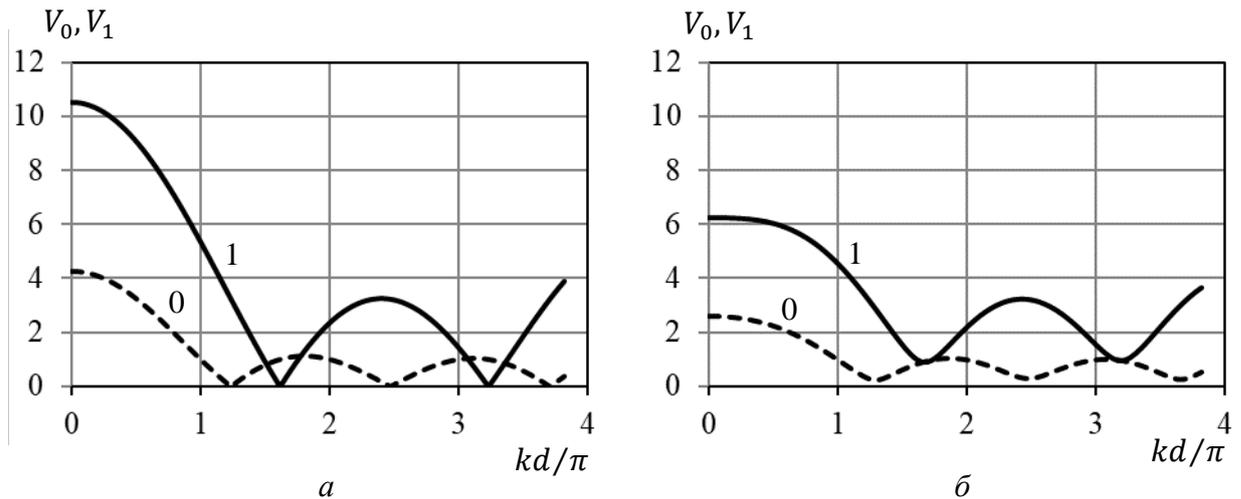


Рис. 5-1. Амплитуда отраженных от двух резонаторов волн в двухмодовом волноводе шириной  $kh = 4$  в зависимости от расстояния между ними для случаев однородного по сечению падающего поля  $A_0 = 1$  и  $A_1 = 0$  (а) и равенства амплитуд двух падающих мод  $A_0 = 1$  и  $A_1 = 1$  (б).

Аналогичная ситуация имеет место и для более широкого волновода. Если в нем распространяется  $N$  мод, то можно расположить на стенках  $N$  излучателей, чтобы обеспечить полное гашение прошедшего поля. Действительно, для такой системы амплитуды всех прошедших волн связаны системой из  $N$  уравнений, аналогичной (5.4) и имеющей единственное решение, которое также приводит к отраженным волнам с амплитудами, превышающими амплитуды падающих волн.

В ряде задач требуется погасить некоторую отдельную моду. Очевидно, что один вторичный излучатель может создать противофазную ей волну, но при этом он также излучит и все однородные моды, как в примере на рис. 5-1,а. Кроме того, если в волноводе распространяются и другие моды, кроме

подлежащей гашению, то требуется факторизация падающего поля, что в общем случае предполагает нелокальную задачу гашения.

Таким образом, в рамках подхода, развиваемого в настоящей работе, оказывается невозможно обеспечить полное гашение звука, т.е. нулевое поле за гасящей системой, ограниченным количеством локально управляемых вторичных излучателей.

### **5.1.2. Гашение звука резонаторами в волноводе**

Как показано в предыдущем разделе, для полного гашения звука в многомодовом волноводе требуется система резонаторов с отрицательным трением. По этой причине полное гашение системой конечного размера (здесь размером считается характерное расстояние между крайними резонаторами) неосуществимо. Тем не менее, резонансные системы успешно используются для гашения звука. Решетка бездиссипативных резонаторов, расположенная поперек волновода, полностью отражает нулевую моду, а решетка монополюсно-дипольных резонаторов с оптимальным трением полностью поглощает ее [119, 121].

Изучено несколько способов решения задачи без перекрытия поперечного сечения волновода. Чаще всего рассматриваются системы, состоящие из резонаторов, расположенных на стенках близко друг к другу [54, 105]. Резонаторы образуют импедансную поверхность, подбором характеристик которой можно добиться наибольшего затухания волн, распространяющихся в волноводе.

При расположении резонаторов на расстоянии, равном или близком к половине длины волны [126], можно подобрать параметры резонаторов так, чтобы обеспечить максимальное отражение некоторой однородной моды. Коэффициент отражения достигает наибольшего значения при нулевом трении резонаторов, т.е. как и в узкой трубе, и стремится к -1 при увеличении количества резонаторов.

Таким образом, использование многорезонаторных систем в широких волноводах предполагает достаточно протяженные системы, расположенные на стенках. Интенсивность звука, распространяющегося вдоль системы, ослабляется, поэтому главной характеристикой эффективности гашения становится пространственный коэффициент затухания звука. В связи с этим без потери общности физического результата можно рассмотреть бесконечно длинную систему резонаторов в волноводе, подробно исследованную в следующем разделе.

### 5.1.3. Периодическая решетка резонаторов на стенке волновода

Рассмотрим плоский канал шириной  $h$ . Пусть в абсолютно жесткую стенку канала  $x = 0$  встроены поршни шириной  $2a$  с одинаковым импедансом  $Z$ , расстояние между соседними поршнями  $L$ . Номер поршня  $n$  определяет координату его центра  $x_n = nL$  (рис. 5-2). Скорость поршней обозначим  $v_n$ . Вторая стенка канала  $z = h$  также является абсолютно жесткой.

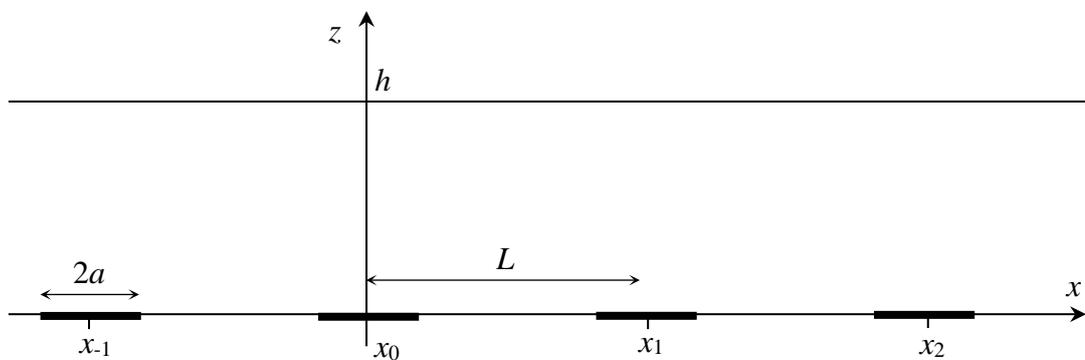


Рис. 5-2. Канал с периодической решеткой монополей

Поле в интегральном виде, создаваемое в канале одним поршнем с номером  $n = 0$ , получено в работе [106], и с его помощью можно легко получить поле поршня с произвольным номером

$$P_n = i\omega\rho \frac{v_n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi a \cos \kappa(h-z)}{\xi \kappa \sin \kappa h} e^{i\xi(x-nL)} d\xi, \quad (5.7)$$

где  $\xi^2 + \kappa^2 = k^2$ .

Поле, создаваемое всеми поршнями в канале, очевидно, является суммой полей (1) и записывается следующим образом

$$P = \sum_n P_n. \quad (5.8)$$

Применяя теорему Флоке [25] для систем с периодическим потенциалом, представим скорость поршня в зависимости от его номера

$$v_n = v e^{i\lambda n L}, \quad (5.9)$$

где  $v$  - скорость поршня с номером  $n = 0$ ,  $\lambda$  - пока неизвестный параметр.

Подставляя (5.9) в (5.7) и далее суммируя (5.8), находим поле в канале

$$P = 2i\omega\rho v \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi_m a \cos \kappa_m (h - z)}{\xi_m \kappa_m \sin \kappa_m h} e^{i\xi_m x}, \quad (5.10)$$

где  $\xi_m = \lambda + 2\pi m/L$ ,  $\xi_m^2 + \kappa_m^2 = k^2$ .

Найдем силу, действующую на поршень с номером  $n = 0$ ,

$$F = \int_{-a}^a P|_{z=0} dx. \quad (5.11)$$

Из (5.11) получаем импеданс излучения поршня

$$Z_r = \frac{F}{v} = 4i\omega\rho \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi_m a}{\xi_m^2 \kappa_m \operatorname{tg} \kappa_m h}. \quad (5.12)$$

Стандартное характеристическое уравнение на собственные значения  $Z + Z_r = 0$  позволяет найти параметр  $\lambda$ . Структура решения (5.10) показывает, что поле в канале представляет собой набор мод с коэффициентом распространения  $\xi_m$ , зависящим от  $\lambda$ , поэтому физический смысл параметра  $\lambda$  заключается в том, что это характеристика распространения звука в канале, при этом мнимая часть  $\lambda$  определяет коэффициент затухания. Следовательно, найденная зависимость  $\lambda = \lambda(Z, L)$  является решением задачи о распространении звука в канале с периодической цепочкой резонаторов.

Отметим, что все значения  $\xi_m$  имеют одинаковую мнимую часть, поэтому с точки зрения затухания звука вдоль канала они эквивалентны.

Корни характеристического уравнения сложным образом зависят от частоты, ширины канала и характеристик цепочки резонаторов, поэтому затруднительно выявить аналитически какие-либо соотношения между этими параметрами, кроме некоторых предельных случаев. По этой причине будем искать решения численно, стремясь определить импеданс поршней и их период, при которых обеспечивается наиболее сильное затухание звука в канале. Для дальнейших расчетов нормируем импеданс поршня на величину  $\rho c(2a)^2$ , при этом  $Z$  становится безразмерной величиной. Также примем размер резонатора  $ka = 0.01$ , и сразу заметим, что значимого влияния на результаты, приведенные в настоящем разделе, этот параметр не оказывает. Уравнение  $Z + Z_r = 0$  имеет бесконечно большое количество решений  $\lambda$ , но нас будут интересовать только те, которые, во-первых, имеют неотрицательную мнимую часть, а, во-вторых, для которых  $\text{Im}\lambda$  имеет минимальное значение, поскольку соответствующие моды имеют минимальное затухание.

В первую очередь рассмотрим узкий канал, для определенности с шириной  $kh = 0.5$ . Известно, что резонаторы без трения эффективно гасят звук в узких каналах, поэтому найдем решения для цепочки бездиссипативных резонаторов, т.е. для  $\text{Re}Z = 0$ , с периодом  $kL = 1$ . На рис. 5.3 приведены два корня  $\lambda$  в зависимости от импеданса резонатора  $\text{Im}Z$ . При значениях  $\text{Im}Z \lesssim -3$  мнимая часть корня равна нулю, что соответствует незатухающей нулевой моде. При значениях  $\text{Im}Z \gtrsim 7$  мнимая часть другого корня равна нулю, что также соответствует незатухающей нулевой моде. В пределах  $\text{Im}Z \rightarrow -\infty$  и  $\text{Im}Z \rightarrow +\infty$  действительные части корней  $\text{Re}\lambda \rightarrow k$ , что отвечает обычному распространению звука в одномодовом волноводе с жесткими стенками.

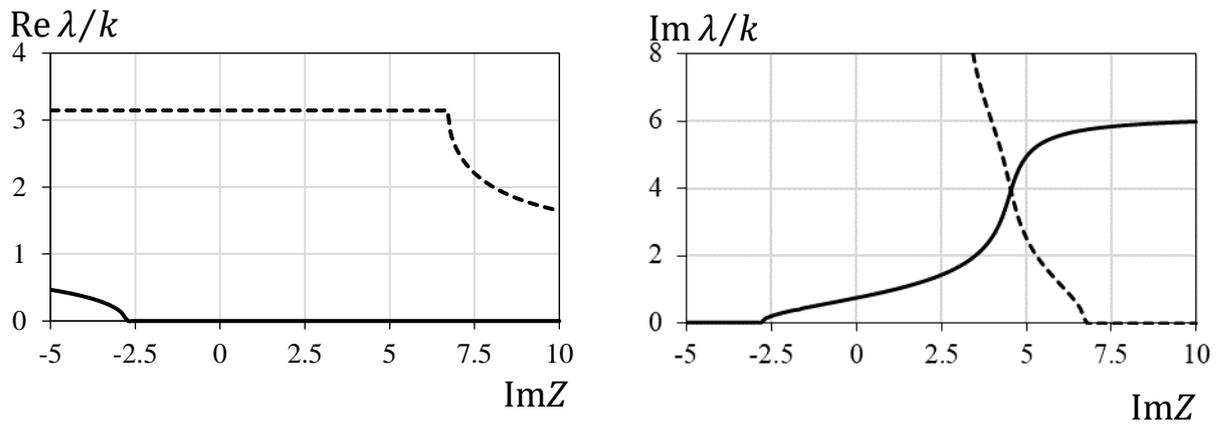


Рис. 5-3. Постоянные распространения звука  $\lambda$  в канале шириной  $kh = 0.5$  с резонаторами без трения ( $\text{Re}Z = 0$ ), размещенными на стенке с периодом  $kL = 1$ , в зависимости от импеданса резонатора

Важным результатом является наличие диапазона значений  $\text{Im}Z$ , при которых канал оказывается заперт – в нем отсутствуют незатухающие моды. Затухание звука в канале, очевидно, обуславливается наименее затухающей модой, при этом в диапазоне  $-3 \lesssim \text{Im}Z \lesssim 4$  такой модой является мода, показанная сплошной линией на рис. 5-3, а в диапазоне  $4 \lesssim \text{Im}Z \lesssim 7$  – мода, показанная пунктиром. В точке пересечения на рис. 5-3 затухание звука можно считать оптимальным, как и соответствующий ему импеданс резонатора. Очевидным шагом является введение параметра, характеризующего затухание звука в канале и учитывающего все моды. Дадим следующее определение коэффициента затухания звука в канале

$$\delta = \frac{1}{k} \min_n (\text{Im} \lambda_n). \quad (5.13)$$

где  $\lambda_n$  – корни характеристического уравнения с ненулевой мнимой частью.

Ясно, что коэффициент затухания для примера на рис. 5-3 – это совокупность двух зависимостей  $\lambda(\text{Im}Z)$ . Теперь посмотрим, как влияет трение в резонаторах на коэффициент затухания. На рис. 5-4 приведены его зависимости от  $\text{Im}Z$  для того же диапазона, что и на рис. 5-3, при некоторых значениях  $\text{Re}Z$ . Во-первых, все моды стали ожидаемо затухающими при любых значениях  $\text{Im}Z$ . Во-вторых, максимум коэффициента  $\delta$  уменьшается с

ростом трения. Следовательно, наиболее эффективное затухание звука в канале осуществляется цепочкой бездиссипативных резонаторов.

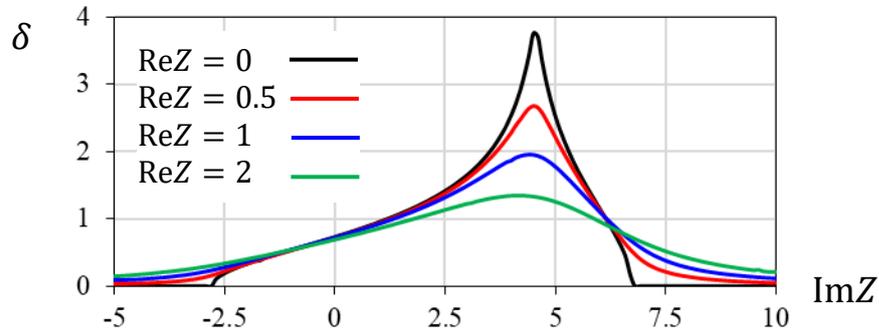


Рис. 5-4. Коэффициент затухания звука в канале шириной  $kh = 0.5$  с резонаторами, размещенными на стенке с периодом  $kL = 1$ , в зависимости от импеданса резонатора.

Теперь исследуем влияние ширины канала для той же цепочки резонаторов. На рис. 5-5 представлен расчет коэффициента затухания для различной ширины канала, на котором видно, что с увеличением ширины диапазон значений  $\text{Im}Z$ , при которых канал заперт, сужается, а коэффициент затухания уменьшается. При ширине  $kh \approx 2$  в канале существует однородная мода при любом значении  $\text{Im}Z$ , т.е. решетка бездиссипативных резонаторов оказывается неспособной запереть канал. В этом смысле можно говорить о существовании критической ширины канала  $h^*$ , при которой резонаторы без трения оказываются неэффективными, и для обеспечения затухания звука в канале необходимо вводить потери.

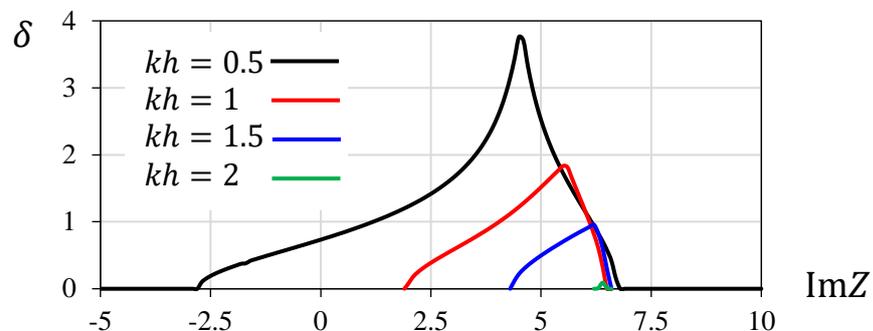


Рис. 5-5. Коэффициент затухания звука в канале различной ширины с резонаторами без трения ( $\text{Re}Z = 0$ ), размещенными на стенке с периодом  $kL = 1$ , в зависимости от импеданса резонатора

Критическая ширина  $h^*$  должна зависеть от периода решетки  $L$ , на рис. 5-6 приведена эта зависимость. При малом периоде  $kL \ll 1$  и оптимальном выборе резонаторов стенка канала  $z = 0$  физически эквивалента мягкой стенке, другая стенка  $z = h$  остается жесткой. Известно, что в таком канале однородная мода появляется, когда на ширине канала укладывается четверть длины звуковой волны, т.е. при  $kh = \pi/2$ , что мы и видим на рис. 5-6. Увеличение периода решетки резонаторов позволяет увеличить критическую ширину канала. Однако ее максимальное значение равно длине волны, при которой в канале возникает еще одна однородная мода, вследствие чего структура звукового поля радикально меняется, и использование резонаторов без трения не приводит к затуханию звука.

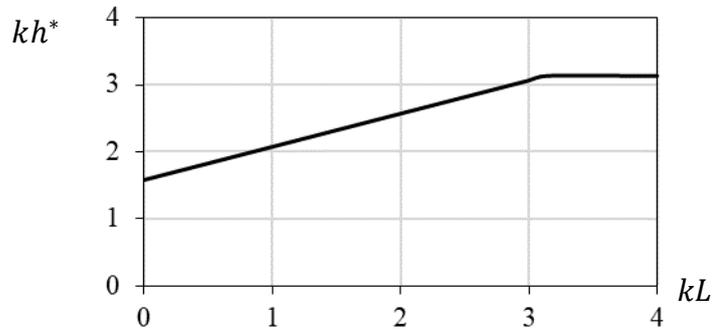


Рис. 5-6. Критическая ширина канала в зависимости от периода решетки  $kL$  резонаторов без трения ( $\text{Re}Z = 0$ ).

В широком канале в общем случае затухание звука можно обеспечить резонаторами с трением. В этом случае нужно оптимизировать не только мнимую часть импеданса резонатора, как это делалось для узкого канала, но и его действительную часть. Рассмотрим пример такой оптимизации для канала шириной  $kh = 4$ . В отсутствие поршней такой канал является двухмодовым волноводом, в котором постоянные распространения мод равны  $k_0 = k$  и  $k_1 = \sqrt{k^2 - (\pi/h)^2} \approx 0.62k$ . Обозначим оптимальный импеданс поршня  $\tilde{Z}$ , при котором для заданного периода решетки достигается максимальный коэффициент затухания. На рис. 5-7 приведена зависимость двух корней характеристического уравнения от  $\text{Re}Z$  при фиксированной мнимой части

импеданса  $\text{Im}Z = \text{Im}\tilde{Z} \approx 8.38$ . Значения  $\text{Re}Z$  изменяются от нуля до бесконечности. Если резонаторы не имеют трения, т.е.  $\text{Re}Z = 0$ , то оба корня являются вещественными – они указаны проколотыми точками, лежащими на действительной оси на рис. 5-7. Если  $\text{Re}Z > 0$ , то оба корня комплексны, с увеличением  $\text{Re}Z$  корни передвигаются по линиям, удаляясь от действительной оси (направление их движения указано стрелками). Это значит, что с увеличением трения обе моды становятся все более затухающими, но их коэффициенты затухания разные. При дальнейшем увеличении  $\text{Re}Z$  мнимая часть одного корня достигает максимального значения и начинает уменьшаться. При значении  $\text{Re}Z = \text{Re}\tilde{Z}$  два корня имеют одинаковое значение, при котором коэффициент затухания в определении (5.13) достигает максимального значения. Значение кратного корня отнормируем на  $k$  и обозначим  $\tilde{\lambda}$ . При дальнейшем увеличении  $\text{Re}Z$  оба корня стремятся к действительной оси, а именно к значениям  $k_0$  и  $k_1$ , т.е. в пределе  $\text{Re}Z \rightarrow \infty$  резонаторы перестают влиять на распространение звука в канале. Таким образом, для заданных  $h$  и  $L$  можно подобрать некоторое значение импеданса  $Z$ , при котором коэффициент затухания  $\delta$  достигает максимального значения, равного  $\tilde{\delta} = \text{Im}\tilde{\lambda}$ .

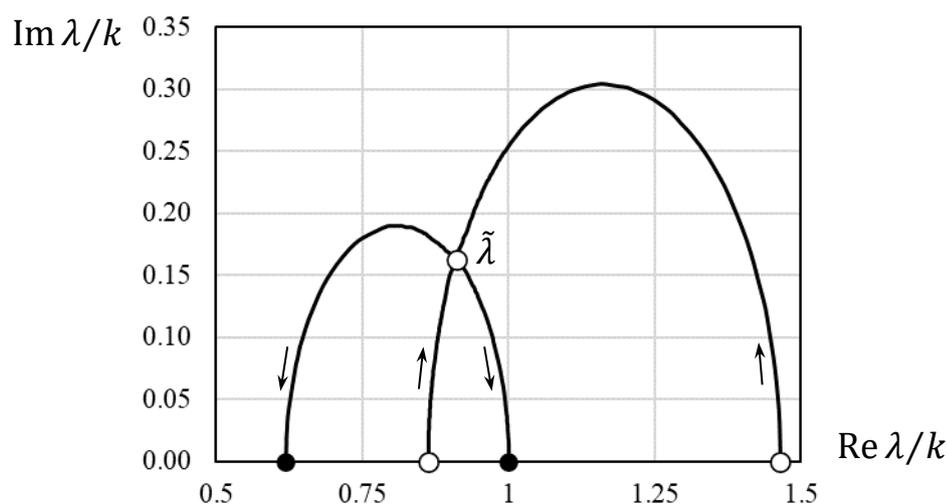


Рис. 5-7. Зависимость двух первых корней уравнения при изменении  $\text{Re}Z$  от 0 до  $\infty$  при фиксированном значении  $\text{Im}Z = 8.38$  для канала шириной  $kh = 4$  с резонаторами, размещенными на стенке с периодом  $kL = 1$ .

Способ поиска оптимального импеданса, использованный для решетки с периодом  $kL = 1$ , применим для произвольного расстояния между резонаторами. На рис. 5-8 приведены расчетные значения кратного корня характеристического уравнения  $\tilde{\lambda}$  и соответствующего ему оптимального значения импеданса  $\tilde{Z}$ . По результатам расчета можно сделать следующие выводы. Во-первых, коэффициент затухания  $\tilde{\delta}$  слабо зависит от периода решетки, за исключением значений  $kL$ , близких к  $\pi$ , т.е. когда расстояние между резонаторами приближается к половине длины звуковой волны. В пределе  $kL \rightarrow \pi$  коэффициент затухания становится нулевым. Во-вторых, действительная часть оптимального импеданса также слабо меняется почти во всем расчетном диапазоне, в то время как его мнимая часть монотонно растет. Следовательно, мы получили результат, похожий на результат для периодических решеток: при периоде решетки, не превышающем половину длины волны, достигается максимальная эффективность. При  $kL > \pi$  возникают полуволновые резонансы между соседними поршнями, аналогичные брэгговским спектрам, показанным на рис. 4-6. Отметим, что подобное снижение эффективности гашения двумя резонаторами Гельмгольца в узкой трубе экспериментально исследовано в работе [251].

Полученный результат показывает, что при достаточно плотном расположении резонаторов эффективность гашения звука такой системой практически не зависит от расстояния  $L$ . Как и в случае пространственных решеток, это позволяет ввести понятие импедансной поверхности, характеризуемой локально реагирующим импедансом  $Z'$  и эквивалентной решетке резонаторов на рис. 5-2 с точки зрения гашения звука, распространяющегося в канале. Такой переход подробно рассмотрен в следующем разделе, также как и зависимость эффективности гашения от ширины канала.

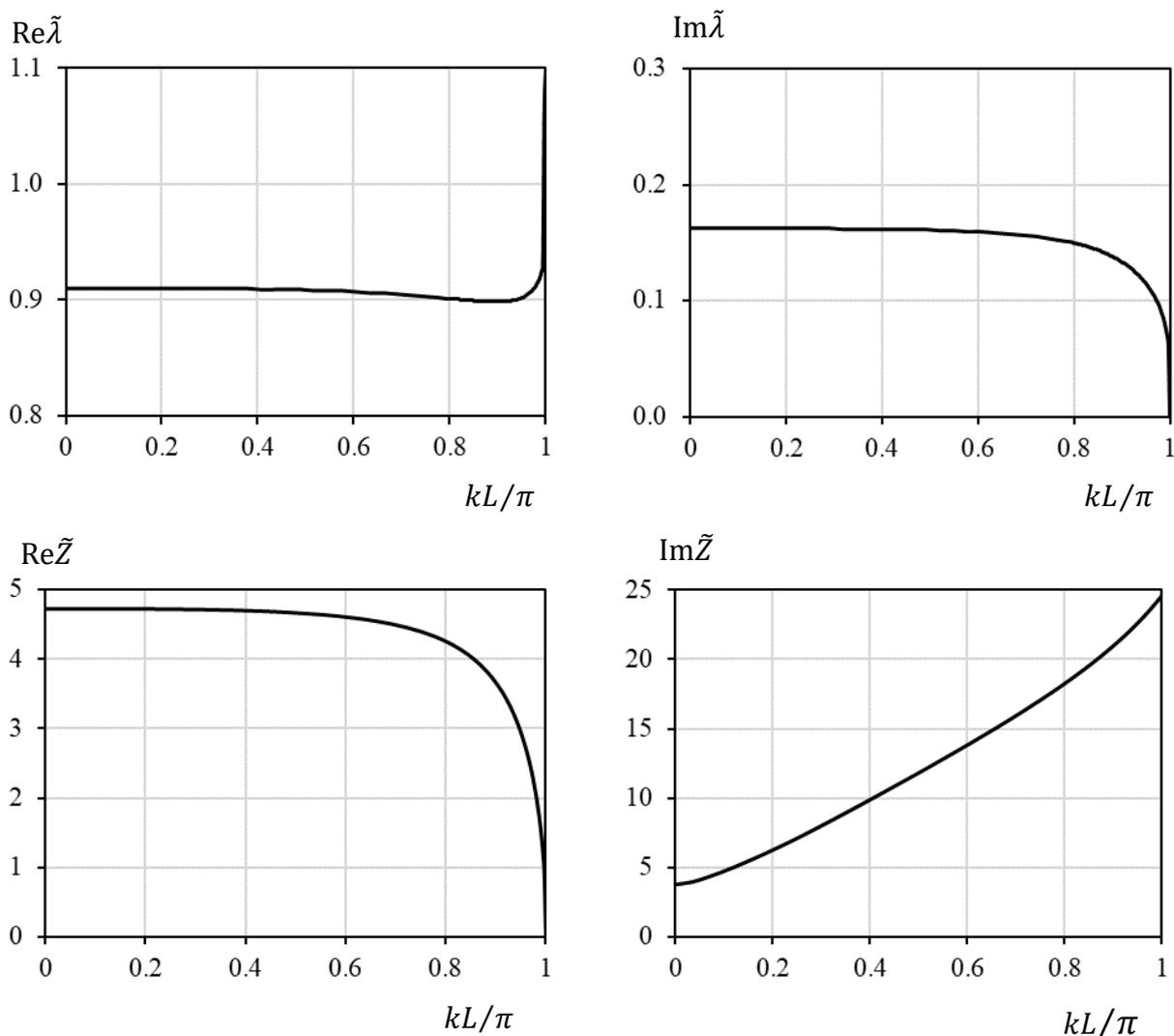


Рис. 5-8. Оптимальные значения постоянной распространения  $\tilde{\lambda}$  и импеданса резонаторов  $\tilde{Z}$  в зависимости от периода решетки  $L$  для канала шириной  $kh = 4$ .

При  $kL > \pi$  структура звукового поля в канале существенно усложняется: брэгговские спектры начинают взаимодействовать с модами канала, порождая новые моды, которые сильно зависят от частоты и геометрических параметров задачи. Это не дает выявить надежные закономерности между параметрами, оптимальным импедансом и коэффициентом затухания, позволяющие сформулировать стратегию по выбору оптимального импеданса вторичных излучателей. Приведем два примера, в которых оптимизация импеданса приводит к отличным результатам от рассмотренного случая (рис. 5-7 и 5-8).

На рис. 5-9,*a* приведено два корня характеристического уравнения для канала шириной  $kH = 4$  и периода  $kL = 5$ . Оптимальное затухание обеспечивается при нулевом трении, т.е.  $\text{Re}\tilde{Z} = 0$ , образуется двойная мода, кратный корень обозначен проколотой точкой на рис. 5-9,*a*. Как и в узкой трубе, наилучшее гашение обеспечивают бездиссипативные резонаторы. При увеличении трения оба корня, двигаясь по линиям в направлениях, указанных стрелкой, стремятся к действительной оси. При этом мнимая часть одного из них достигает максимума. В пределе  $\text{Re}\tilde{Z} \rightarrow \infty$  корни равны  $k_0$  и  $k_1$ .

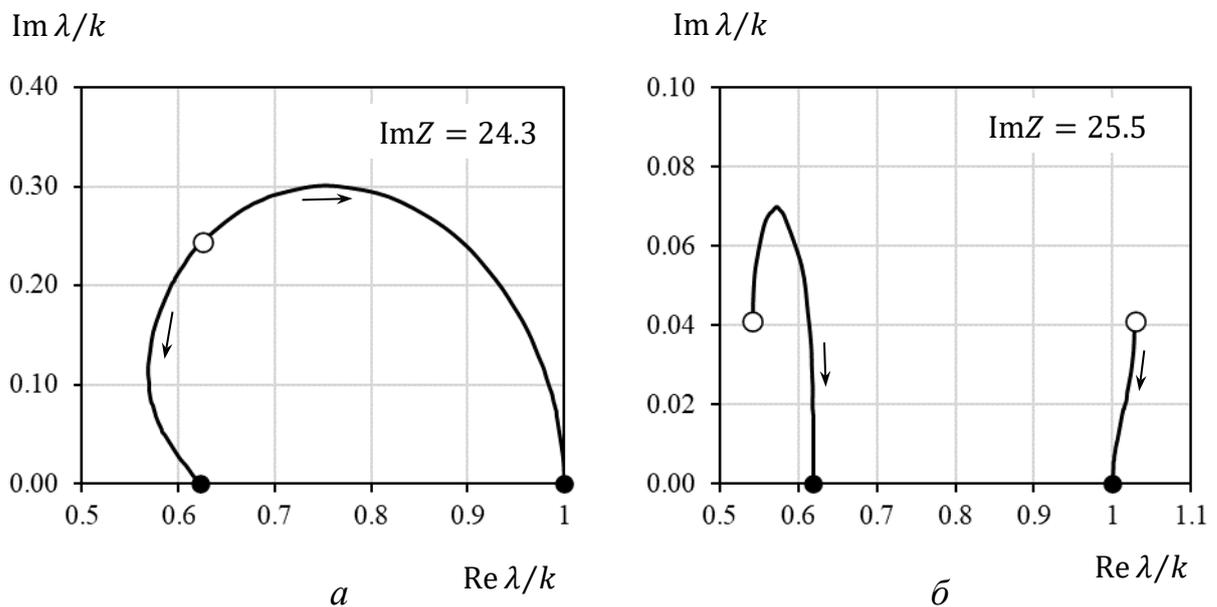


Рис. 5-9. Зависимость двух первых корней характеристического уравнения при изменении  $\text{Re}\tilde{Z}$  от 0 до  $\infty$  при фиксированном значении  $\text{Im}\tilde{Z}$  для канала шириной  $kH = 4$  и двух периодов решетки:  $kL = 5$  (*a*) и  $kL = 8$  (*б*).

Иное поведение корней наблюдается на рис. 5-9,*б* для канала той же ширины и периода  $kL = 8$ . В этом случае максимальное значение коэффициента затухания (5.13) также достигается при нулевом трении  $\text{Re}\tilde{Z} = 0$ , но при этом не образуется двойной корень: оба корня (проколотые точки на рис. 5-9,*б*) имеют одинаковую мнимую часть, но разную действительную. При увеличении трения корни стремятся к значениям  $k_0$  и  $k_1$ . Существенным отличием в этом примере является малое значение коэффициента затухания

по сравнению со случаями, в которых образуются двойные моды (рис. 5-7 и 5-9,а).

Итак, установлено три типа корней характеристического уравнения, при котором гашение звука в канале наиболее эффективно. В первых двух (рис. 5-7 и 5-9,а) образуются двойные моды, но в первом требуется трение, а во втором нет, третий тип не связан с кратными корнями, но достигаемая эффективность значительно ниже. Важно, что небольшое изменение параметров задачи может привести к резкому изменению характера работы решетки резонаторов. Так, если при некоторой совокупности параметров оптимальное гашение достигается резонаторами без трения (рис. 5-9,а), то при небольшом изменении частоты корни могут вести себя как на рис. 5-7, и звук распространяется в канале без затухания. А на другой, но близкой, частоте затухание может оказаться совершенно незначительным (рис. 5-9,б) при любых импедансах. По этой причине при  $kL > \pi$  трудно, а с практической точки зрения и невозможно, найти такую стратегию подбора импеданса поршней, чтобы обеспечить существенное затухание звука на всех частотах.

## 5.2. Активная импедансная поверхность

### 5.2.1. Поверхность, эквивалентная решетке

Из рис. 5-8 следует, что оптимальный коэффициент затухания  $\tilde{\delta}$  слабо зависит от периода решетки, поэтому можно ожидать, что решетка монополей эквивалентна поверхности с некоторым импедансом, как и в случае плоской решетки в свободном пространстве (раздел 4.1). Найдем импеданс эквивалентной поверхности.

В первую очередь исследуем импеданс излучения монополя в решетке, задаваемый (5.12). При  $kL \ll 1$  легко найти приближенные выражения для  $Z_r$ , в этом случае значение суммы в (5.12) определяется в основном нулевым слагаемым, поскольку  $\xi_m \approx 2\pi m/kL \gg 1$  при  $m > 1$ . Получаем

$$Z_r \approx \rho c (2a)^2 \frac{ik}{\kappa_0 \operatorname{tg} \kappa_0 h}. \quad (5.14)$$

С учетом (5.14) характеристическое уравнение  $Z + Z_r = 0$  преобразуется к виду

$$\kappa' \operatorname{th} \kappa' = \frac{ikh}{Z'}, \quad (5.15)$$

где  $\kappa' = \kappa_0 h$ ,  $Z' = Z / \rho c (2a)^2$ .

Таким образом, собственные значения  $\lambda$  определяются уравнением (5.15), являющимся характеристическим уравнением для плоского канала шириной  $h$ , одна стенка которого имеет однородные по всей площади свойства, описываемые локально реагирующим безразмерным импедансом  $Z'$  [222, 373]. В этом смысле распространение звука в канале с решеткой монополей эквивалентно распространению звука в канале с импедансной стенкой, поэтому поиск оптимального импеданса монополей можно свести к поиску оптимального импеданса поверхности, который может быть найден, например, в рамках метода Кремера.

Для эффективного затухания звука в канале в широкой полосе частот необходимо подбирать импеданс эквивалентной поверхности достаточно точно также в широкой полосе частот, при этом оптимальный импеданс (1.1) зависит обратно пропорционально от ширины канала. Поэтому реализован такой импеданс может быть активными методами, в настоящей работе – с помощью активных резонаторов, импеданс которых подбирается по методу Кремера. При этом оптимальный импеданс, как показано выше, не всегда соответствует резонансному – только в тех случаях, когда реактивные монополи запирают канал. Тем не менее свойства активной поверхности, образованной активными резонаторами, должны быть исследованы с точки зрения критерия качества, введенного в разделе 2.2.2.

## 5.2.2. Устойчивость активной поверхности

Рассмотрим систему, в которой поршни на рис. 5-2 являются активными резонаторами монопольного типа, импеданс которых подобран в соответствии с (5.15). Выберем способ управления по полю и расположим датчик звукового давления у центра поршня. Отношение скорости поршня с номером  $n$  к давлению у его поверхности у всех поршней одинаково, поэтому исследование устойчивости проведем только для одного из них. Из (5.10) находим давление около поршня с номером  $n = 0$

$$P(0,0) = 2i\omega\rho v \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi_m a}{\xi_m \kappa_m \operatorname{tg} \kappa_m h}. \quad (5.16)$$

Активная сила, действующая на поршень, равна  $KP(0,0)$ , где  $K$  – коэффициент обратной связи. Из уравнения движения  $(Z + Z_r)v = KP(0,0)$  находим оптимальный коэффициент обратной связи

$$\tilde{K} = \frac{Z_r + Z}{2i\omega\rho \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi_m a}{\xi_m \kappa_m \operatorname{tg} \kappa_m h}}. \quad (5.17)$$

В (5.17) полагается, что постоянная распространения  $\tilde{\lambda}$ , соответствующая оптимальному импедансу, уже найдена, и параметры  $\xi_m$  и  $\kappa_m$  зависят от  $\tilde{\lambda}$ . Нетрудно заметить, что при малом волновом размере поршня справедливо отношение  $P(0,0)/v \approx Z_r/2a$ , поэтому (5.17) преобразуется к простому виду  $\tilde{K} = 2a(1 + Z/Z_r)$ .

Теперь в отсутствие каких-либо источников звукового поля подействуем на поршень силой  $F_{in}$ , скорость поршня будет равна  $v_0 = F_{in}/(Z + Z_r^{(0)})$ , где  $Z_r^{(0)}$  – импеданс излучения в ситуации, когда возбуждается движение только нулевого поршня. Далее давление, измеренное микрофоном у поверхности поршня, формирует управляющую силу  $F_{out} = \tilde{K}P(0,0)$ . При настройке на оптимальное затухание скорость между соседними поршнями отличается примерно на величину  $e^{-\tilde{\delta}kL}$ , т.е.  $v_{n+1} = v_n e^{-\tilde{\delta}kL}$ . Поэтому импедансы излучения  $Z_r^{(0)}$  и  $Z_r$  определяются главным образом нулевым

слагаемым, являющимся импедансом излучения одиночного поршня, и можно принять, что отношение  $P(0,0)/v \approx Z_r/2a$  справедливо для двух способов возбуждения поршня. Тогда кольцевая передаточная функция имеет следующий вид

$$\tilde{H} = \frac{Z + Z_r}{Z + Z_r^{(0)}}. \quad (5.18)$$

Поскольку на оптимальном режиме затухания  $Z_r^{(0)} \approx Z_r$ , то  $\tilde{H} \approx 1$ . Хотя при оптимальной настройке  $\tilde{H} \neq 1$  и формально систему можно считать устойчивой, тем не менее значения  $\tilde{H}$  очень близки к 1, особенно с учетом (2.24), и при незначительных ошибках настройки активная поверхность может стать неустойчивой.

Оценим влияние периода решетки  $kL$  на устойчивость системы. При  $|Z_r^{(0)}|, |Z_r| \ll |Z|$  передаточная функция (5.18) имеет вид

$$\tilde{H} \approx 1 + \frac{Z_r - Z_r^{(0)}}{Z}. \quad (5.19)$$

Заметим, что с увеличением параметра  $kL$  мнимая часть импеданса излучения  $Z_r$  также, как и мнимая часть оптимального импеданса (см. рис. 5-8), увеличивается, следовательно, отношение  $|Z_r/Z|$  становится больше, хотя и остается малым по сравнению с 1. Тем не менее с увеличением периода решетки отклонения  $\tilde{H}$  от значений, соответствующих неустойчивости, становятся больше, тем самым увеличивается «запас прочности» системы. Вместе с тем, если активный резонатор выполнен на основе динамического громкоговорителя, то на частотах выше резонансной  $Z \sim \omega t$ , т.е. с увеличением частоты отношение  $|Z_r/Z|$  уменьшается, и «запас прочности» снижается. Поэтому устойчивость активной поверхности является фактором, ограничивающим сверху рабочий частотный диапазон системы.

### 5.2.3. Робастность активной поверхности

Оценим робастность активной поверхности, составленной из резонаторных элементов, в канале. При управлении по полю импеданс активного резонатора зависит от коэффициента обратной связи  $K$  определяется выражением (2.11). Оптимальный коэффициент обратной связи (5.17) представим в виде  $\tilde{K} = 2a(1 + Z/Z_r)$ . При ошибке настройки, определенной (2.18), получаем простую оценку с учетом (2.24) для отклонения фактического импеданса активного резонатора  $Z_a$  от оптимального значения  $\tilde{Z}_a$  в следующем виде  $Z_a - \tilde{Z}_a \approx \varepsilon$ .

Параметром эффективности гашения звука в рассматриваемой задаче является коэффициент затухания (5.13), являющийся мнимой частью корней характеристического уравнения (5.15). Пусть при оптимальном импедансе активного резонатора  $\tilde{Z}_a$  и соответствующем эквивалентном импедансе стенки корень (5.15) равен  $\kappa'_0$ , а коэффициент затухания  $\tilde{\delta} = \text{Im}\sqrt{1 - \kappa'^2_0}$ . Заменяя в (5.15) импеданс стенки канала  $Z'$  на  $Z' + \varepsilon$ , находим корень  $\kappa'$  и коэффициент затухания  $\delta = \text{Im}\sqrt{1 - \kappa'^2}$ . В результате получим коэффициент затухания с учетом ошибки настройки

$$\delta \approx \tilde{\delta} - \frac{\varepsilon}{kh} \text{Im} \frac{\kappa'^3_0 \text{th} \kappa'_0}{\sqrt{1 - \kappa'^2_0}}. \quad (5.20)$$

Из решения Кремера [222] известно, что при оптимальном подборе импеданса стенки  $\kappa'_0 = 1.125 + 2.206i$ , что при подстановке в (5.20) дает оценку параметра робастности

$$\mu \approx \frac{1.2}{kh}. \quad (5.21)$$

Таким образом, в многомодовом канале параметр робастности имеет значение  $\mu \approx 1$ , при этом с увеличением ширины канала параметр робастности уменьшается. Отметим, что данная оценка проведена для нулевой моды, но в широких каналах зачастую проблемными являются моды высокого порядка,

поэтому для оценки робастности активной системы, настраиваемой на гашение таких мод, в (5.20) необходимо подставлять соответствующие решения характеристического уравнения.

### 5.3. Метод кратных мод (метод Кремера)

Регулярная система активных или пассивных резонаторов, приведенная на рис. 5-2, эквивалентна поверхности с однородным по всей площади и локально реагирующим импедансом. Активная поверхность может обеспечить почти произвольный частотно-зависимый импеданс. Возможности гашения звука в каналах такими системами можно исследовать без детального рассмотрения структуры системы, только применяя представление об эквивалентной поверхности. Далее будут рассмотрены эквивалентные поверхности применительно к методу Кремера [222] для плоских и прямоугольных каналов, в которых оптимизация затухания осуществляется подбором импеданса стенок канала.

#### 5.3.1. Оптимизация затухания звука в плоском канале

Согласно методу Кремера оптимальное с точки зрения наибольшего коэффициента затухания некоторой моды затухание связано с появлением кратных мод, соответствующих кратным корням характеристического уравнения. Рассмотрим появление таких корней на примере плоского канала шириной  $h$ , стенки которого имеют одинаковый импеданс  $Z$ , нормированный на волновое сопротивление среды  $\rho c$ . Очевидно, что достаточно исследовать двумерную постановку: ось  $z$  декартовой системы координат направим по оси канала, ось  $x$  перпендикулярна его стенкам. Согласно [150] поле звукового давления в канале может быть представлено в виде суперпозиции волновых мод, распространяющихся вдоль оси  $z$ ,

$$p_n = \varphi_n \left( \frac{\xi_n}{h} x \right) e^{ik\tau_n z} \quad (5.22)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\omega$  – круговая частота,  $\varphi_n(x) = \operatorname{ch}x$  при  $n = 0, 2, 4, \dots$ ,  $\varphi_n(x) = \operatorname{sh}x$  при  $n = 1, 3, 5, \dots$ ,

$$\tau_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_n}{kh}\right)^2}, \operatorname{Re}\tau_n \geq 0, \operatorname{Im}\tau_n \geq 0. \quad (5.23)$$

При  $n = 0, 2, 4, \dots$  значения  $\xi_n$  являются корнями уравнений

$$\xi \operatorname{th} \frac{\xi}{2} = \frac{ikh}{Z}, \quad (5.24)$$

а при  $n = 1, 3, 5, \dots$  корнями уравнений

$$\xi \operatorname{cth} \frac{\xi}{2} = \frac{ikh}{Z}. \quad (5.25)$$

Задача оптимизации затухания некоторой моды с номером  $n$  заключается в поиске такого импеданса стенок канала  $Z$ , чтобы коэффициент затухания моды  $\delta_n = \operatorname{Im}\tau_n$  был бы максимальным. Это имеет место, когда уравнения (5.24) и (5.25) имеют двойные корни [373]. Появление таких корней рассмотрим на примере функций, очевидным образом связанных с уравнениями (5.24) и (5.25),

$$f(\alpha, a) = \alpha \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} - \frac{i}{a}, \quad (5.26)$$

$$g(\alpha, a) = \alpha \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} - \frac{i}{a}. \quad (5.27)$$

Пусть  $\alpha_n$  – корень уравнения  $f(\alpha, a) = 0$ , если  $n = 0, 2, 4, \dots$ , и корень уравнения  $g(\alpha, a) = 0$ , если  $n = 1, 3, 4, \dots$  При некотором значении  $a$  два корня  $\alpha_n$  и  $\alpha_{n'}$ ,  $n \neq n'$ , могут иметь одинаковые значения, для этого производные функций  $f$  и  $g$  по  $\alpha$  должны обращаться в нуль, т.е.

$$f_\alpha = \alpha + \operatorname{sh}\alpha = 0, \operatorname{Re}\alpha \geq 0, \operatorname{Im}\alpha \geq 0. \quad (5.28)$$

$$g_\alpha = \alpha - \operatorname{sh}\alpha = 0, \operatorname{Re}\alpha \geq 0, \operatorname{Im}\alpha \geq 0. \quad (5.29)$$

Обозначим через  $\tilde{\alpha}_n$  корни уравнений (5.28) и (5.29) и пронумеруем их, начиная с  $n = 0$  в порядке возрастания действительной части. Двойные корни  $\tilde{\alpha}_n$  и соответствующие значения параметра  $a_n$  могут быть найдены численным способом. Приведем значения для двух первых корней

$$\tilde{\alpha}_0 = 2.251 + 4.212i, a_0 = 0.148 + 0.118i,$$

$$\tilde{\alpha}_1 = 2.769 + 7.498i, a_1 = 0.107 + 0.054i.$$

Далее значения  $\tilde{\alpha}_n$  и  $a_n$  полагаем известными.

На рис. 5-10 представлен расчет первых пяти корней  $\alpha_n$  в зависимости от параметра  $a = a' + ia''$ . При этом  $a'$  изменяется от нуля до бесконечности, а действительная часть параметра остается неизменной и равной  $a'' = \text{Im}a_0$  на рис. 5-10,а и  $a'' = \text{Im}a_1$  на рис. 5-10,б. Проколотые точки указывают начало ветвей  $\alpha_n$ , стрелки – направление движения корня  $\alpha_n$  по кривой с увеличением  $a'$ , сплошные точки соответствуют пределу  $a' \rightarrow \infty$ , т.е. предельному переходу к каналу с абсолютно жесткими стенками. В этом случае  $\alpha_n \rightarrow i\pi n$ , поэтому нумерация корней  $\alpha_n$ , а также корней  $\xi_n$  и  $\kappa_n$  при решении (5.24) и (5.25), производится в порядке возрастания абсолютных значений корней, получаемых при предельном переходе  $a' \rightarrow \infty$  или  $Z \rightarrow \infty$ .

Ветви  $\alpha_0$  и  $\alpha_2$  имеют общую точку  $\tilde{\alpha}_0$  при  $a = a_0$  (рис. 5-10,а), соответствующие им моды называют двойными. Ветви  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  также имеют общую точку  $\tilde{\alpha}_1$  при  $a = a_1$  (рис. 5-10,б). Уравнения (5.26) и (5.27) соответствуют плоскому каналу шириной  $h$  и импедансом стенок  $Z$ , при этом  $a = Z/kh$ . Из (5.28) и (5.29) следует, что двойными могут быть ближайшие симметричные ( $n = 0, 2, 4, \dots$ ) или антисимметричные ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) моды, т.е. при оптимальном подборе импеданса

$$Z = a_n kh \tag{5.30}$$

моды  $n$  и  $n + 2$  имеют максимально возможный коэффициент затухания.

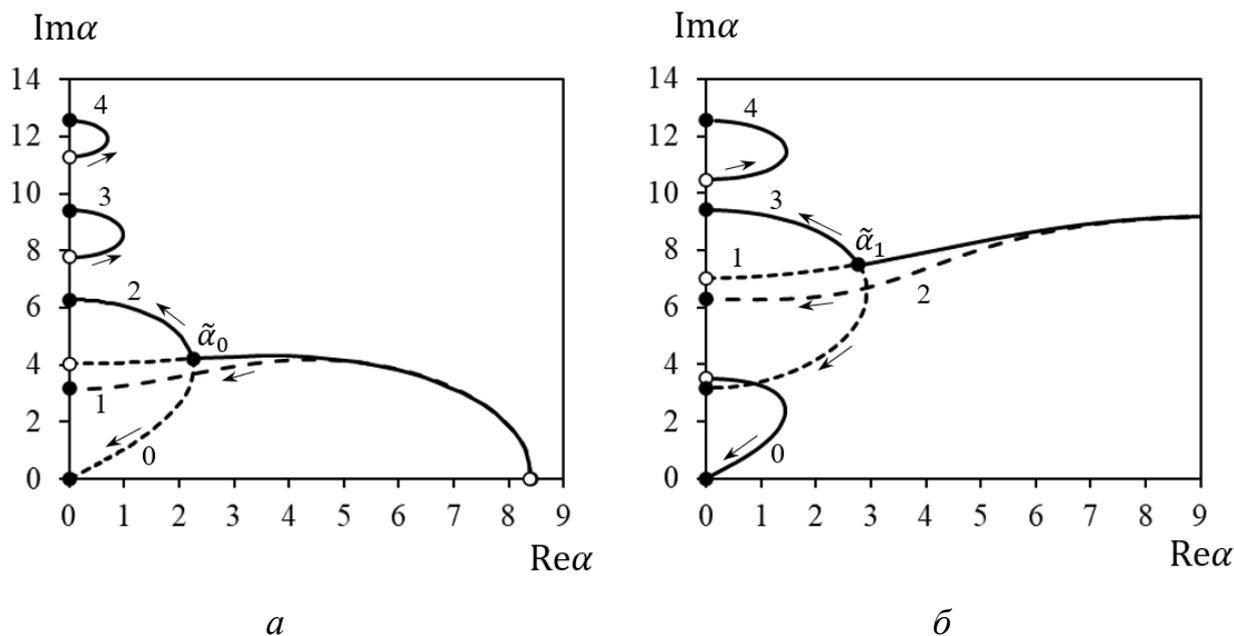


Рис. 5-10. Корни  $\alpha_n$  уравнений (5.26) и (5.27) при изменении  $\text{Re}\alpha$  от нуля до бесконечности при  $\text{Im}\alpha = 0.118$  (а) и  $\text{Im}\alpha = 0.054$  (б). Числа указывают номер корня  $n$ , стрелки – направление движения корней при увеличении  $\text{Re}\alpha$ .

Отметим, что в плоском канале, одна стенка которого является импедансной, а другая – жесткой, справедливо только уравнение  $f(\alpha, a) = 0$ , поэтому двойными являются соседние моды  $n$  и  $n + 1$  [373].

Теперь перейдем к каналу, стенки которого имеют разный импеданс -  $Z_1$  и  $Z_2$  для стенок, лежащих в плоскостях  $z = h/2$  и  $z = -h/2$ . Введем безразмерные параметры, характеризующие проводимость стенок,

$$u_1 = \frac{hd}{Z_1/\rho c}, u_2 = \frac{hd}{Z_2/\rho c}. \quad (5.31)$$

Характеристическое уравнение запишем в следующем виде

$$f(\beta) = \left(u + i\beta \text{th} \frac{\beta}{2}\right) \left(u + i\beta \text{cth} \frac{\beta}{2}\right) - v^2 = 0. \quad (5.32)$$

где  $u = (u_1 + u_2)/2$ ,  $v = (u_1 - u_2)/2$

Корни (5.32) определяют моды, распространяющиеся в канале. Если стенки канала имеют одинаковый импеданс, то  $u_1 = u_2 = u$  и  $v = 0$ , поэтому уравнение (5.32) переходит в уравнения (5.26) и (5.27). Обозначение  $\alpha$  будем использовать для канала с одинаковыми стенками, т.е. для случая  $Z_1 = Z_2$ , а обозначение  $\beta$  для общего случая  $Z_1 \neq Z_2$ .

Запишем уравнения, определяющие нули первой и второй производной характеристической функции (5.32)

$$f'(\beta) = 2iu \left( \operatorname{cth}\beta - \frac{\beta}{\operatorname{sh}^2 \beta} \right) - 2\beta = 0, \quad (5.33)$$

$$f''(\beta) = 4iu \left( \beta \frac{\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}^3 \beta} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \beta} \right) - 2 = 0. \quad (5.34)$$

Уравнения (5.32), (5.33) и (5.34) образуют систему для трех неизвестных  $u_1$ ,  $u_2$  и  $\beta$ , решение которой легко находится. В первую очередь исключим  $u$  из (5.33) и (5.34) и найдем уравнение для  $\beta$

$$2\beta^2 \operatorname{cth}\beta - \beta - \frac{\operatorname{sh}2\beta}{2} = 0. \quad (5.35)$$

Корни (5.35) соответствуют тройным модам, обозначим их  $\beta_n$  и пронумеруем, начиная с  $n = 0$  в порядке возрастания действительной части корня. Импедансы стенок, при которых образуются тройные моды, находятся из (5.32) и следующего уравнения, полученного подстановкой (5.35) в (5.34),

$$u = \frac{\operatorname{sh}3\beta}{2i(\beta \operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta)}. \quad (5.36)$$

Четверные моды могли бы существовать, если бы корни (5.35) также удовлетворяли уравнению  $f'''(\beta) = 0$ , но простая проверка показывает, что это не так.

В таблице 5-1 приведены первые четыре корня  $\alpha_n$  уравнений (5.28) и (5.29), соответствующие двойным модам для канала с одинаковыми стенками, и импеданс стенок  $Z_n$ , при котором образуются двойные моды, а также первые четыре корня  $\beta_n$  уравнения (5.35), соответствующего тройным модам в канале с импедансами стенок  $Z_{1,n}$  и  $Z_{2,n}$ . Также по аналогии с  $\alpha_n$  введем величины  $b_{1,n} = Z_{1,n}/kh$  и  $b_{2,n} = Z_{2,n}/kh$ .

Расчет показывает, что мнимые части кратных корней имеют близкие значения  $\operatorname{Im}\alpha_n \approx \operatorname{Im}\beta_n$ , а действительные части отличаются примерно на одинаковую величину  $\operatorname{Re}\beta_n \approx \operatorname{Re}\alpha_n + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \approx 0.35$ .

Таблица 5-2. Кратные корни характеристического уравнения и соответствующие импедансы стенок

$n$	Двойные моды		Тройные моды		
	$\alpha_n$	$Z_n/kh$	$\beta_n$	$Z_{1,n}/kh$	$Z_{2,n}/kh$
0	$2.251 + 4.212 i$	$0.148 + 0.118 i$	$2.609 + 4.197 i$	$0.160 + 0.136 i$	$0.146 + 0.099 i$
1	$2.769 + 7.498 i$	$0.107 + 0.054 i$	$3.120 + 7.487 i$	$0.113 + 0.059 i$	$0.104 + 0.048 i$
2	$3.103 + 10.71 i$	$0.082 + 0.031 i$	$3.453 + 10.70 i$	$0.085 + 0.033 i$	$0.079 + 0.028 i$
3	$3.352 + 13.90 i$	$0.066 + 0.021 i$	$3.701 + 13.89 i$	$0.068 + 0.021 i$	$0.064 + 0.019 i$

На рис. 5-11 приведены оптимальные импедансы для двойных и тройных мод согласно таблице 5-1. Круглыми точками обозначены оптимальные импедансы для канала с одинаковыми стенками для первых четырех мод, крестики соответствующего цвета обозначают оптимальные импедансы стенок с разными свойствами. Полученные значения для обоих случаев оказываются достаточно близкими, поэтому можно ожидать, что и затухание звука в таких каналах будет примерно одинаковым.

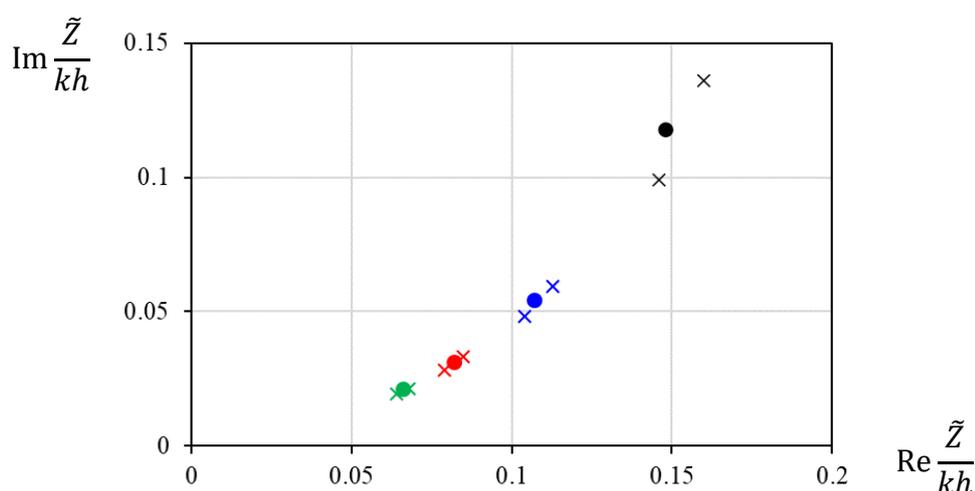


Рис. 5-11. Оптимальные импедансы для двойных мод (●) и тройных мод (×) с номером  $n = 0$  (черный), 1 (синий), 2 (красный), 3 (зеленый).

Исследуем отличия коэффициентов затухания двойных и тройных мод, которые определим так

$$\delta_n = \operatorname{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_n}{kd}\right)^2}, \quad \gamma_n = \operatorname{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_n}{kd}\right)^2}. \quad (5.37)$$

С учетом отношения  $\beta_n \approx \alpha_n + \varepsilon$  для  $kd \gtrsim 1$  из (5.37) следует оценка сверху  $\gamma_n - \delta_n < \varepsilon/kd$ , т.е. коэффициенты затухания двойных и тройных мод отличаются лишь на малую величину. На рис. 5-12 приведен расчет разности  $\gamma_n - \delta_n$  в зависимости от ширины канала для двух первых мод согласно (5.37).

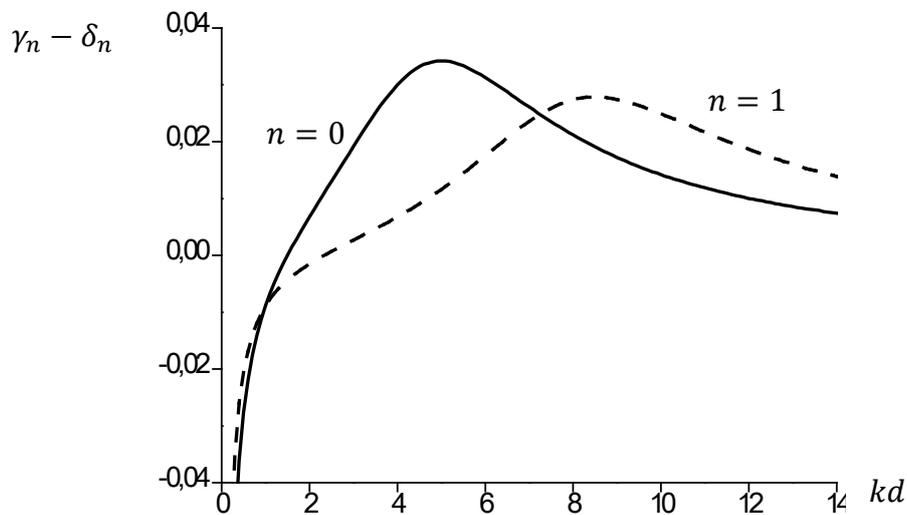


Рис. 5-12. Разность коэффициентов затухания двойных и тройных мод

Отличие между коэффициентами затухания на рис. 5-12 для любой ширины канала, за исключением узкого канала ( $kd \ll 1$ ), не превышает 0.04, при том, что оптимальный коэффициент затухания имеет значения порядка  $kd$ . Поэтому с практической точки зрения оптимизация импеданса каждой стенки канала не имеет смысла, поскольку не дает сколь-нибудь значимого увеличения эффективности гашения звука в канале.

### 5.3.2. Оптимизация затухания звука в прямоугольном канале

Двойные и тройные моды в плоском канале связаны с кратными корнями характеристического уравнения для определения постоянной

распространения звуковых волн в каналах. Подобную ситуацию можно ожидать в канале произвольного сечения конечных размеров. Ниже рассмотрен канал прямоугольного сечения [79]. Известно [53], что решение волнового уравнения для такого волновода является произведением трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты, что позволяет применить известное решение для плоского канала с импедансными стенками. При этом наличие двух характеристических уравнений для направлений, перпендикулярных оси волновода, дает возможность слияния более, чем двух или трех простых мод, и найти оптимальный импеданс стенок для этого случая.

Рассмотрим канал прямоугольного сечения. Ось  $z$  декартовой системы координат совпадает с осью канала, оси  $x$  и  $y$  перпендикулярны его стенкам. Вдоль осей  $x$  и  $y$  размеры сечения составляют  $h$  и  $d = \gamma h$ , для определенности примем  $\gamma \leq 1$ . Акустические характеристики стенок зададим локально реагирующим импедансом  $Z$ , нормированным на волновое сопротивление среды  $\rho c$ , где  $\rho, c$  – плотность среды и скорость звука в ней.

Согласно [150] поле звукового давления в канале может быть представлено в виде суперпозиции волновых мод, распространяющихся вдоль оси  $z$ ,

$$p_{nm} = \varphi_n \left( \frac{\xi_n}{h} x \right) \varphi_m \left( \frac{\kappa_m}{d} y \right) e^{ik\tau_{nm}z}, \quad (5.38)$$

$$\tau_{nm} = \sqrt{1 + \left( \frac{\xi_n}{kh} \right)^2 + \left( \frac{\kappa_m}{kd} \right)^2}, \quad \text{Re}\tau_{nm} \geq 0, \quad \text{Im}\tau_{nm} \geq 0. \quad (5.39)$$

Значения параметров  $\xi_n$  и  $\kappa_n$  определяются независимо друг от друга по уравнениям (5.24) и (5.25), поэтому результаты, полученные при исследовании уравнений (5.26) и (5.27), можно сразу применить для  $\xi_n$  и  $\kappa_n$ . Двойные корни равны  $\tilde{\xi}_n = \tilde{\kappa}_n = \tilde{\alpha}_n$ , при этом корень  $\tilde{\xi}_n$  имеет место при импедансе  $Z_n = a_n kh$ , а корень  $\tilde{\kappa}_n$  – при импедансе  $Z_n = a_n kd$ . Очевидно, что два некоторых двойных корня  $\tilde{\xi}_n$  и  $\tilde{\kappa}_m$  могут быть равны, если стенки канала имеют разный

импеданс. Пусть импеданс стенок, перпендикулярных оси  $x$ , равен  $X$ , а импеданс стенок, перпендикулярных оси  $y$ , равен  $Y$ . Тогда, заменив  $Z$  в уравнениях (5.24) и (5.25) на  $X$  и  $Y$ , находим оптимальные импедансы стенок

$$X = a_n kh, Y = a_m kd, \quad (5.40)$$

при которых  $\tilde{\xi}_n = \tilde{\kappa}_m$ . В этом случае четыре корня уравнений (5.24) и (5.25) оказываются равными  $\xi_n = \xi_{n+2} = \kappa_m = \kappa_{m+2}$ , поэтому согласно (5.39) постоянные распространения вдоль канала  $\tau_{nm}$  четырех мод  $(n, m)$ ,  $(n + 2, m)$ ,  $(n + 2, m)$ ,  $(n + 2, m + 2)$  также равны между собой. Более того, эти моды имеют одинаковое распределение звукового давления (5.38) в канале, поэтому неотличимы друг от друга. Таким образом, при оптимальном подборе импеданса (5.40) для максимального затухания некоторой моды  $(n, m)$  образуется четверная мода, коэффициент затухания которой равен

$$\tilde{\delta}_{nm} = \text{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_m}{kd}\right)^2}. \quad (5.41)$$

Отсюда следует, что с увеличением номера моды максимальный коэффициент затухания (5.41) увеличивается, поэтому, как правило, наименее затухающей является нулевая мода  $(0,0)$ . На рис. 5-13 приведены коэффициенты затухания четверных мод  $(0,0)$  и  $(1,1)$  в зависимости от ширины канала  $kh$  и соотношения сторон  $\gamma = d/h$ , где видно, что с уменьшением одного из поперечных размеров канала коэффициент затухания увеличивается. Это также следует из (5.41): если  $d \ll h$ , то значение  $\tilde{\delta}_{nm}$  определяется главным образом третьим слагаемым в подкоренном выражении, составляет  $\tilde{\delta}_{nm} \approx \text{Im} \tilde{\alpha}_m / kd$  и зависит только от меньшего размера.

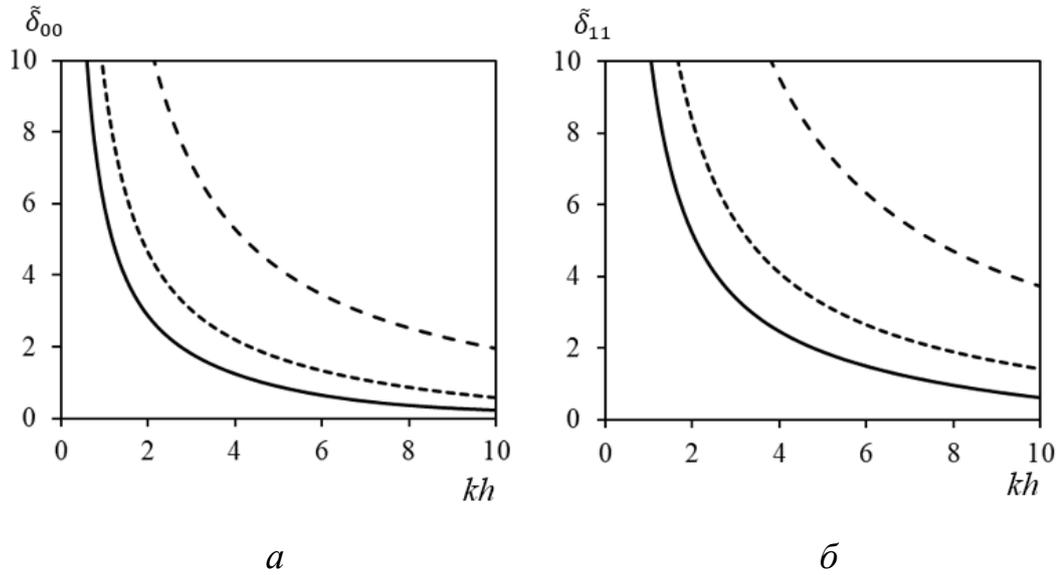


Рис. 5-13. Оптимальный коэффициент затухания мод (0,0) и (1,1) для разных соотношений сторон канала  $\gamma = 1$  (—), 0.5 (---), 0.2 (- - -)

Последний вывод позволяет найти оптимальный импеданс для моды  $(n, m)$  в канале, все стенки которого имеют одинаковый импеданс. В этом случае импеданс подбирается так, чтобы корень  $k_m$ , определяемый меньшим поперечным размером канала  $d$ , был двойным, что приводит к появлению двойной моды  $(n, m)$  и  $(n, m + 2)$ . При оптимальном импедансе  $Z = a_m kd$  коэффициент затухания имеет вид

$$\tilde{\delta}_{nm} = \text{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_m}{kd}\right)^2}. \quad (5.42)$$

где значение  $\xi_n$  находится из уравнений (5.24) и (5.25).

Рассмотрим коэффициенты затухания мод при неоптимальном импедансе стенок. Из (5.40) следует, что для оптимизации затухания нулевой моды импедансы стенок должны быть равны  $\tilde{X} = a_0 kh$ ,  $\tilde{Y} = a_0 kd$ . Полагая мнимые части  $X$  и  $Y$  неизменными, введем параметр  $\varepsilon$ , характеризующий отличие действительных частей  $X$  и  $Y$  от оптимальных значений

$$X = \varepsilon \text{Re} \tilde{X} + i \text{Im} \tilde{X}, \quad Y = \varepsilon \text{Re} \tilde{Y} + i \text{Im} \tilde{Y}. \quad (5.43)$$

При рассмотрении активной импедансной поверхности физическое значение параметра  $\varepsilon$  может быть интерпретировано как ошибка настройки активной системы.

На рис. 5-14 приведены коэффициенты затухания мод  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,2)$  для канала с размерами  $kh = 10$ ,  $\gamma = 0.5$  в зависимости от  $\varepsilon$ . Нулевая мода имеет наименьший коэффициент затухания при любом значении импедансов (5.43) за исключением оптимального. При  $\varepsilon = 1$  образуется четверная мода, при этом коэффициент затухания мод  $(0,0)$  и  $(2,0)$  достигает максимального значения.

Аналогичный расчет приведен на рис. 5-15 для канала квадратного сечения  $\gamma = 1$ . В этом случае оптимальные импедансы всех стенок одинаковы  $\tilde{X} = \tilde{Y}$ , поэтому моды  $(2,0)$  и  $(0,2)$  оказываются двойными при любом импедансе стенок, хотя это не приводит к оптимизации затухания, поскольку нулевая мода остается наименее затухающей. Коэффициент затухания только нулевой моды достигает максимума при оптимальном импедансе. Отметим, что при определенных размерах канала некоторые моды могут иметь меньший коэффициент затухания, чем коэффициент затухания нулевой моды при оптимальном подборе импедансов  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  [373].

Таким образом, для оптимизации затухания моды  $(n, m)$  в канале прямоугольного сечения необходимо подобрать импеданс его стенок в соответствии с (5.40), при этом происходит слияние четырех мод. Затухание четверной моды оказывается равным максимальному затуханию менее ослабляемой из четырех простых мод. Если сечение канала вытянутое, то оптимальной импеданс и максимальное затухание определяются меньшим поперечным размером сечения. В этом случае достаточно оптимизировать импеданс только широких стенок, а максимальное затухание будет таким же как в плоском канале [373].

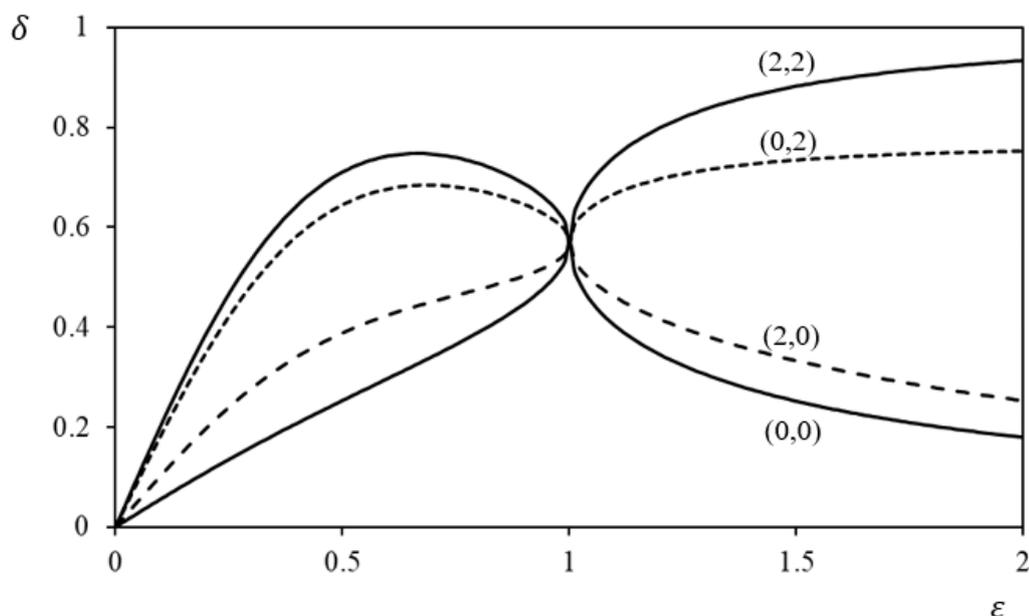


Рис. 5-14. Коэффициент затухания четырех мод в канале с размерами  $kh = 10$  и  $\gamma = 0.5$  в зависимости от действительной части импеданса стенок.

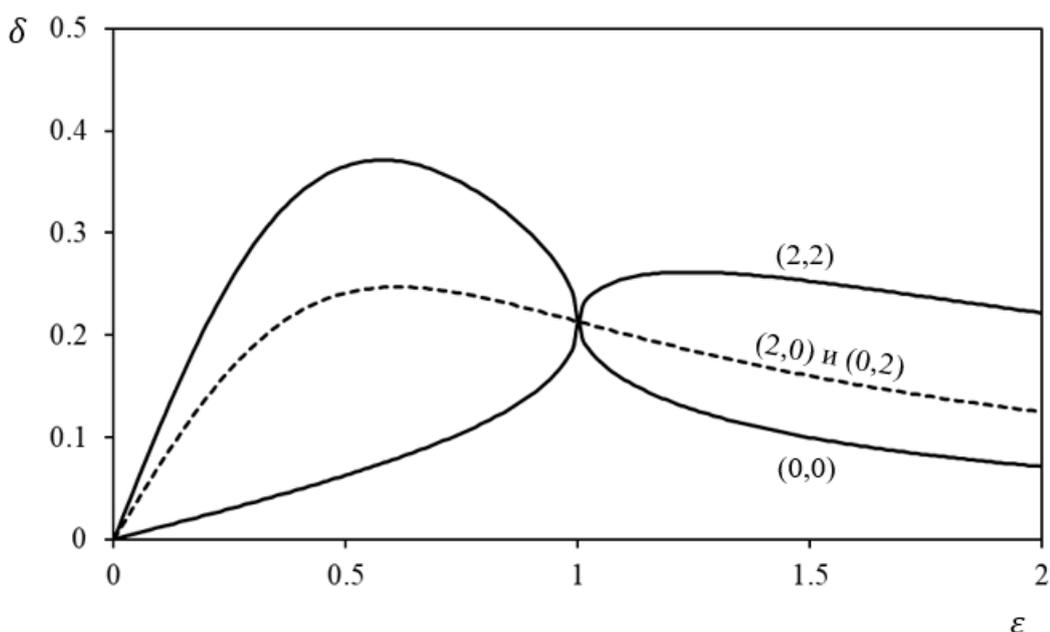


Рис. 5-15. Коэффициент затухания четырех мод в канале квадратного сечения со стороной  $kh = 10$  в зависимости от действительной части импеданса стенок

Теперь рассмотрим прямоугольный канал, четыре стенки которого имеют различные импедансы. Оптимизируя импеданс каждой стенки, найдем кратные моды и соответствующие коэффициенты затухания. Структура поля (5.38) позволяет отдельно проанализировать корни  $\xi_n$  и  $\kappa_n$  для плоского канала со стенками с разным импедансом. В этом случае оптимальное решение

связано с появлением тройных корней, определяемых уравнением (5.35). Тройные корни равны  $\tilde{\xi}_n = \tilde{\kappa}_n = \tilde{\beta}_n$ , при этом корень  $\tilde{\xi}_n$  имеет место при импедансе стенок  $X_1 = b_{1,n}kh$  и  $X_2 = b_{2,n}kh$ , а корень  $\tilde{\kappa}_n$  – при импедансе  $Y_1 = b_{1,n}kd$  и  $Y_2 = b_{2,n}kd$ , где  $X_1$  и  $X_2$  – импедансы стенок, перпендикулярных оси  $x$ , а  $Y_1$  и  $Y_2$  – импедансы стенок, перпендикулярных оси  $y$ .

При оптимальных значениях четырех импедансов  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$  три корня уравнений (5.35)  $\tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_{n+1} = \tilde{\xi}_{n+2}$  оказываются равными трем корням  $\kappa_m = \kappa_{m+1} = \kappa_{m+2}$ , поэтому согласно (5.39) постоянные распространения вдоль канала  $\tau_{nm}$  девяти мод  $(n, m)$ ,  $(n + 1, m)$ ,  $(n + 2, m)$ ,  $(n, m + 1)$ ,  $(n + 1, m + 1)$ ,  $(n + 2, m + 1)$ ,  $(n + 2, m)$ ,  $(n + 2, m + 1)$ ,  $(n + 2, m + 2)$  также равны между собой. Также, как и четверные моды, девятерные моды имеют одинаковое распределение звукового давления (5.38) в канале, поэтому неотличимы друг от друга. Таким образом, при оптимальном подборе импеданса четырех стенок для максимального затухания некоторой моды  $(n, m)$  образуется девятерная мода, коэффициент затухания которой равен

$$\tilde{\delta}_{nm} = \text{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\beta}_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}_m}{kd}\right)^2}. \quad (5.44)$$

Поскольку значения  $\tilde{\alpha}_n$  и  $\tilde{\beta}_n$  близки друг к другу, то и коэффициенты затухания четверной моды (5.41) и девятерной моды (5.44) также оказываются близкими. Как в плоском канале нет практического смысла в оптимизации импеданса каждой стенки, то и в прямоугольном оптимизация с целью получения девятикратной моды не дает значительных преимуществ с точки зрения затухания звука, распространяющегося по каналу.

### 5.3.3. Канал с тангенциально реагирующей стенкой

Сравним возможности стенок канала, имеющих импеданс разного типа, по оптимизации затухания. Рассмотрим простой пример – канал шириной  $h$  с одной импедансной стенкой - и найдем оптимальные значения импеданса и коэффициента затухания.

На стенках с нормальным импедансом выполняется обычное граничное условие  $Z_{\perp} = P/v_z$ , что приводит к известному характеристическому уравнению, приведенному ранее в виде (5.15) и (5.24),

$$f(\alpha) = \alpha \operatorname{th} \alpha - \frac{ikh}{Z_{\perp}}. \quad (5.45)$$

Двойные корни уравнения  $f(\alpha) = 0$  можно найти из уравнения

$$f_{\alpha}(\alpha) = 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha = 0. \quad (5.46)$$

Корень уравнения (5.46), обозначаемый  $\tilde{\alpha}$ , соответствует оптимальному затуханию звука, которое обеспечивается при импедансе стенок равном

$$\tilde{Z}_{\perp} = \frac{ikh}{\tilde{\alpha} \operatorname{th} \tilde{\alpha}}, \quad (5.47)$$

который также можно назвать оптимальным.

Коэффициент затухания звука в канале со стенкой с оптимальным импедансом в смысле определения (5.13) равен

$$\tilde{\delta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\alpha}}{kh}\right)^2}. \quad (5.48)$$

Найдем оптимальные параметры затухания звука в канале со стенкой с тангенциальным импедансом  $Z_{\parallel}$ . На такой стенке выполняется граничное условие (4.73), а характеристическое уравнение принимает следующий вид

$$g(\alpha) = \alpha \operatorname{th} \alpha - i \frac{(kh)^2 + \alpha^2}{Z_{\parallel}}. \quad (5.49)$$

Двойные корни уравнения  $g(\alpha) = 0$  находим, приравняв производную функции (5.49) по  $\alpha$  нулю. Система  $g(\alpha) = 0$  и  $g_{\alpha}(\alpha) = 0$  дает следующее уравнение для кратных корней

$$2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha - \frac{2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha}{(kh)^2 + \alpha^2} = 0. \quad (5.50)$$

Обратим внимание, что корень уравнения (5.50), также обозначаемый  $\tilde{\alpha}$ , зависит от ширины канала  $kh$  в отличие от корней уравнения (5.46) для стенки с нормальным импедансом. Оптимальное значение тангенциального импеданса составляет

$$\tilde{Z}_{||} = i \frac{(kh)^2 + \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha} \text{th} \tilde{\alpha}}. \quad (5.51)$$

Оптимальное значение коэффициента затухания также определяется выражением (5.48). На рис. 5-16,*а* приведены результаты расчета коэффициентов затухания звука  $\tilde{\delta}_{\perp}$  и  $\tilde{\delta}_{||}$  для нормально и тангенциально реагирующей стенки при оптимальном подборе импеданса в зависимости от ширины канала. Для сопоставления эффективности затухания в каналах со стенками разного типа на рис. 5-16,*б* приведено отношение коэффициентов затухания  $\tilde{\delta}_{||}/\tilde{\delta}_{\perp}$ . При значениях  $kh < 2$  коэффициенты затухания заметно отличаются, при этом коэффициент затухания в канале с нормально реагирующими стенками существенно больше. Но в диапазоне  $3 < kh < 4$  затухание в канале с тангенциально реагирующими стенками несколько эффективнее. Наибольшее значение отношения составляет 1.3 при  $kh = 3.3$ . В канале шириной, превышающей  $kh = 6$ , коэффициент затухания не зависит от типа стены.

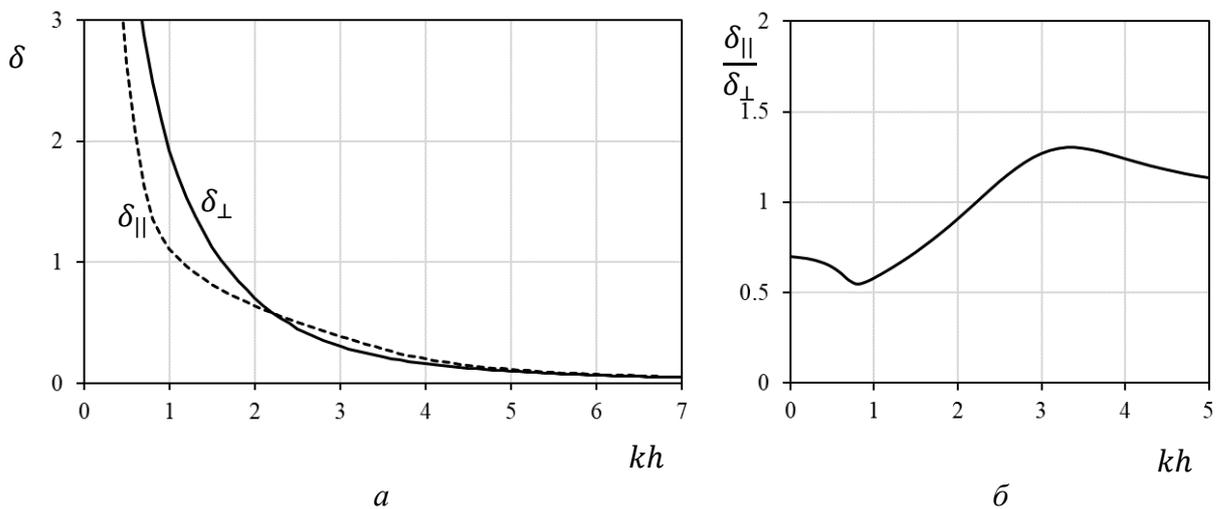


Рис. 5-16. Коэффициенты затухания нулевой моды в плоском канале с нормально или тангенциально реагирующей стенкой (*а*) и их отношение (*б*)

Полученный результат также непосредственно следует из характеристического уравнения (5.49), которое при  $kh \rightarrow \infty$  переходит в (5.45). Кроме этого, как показано в разделе 4.3.3, при скользящем падении

звука, физически соответствующем распространению нулевой моды в широком канале, поверхности обоих типов имеют одинаковые свойства: коэффициент отражения от них стремится к  $-1$ .

#### **5.4. Выводы к главе 5**

В главе исследованы возможности гашения звука регулярными системами резонаторов в каналах и получены следующие результаты:

1. Полное гашения звукового поля в широком волноводе теоретически возможно, но это связано с необходимостью излучения значительной звуковой энергии в волновод, что противоречит основной задаче подхода – борьбе с шумом. Поэтому рассматриваются возможности оптимизации затухания звука, распространяющегося в канале.

2. Получено решение задачи об оптимизации затухания звука с помощью решетки монополей, эквидистантно встроенных в стенку канала. Исследована зависимость оптимального импеданса монополя от ширины канала и периода решетки. Показано, в каналах, ширина которых не превышает определенного значения, оптимальный импеданс монополей является чисто мнимым, поэтому затухание звука не связано с диссипацией, а определяется только запиранием канала. В каналах большей ширины требуются диссипативные потери на монополях, т.е. затухание связано с поглощением звука в канале.

3. Решетка активных резонаторов позволяет обеспечить требуемый импеданс и оптимальное затухание звука в широкой полосе частот, при этом активная система является устойчивой и достаточно робастной.

4. Показано, что если период решетки резонаторов не превышает половину длины волны, то такую структуру можно заменить эквивалентной поверхностью с локально реагирующим импедансом, что позволяет применить к таким поверхностям известные методы, например, метод Кремера, оптимизации импеданса.

5. Получены решения для оптимального затухания звука в плоском канале, импедансы обеих стенок которого оптимизируются независимо. Оптимальное затухание связано с появлением тройных мод, хотя коэффициент затухания тройной моды близок к коэффициенту затухания двойной моды, образующейся при оптимизации импеданса одинаковых стенок канала.

6. Решена задача об оптимизации затухания звука в канале прямоугольного сечения. Показано, что если параллельные стенки имеют одинаковый импеданс, то оптимальное затухание связано с появлением четверной моды, а если независимо оптимизируются импедансы всех четырех стенок, то появляются девяттерные моды.

7. Проведено сравнение затухания звука в канале, одна из стенок которого имеет нормально реагирующий или тангенциально реагирующий импеданс. Показано, что при ширине канала примерно равной длине волны оптимальный коэффициент затухания в канале с тангенциальным импедансом стенки больше, чем в канале с нормальным импедансом стенки. В каналах большей ширины коэффициент затухания примерно одинаков для обеих типов стенки.

## **Глава 6. Гашение звука в помещениях на низких частотах**

Звуковое поле в замкнутых объемах, т.е. помещениях, на низких частотах представляет собой суперпозицию собственных решений волнового уравнения с граничными условиями на границах объема, т.е. на стенках помещения. Если поглощающие свойства стенок невелики, то на резонансных частотах интенсивность звука оказывается достаточно большой, а передаточные функции между разными точками помещения сильно зависят от частоты и расположения точек приема и излучения звука. С практической точки зрения требуется обеспечить сглаженность передаточной функции, в некоторых предельных случаях время затухания звука должно быть минимизировано. Любые способы демпфирования резонансов помещения предполагают взаимодействие помещения с некоторой колебательной системой. В настоящем разделе рассмотрены способы подавления собственных колебаний помещений с помощью локальных резонансных устройств и импедансных поверхностей.

### **6.1. Поглощение звука резонатором Гельмгольца**

#### **6.1.1. Оптимизация демпфирования низкочастотных мод**

Резонатор Гельмгольца является эффективным поглотителем звуковых волн, при соответствующем подборе его параметров можно добиться максимального поглощения, которое может быть обеспечено малым по сравнению с длиной звуковой волны, а значит, и с характерными размерами помещения, рассеивателем [243, 299, 396]. На практике резонаторы Гельмгольца часто используются для демпфирования собственных резонансов помещения и сглаживания его передаточной функции. Трудности в подборе параметров резонатора для максимального поглощения вызваны тем, что взаимодействие резонатора и нормальных мод помещения приводит к изменению собственных колебаний помещения. Для определения максимально возможного поглощения звука резонатором в помещении в

области самых низких собственных частот [72] задача рассматривается в следующей постановке.

Звуковое поле в помещении с абсолютно жесткими стенками может быть представлено в виде суперпозиции нормальных незатухающих мод. При внесении в помещение резонатора с трением все моды становятся затухающими [111], при этом количественно эффективность поглощения может быть охарактеризована коэффициентом затухания для каждой моды. Наибольший коэффициент затухания будут иметь моды, собственные частоты которых близки к собственной частоте резонатора. Эффективнее всего поглощение звука происходит на изолированных собственных частотах помещения, т.е. на первых резонансах помещения. Таким образом, необходимо определить параметры резонатора, при которых коэффициент затухания первой моды становится максимальным.

Решение поставленной задачи будем проводить, следуя [111]. Акустический импеданс резонатора Гельмгольца запишем в традиционном виде

$$Z = \frac{1}{S^2} \left[ R + i \left( \frac{K}{\omega} - \omega M \right) \right], \quad (6.1)$$

где  $M$  – масса воздуха в горле резонатора,  $R$  – коэффициент трения,  $K$  – коэффициент упругости,  $S$  – площадь поперечного сечения горла резонатора,  $\omega$  – частота звука.

Сопrotивление излучения резонатора в помещении с объемом  $V$ , ограниченном абсолютно жесткой поверхностью, имеет вид

$$Z_r = \frac{i\omega\rho c^2}{V} \sum_{n \geq 1} \frac{p_n^2(x_0, y_0, z_0)}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad (6.2)$$

где  $p_n(r)$  и  $\omega_n$  – фундаментальные функции и собственные частоты помещения без резонатора,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $x_0, y_0, z_0$  – координаты точки расположения резонатора. Нумерация  $p_n$  и  $\omega_n$  производится в порядке возрастания собственных частот.

Помещение с резонатором Гельмгольца образует колебательную систему, собственные частоты которой находятся из уравнения

$$Z + Z_r = 0. \quad (6.3)$$

Очевидно, что в случае бездиссипативного резонатора все корни (6.3) вещественны. Если резонатор обладает ненулевым трением, то корни (6.3) комплексны, а их мнимые части определяют скорость затухания соответствующей моды.

В качестве параметров резонатора выберем его собственную частоту в свободном пространстве  $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ , а также безразмерные величины

$$r = \frac{\omega_1 V}{\rho c^2 S^2} R, m = \frac{\omega_1^2 V}{\rho c^2 S^2} M, \quad (6.4)$$

характеризующие трение и массу резонатора соответственно. Безразмерный коэффициент трения, очевидно, может принимать значения  $0 \leq r < \infty$ . Оценим возможные значения параметра  $m$ . Если помещение имеет характерный размер  $L$ , то его объем  $V \sim L^3$ , а первая собственная частота  $\omega_1 \sim \pi/L$ . Для круглого горла резонатора с диаметром  $d$  его масса равна  $M = \rho l \pi d^2 / 4$ , где  $l$  – длина горла резонатора. Из (6.4) получаем  $m \sim 4\pi Ll/d^2$ . Длина горла резонатора может быть устремлена к нулю, однако в этом пределе масса резонатора не становится нулевой и определяется присоединенной массой отверстия. Эффективная длина горла резонатора составляет  $l \sim d$ , т.е. для короткого горла получаем оценку  $m \sim 4\pi L/d$ . Отверстие можно считать малым по сравнению с характерным размером помещения, если  $L \gg d$ . Для расчета можно принять  $L/d = 10$ , тогда минимальное значение параметра, характеризующее массу резонатора, составляет  $m \sim 10^2$ . Максимальное значение  $m$  не ограничено.

Отнормируем все частоты задачи на самую низкую собственную частоту помещения  $\omega_1$  без резонатора, т.е. введем безразмерные частоты  $\omega' = \omega/\omega_1$ ,  $\omega'_0 = \omega_0/\omega_1$ ,  $\omega'_n = \omega_n/\omega_1$ . Далее штрихи у величин  $\omega'$ ,  $\omega'_0$ ,  $\omega'_n$  будем опускать.

Для удобства положим, что резонатор находится в пучностях всех мод, т.е.  $p_n^2(x_0, y_0, z_0) = 1$  для всех  $n$ . Для этого, например в прямоугольном помещении, резонатор необходимо поместить в угол. Тогда (6.3) с учетом (6.1) и (6.2) преобразуется к виду

$$r + im \left( \frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) + i\omega \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} = 0. \quad (6.5)$$

Для высокочастотного случая  $\omega_0 \gg \omega$  корни (6.5) найдены в [111]. Исследуем, как ведут себя корни (6.5) в зависимости от параметров резонатора вблизи первого резонанса помещения. Корни (6.5) будем искать численно, для определенности рассмотрим помещение, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, длины сторон которого относятся как 5:2:1. В этом случае первые собственные частоты помещения имеют значения  $\omega_1 \equiv 1$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $\omega_3 = 2.5$ , которые и учитываются в сумме в (6.5).

На рис. 6-1,а приведены первые два корня уравнения (6.5) для  $m = 100$  и  $\omega_0 = 1$  при изменении коэффициента трения от нуля до бесконечности, а на рис. 6-1,б их мнимые части. Стрелками на рис. 6-1,а указано направление движения корней по комплексной плоскости при увеличении значения коэффициента трения. В случае бездиссипативного резонатора, т.е. при  $r = 0$ , оба корня вещественны, обозначим их  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  и отметим на комплексной плоскости на рис. 6-1,а проколотыми точками. Их нумерация начинается с  $n = 0$ , поскольку помещение с резонатором имеет дополнительную степень свободы и собственную частоту. Для  $n \geq 1$  все частоты  $\Omega_n$  оказываются выше  $\omega_n$  [111], но при этом  $\Omega_0$  оказываются ниже  $\omega_0$ . Будем увеличивать значение  $r$  с нулевого значения до бесконечного и отслеживать, как изменяются собственные частоты. При ненулевом трении резонатора собственные частоты становятся комплексными, а соответствующие им моды затухающими. Введем коэффициент затухания моды  $\delta_n$ , равный, но противоположный по знаку мнимой части соответствующего корня уравнения (6.5). Коэффициент затухания первой моды  $\delta_1$  с увеличением трения достигает максимального

значения, а коэффициент затухания нулевой моды  $\delta_0$  монотонно увеличивается. При дальнейшем увеличении трения коэффициент затухания уменьшается и стремится к нулю, а собственная частота первой моды к  $\omega_1$ . Таким образом, сильно задемпфированный резонатор не оказывает влияния на звуковое поле в помещении.

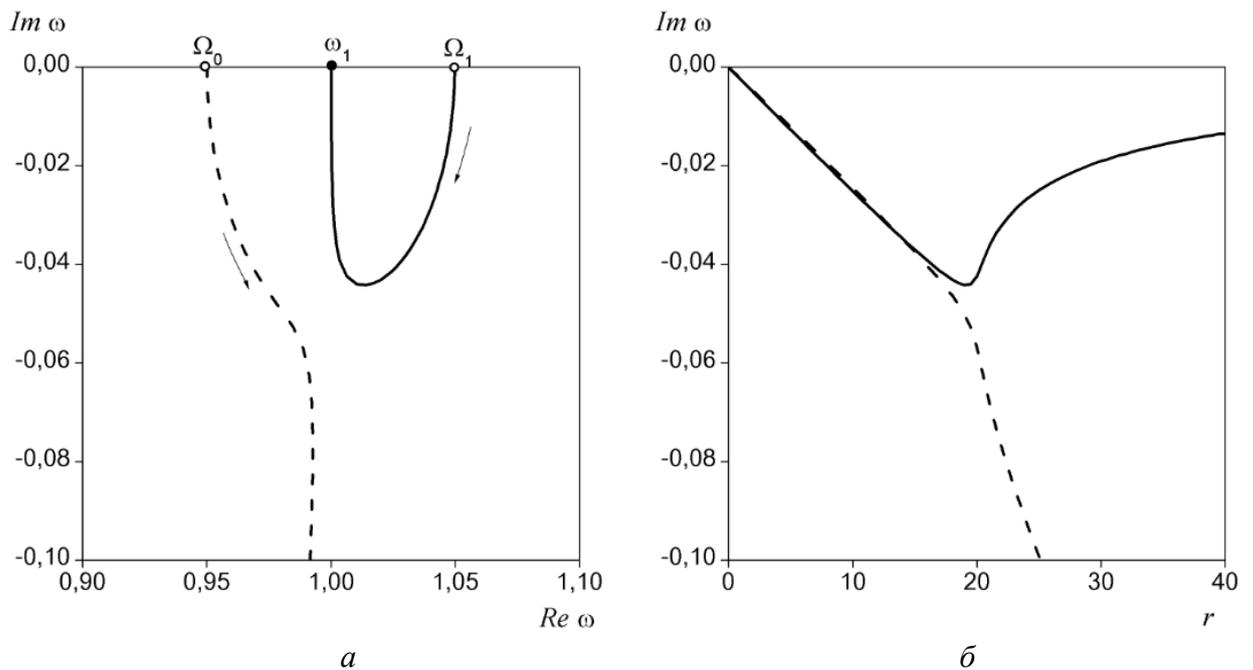


Рис. 6-1. Первые два корня уравнения (6.5) при изменении коэффициента трения  $r$  от 0 до  $\infty$  (а) и мнимая часть этих корней (б) для резонатора с параметрами  $\omega_0 = 1$  и  $m = 100$ . Пунктирной линией обозначена нулевая мода ( $n = 0$ ), сплошной – первая ( $n = 1$ ).

Итак, при наличии в помещении резонатора с собственной частотой, близкой к первой резонансной частоте помещения  $\omega_1$ , в окрестности этой частоты есть два корня. Скорость затухания звука будет определяться наименьшим коэффициентом затухания соответствующих мод. Так на рис. 6-1,б максимальный коэффициент затухания первой моды равен  $\delta_1 = 0.044$  при коэффициенте трения  $r = 19$ , при этом коэффициент затухания нулевой моды равен  $\delta_0 = 0.053$ . Поэтому затухание звука в помещении с резонатором в окрестности частоты  $\omega_1$  будет определяться коэффициентом затухания  $\delta_1$ .

При подборе собственной частоты резонатора  $\omega_0$  можно добиться большего сближения ветвей корней уравнения (6.5), чем в примере на рис.6-

1,  $a$ , и в пределе найти такую частоту  $\omega_0$  (для рассматриваемого примера она равна 1.026), при которой, как показано на рис. 6-2, две ветви корней имеют общую точку  $\omega_{01}$ . В этом случае коэффициенты затухания обеих мод имеют одинаковое значение, и оно является максимальным при заданном значении  $m$ , т.е. на этой частоте резонатор обеспечивает максимальное поглощение звука в помещении в окрестности первого резонанса помещения.

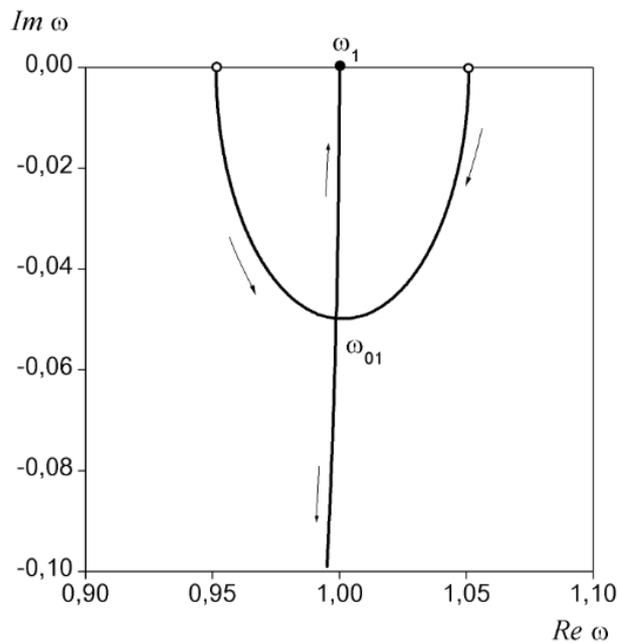


Рис. 6-2. Кратный корень  $\omega_{01}$  при  $\omega_0 = 1.026$  и  $m = 100$ . Стрелками указано смещение корней по кривой при увеличении коэффициента трения  $r$ .

Определим параметры резонатора  $\omega_0$ ,  $m$  и  $r$ , при которых обеспечивается максимальное поглощение на первом резонансе помещения. Для этого упростим (6.5), для чего представим сумму, входящую в (6.5), следующим образом

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} = \frac{1}{\omega^2 - 1} - \alpha. \quad (6.6)$$

где сумма  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2}$  слабо зависит от частоты в окрестности  $\omega = 1$  и может полагаться константой  $\alpha = -\sum_{n \geq 2} \frac{1}{1 - \omega_n^2}$ .

С учетом (6.6) уравнение (6.5) запишется в виде

$$r + im \left( \frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) + i\omega \left( \frac{1}{\omega^2 - 1} - \alpha \right) = 0. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) представляет полином четвертой степени, имеющий четыре корня, при этом две пары корней имеют одинаковую мнимую часть и одинаковую по значению, но отличающуюся знаком действительную часть. С учетом этого, а также того, что искомый корень  $\omega_{01} = \tilde{\omega} - i\tilde{\delta}$  уравнения (6.7) является двукратным, можно воспользоваться теоремой Виета для уравнения четвертой степени и найти соотношения между коэффициентами уравнения (6.7) и кратными корнями

$$\tilde{\delta} = \frac{r}{4(m + \alpha)}, \quad (6.8)$$

$$\tilde{\omega}^2 + 3\tilde{\delta}^2 = \frac{1 + \alpha + m(\omega_0^2 + 1)}{2(m + \alpha)}, \quad (6.9)$$

$$\tilde{\delta}(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\delta}^2) = \frac{r}{4(m + \alpha)}, \quad (6.10)$$

$$\tilde{\omega}^2 + \tilde{\delta}^2 = \sqrt{\frac{m}{m + \alpha}} \omega_0. \quad (6.11)$$

Из (6.8)-(6.11) находим коэффициент затухания

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\sqrt{m + \alpha}}. \quad (6.12)$$

который достигается при коэффициенте трения резонатора  $r = 2\sqrt{m + \alpha}$  и его собственной частоте  $\omega_0 = \sqrt{(m + \alpha)/m}$ . При этом абсолютное значение кратного корня равно  $|\omega_{0,1}| = 1$ .

Из (6.12) очевидна оптимизация массы резонатора: она должна быть минимально возможной. Однако, как показано выше, значения параметра  $m$  не могут принимать малые значения, характерное минимальное значение составляет  $10^2$ . В рассмотренном выше примере прямоугольного помещения с соотношением сторон 5:2:1 значение параметра  $\alpha$  с учетом небольшого поглощения в среде составляет 1.38. Поэтому соотношение  $\alpha \ll m$  заведомо

выполняется, и максимально достижимый коэффициент затухания зависит только от  $m$  и равен

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\sqrt{m}}. \quad (6.13)$$

При  $m = 100$  коэффициент затухания равен  $\tilde{\delta} = 0.05$ .

Таким образом, для максимального поглощения звука на первом резонансе помещения коэффициент трения резонатора должен быть равен  $r = 2\sqrt{m}$ , его масса - удовлетворять условию  $m \sim 10^2$ , а упругость подбирается таким образом, чтобы собственная частота в свободном пространстве была близка к первой резонансной частоте помещения  $\omega_0 \approx 1$ .

### 6.1.2. Экспериментальное исследование

Приведем результаты лабораторных и натурных испытаний гашения звука в помещении резонатором Гельмгольца [77]. Лабораторные испытания проводились в малой реверберационной камере, форма которой близка к прямоугольному параллелепипеду с размерами 1.5x1.3x1.1 м. Излучатель звука, резонатор и контрольный микрофон располагались в различных углах камеры. На излучатель подавался широкополосный сигнал, а именно ЛЧМ-сигнал, микрофоном измерялось звуковое давление. Изменение спектра измеренного сигнала определяет влияние резонатора на звуковое поле в камере.

Резонатор изготовлен из отрезков пластмассовых труб. Внутренний диаметр объема резонатора равен 125 мм, диаметр горла – 50 мм. Для стыковки горла и объема предусмотрены переходная и соединительная муфты (рис. 6-3). Их наличие дает возможность точной подстройки резонатора на нужную резонансную частоту путем изменения объема.

На рис. 6-4 представлены спектры измеренного микрофоном сигнала в камере в отсутствии резонатора (красная кривая), а также в камере с резонатором, настроенным на первый собственный резонанс помещения (111 Гц). При этом в горле резонатора нет звукопоглощающего материала, т.е.

коэффициент трения резонатора минимален. Как следует из рис. 6-4, резонанс помещения точно на частоте  $\omega_1 = 111$  Гц оказывается подавленным на 16дБ. В спектре сигнала появляются два близко расположенных максимума, соответствующие частотам  $\Omega_0$  и  $\Omega_0$  на рис. 6-1,а, высота которых примерно на 7 дБ ниже высоты собственного резонанса помещения. Таким образом, общую эффективность подавления собственного резонанса помещения можно считать равной 7 дБ, хотя в районе первой резонансной частоты помещения оказалось две собственные частоты системы «помещение-резонатор».

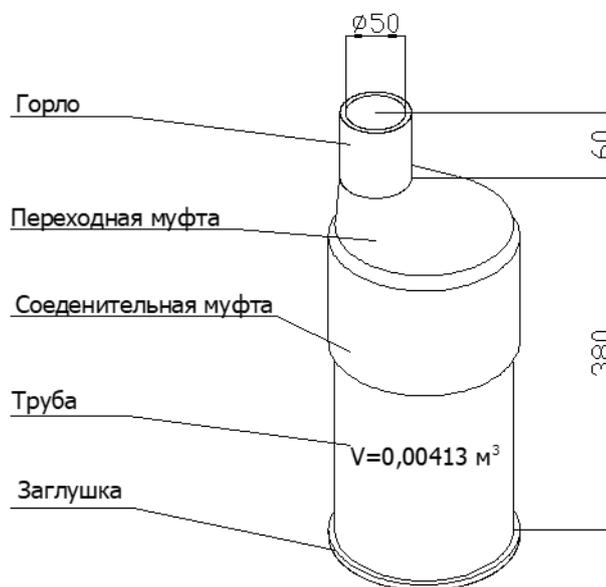


Рис. 6-3. Резонатор Гельмгольца с собственной частотой 111 Гц для лабораторных испытаний.

Альтернативным способом оценки эффективности поглощения, вносимого резонатором, является измерение времени спада звукового давления в камере после отключения излучателя. Методика его измерения проста: на излучатель подается гармонический сигнал с частотой равной одной из собственных частот помещения, в некоторый момент времени излучатель отключается и контрольным микрофоном записывается спад звукового давления [348]. Уменьшение давления в помещении во времени

происходит по экспоненциальному закону  $P(t) = P_0 e^{-t/t_0}$  ( $P_0$  - звуковое давление в контрольной точке в момент отключения излучателя), поэтому для его характеристики достаточно одного параметра времени, например,  $t_0$ . Характерное время спада в некоторой степени является аналогом времени реверберации в больших помещениях. Но существует принципиальное отличие: время реверберации – параметр статистический, а время спада – величина, характеризующая поведение поля, во-первых, на одной частоте, а, во-вторых, в конкретной точке. Необходимо отметить, что записи спада звукового давления пригодны для анализа только для изолированных резонансных частот. При записи спада на частоте, в окрестности которой есть несколько собственных частот помещения, наблюдаются биения между соседними резонансными частотами, и выделить экспоненциальный спад из записи не удастся.

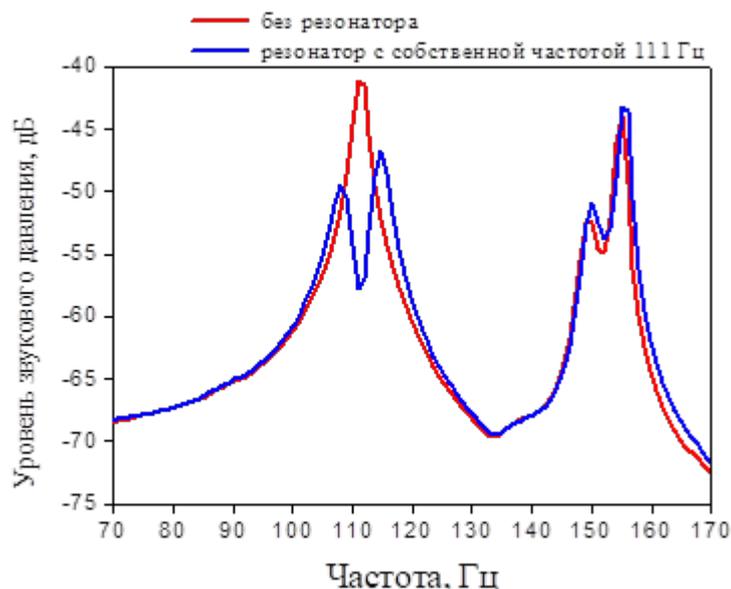


Рис. 6-4. Спектр сигнала, измеряемого контрольным микрофоном в камере с резонатором и без него.

На рис. 6-5 представлены записи времени спада звукового давления на частоте 111 Гц в камере с резонатором и без него. Время отложено в логарифмическом масштабе, отключение излучателя происходит в момент

времени  $t = 200$  мс. Красными отрезками обозначены участки линейного спада звукового давления при используемых масштабах.

Как следует из рис. 6-5, при помещении резонатора в камеру характерное время спада уменьшилось более чем в 5 раз.

На рис. 6-4 видно, что резонатор с минимальным трением обуславливает значительный провал в спектре точно на собственной частоте помещения, при этом в ее малой окрестности возникает два максимума. Для выравнивания частотной характеристики помещения в этой области необходимо подобрать коэффициент трения так, чтобы образовалась двойная мода. На рис. 6-6 синей кривой обозначен спектр сигнала на микрофоне для резонатора с оптимальным трением. Применен следующий критерий подбора параметров резонатора: спектр должен иметь один максимум и его высота должна быть минимальной.

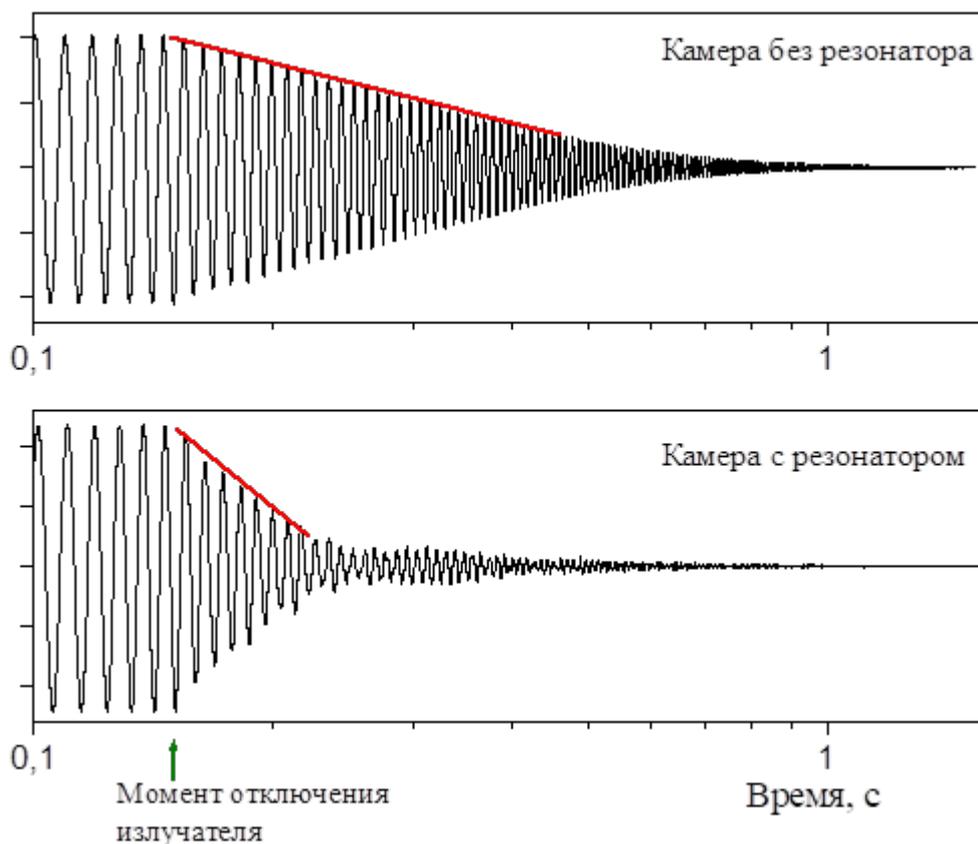


Рис. 6-5. Записи времени спада звукового давления в камере на частоте 111 Гц.

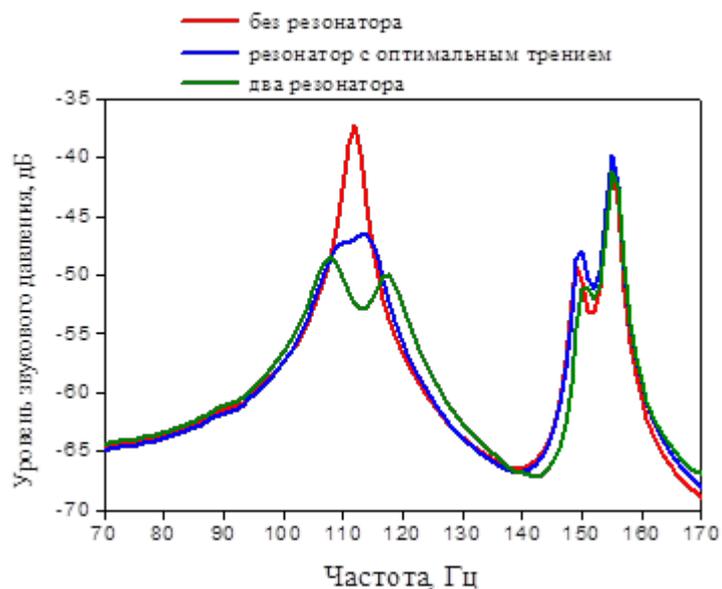


Рис. 6-6. Спектр сигнала, измеряемого контрольным микрофоном в камере с оптимально настроенным резонатором и двумя резонаторами, настроенными оптимально по отдельности.

Также на рис. 6-6 представлены результаты измерения в камере с двумя резонаторами, расположенными в различных углах камеры. При этом резонаторы по отдельности настроены на оптимальное поглощение звука в камере (одиночные резонаторы имеют одинаковую характеристику – синяя кривая на рис. 6-6).

Для оценки работоспособности предлагаемого метода резонансного поглощения звука на собственных частотах помещения была проведена серия измерений звукового поля в реальном помещении. Помещение имеет размеры 8.3x4.9x2.9 м, стены выполнены из бетона. В одной стене имеется открытый дверной проем. Исследованы два резонатора объемом 50 л (рис. 6-7) и 100 л (рис. 6-8).

Корпусы резонаторов изготовлены из ламинированной древесно-стружечной плиты толщиной 17 мм. Корпус имеет жесткую и герметичную конструкцию. Горло выполнено из пластмассовой трубы диаметром 125 мм. Для наилучшего примыкания горла к корпусу в верхнюю стенку резонатора установлена уплотнительная муфта, позволяющая горлу свободно в ней перемещаться, что, в свою очередь, позволяет точно и плавно подстраивать

частоту резонанса. Для увеличения трения в горле у резонатора объемом 100 литров предусмотрена специальная рамка с легко продуваемым звукопоглощающим материалом. Конструкция рамки позволяет закрывать (открывать) горло полностью или частично, тем самым плавно изменяя трение в горле.

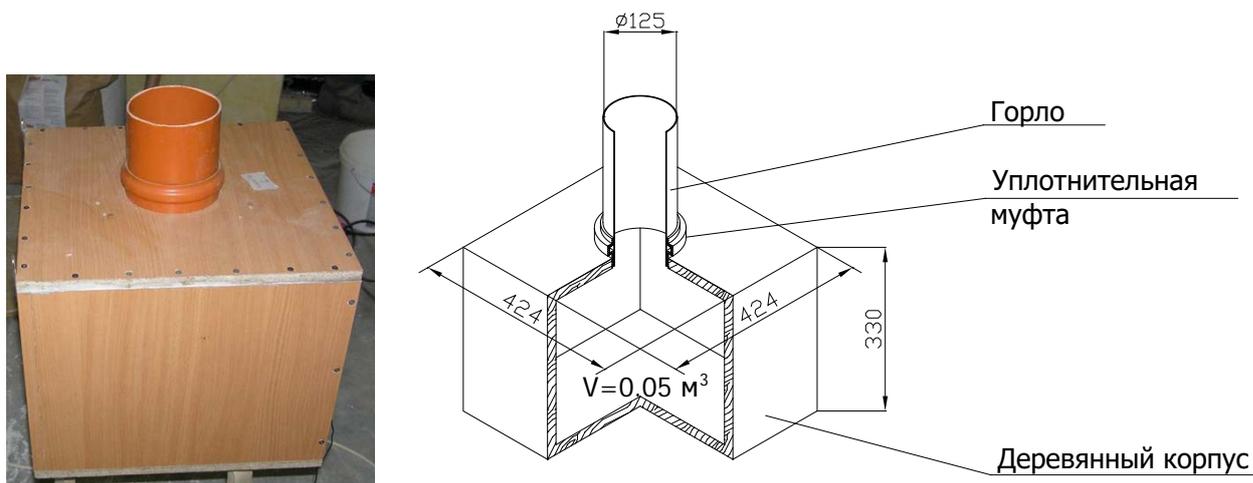


Рис. 6-7. Резонатор объемом 50 литров, настроенный на частоту 41 Гц.

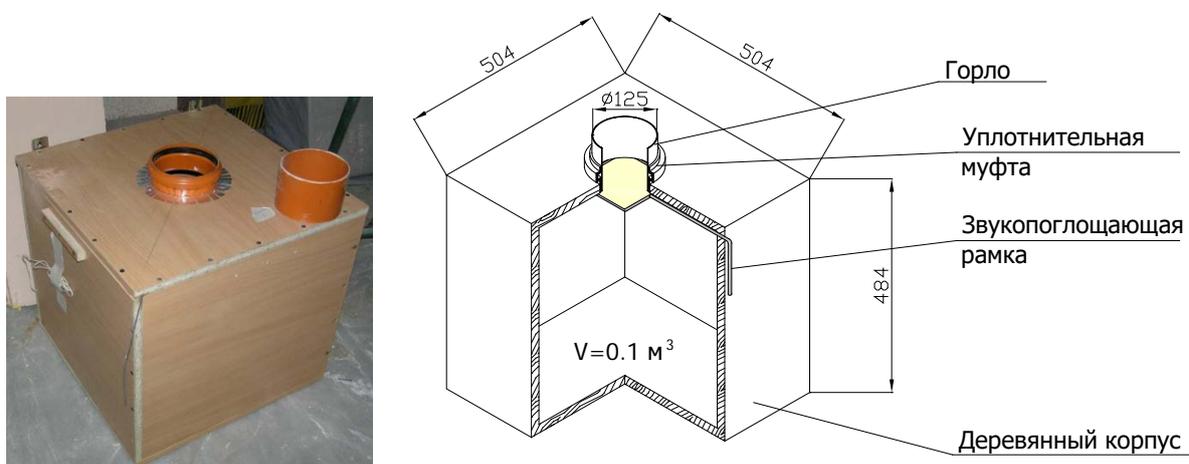


Рис. 6-8. Резонатор объемом 100 литров, настроенный на частоту 41 Гц.

На рис. 6-9 представлена схема тестового помещения с указанием мест расположения резонатора, первичного источника звука (громкоговоритель) и точек измерения.

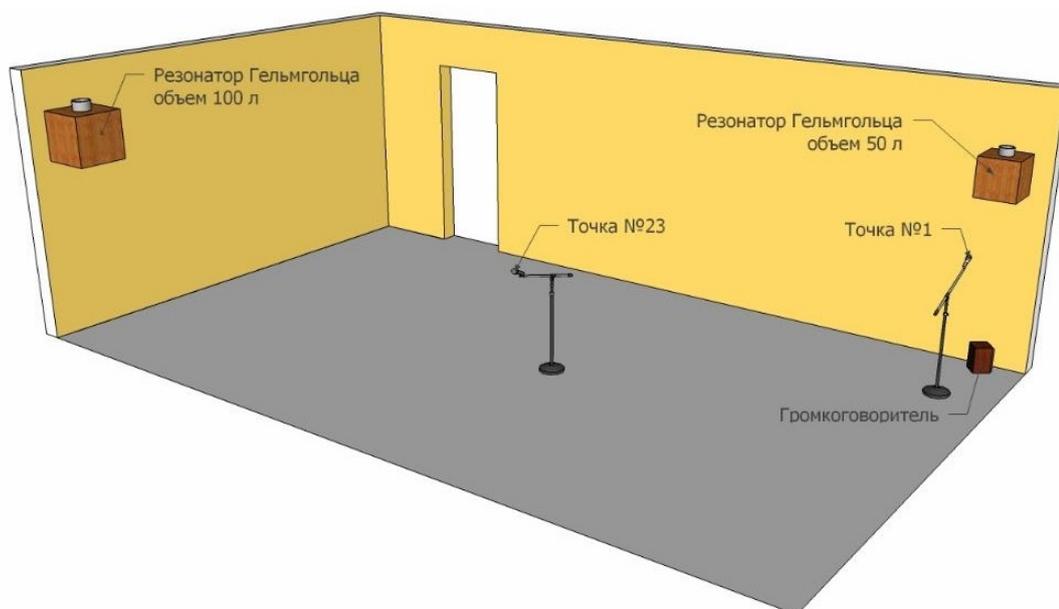


Рис. 6-9. Расположение резонаторов в тестовом помещении.

На рис. 6-10 приведены измерения звукового давления в точках №1 (угол помещения, в котором расположен излучатель и резонатор объемом 50 л) и №23 (центр помещения) в отсутствие резонатора, с одним резонатором и двумя резонаторами. При этом два резонатора настраиваются на оптимальное поглощение по отдельности, а затем вместе. Из результатов измерений следует, что резонатор большего объема более эффективен, а применение двух резонаторов позволяет значительно увеличить подавление собственного резонанса помещения.

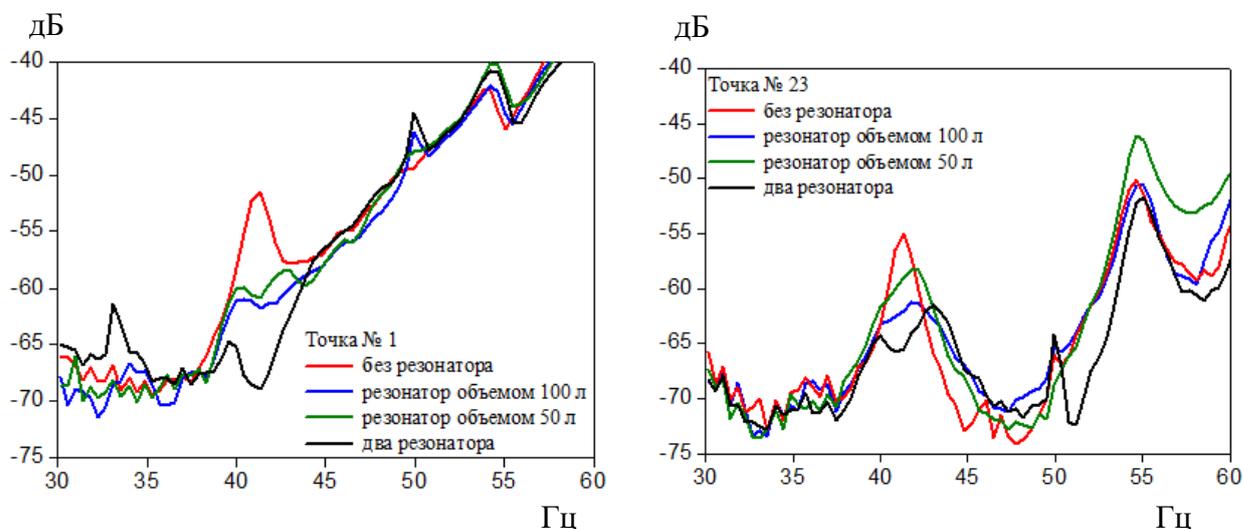


Рис. 6-10. Спектр звукового давления в точках 1 и 23 на рис. 6-9.

Проведенное экспериментальное исследование позволяет сделать вывод об эффективности применения резонаторов Гельмгольца для подавления собственных резонансов помещения. Снижение резонансов помещения составляет от 5 до 15 дБ.

## **6.2. Активный резонатор**

### **6.2.1. Оптимизация поглощения одной моды**

Параметры резонатора Гельмгольца, при которых поглощение звука, характеризуемое коэффициентами затухания собственных колебаний помещения, максимально, получены в разделе 6.1.1. Коэффициенты затухания первых мод помещения с резонатором зависят от его массы: чем она меньше, тем больше коэффициенты затухания. Но даже при нулевой длине горла резонатора его масса ненулевая и определяется присоединенной массой отверстия. Поэтому резонатор Гельмгольца в помещении не обеспечивает максимальное поглощение, достижимое монопольным рассеивателем.

Вместе с тем задача о максимальном поглощении звука на первых резонансах помещения актуальна для акустики малых помещений: для выравнивания частотной характеристики помещений часто используются активные методы гашения звука [211, 262]. Активные методы [18, 204, 315] позволяют реализовать любой импеданс локального рассеивателя, а, следовательно, достичь максимального демпфирования собственных мод помещения. В связи с этим рассмотрим задачу о максимальном поглощении звука монополем в помещении с абсолютно жесткими стенками [74]. В качестве характеристики поглощения выбран коэффициент затухания свободных колебаний системы «помещение-монополь».

Предварительно сделаем замечание об особенностях задачи с точечным резонатором, рассмотренной в разделе 6.1.1. Ряд, входящий в (6.5), является расходящимся, например, для кубического помещения на частотах ниже первой резонансной частоты сумма в (6.5) приблизительно равна  $\sum_{n,m,q} (n^2 +$

$m^2 + q^2)^{-1}$ . Для расчетов можно вводить в среду небольшое поглощение, тогда вклад высокочастотных мод в эту сумму будет экспоненциально уменьшаться. Такой подход для решения поставленной задачи с точечным монополем для первого резонанса помещения использован в [322]. С другой стороны, можно рассмотреть поршень конечного размера, тогда высокочастотные моды, чья длина волны меньше размеров монополя, дадут вклад близкий к нулю в указанную сумму. Поэтому рассмотрим монополь в виде поршня, малого по сравнению с размерами помещения, встроенного в стенку. В первую очередь вычислим его импеданс излучения, а затем определим собственные частоты системы «помещение-монополь». Заметим, что импеданс излучения прямоугольных поршней в каналах получен в работах [90, 110].

В стенке прямоугольного помещения (рис. 6-11), находящейся в плоскости  $x = 0$ , установлен квадратный поршень со стороной  $a$ , положение поршня задается координатами одной из его вершин  $(y_0, z_0)$ . Пусть поршень колеблется по гармоническому закону с частотой  $\omega$  и амплитудой скорости  $V$ .

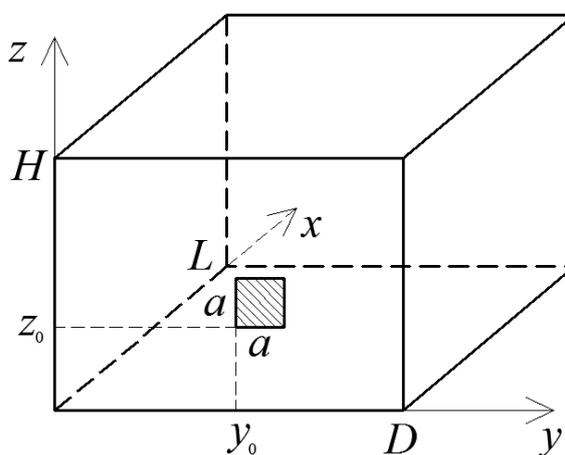


Рис. 6-11. Прямоугольное помещение с монополем.

Звуковое поле в помещении может быть найдено стандартным методом Фурье. Звуковое давление записывается в виде суммы

$$p = i\omega\rho \sum_{n,m} V_{nm} \frac{\cos[\xi_{nm}(x-L)]}{\xi_{nm} \sin \xi_{nm} L} \cos \eta_n y \cos \zeta_m z, \quad (6.14)$$

$$V_{nm} = \frac{4V}{DH\varepsilon_n\varepsilon_m} \alpha_n \beta_m, \quad (6.15)$$

где  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\eta_n = \pi n/D$ ,  $\zeta_m = \pi m/H$ ,  $\xi_{nm} = \sqrt{k^2 - \eta_n^2 - \zeta_m^2}$ ,  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\varepsilon_{n \geq 1} = 1$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = a$ ,

$$\alpha_{n \geq 1} = \frac{\sin \eta_n (y_0 + a) - \sin \eta_n y_0}{\eta_n}, \quad \beta_{m \geq 1} = \frac{\sin \zeta_m (z_0 + a) - \sin \zeta_m z_0}{\zeta_m}.$$

Сила, действующая на поршень со стороны среды, определяется выражением

$$F = \int_S p|_{x=0} dS, \quad (6.16)$$

где  $S$  – площадь поверхности поршня. Из (6.14) и (6.16) находим импеданс поршня

$$Z_r = \frac{F}{V} = i \frac{4\omega\rho}{DH} \sum_{n,m} \frac{\text{ctg} \xi_{nm} L}{\varepsilon_n \varepsilon_m \xi_{nm}} \alpha_n^2 \beta_m^2. \quad (6.17)$$

Коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_m$  описывают влияние положения поршня на стенке на его импеданс. Если поршень расположен в углу, т.е. если  $y_0 = z_0 = 0$ , то его колебания возбуждают все моды помещения. Если поршень расположен в центре стенки, т.е. если  $y_0 = (D - a)/2$  и  $z_0 = (H - a)/2$ , то его колебания возбуждают только нулевую и четные по  $n$  и  $m$  моды.

Для расчетов рассмотрим два вида помещений: кубическое ( $L:D:H = 1:1:1$ ) и вытянутое ( $L:D:H = 1:0.2:0.2$ ). Введем безразмерный импеданс и частоту

$$Z'_r = \frac{Z_r}{\rho c a^2}, \quad (6.18)$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (6.19)$$

где  $\omega_1 = \pi c/L$  – первая резонансная частота помещения без монополя. Далее штрихи у величин  $Z'_r$  и  $\omega'$  будем опускать.

На рис. 6-12 приведен расчет импеданса поршня  $Z_r$  в углу помещения и в центре стенки для двух помещений в зависимости от частоты. На собственных частотах возбуждаемых мод импеданс обращается в бесконечность. В вытянутом помещении импеданс слабо зависит от положения поршня на стенке, что также имеет место в одномодовых волноводах (см. раздел 3.3).

Пусть импеданс монополя имеет произвольное комплексное значение  $Z$ , которое, как и импеданс излучения (6.18), приведем к безразмерному виду  $Z' = Z/\rho c a^2$ , опуская при этом штрих у величины  $Z'$ . Тогда собственные частоты системы «помещение-монополь» определяются стандартным уравнением (6.3).

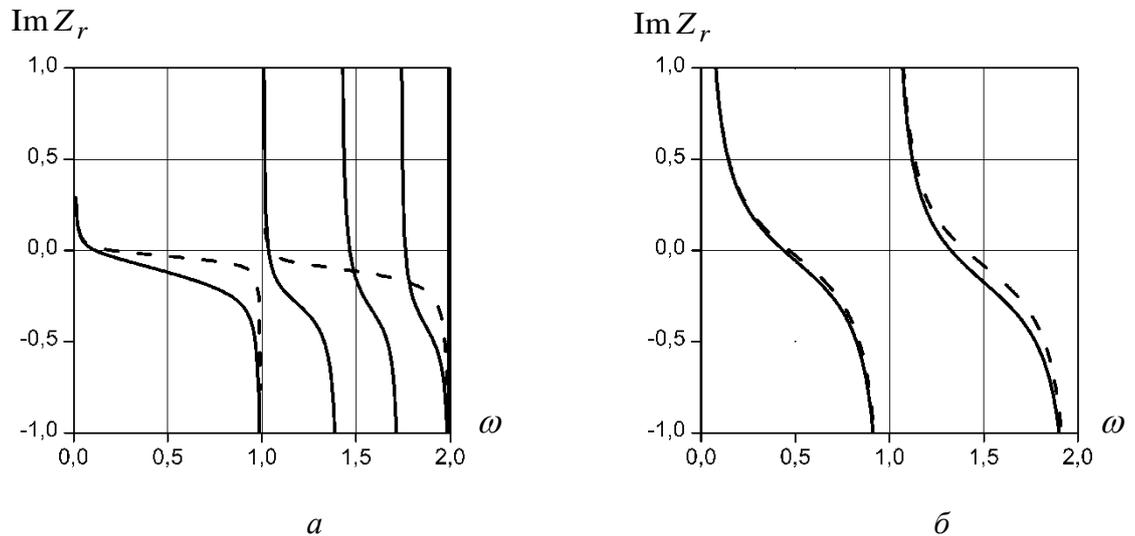


Рис. 6-12. Импеданс излучения поршня в углу помещения (сплошные линии) и в центре помещения (пунктирные линии): *a* – кубическое помещение, *б* – вытянутое помещение.

В первую очередь рассмотрим влияние вещественной части импеданса на значение корней (6.3) для кубического помещения с монополем в углу. На рис. 6-13 приведены первые три корня уравнения (6.3), найденные численно для двух значений мнимой части импеданса  $Z$ . Если рассматриваемая система бездиссипативна, т. е. при  $\text{Re } Z = 0$ , то корни вещественны, обозначим их  $\Omega_n$  и отметим на комплексной плоскости на рис. 6-13 проколотыми точками. Частоты  $\omega_n$  – собственные частоты помещения без поршня, наименьшая

собственная частота помещения согласно (6.3) равна  $\omega_1 = 1$ , вторая -  $\omega_2 = \sqrt{2}$ .

Нумерация  $\Omega_n$  начинается с  $n = 0$ , поскольку помещение с поршнем имеет дополнительную степень свободы и собственную частоту. На этой частоте звуковое давление во всем объеме помещения постоянно, что становится возможным в помещении с источником или стоком объемной скорости.

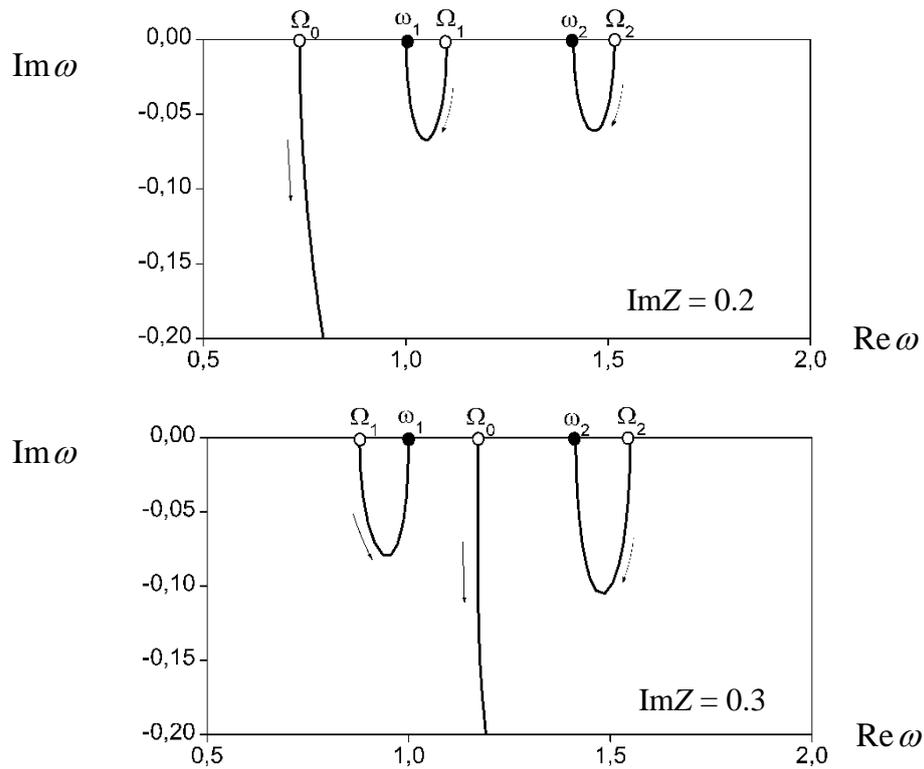


Рис. 6-13. Собственные частоты системы «помещение-поршень» при изменении  $\text{Re } Z$  от 0 до  $\infty$ . Стрелки указывают направление движения корней по кривой при увеличении  $\text{Re } Z$ .

При  $\text{Im } Z = 0.2$  все частоты  $\Omega_n$  оказываются выше  $\omega_n$ , при этом  $\Omega_0$  оказываются ниже  $\omega_1$ . При  $\text{Im } Z = 0.3$  частота  $\Omega_0$  оказывается между  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , т.е. частота собственного колебания, связанного с дополнительной степенью свободы, обусловленной движением поршня, увеличивается с увеличением значения  $\text{Im } Z$ .

Далее будем увеличивать значение действительной части импеданса поршня с нулевого значения до бесконечного и отслеживать, как изменяются

собственные частоты. При ненулевом значении  $\text{Re } Z$  собственные частоты становятся комплексными, а соответствующие им моды – затухающими. С увеличением  $\text{Re } Z$  мнимые части собственных частот уменьшаются, достигают минимального значения (за исключением нулевой моды), а затем стремятся к нулю. Мнимая часть нулевой собственной частоты не имеет экстремума, поэтому соответствующее собственное колебание системы становится все более затухающим. Таким образом, в пределе  $\text{Re } Z \rightarrow \infty$  собственные частоты стремятся к собственным частотам помещения без поршня  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т.е. сильно задемпфированный поршень не оказывает влияния на звуковое поле в помещении.

Между значениями  $\text{Im } Z = 0.2$  и  $\text{Im } Z = 0.3$  существует значение  $\text{Im } Z$ , при котором поведение корней (6.3) принципиально отличается. На рис. 6-14 приведены собственные частоты системы «помещение-поршень» для  $\text{Im } Z = 0.26$  при изменении  $\text{Re } Z$  от 0 до  $\infty$ . Ветви корней, соответствующие нулевой и первой моде, имеют общую точку  $\tilde{\omega}_{01}$ . Как и в случае резонатора Гельмгольца, максимальное поглощение звука на двух первых модах происходит на кратной собственной частоте. Также можно подобрать такое значение импеданса поршня, при котором одинаковую собственную частоту будут иметь нулевая и вторая моды, т.е. максимальное поглощение будет достигнуто в окрестности второй моды.

Далее вычислим коэффициент затухания первого собственного колебания системы. В окрестности первой резонансной частоты помещения  $\omega_1$  будет два собственных колебания, имеющих в случае бездиссипативного поршня собственные частоты  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ . Обозначим два первых корня уравнения (6.2)  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$ . Скорость затухания этих мод определяется величинами  $\text{Im}\tilde{\omega}_1$  и  $\text{Im}\tilde{\omega}_2$ . Длительность затухания колебаний системы «помещение-поршень» в окрестности частоты  $\omega_1$  будет, очевидно, определяться меньшим из двух коэффициентов затухания. Введем коэффициент затухания колебания системы следующим образом

$$\delta = \min(-\operatorname{Im}\tilde{\omega}_1, -\operatorname{Im}\tilde{\omega}_2). \quad (6.20)$$

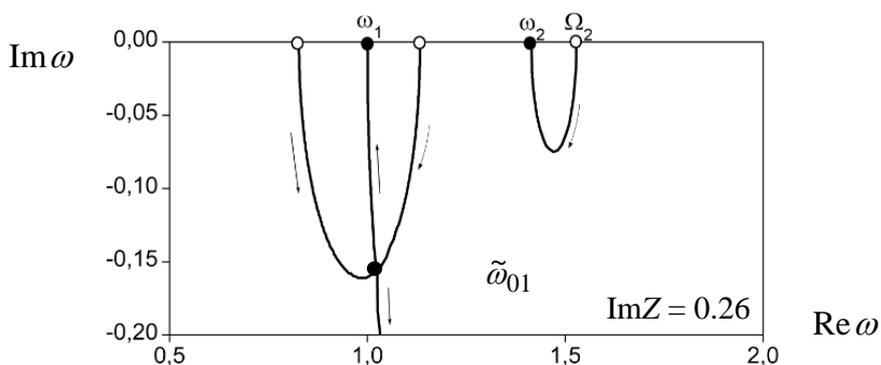


Рис. 6-14. Кратная собственная частота  $\tilde{\omega}_{01}$ .

Коэффициент затухания  $\delta$  является функцией импеданса  $Z$ . На рис. 6-15 приведена зависимость коэффициента затухания от комплексного импеданса  $Z$  в виде линий равных значений  $\delta$ , рассчитанных согласно (6.20). Функция  $\delta(Z)$  имеет максимальное значение  $\delta_m = 0.15$  при  $Z_m = 0.12 + 0.26i$ .

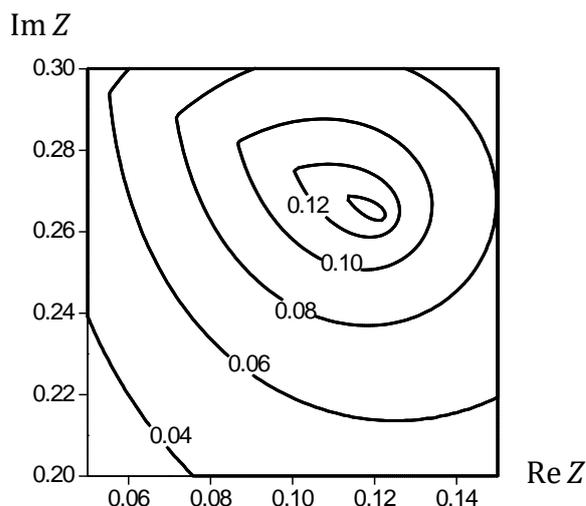


Рис. 6-15. Коэффициент затухания системы «помещение-поршень»  $\delta$  в окрестности первой резонансной частоты помещения в зависимости от импеданса поршня  $Z$ .

Аналогичным образом можно найти оптимальный импеданс поршня  $Z_m$  и максимальный коэффициент затухания первого собственного колебания помещения  $\delta_m$  для вытянутого помещения и для поршня, расположенного в центре стенки. Результаты расчетов приведены в таблице 6-1. Импедансы излучения поршня  $Z_r$  для этих случаев приведены на рис. 6-12.

Таблица 6-1. Оптимальный импеданс поршня для максимального поглощения звука

Расположение поршня	Кубическое помещение $L:D:H = 1:1:1$		Вытянутое помещение $L:D:H = 1:0.2:0.2$	
	$Z_m$	$\delta_m$	$Z_m$	$\delta_m$
В углу помещения $y_0 = z_0 = 0$	$0.12+0.26i$	0.15	$0.33+0.11i$	0.53
По центру стенки $y_0 = (D - a)/2,$ $z_0 = (H - a)/2$	$0.03+0.07i$	0.19	$0.29+0.06i$	0.64

Как следует из расчетов, в вытянутом помещении коэффициент затухания значительно выше, чем в кубическом, из-за меньшего влияния резонансов помещения с ненулевыми номерами  $n$  и  $m$  на движение поршня. Также при расположении поршня в центре стенки обеспечивается большее поглощение, поскольку нечетные  $n$  и  $m$  по моды помещения не возбуждаются.

Найденные коэффициенты затухания также значительно выше, чем характерные коэффициенты затухания, обеспечиваемые резонатором Гельмгольца. В соразмерном помещении с поглощающим резонатором Гельмгольца, как показано в разделе 6.1.1, коэффициент затухания первого собственного колебания помещения составляет около 0.05, в то время как в кубическом помещении с монополюсом с оптимальным импедансом он в 3-4 раза выше.

### 6.2.2. Модельный эксперимент

Поглощение звука активным резонатором исследовано в модельном эксперименте [291]. Замкнутое помещение, в котором проведены исследования, представляет собой полый параллелепипед с жесткими стенками (деревянный ящик) размерами 60x55x39 см. Размеры выбраны с таким учетом, чтобы в рабочий частотный диапазон активного резонатора попала область первых резонансов помещения. В эксперименте, схема которого представлена на рис. 6-15,а, активный резонатор 2 был встроен в одну из стенок помещения 1 около угла. Первичный излучатель 3 расположен

в противоположном углу. Контроль степени гашения поля в помещении осуществлялся контрольным микрофоном 4, который также расположен в одном из углов помещения. Поглощение звуковой энергии активным резонатором определялось двумя способами. В первом способе фиксируется изменение резонансных пиков. Для этого анализируется спектр сигнала на контрольном микрофоне. Во втором способе измеряется спад звукового давления во времени на определенной частоте. Первичный излучатель создает в помещении гармоническое звуковое поле. В некоторый момент времени излучатель отключается, и записывается звуковой сигнал на микрофоне. Скорость спада амплитуды давления во времени характеризует поглощение в помещении, которое определяется коэффициентом поглощения стенок и наличием активного поглотителя.

Первые резонансы помещения соответствуют частотам 310 Гц, 340 Гц, 450 Гц. Измерение спада звукового давления на частоте 450 Гц приведены на рис. 6-15,б. Временные реализации OFF и ON соответствуют выключенному и включенному активному поглотителю. Источник звука отключается в момент времени  $t = 20$  мс. Очевидно, что работа активного резонатора приводит к более быстрому спаду звукового давления во времени. Резонансная частота 450 Гц является обособленной, т.е. в ее окрестности нет других резонансных частот, поэтому при отключении источника не возникает биений. Из кривой на рис. 6-15,б легко определить времена экспоненциального спада (время, за которое уровень звукового давления уменьшится на 60 дБ):  $T_{off} = 103$  мс и  $T_{on} = 62$  мс для выключенного и включенного активного поглотителя соответственно.

Следовательно, активное поглощение приводит к уменьшению времени спада почти в два раза.

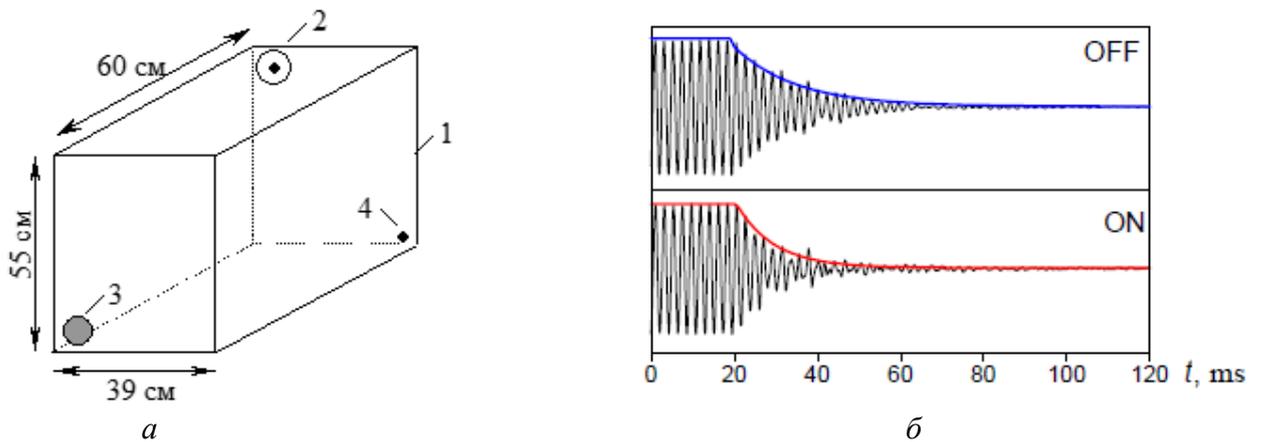


Рис. 6-15. Схема эксперимента по исследованию активного резонатора в режиме поглощения в замкнутом помещении (а). 1 – замкнутое помещение, 2 – активный резонатор, 3 – первичный излучатель, 4 – контрольный микрофон. Затухание звука на резонансной частоте 450 Гц (б) при включенном (ON) и выключенном (OFF) активном резонаторе после отключения источника звука в момент времени  $t_0 = 20$  мс.

### 6.2.3. Демпфирование нескольких мод

В предыдущих разделах подробно рассмотрено взаимодействие резонаторов с некоторой собственной модой помещения, найдены условия ее максимального демпфирования. Однако, проблемной может оказаться не один резонанс помещения, а несколько. В этом случае могут использоваться несколько пассивных резонаторов, настроенных на разные частоты. Активный резонатор может обеспечить оптимальный или близкий к оптимальному импеданс в широкой полосе частот. Рассмотрим возможность подавления нескольких резонансов помещения одним активным резонатором [283]. Собственные частоты системы «помещение-резонатор» (рис. 6-11) определяются из уравнения (6.3), импеданс излучения – формулой (6.17). Далее мы будем пользоваться безразмерными импедансами  $Z$  и  $Z_r$ , определенными выражением (6.18).

В первую очередь проанализируем решения (6.3), обозначив их  $\psi_n$ , для действительных значений импеданса, полагая  $\text{Re}Z = R$ ,  $\text{Im}Z = 0$ . Для первых пяти решений зависимости  $\psi_n(R)$  приведены на рис. 6-16,а для помещения с

соотношением сторон  $L:H:D = 1:0.7:0.3$ . При нулевом трении  $R = 0$  корни имеют действительные значения  $\psi_n = \Omega_n$ .

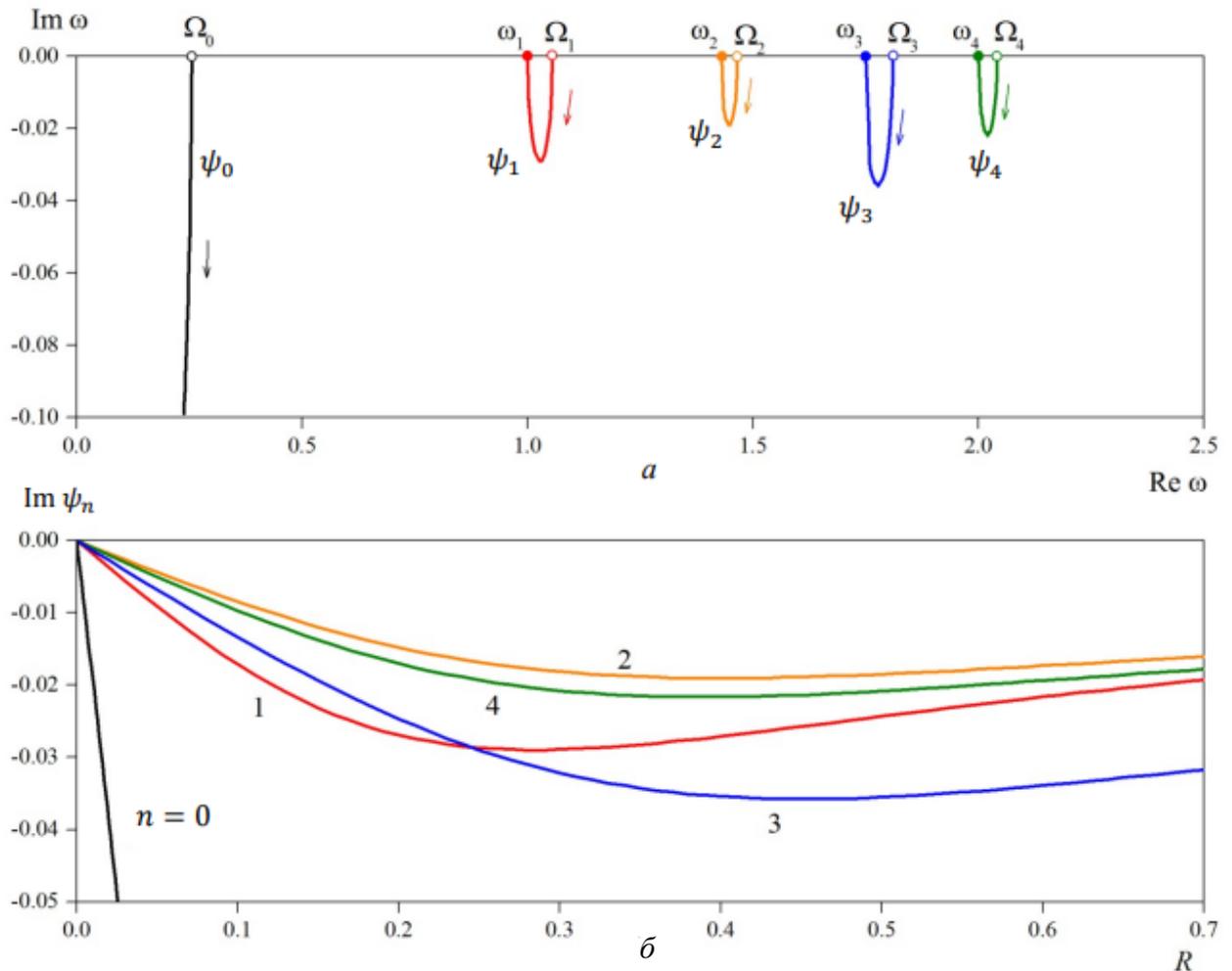


Рис. 6-16. Собственные частоты помещения с монополем с импедансом  $\text{Im}Z = 0$  (а) и их мнимые части (б). Стрелки указывают движение корней  $\psi_n$  при увеличении  $R$  от 0 до  $\infty$ .

Заметим, что комната с монополем имеет дополнительную степень свободы и соответствующую собственную частоту  $\Omega_0$ . Но этой частоте звуковое давление имеет одинаковое значение во всем объеме помещения. По этой причине частоты  $\Omega_n$  нумеруются со значения  $n = 0$ , в отличие от частот  $\omega_n$ . На рис. 6-16,а видно, что для  $n \geq 1$  все частоты  $\Omega_n$  имеют большие значения, чем частоты  $\omega_n$ , хотя они и близки друг к другу.

Будем увеличивать значение  $R$  от нуля до бесконечности. При  $R \neq 0$  все собственные частоты становятся комплексными, а моды – затухающими. С увеличением  $R$  мнимые части собственных частот уменьшаются, достигают

минимального значения за исключением моды  $n = 0$ , а затем стремятся к нулю. Мнимая часть нулевой собственной частоты  $\text{Im}\psi_0$  не имеет экстремума, и, следовательно, соответствующая мода становится все более и более задемпфированной. В пределе  $R \rightarrow \infty$  частоты  $\psi_n$  стремятся к  $\omega_n$ , поэтому монополь с большим трением не влияет на звуковое поле в помещении. На рис. 6-16,б представлены зависимости  $\text{Im}\psi_n(R)$ . Все кривые за исключением  $n = 0$  имеют минимум при различных значениях  $R$ .

Решая численно (6.3), легко показать, что монополь слабо влияет на поле в помещении, если  $\text{Im}Z < 0$ . В пределе  $\text{Im}Z \rightarrow -\infty$  собственные частоты  $\Omega_0 \rightarrow 0$  и  $\Omega_n \rightarrow \omega_n$ ,  $n \geq 1$ , поэтому импеданс с отрицательной реактивной частью не эффективен для демпфирования собственных мод. Обратный эффект наблюдается при  $\text{Im}Z > 0$ , при некотором значении импеданса образуется двойная мода, соответствующая максимальному демпфированию. Проследим проявление таких мод при различных значениях импеданса, построив графики аналогичные приведенному на рис. 6-16,а. На рис. 6-17 показаны зависимости пяти первых решений (6.3) от  $R$  при фиксированных значениях  $\text{Im}Z$ . Все ветви начинаются с проколотых точек  $\psi_n(0) = \Omega_n$  и заканчиваются в точках  $\psi_n(\infty) = \omega_n$  за исключением  $\psi_0(R)$ . При  $\text{Im}Z = 0.240$  ветви  $\psi_0(R)$  и  $\psi_1(R)$  имеют общую точку  $\psi_{01}$ , т.е. образуется двойная мода. При других значениях  $\text{Im}Z$ , указанных на рис. 6-17, две ветви  $\psi_0(R)$  и  $\psi_n(R)$  имеют общую точку  $\psi_{0n}$ .

С увеличением  $\text{Im}Z$  начало ветви  $\psi_0(R)$ , т.е. частота  $\Omega_0$ , смещается по действительной оси в сторону больших значений, при этом ветвь  $\psi_0(R)$  последовательно взаимодействует с другими ветвями. У этих ветвей, показанных черным цветом на рис. 6-17, образуется общая точка, соответствующая двойной моде.

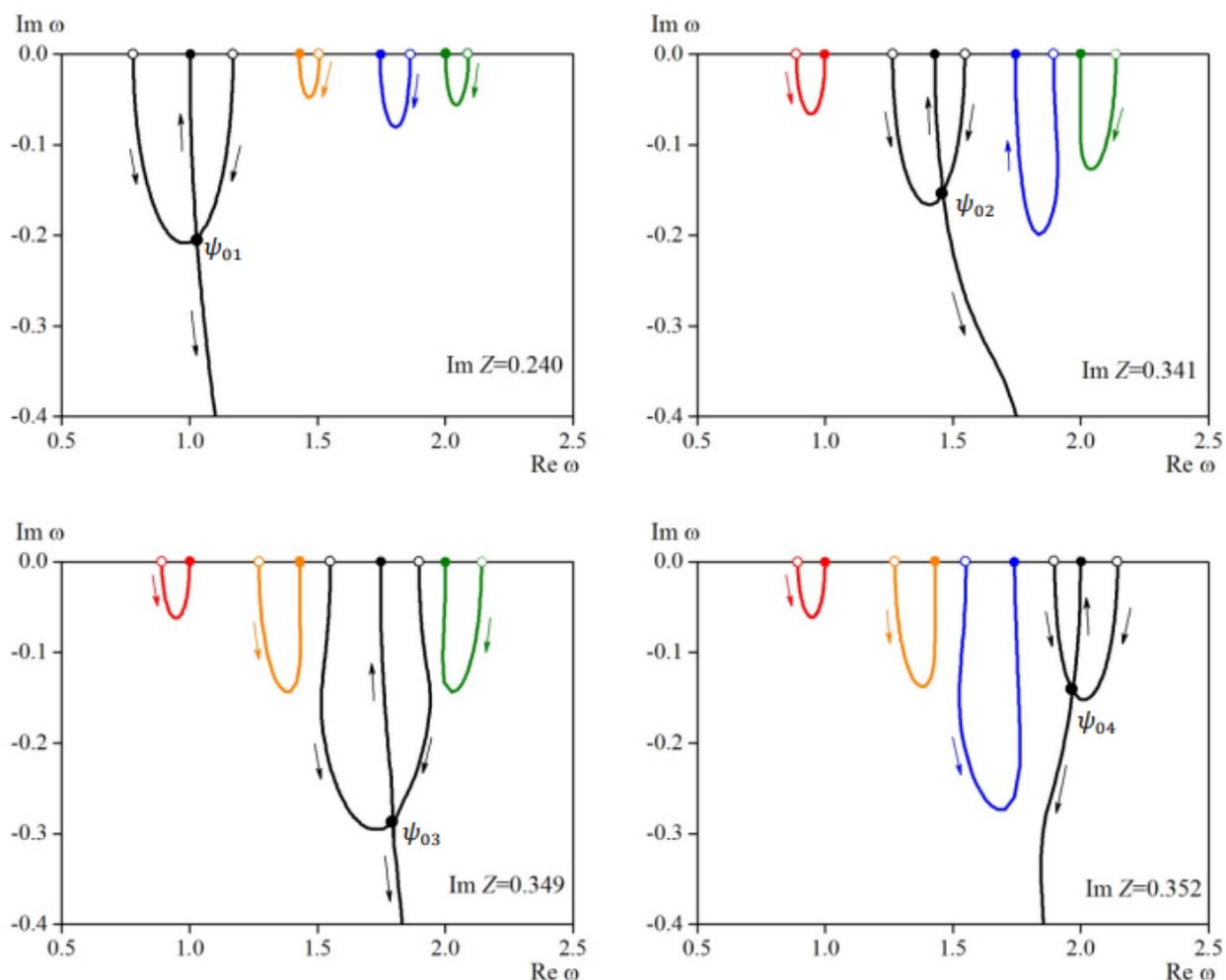


Рис. 6-17. Собственные частоты помещения с монополем с различными значениями  $\text{Im}Z$ . Стрелки указывают движение корней  $\psi_n$  при увеличении  $R$  от 0 до  $\infty$ .

Коэффициент затухания двойной моды  $\tilde{\delta}_n = -\text{Im}\psi_{0n}$  достигается при импедансе монополя  $\tilde{Z}_n$ . В таблице 6-2 приведены значения собственных частот, коэффициентов затухания и оптимального импеданса для первых четырех двойных мод.

Таблица 6-2. Оптимальные значения импеданса и собственных частот

$n$	$\psi_{0n}$	$\tilde{\delta}_n$	$\tilde{Z}_n$
1	$1.023 - 0.187i$	0.187	$0.152 + 0.240i$
2	$1.464 - 0.144i$	0.144	$0.192 + 0.341i$
3	$1.816 - 0.267i$	0.267	$0.256 + 0.349i$
4	$1.979 - 0.146i$	0.146	$0.230 + 0.352i$

Для демпфирования нескольких мод необходимо ввести частотно-зависимый импеданс  $Z(\omega)$ , который удовлетворяет отношению  $Z(\psi_{0n}) = \tilde{Z}_n$ . Ясно, что функция  $Z(\omega)$  может оказаться достаточно сложной для практической реализации, по этой причине можно допустить некоторые упрощения требований для  $Z(\omega)$ . Простейший способ – настроить импеданс монополя на максимальное демпфирование некоторой моды, тогда на остальных модах импеданс не будет оптимальным, но его значения все-таки будут иметь близкие значения к оптимальным. Для определенности выберем первую настройку  $Z_1(\omega) = \tilde{Z}_1$  на демпфирование наиболее низкочастотного резонанса помещения.

Также можно выбрать такую функцию, которая имеет простую частотную зависимость и близкие значения к некоторым выбранным модам. На рис. 6-18 показаны действительные и мнимые части оптимальных импедансов  $\tilde{Z}_n$  для первых четырех мод. Выберем линейно зависимые функции для  $\text{Re}Z(\omega)$  и  $\text{Im}Z(\omega)$  методом наименьших квадратов. Графически эта функция показана на рис. 6-18, ее аналитическое выражение:

$$Z_2(\omega) = (0.05 + 0.10\omega) + i(0.14 + 0.11\omega). \quad (6.21)$$

Далее рассмотрим влияние активного резонатора с двумя настройками на звуковое поле в помещении на низких частотах. Для этого расположим активный резонатор в углу помещения, чтобы обеспечить его эффективное взаимодействие со всеми модами. Первичный источник звука также расположим в углу, чтобы возбуждались все моды. Расположение источника и резонатора приведено на рис. 6-19.

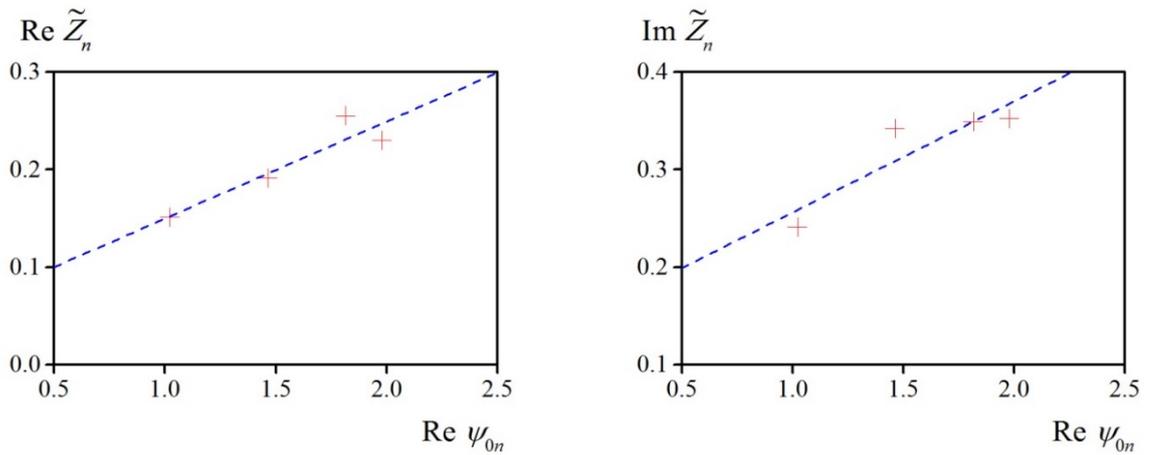


Рис. 6-18. Оптимальные импедансы для демпфирования первых четырех мод помещения (крестики) и линейная аппроксимация (пунктир).

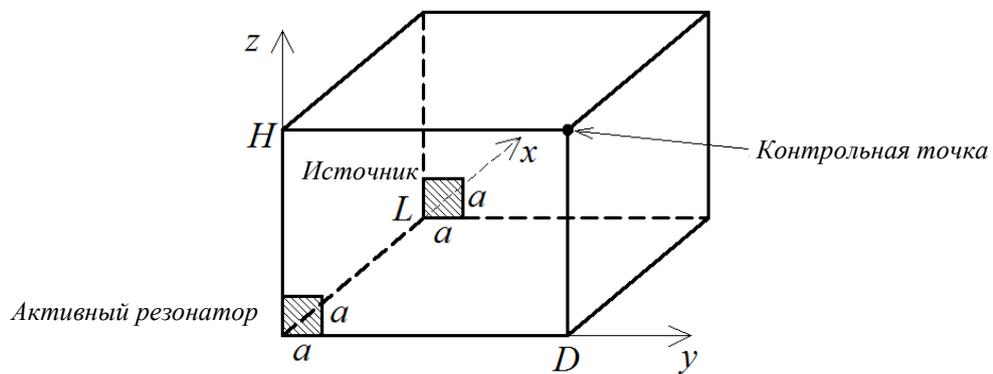


Рис. 6-19. Помещение с источником звука и активным резонатором.

Пусть резонатор и источник осциллируют на частоте  $\omega$ , амплитуда скорости их колебаний  $V$  и  $v$  соответственно. Используя (6.14) и (6.15), запишем поле в помещении

$$p = i\omega\rho \sum_{n,m} \frac{V_{nm} \cos[\xi_{nm}(x-L)] - v_{nm} \cos \xi_{nm}x}{\xi_{nm} \sin \xi_{nm}L} \cos \eta_n y \cos \zeta_m z, \quad (6.22)$$

$$V_{nm} = \frac{4V}{DH\varepsilon_n\varepsilon_m} \alpha_n \beta_m, \quad v_{nm} = \frac{4v}{DH\varepsilon_n\varepsilon_m} \alpha_n \beta_m, \quad (6.23)$$

где  $\alpha_0 = \beta_0 = a$ ,

$$\alpha_{n \geq 1} = \frac{\sin \eta_n a}{\eta_n}, \quad \beta_{m \geq 1} = \frac{\sin \zeta_m a}{\zeta_m}. \quad (6.24)$$

Сила, действующая на резонатор, равна

$$F = \int_S p|_{x=0} dS = i \frac{4\omega\rho}{DH} \sum_{n,m} \frac{V \cos \xi_{nm}L - v}{\varepsilon_n \varepsilon_m \xi_{nm} \sin \xi_{nm}L} \alpha_n^2 \beta_m^2. \quad (6.25)$$

Учитывая соотношение  $F = ZV$ , находим из уравнения (6.25) скорость резонатора

$$V = v \frac{\sum_{n,m} \frac{\sigma_{nm}}{\sin \xi_{nm}L}}{i \frac{ZDH}{4\omega\rho} + \sum_{n,m} \sigma_{nm} \operatorname{ctg} \xi_{nm}L}, \quad \sigma_{nm} = \frac{\alpha_n^2 \beta_m^2}{\varepsilon_n \varepsilon_m \xi_{nm}}. \quad (6.26)$$

Подставляя (6.26) в (6.22), вычисляем поле в помещении. Расположим контрольную точку в углу помещения (рис. 6-19). Введем безразмерную величину, характеризующую уровень звукового давления

$$P = 20 \lg \left| \frac{p(0, H, D)}{\rho c v} \right|. \quad (6.27)$$

На рис. 6-20 приведены результаты расчета  $P$  в контрольной точке для трех настроек активного резонатора. В первом случае импеданс бесконечен, поэтому скорость резонатора равна  $V = 0$ . Пики на частотах  $\omega_n$  соответствуют собственным частотам помещения. Во втором случае импеданс монополя не зависит от частоты и равен оптимальному импедансу для гашения первого резонанса помещения  $Z = \tilde{Z}_1$ , значение которого приведено в таблице 6-2. Первый пик около частоты  $\omega = 1$  в частотной характеристике полностью сглажен, однако на более высоких частотах  $\omega \approx 1.5$  и  $\omega \approx 1.8$  наблюдаются резонансные пики, при этом они довольно сильно задемпфированы. Третья настройка соответствует частотно-зависимой функции  $Z = Z_2(\omega)$ , заданной уравнением (6.21). В этом случае импеданс близок к оптимальному для первых четырех мод, и эти моды практически не проявляются на частотной характеристике.

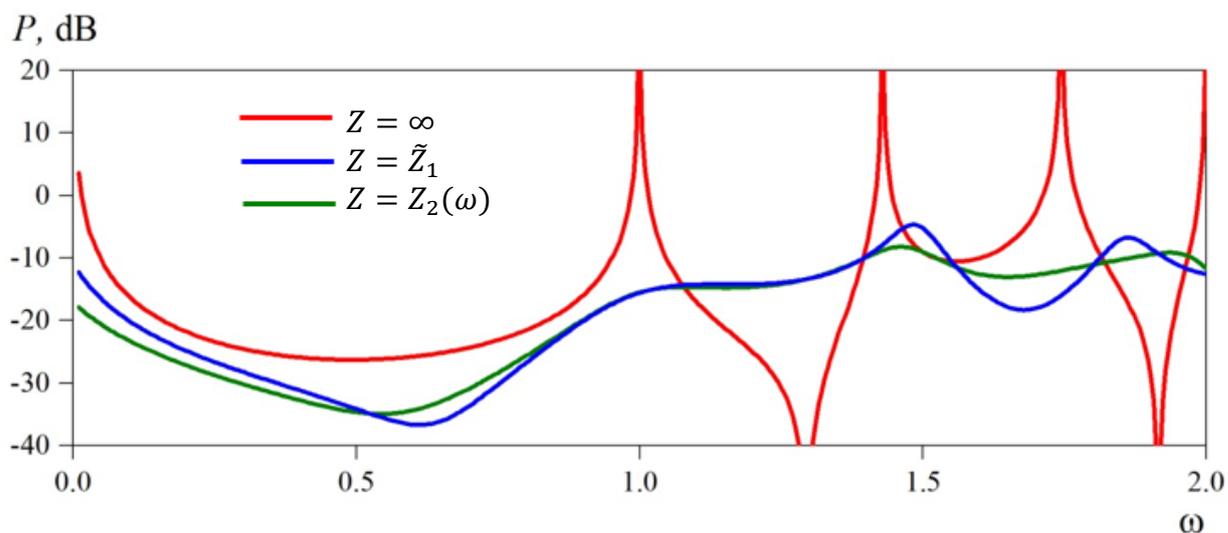


Рис. 6-20. Уровень звукового давления в углу помещения при различных настройках импеданса активного резонатора.

Расчетный пример показывает, что одиночный активный резонатор может эффективно демпфировать первые собственные частоты помещения, при этом его частотная характеристика сглаживается. Отметим, что также возможна оптимизация положения вторичных источников, если их импеданс по каким-то причинам отличается от оптимального для углового расположения [196, 326].

### 6.3. Импедансные стенки

На высоких частотах, когда поле в помещении определяется большим количеством собственных мод, для гашения звука требуется система резонаторов. Как и в случае каналов, рассмотрим помещение с импедансными стенками, образованными системой активных резонаторов, расположенных, например, в виде решетки на рис. 4-5,б. С точки зрения гашения звука в канале практическое значение имеет скорость затухания при распространении звука вдоль канала. В помещениях качество гашения звука обычно характеризуется затуханием во времени. При экспоненциальном затухании достаточно одного численного параметра для описания этого процесса, например времени реверберации [357]. Однако, экспоненциальный закон затухания имеет место при обеспечении достаточной диффузности звукового поля, в других случаях

законы затухания имеют более сложную зависимость от времени. В настоящем разделе исследуется затухание звука в помещении с импедансными стенками.

### 6.3.1. Помещение с одной поглощающей стенкой

В первую очередь рассмотрим помещение с одной импедансной стенкой [67]. В прямоугольном помещении (рис. 6-11 без поршня на стенке) выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0, \quad (6.28)$$

и граничные условия

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0,L} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0,D} = \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{p}{v_z} \right|_{z=H} = \rho c Z, \quad (6.29)$$

где  $p$  – давление,  $v_z$  – компонента скорости в направлении  $z$ ,  $Z$  – безразмерный импеданс стенки.

Решение (6.28)-(6.29) может быть записано в виде суммы мод

$$p = \sum_{n,m,q} a_{nmq} P_{nmq}, \quad P_{nmq} = \cos \xi_n x \cos \psi_m y \cos \zeta_q z, \quad (6.30)$$

где  $n, m, q = 0, 1, 2, \dots$ ,  $a_{nmq}$  – коэффициент возбуждения моды  $(n, m, q)$ ,  $\xi_n = \pi n / 2L$ ,  $\psi_m = \pi m / 2D$ ,  $\zeta_q$  – решения следующего уравнения

$$\zeta \operatorname{tg} \zeta H = -i \frac{\omega}{cZ}. \quad (6.31)$$

Подставляя (6.30) в (6.28), получаем

$$\left( \frac{\pi n}{2L} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{2D} \right)^2 + \zeta_q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (6.32)$$

Введем безразмерное волновое число  $k = \zeta H$  и безразмерную частоту  $\Omega = H\omega/c$ , а также параметр  $A = \left( \frac{\pi n H}{2L} \right)^2 + \left( \frac{\pi m H}{2D} \right)^2$ , характеризующий порядок моды по номерам  $n$  и  $m$ . Тогда из (6.31) и (6.32) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} Zk \operatorname{tg} k = i\Omega \\ A + k^2 = \Omega^2 \end{cases} \quad (6.33)$$

определяющую резонансные частоты мод и соответствующие им компоненты волнового числа в направлении  $z$ .

Для упрощения дальнейших оценок положим, что  $Z$  – действительная величина и  $Z \neq 1$ . Кроме этого, будем рассматривать моды высокого порядка по  $n$  и  $m$ , т.е.  $A \gg 1$ .

Найдем коэффициенты затухания мод, т.е. мнимые части резонансных частот. Решения  $(k_q, \Omega_q)$  системы (6.33) будем нумеровать, начиная с решения, для которого  $\operatorname{Re} k_q$  имеет минимальное значение, и далее в порядке увеличения  $\operatorname{Re} k_q$ .

Для нулевой моды ( $q = 0$ ) из (6.33) получаем  $\operatorname{Re} k_0 = 0$  и  $\operatorname{Re} \Omega_0 = 0$ , при этом мода оказывается быстро затухающей  $\operatorname{Im} \Omega_0 \sim -\sqrt{A}$ . Это мода, появляющаяся благодаря дополнительной степени свободы, связанной с подвижностью стенки. Аналогичная мода появляется в помещении с резонатором Гельмгольца (нулевые ветви на 6-1,а и 6-16,а).

На рис. 6-21 представлены первые пять решений системы (6.33), найденные численно, начиная с  $q = 1$ . Для расчета принято значение импеданса  $Z = 0.9$  и три значения параметра  $A$ , соответствующие в кубическом помещении модам с номерами  $n = 1, m = 0$  для  $A = 2.5$ ;  $n = 2, m = 0$  для  $A = 10$ ;  $n = 4, m = 0$  для  $A = 40$ .

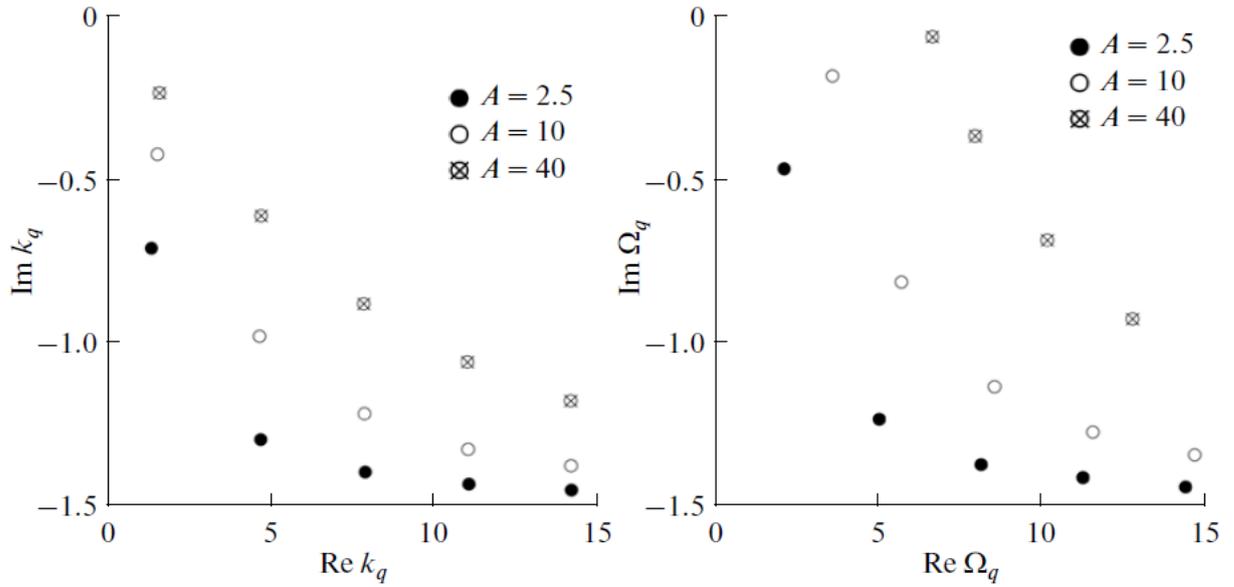


Рис. 6-21. Решения системы уравнений (6.33) для  $q = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Мода с номером  $q = 1$  имеет наименьший коэффициент затухания при фиксированных  $n$  и  $m$ . Анализ показывает, что решение (6.33) для  $q = 1$  имеет вид

$$k_1 \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 - i \frac{Z}{\sqrt{A}} \right), \quad \Omega_1 \approx \sqrt{A} - i \frac{\pi^2 Z}{4 A}. \quad (6.34)$$

Таким образом, наиболее медленно затухающими модами являются моды  $(n, m, 1)$ , при этом их коэффициент затухания уменьшается и стремится к нулю с увеличением номеров  $n$  и  $m$ .

В кубическом помещении  $L = D = H$ ,  $A = \frac{\pi^2}{4} (n^2 + m^2)$  энергия моды  $(n, m, 1)$  согласно (6.34) затухает по закону

$$P_{nm1}^2 \sim \exp \left( - \frac{2Z}{n^2 + m^2} \frac{ct}{H} \right). \quad (6.35)$$

Введем параметры  $\phi$  и  $\theta$

$$\operatorname{tg} \phi = m/n, \quad \operatorname{tg} \theta = q/\sqrt{n^2 + m^2}, \quad (6.36)$$

имеющие следующий физический смысл: в лучевом приближении, рассмотренном в разделе 7, каждой моде соответствует замкнутая лучевая траектория, определяемая углами  $\phi$  и  $\theta$ .

Для медленно затухающих мод  $q = 1$  и  $\sqrt{n^2 + m^2} \gg 1$  угол между лучом и импедансной стенкой составляет  $\theta \approx 1/\sqrt{n^2 + m^2}$ . Подставляя последнее выражение в (6.36), получим  $P_{nm1}^2 \sim \exp(-2Zct \theta^2/H)$ , что совпадает с выражением (7.15), полученным в лучевом приближении и определяющим закон затухания луча, падающего на поглощающую стенку под углом  $\theta$  (переменная интегрирования  $u$  в (7.15) по определению  $u = \sin \theta \approx \theta$ ).

Таким же образом каждой моде  $(n, m, q)$  можно поставить в соответствие луч, определяемый (6.36). Закон затухания звука в помещении определяется суммой всех возбужденных мод или суммой соответствующих им лучей. Заменяя суммирование интегрированием, можно получить законы затухания, аналогичные (7.1). При этом в интеграл (7.1) необходимо внести интегрирование по частоте для учета спектра источника.

Решение, полученное в волновом приближении, позволяет найти закон затухания в заданной полосе частот. Ограничим рассматриваемые частоты значением  $\Omega'$  и получим закон затухания в полосе частот  $\Omega < \Omega'$ . В этом случае необходимо учесть моды  $(n, m, 1)$ , для которых  $n^2 + m^2 < 4\Omega'/\pi^2$ , что соответствует ограничению углов, определяющих направление лучей,  $\theta > \theta' = \pi/2\Omega'$ . Для упрощения предположим, что коэффициенты возбуждения всех мод одинаковы, тогда учетом ограничения по углу из (7.1) находим закон затухания в полосе частот для  $\theta' \ll 1$

$$E(\tau) = \int_{\theta'}^1 e^{-2\tau Z u^2} du, \quad (6.37)$$

Нижний предел интегрирования в (6.37) определяется частотой  $\Omega'$ , ограничивающей полосу сверху. Если полоса будет также ограничена снизу, то это приведет к изменению верхнего предела интегрирования в (6.37). При  $\tau \rightarrow \infty$  закон затухания определяется самой медленно затухающей модой в рассматриваемой полосе частот и имеет вид  $E(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\pi^2 Z}{2\Omega'} \tau\right)$ .

Рассмотрим кубическое помещение с одной поглощающей стенкой. Расчет кривых затухания для этого помещения в полосах частот  $\Omega < \Omega'$ , ограниченных значениями  $\Omega' = 5, 10, 20$ , представлен на рис. 6-22. С расширением полосы частот скорость затухания звука уменьшается, а кривая затухания приближается к степенному закону  $E(\tau) \sim 1/\sqrt{\tau}$ , полученному в разделе 7.

Законы затухания звука, полученные в рамках решения волнового уравнения (6.28) с граничными условиями типа (6.29), совпадают с решением этой же задачи в лучевом приближении, которое подробно рассмотрено в разделе 7. Там же получены законы затухания при других распределениях импеданса на стенках, включая общее решение для помещения, в котором все стенки импедансные.

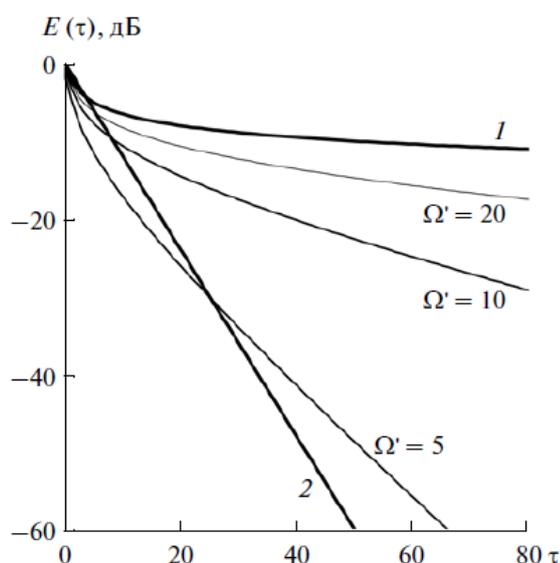


Рис. 6-22. Кривые затухания в кубическом помещении с одной импедансной стенкой в полосе частот  $\Omega < \Omega'$ . Кривая 1 — степенной закон затухания  $E(\tau) \sim 1/\sqrt{\tau}$ , кривая 2 — затухание по Сэбину.

### 6.3.2. Кратные моды помещения

Как показывает решение (6.34) наименее затухающей модой является самая низкочастотная. Оптимизируя импеданс стенки, можно добиться максимального затухания этой моды. Как следует из метода Крамера, такая

оптимизация приведет к появлению кратных мод. Если для плоского и прямоугольного каналов таким модам соответствуют кратные корни характеристических уравнения (5.3) и (5.4), то в помещении характеристическое уравнение должно выполняться совместно с уравнением на собственные частоты, что приводит к системе типа (6.33).

Подход, примененный в разделе 5 для прямоугольных каналов, может быть непосредственно применен для прямоугольного помещения. Продолжим рассмотрение прямоугольного помещения с одной импедансной стенкой, граничные условия задаются уравнениями (6.29). Тогда характеристическое уравнение совпадает с уравнением (5.5) для плоского канала с одной импедансной стенкой, кратные корни которого находятся из уравнения (5.6). Оптимальный импеданс стенки равен  $\tilde{Z} = a_0 kH$ , при котором сдвигаются моды  $(n, m, 0)$  и  $(n, m, 1)$ , т.е. образуется бесконечное количество сдвоенных мод. Самая низкочастотная двойная мода образуется простыми модами  $(0,0,0)$  и  $(0,0,1)$ , а ее частота, как следует из (6.33), равна  $\Omega = \tilde{\alpha}_0$ . Коэффициент затухания этой моды составляет около 4.2, что на порядок выше, чем максимальный коэффициент затухания, обеспечиваемый точечным поглотителем (см, например, рис. 6-17 для  $\text{Im}Z = 0.240$ ). Вместе с тем, как показано в предыдущем разделе, с ростом номеров  $n$  и  $m$  коэффициент затухания мод уменьшается. В отличие от каналов, где наименее затухающей модой является самая низкочастотная, в помещениях наименее затухающей является самая высокочастотная из возбуждаемых мод.

Перейдем к рассмотрению общего случая – помещения, в котором все стенки являются импедансными. Пусть параллельные стенки имеют одинаковый импеданс, тогда граничные условия на них будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{p}{v_x} \right|_{x=0} &= - \left. \frac{p}{v_x} \right|_{x=L} = \rho c Z_1, \\ \left. \frac{p}{v_y} \right|_{y=D} &= - \left. \frac{p}{v_y} \right|_{y=D} = \rho c Z_2, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\left. \frac{p}{v_z} \right|_{z=H} = - \left. \frac{p}{v_z} \right|_{z=H} = \rho c Z_3.$$

Тогда решение уравнения (6.28) представим в виде суперпозиции ВОЛНОВЫХ МОД

$$p_{nmq} = \varphi_n \left( \frac{\xi_n}{L} x \right) \varphi_m \left( \frac{\kappa_m}{D} y \right) \varphi_q \left( \frac{\zeta_q}{H} z \right) \quad (6.39)$$

где, как и в уравнении (5.1),  $\varphi_n(x) = \text{ch}x$  при  $n = 0, 2, 4, \dots$ ,  $\varphi_n(x) = \text{sh}x$  при  $n = 1, 3, 5, \dots$ ;  $\xi_n$ ,  $\kappa_m$  и  $\zeta_q$  – корни характеристических уравнений вида (5.3) и (5.4). Собственная частота моды находится подстановкой (6.39) в (6.28)

$$\left( \frac{\omega_{nmq}}{c} \right)^2 = \left( \frac{\xi_n}{L} \right)^2 + \left( \frac{\kappa_m}{D} \right)^2 + \left( \frac{\zeta_q}{H} \right)^2. \quad (6.40)$$

Задача оптимизации затухания некоторой моды  $(n, m, q)$  заключается в поиске таких импедансов стенок помещения  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , чтобы коэффициент затухания моды  $\delta_{nmq} = -\text{Im} \omega_{nmq}$  был максимальным.

Импедансы стенок могут подбираться независимо в силу структуры решения (6.39). Согласно (5.6) находим их значения  $Z_1 = a_n kH$ ,  $Z_2 = a_m kD$ ,  $Z_3 = a_q kD$ . При таких импедансах сдвигаются моды с номерами  $n$  и  $n + 2$ ,  $m$  и  $m + 2$ ,  $q$  и  $q + 2$ . Кратными модами  $p_{nmq}$  являются все моды с комбинациями номеров  $n, n + 2, m, m + 2, q, q + 2$ . Для каждого из номеров есть два варианта, всего номеров – 3, поэтому возможное количество комбинаций  $2^3 = 8$ . Таким образом, в помещении образуется восьмерная мода, собственная частота которой равна

$$\omega_{nmq} = c \sqrt{\left( \frac{\tilde{\alpha}_n}{L} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\alpha}_m}{D} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\alpha}_q}{H} \right)^2}. \quad (6.41)$$

Поскольку мнимая часть корня характеристического уравнения  $\tilde{\alpha}_n$  возрастает с номером  $n$ , то и коэффициент затухания  $\delta_{nmq}$  также возрастает. Поэтому наименее затухающей является нулевая мода  $p_{000}$ .

Также можно оптимизировать импеданс каждой стенки по отдельности. В этом случае подбор импедансов параллельных стенок осуществляется как в

плоском канале со стенками с различным импедансом, что приводит к появлению тройных мод. Кратные моды помещения образуются комбинациями номеров  $n, n + 1, n + 2, m, m + 1, m + 2, q, q + 1, q + 2$ . Для каждого из номеров есть три варианта, всего номеров – 3, поэтому возможное количество комбинаций  $3^3 = 27$ , т.е. в помещении, в котором оптимизируется импеданс каждой стенки, образуется двадцатисемикратная мода. Для нахождения ее собственной частоты необходимо в (6.41) заменить корни  $\tilde{\alpha}_n$  характеристических уравнений (5.28) и (5.29) на корни  $\tilde{\beta}_n$  характеристического уравнения (5.35). Но как в плоском канале и канале прямоугольного сечения значимого дополнительного эффекта затухания звука это не дает.

### 6.3.3. Задача о минимальном времени реверберации

Теоретический интерес представляет оценка минимально возможного времени реверберации в помещениях с однородными стенками. В противоположной задаче – о максимально возможном времени реверберации – ключевыми факторами являются потери в среде и неустраняемые потери на стенках [383]. Наибольшее время реверберации обнаружено в довольно большом помещении объемом около 26 тыс. м<sup>3</sup> [221], где его значение достигает 163 с на частоте 63 Гц.

Рассмотрим прямоугольное помещение с размерами  $L \times D \times H$ , каждая стенка которого имеет однородный по своей поверхности импеданс. Поле в таком помещении может быть представлено в виде суммы мод, имеющих вид (6.39). значения  $\xi_n, \kappa_m, \zeta_l$  являются корнями характеристических уравнений (5.28) и (5.29), если противоположные стенки имеют одинаковый импеданс, или корнями уравнений (5.35), если их импеданс разный. Собственные частоты помещения определяются из (6.40).

Теперь рассмотрим кубическое помещение со стороной  $L$ , все стенки которого имеют одинаковый импеданс. При подборе оптимального импеданса

для наименее затухающей моды по методу Кремера значение  $\xi_0$  равно  $\alpha_0$  (табл. 5-1). Из (6.41) находим коэффициент затухания нулевой моды

$$\delta_0 = \sqrt{3} \frac{c}{L} \text{Im} \alpha_0. \quad (6.42)$$

Для оценки скорости затухания звука в помещении удобно использовать время реверберации, которое связано с коэффициентом затухания следующим образом

$$T = \frac{3}{\delta_0 \lg e}. \quad (6.43)$$

Как следует из (6.42) и (6.43), минимально возможное время реверберации помещения с однородными стенками зависит только от его размера. Сделаем оценку минимального времени реверберации для помещения с размером  $L = 10$  м. Из (6.43) находим  $T = 28$  мс. Для мод более высокого номера время затухания будет еще меньше.

Время реверберации в несколько десятков миллисекунд имеет место только в специально оборудованных помещениях - заглушенных камерах. Полученные формулы (6.42), (6.43) могут использоваться для расчета минимально достижимого времени реверберации на низких частотах в таких помещениях.

#### **6.4. Выводы к главе 6**

Гашение звука на низких частотах в замкнутых объемах связано в первую очередь с демпфированием собственных колебаний объемов. Получены следующие результаты по решению этой задачи:

1. Теоретически и экспериментально решена задача о максимальном демпфировании одного собственного колебаний резонатором Гельмгольца. Показано, что для этого необходимо обеспечить оптимальное трение резонатора и минимизировать его массу.

2. Показано, что активный резонатор монопольного типа обеспечивает существенно больший коэффициент затухания гасимой моды по сравнению с

коэффициентом затухания, который может быть достигнут с помощью резонатора Гельмгольца. Это связано с тем, что при соответствующей настройке активного резонатора преодолевается физическое ограничение эффективности резонатора Гельмгольца, связанное с его конечной массой.

3. Показано, что активный резонатор может эффективно демпфировать несколько собственных колебаний помещения. Для этого необходимо найти импеданс монополя, оптимальный для демпфирования каждой моды, а затем выбрать частотно-зависимую функцию импеданса активного резонатора, имеющую близкие значения к значениям оптимального импеданса на всех гасимых частотах.

4. Найдены собственные колебания помещения с импедансной стенкой и определены параметры импеданса, при которых затухание моды максимально. При этом коэффициент затухания уменьшается с увеличением порядка моды. Показано, что одна импедансная стенка обеспечивает большее демпфирование моды, чем точечный поглотитель.

5. Применен метод Кремера для поиска оптимального импеданса стенок помещения. Показано, что при независимом подборе импедансов шести стенок прямоугольного помещения максимальная кратность моды достигает 27. На основании этого результата решена задача о минимальном времени реверберации помещения со стенками, имеющими одинаковый импеданс.

## **Глава 7. Гашение звука в помещениях на высоких частотах**

На высоких частотах для описания звукового поля в помещениях можно применить лучевое приближение, что позволяет сравнительно легко находить акустические характеристики помещения, важные для прикладных задач. Наиболее важным акустическим параметром помещений считается время реверберации, которое характеризует скорость затухания звука, при этом полагается, что затухание происходит по экспоненциальному закону. Часто для расчета времени реверберации используются классические формулы Сэбина [357] и Эйринга [241]. Также предложены некоторые другие формулы [185, 246, 303] для специальных случаев, например для помещений с неравномерным распределением поглощения. Проведенные измерения времени реверберации в обычной комнате с различным распределением поглощения на потолке и стенах [197], показали, что ни одна из известных формул не дает хорошего совпадения с экспериментом во всех случаях. Это связано с тем, что в помещениях регулярной формы, таких как прямоугольный параллелепипед или сфера, без звукорассеивающих элементов на стенах или в объеме затухание звука происходит не по экспоненциальному закону. При этом с увеличением неравномерности распределения поглощения на стенках помещения увеличивается отклонение закона затухания от экспоненциального [279]. В настоящем разделе исследованы законы затухания звука в помещениях с импедансными стенками.

### **7.1. Затухание звука в помещении с импедансными стенками**

#### **7.1.1. Прямоугольное помещение**

Известно, что в лучевом приближении для характеристики акустических свойств поверхностей удобно использовать коэффициент звукопоглощения, который непосредственно связан с импедансом поверхности [53]. Обычно коэффициент звукопоглощения – отношение поглощенной при отражении энергии к падающей – при аналитическом [185, 241, 246, 303, 357] или

численном [154] моделировании реверберации полагается независимым от угла падения звуковой волны, хотя эта зависимость является довольно существенной, особенно при скользящих углах падения [53].

Исследуем влияние зависимости коэффициента звукопоглощения поверхностей помещения от угла падения волны на реверберационный процесс. Выбрана простая форма помещения – прямоугольный параллелепипед, каждая стенка которого имеет одинаковые акустические свойства по всей площади, что позволяет решить задачу аналитически и провести сравнения с моделью, в которой коэффициенты звукопоглощения постоянны. Акустическое моделирование помещений часто производится при помощи метода лучевых траекторий [65, 363], согласно которому луч определяется, как траектория частицы, движущейся прямолинейно с зеркальными отражениями от стенок помещения. Звуковая энергия переносится вдоль луча со скоростью звука и при каждом отражении уменьшается на величину, равную коэффициенту звукопоглощения. Расчет звуковой энергии в помещении, являющейся суммой энергий всех лучей, сводится, таким образом, к слежению за спадом звуковой энергии вдоль каждого луча.

Рассмотрим прямоугольное помещение с размерами  $L, D, H$ . Начало системы координат поместим в одном из углов помещения, а оси направим вдоль ребер, как показано на рис. 7-1. Стенкам помещения, перпендикулярным оси  $z$ , присвоим номера 1 и 2, стенкам, перпендикулярным оси  $x$ , - номера 3 и 4, стенкам, перпендикулярным оси  $y$ , - номера 5 и 6. Поглощающие свойства стенок описываются коэффициентами отражения  $\gamma_i$  (отношение отраженной энергии к падающей) и поглощения  $\alpha_i = 1 - \gamma_i$ , где  $i$  – номер стенки. Стенки помещения полагаются нерассеивающими, поэтому отражение звука происходит зеркально.

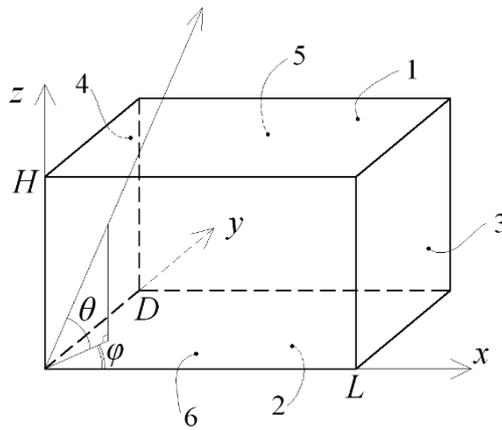


Рис. 7-1. Прямоугольное помещение.

Звуковое поле представим в виде набора лучей, имеющих одинаковую энергию в начальный момент времени. Луч задается углами  $\phi$  и  $\theta$  соответствующими его направлению до первого отражения. Выберем равномерное распределение лучей по углам  $\phi$  и  $\theta$  в начальный момент времени, что физически соответствует импульсному возбуждению звукового поля точечным источником. Звуковая энергия в помещении определяется суммой энергий всех лучей. В случае непрерывного углового распределения лучей звуковая энергия в помещении задается интегралом [279]

$$E(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon(t, \theta, \phi) \cos \theta d\theta d\phi, \quad (7.1)$$

где  $\varepsilon(t, \theta, \phi)$  - энергия луча, начальное направление которого задается углами  $\phi$  и  $\theta$ .

Начальная энергия всех лучей одинакова  $\varepsilon(0, \theta, \phi) = 1$ , начальная звуковая энергия в помещении равна  $E(0) = 1$ . При каждом отражении от стенки часть энергии поглощается, и для определения остаточной звуковой энергии необходимо пересчитать количество отражений от каждой стенки за время  $t$ . В прямоугольном помещении это легко сделать методом мнимых источников [279, 302]. Число отражений  $n_i(t, \theta, \phi)$  от  $i$ -ой стенки за время  $t$  для луча, начальное направление которого задается углами  $\theta$  и  $\phi$ , составляет

$$n_{1,2}(t, \theta, \phi) = \frac{ct}{2H} |\sin \theta|, \quad (7.2)$$

$$n_{3,4}(t, \theta, \phi) = \frac{ct}{2L} |\cos \theta \cos \phi|, \quad (7.3)$$

$$n_{5,6}(t, \theta, \phi) = \frac{ct}{2D} |\cos \theta \sin \phi|. \quad (7.4)$$

После всех отражений за время  $t$  остаточная энергия луча составляет  $\prod_{i=1}^6 \gamma_i^{n_i(t, \theta, \phi)} = \exp \sum_{i=1}^6 n_i(t, \theta, \phi) \ln \gamma_i$ , т.е. энергия луча уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Полную энергию звукового поля в помещении найдем интегрированием по углам  $\phi$  и  $\theta$

$$E(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sum_{i=1}^6 n_i(t, \theta, \phi) \ln \gamma_i} \cos \theta \, d\theta d\phi, \quad (7.5)$$

Предложенная постановка задачи не содержит дифракционных явлений. Однако при наличии дифрагирующих препятствий, например окна [363], их учет приведет к изменению закона затухания (7.5).

В работах [65, 279] при помощи выражения (7.5) получены законы затухания в помещении с различным распределением поглощения на стенках для случая коэффициентов поглощения и отражения, независимых от угла падения звукового луча. Приведем некоторые результаты.

Если в помещении только одна стенка, для определенности – стенка с номером 1, обладает поглощающими свойствами, т.е.  $0 < \gamma_1 < 1$  и  $\gamma_i = 1$  при  $i \neq 1$ , то при  $t \gg \left| \frac{H}{c \ln \gamma_1} \right|$  звуковая энергия в помещении уменьшается по закону

$$E(t) \approx -\frac{2H}{ct \ln \gamma_1}, \quad (7.6)$$

Если в помещении две непараллельные поглощающие стенки, т.е.  $0 < \gamma_1, \gamma_3 < 1$  и  $\gamma_i = 1$  при  $i \neq 1, 3$ , то при  $t \gg \left| \frac{H}{c \ln \gamma_1} \right|, \left| \frac{L}{c \ln \gamma_3} \right|$  имеем

$$E(t) \approx \frac{8HL}{\pi \ln \gamma_1 \ln \gamma_3 (ct)^2}. \quad (7.7)$$

Наконец, если все стенки поглощающие, то при  $t \gg \frac{H}{c \ln \gamma_1 \gamma_2}, \frac{L}{c \ln \gamma_3 \gamma_4}, \frac{D}{c \ln \gamma_5 \gamma_6}$  закон затухания имеет вид

$$E(t) \approx \frac{2}{\pi t^2} \frac{le^{-lt} + de^{-dt} + he^{-ht}}{ldh}. \quad (7.8)$$

где  $d = -\frac{c}{2D} \ln \gamma_5 \gamma_6, l = -\frac{c}{2L} \ln \gamma_3 \gamma_4, h = -\frac{c}{2H} \ln \gamma_1 \gamma_2$ .

В пределе  $t \rightarrow \infty$  значение (7.8) определяется слагаемым с минимальным показателем экспоненты. Так если  $l < d, h$ , то

$$E(t) \approx \frac{2}{\pi dh} \frac{e^{-lt}}{t^2}. \quad (7.9)$$

Таким образом, с увеличением количества стенок, обладающих звукопоглощающими свойствами, скорость затухания энергии увеличивается. При любом распределении звукопоглощающих свойств на стенках помещения звуковая энергия уменьшается не по экспоненциальному закону, хотя энергия каждого отдельного луча убывает экспоненциально со временем. При этом экспоненциальный множитель появляется в законе затухания только, если в помещении нет параллельных непоглощающих стенок.

При характеристике звукопоглощающих свойств стенок импедансом  $Z_i$ , где  $i$  – номер стенки, коэффициент отражения становится зависимым от угла падения  $\psi$  [53]

$$\gamma_i(\psi) = \left| \frac{Z_i \sin \psi - 1}{Z_i \sin \psi + 1} \right|^2. \quad (7.10)$$

Здесь импеданс стенки нормирован на импеданс среды  $\rho c$ , заполняющей помещение. Нормальное падение соответствует углу  $\psi = \pi/2$ . Углы  $\theta$  и  $\phi$ , задающие направление луча, связаны с углами падения  $\psi_{12}, \psi_{34}, \psi_{56}$  на стенки 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 следующим образом

$$\sin \psi_{12} = |\sin \theta|, \quad (7.11)$$

$$\sin \psi_{34} = |\cos \theta \cos \phi|, \quad (7.12)$$

$$\sin \psi_{56} = |\cos \theta \sin \phi|. \quad (7.13)$$

Из уравнений (7.10)-(7.13) находятся коэффициенты отражения каждой стенки  $\gamma_i(\theta, \phi)$ . Звуковая энергия в помещении может быть найдена при помощи уравнения (7.5), в которое вместо постоянных коэффициентов  $\gamma_i$  необходимо подставить выражения  $\gamma_i(\theta, \phi)$ . Таким образом, закон затухания звуковой энергии в прямоугольном помещении с импедансными стенками также определяется выражением (7.5). Рассмотрим несколько вариантов распределения звукопоглощения на стенках помещения и сравним их с результатами, полученными в предположении независимости коэффициентов отражения и поглощения от угла падения и приведенными выше.

В первую очередь рассмотрим помещение с одной поглощающей стенкой. Для этого стенку 1 будем характеризовать импедансом  $Z_1$ , а остальные стенки – коэффициентом отражения  $\gamma_i = 1$  при  $i \neq 1$ . Вводя переменную  $u = \sin \theta$ , из (7.5) находим

$$E(t) = \int_0^1 e^{\frac{ct}{2H} \ln \gamma_1(u) u} du. \quad (7.14)$$

где  $\gamma_1(u) = |(Z_1 u - 1)/(Z_1 u + 1)|^2$  получено из (7.10) и (7.11).

Подынтегральная функция в (7.14) быстро уменьшается с увеличением аргумента  $u$  и, следовательно, значение интеграла определяется значениями подынтегральной функции в окрестности точки  $u = 0$ . При  $u \ll 1$  имеем  $\gamma_1(u) \approx 1 - 4u \operatorname{Re} Z_1$ . Кроме этого, можно проинтегрировать (7.14) от 0 до  $\infty$ , что практически не изменит значение интеграла. В этих приближениях выражение (7.14) легко вычисляется

$$E(t) \approx \int_0^\infty e^{-2 \operatorname{Re} Z_1 \frac{ct}{H} u^2} du = \sqrt{\frac{\pi H}{8ct \operatorname{Re} Z_1}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (7.15)$$

Затухание звука происходит по закону  $\sim 1/\sqrt{t}$ , т.е. медленнее по сравнению с законом затухания, полученным для постоянного коэффициента отражения (ср. (7.6) и (7.15)).

Физический смысл полученного результата заключается в следующем. В начальный момент времени энергия распределена равномерно по всем

лучам, и в первую очередь поглощается энергия лучей, падающих на поглощающую стенку под большими углами. Медленнее всего теряют энергию лучи, распространяющиеся практически параллельно поглощающей стенке, т.е. направляющий угол которых  $|\theta| \ll 1$ . Это происходит из-за того, что, во-первых, эти лучи редко отражаются от поглощающей стенки – большинство отражений приходится на непоглощающие стенки, перпендикулярные поглощающей, а, во-вторых, коэффициент поглощения при скользком падении на импедансную стенку близок к нулю, как следует из (7.10). Согласно (7.11) угол падения на стенку 1 равен  $\psi_1 = |\theta|$  и коэффициент поглощения равен  $\alpha_1(\theta) = 1 - \gamma_1(\theta) \approx 4|\theta| \operatorname{Re} Z_1$ , т.е.  $\alpha_1(\theta) < 1$  при  $|\theta| \ll \frac{1}{4 \operatorname{Re} Z_1}$ . Поскольку для эффективных поглощающих материалов характерное значение действительной части импеданса близко к 1, то направляющие углы лучей, практически полностью отражающихся от поглощающей стенки, имеют значения  $|\theta| \ll 0.25$ . Таким образом, со временем звуковая энергия в помещении определяется только лучами, распространяющимися вдоль поглощающей стенки.

В помещении с двумя поглощающими стенками (номера стенок – 1 и 3) из (7.5) получаем

$$E(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{ct}{2L} \cos \theta \cos \phi \ln \gamma_3(\theta, \phi) + \frac{ct}{2H} \sin \theta \ln \gamma_1(\theta)} \cos \theta d\theta d\phi, \quad (7.16)$$

где  $\gamma_1(\theta) = |(Z_1 \sin \theta - 1)/(Z_1 \sin \theta + 1)|^2$  получено из (7.10) и (7.11),  $\gamma_3(\theta, \phi) = |(Z_3 \cos \theta \cos \phi - 1)/(Z_3 \cos \theta \cos \phi + 1)|^2$  получено из (7.10) и (7.12).

Полагая  $\gamma_1(\theta) \approx 1 - 4\theta \operatorname{Re} Z_1$  при  $\theta \ll 1$  и  $\gamma_3(\theta, \phi) \approx 1 - 4\phi \cos \theta \operatorname{Re} Z_3$  при  $\phi \ll 1$ , интегрируем (7.16) по  $\phi$  и получаем интеграл по  $\theta$ , который вычисляется также, как (7.14). Получаем выражение для звуковой энергии в помещении

$$E(t) \approx \frac{\pi}{8ct} \sqrt{\frac{HL}{\operatorname{Re} Z_1 \operatorname{Re} Z_3}} \sim \frac{1}{t}, \quad (7.17)$$

Затухание звука происходит по закону  $\sim 1/t$ , т.е. медленнее по сравнению с законом затухания, полученным для помещения, имеющего стенки с постоянным коэффициентом отражения (ср. (7.7) и (7.17)).

Наконец, рассмотрим общий случай, когда импедансы  $Z_i$  всех стенок имеют ненулевую действительную часть. Подставляя коэффициенты отражения  $\gamma_i(\theta, \phi)$ , определяемые выражением (7.10), в (7.5) и вычисляя полученные интегралы способом, примененным для вычисления интеграла в (7.14), находим выражение для звуковой энергии в помещении

$$E(t) \approx \frac{1}{ct} \sqrt{\frac{LHD}{8 \operatorname{Re}(Z_1 + Z_2) \operatorname{Re}(Z_3 + Z_4) \operatorname{Re}(Z_5 + Z_6)}} \times, \quad (7.18)$$

$$\times \left( \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_5 + Z_6)}{D}} e^{-dt} + \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_3 + Z_4)}{L}} e^{-lt} + \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_1 + Z_2)}{H}} e^{-ht} \right),$$

где  $d = -\frac{c}{2D} \ln \gamma_{\perp,5} \gamma_{\perp,6}$ ,  $l = -\frac{c}{2L} \ln \gamma_{\perp,3} \gamma_{\perp,4}$ ,  $h = -\frac{c}{2H} \ln \gamma_{\perp,1} \gamma_{\perp,2}$ ,  $\gamma_{\perp,i} = \left| \frac{Z_i - 1}{Z_i + 1} \right|^2$  - коэффициент отражения при нормальном падении на стенку.

При  $t \rightarrow \infty$  звуковая энергия определяется наименьшим показателем в экспонентах в (7.18). Если, например,  $l < d, h$ , то из (7.18) получаем

$$E(t) \approx \frac{e^{-lt}}{ct} \sqrt{\frac{HD}{8 \operatorname{Re}(Z_1 + Z_2) \operatorname{Re}(Z_5 + Z_6)}}, \quad (7.19)$$

Как и в предыдущих случаях, закон затухания звука в помещении с импедансными стенками отличается от закона затухания в помещении со стенками, имеющими коэффициент поглощения, не зависящий от угла падения.

Отметим отличие полученного результата от результатов работы [189], в которой при применении численных методов анализа не было обнаружено значительного влияния угловой зависимости коэффициента поглощения на

спад звуковой энергии в прямоугольном помещении с импедансными стенками без рассеяния.

Применим полученные выражения для расчета затухания звука в кубическом помещении со стороной  $L$ . В соответствии с изложенным выше рассмотрим три варианта распределения поглощения по стенкам помещения и сравним законы затухания для помещения со стенками с постоянным коэффициентом звукопоглощения и для помещения с импедансными стенками.

Примем следующие значения коэффициента звукопоглощения, не зависящего от угла падения звукового луча: в помещении с одной поглощающей стеной ее коэффициент звукопоглощения равен  $\alpha_1 = 0.9$ ; в помещении с двумя непараллельными поглощающими стенками их коэффициент звукопоглощения равен  $\alpha_2 = 0.45$ ; в помещении с равномерным распределением поглощения коэффициент звукопоглощения всех стенок равен  $\alpha_3 = 0.15$ . Значения коэффициентов звукопоглощения выбраны таким образом, чтобы средний по всему помещению коэффициент звукопоглощения  $\bar{\alpha}$  был одинаков для всех случаев.

При описании акустических свойств стенок импедансом, т.е. при учете зависимости коэффициента поглощения от угла падения, подберем такие значения импеданса, чтобы коэффициент поглощения, усредненный по углу, совпадал с выбранными значениями  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Поскольку влияние мнимой части импеданса на коэффициент звукопоглощения в рассматриваемой задаче второстепенно, то примем ее равной нулю, тогда в соответствии с заданным условием импедансы стенок для трех вариантов распределения поглощения равны  $Z_1 = 0.75$ ,  $Z_2 = 0.19$ ,  $Z_3 = 0.05$ .

Расчет спадов звуковой энергии для двух способов описания звукопоглощающих свойств стенок помещения и для трех вариантов распределения поглощения приведен на рис. 7-2, где введено безразмерное время  $\tau = ct/L$ . При неравномерном распределении поглощения кривые спада

существенно отличаются от экспоненты, что вызывает известные проблемы с определением времени реверберации по этим кривым [65]. В случае равномерного распределения рассчитанные кривые мало отличаются от экспонент на значимом участке спада (до -60 дБ), но при этом время реверберации, характеризующее наклон кривых на рис. 7-2, в, оказывается больше в помещении с импедансными стенками.

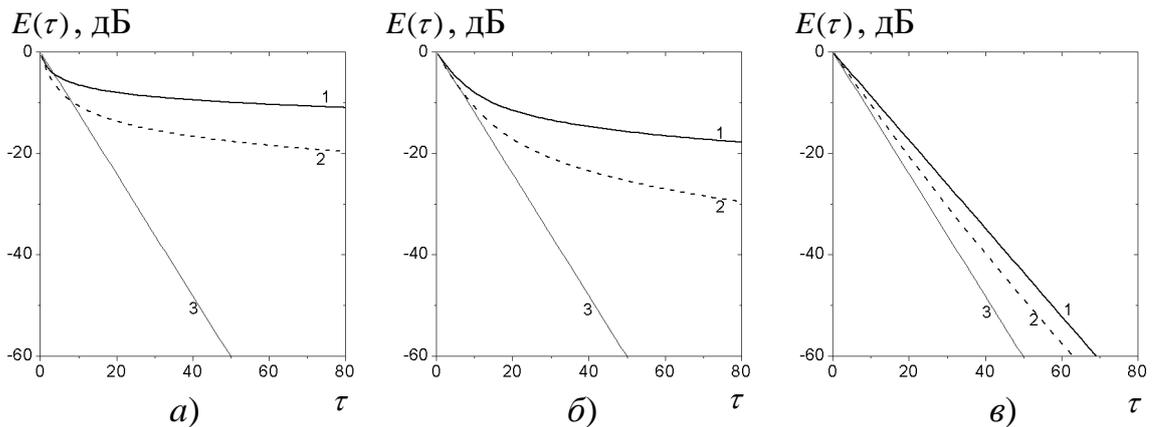


Рис. 7-2. Расчет затухания звуковой энергии в кубическом помещении при характеристике акустических свойств его стенок импедансом (кривые 1) или постоянным коэффициентом звукопоглощения (кривые 2). *а* – помещение с одной поглощающей стенкой, *б* – помещение с двумя непараллельными поглощающими стенками, *в* – помещение со всеми поглощающими стенками (равномерное распределение поглощения). Кривая 3 – затухание по Сэбину.

При наличии на непоглощающих стенках рассеивателей закон затухания звука существенно зависит от рассеивающих свойств стенок. Один из возможных теоретических подходов к учету рассеяния и расчет законов затухания звука содержится в работах [65, 279], в которых звуковая энергия в помещении разделяется на две составляющих. Первая определяется энергией зеркальных отражений и в отсутствие рассеяния рассчитывается по формуле (7.5). Вторая составляющая формируется рассеянной энергией при каждом отражении, при этом рассеяние считается изотропным, т.е. диффузным. Диффузная составляющая затухает по закону, определяемому балансом между рассеиваемой энергией при каждом отражении с ненулевым рассеянием и

поглощением на стенках. Затухание диффузной энергии, как правило, происходит быстрее, чем затухание энергии зеркальных отражений, поэтому и затухание полной энергии в помещении становится быстрее при наличии рассеяния. Отметим, что похожие подходы к решению задачи о затухании звука в прямоугольных помещениях с рассеивающими стенками предложены в работах [258, 358]. В разделе 7.2 описанный способ будет применен для развития метода измерения коэффициентов поглощения и рассеяния звука.

### **7.1.2. Устойчивые лучевые траектории**

Как показано выше, в прямоугольных помещениях с неравномерным распределением поглощения на его поверхностях закон затухания звука может существенно отличаться от классического закона Сэбина. В помещениях более сложной формы, а в пределе в хаотичных помещениях, чаще всего закон затухания звука близок к экспоненциальному, но при некоторых вариантах неравномерного распределения поглощения на стенках помещения затухание звука также может происходить по закону, близкому к степенному [330]. Представляет интерес определить, как изменяется закон затухания звука в простом помещении при малых изменениях его формы, а также исследовать влияние распределения импедансных поверхностей в таких помещениях. Для прямоугольного помещения малым изменением может являться, например, поворот одной его стенки на небольшой угол.

Для исследования этих вопросов выбрана упрощенная постановка – двумерное помещение, имеющее форму прямоугольной трапеции [68]. Акустические свойства стенок характеризуются коэффициентом звукопоглощения, при этом каждая стенка является гладкой, т.е. нерассеивающей звук. Задача о затухании звука решается в приближении геометрической акустики: в первую очередь выполняется численное моделирование затухания звуковой энергии в помещении, а затем полученный результат интерпретируется с точки зрения существования устойчивых лучевых траекторий.

Для определения законов затухания звука выберем помещение в форме прямоугольной трапеции (рис. 7-3), длина короткого основания  $H$ , длина стенки, перпендикулярной основаниям,  $L$ , угол между непараллельными стенками  $\gamma$ . Рассмотрим три варианта распределения поглощения на стенках помещения: в помещении I поглощающей является стенка, перпендикулярная основаниям, в помещении II – короткое основания, в помещении III – длинное основание. Коэффициент звукопоглощения примем равным  $\alpha = 0.9$ .

Численное моделирование выполняется при помощи метода лучевых траекторий [154]. Из геометрического центра помещения выпускается 3600 лучей, равномерно распределенных по углу. Далее отслеживается траектория каждого луча, и при отражении луча от поглощающей стенки его энергия уменьшается на коэффициент  $\alpha$ . Звуковая энергия в помещении определяется суммой энергий всех лучей. Графики на рис. 7-3 демонстрируют результаты расчета звуковой энергии в помещении с размерами  $L:H = 1:2$  в зависимости от безразмерного параметра времени  $\tau = ct/H$ . Жирными сплошными линиями на всех графиках представлена кривая затухания для прямоугольного помещения, т.е. для  $\gamma = 0$ . В прямоугольном помещении затухание звука происходит по степенному закону  $E(t) \sim 1/t$  [67, 302]. Пунктирные линии представляют экспоненциальный закон затухания Сэбина для двумерного помещения  $E(t) = \exp(-ctP\bar{\alpha}/\pi S)$ ,  $P$  – периметр помещения,  $S$  – его площадь,  $\bar{\alpha}$  – средний коэффициент звукопоглощения.

В помещении I (рис. 7-3,а) законы затухания для разных значений угла наклона  $\gamma$  мало отличаются от закона затухания, имеющего место в прямоугольном помещении. При этом для значений  $\gamma > 0.2$  кривая затухания практически не отличается от кривой для  $\gamma = 0.2$ . Таким образом, в трапециевидном помещении I затухание звуковой энергии происходит аномально медленно, как и в прямоугольном помещении.

В помещении II (рис. 7-3,б) при малых углах  $\gamma$  закон затухания также близок к степенному. При этом для  $\gamma \leq 0.1$  кривая затухания в

трапецевидном помещении лежит выше кривой затухания в прямоугольном помещении. По мере увеличения угла  $\gamma$  кривая затухания опускается, но закон затухания остается близким к  $1/t$ . Начиная с некоторого значения  $\gamma$  (в данном случае это значение находится между 0.3 и 0.5), закон затухания становится экспоненциальным. Согласно расчетам этот переход оказывается довольно резким: пока значения  $\gamma$  не достигают порогового значения, кривые затухания близки к кривой для  $\gamma = 0.3$ , а при значениях  $\gamma$ , больших порогового, кривые затухания близки к закону Сэбина.

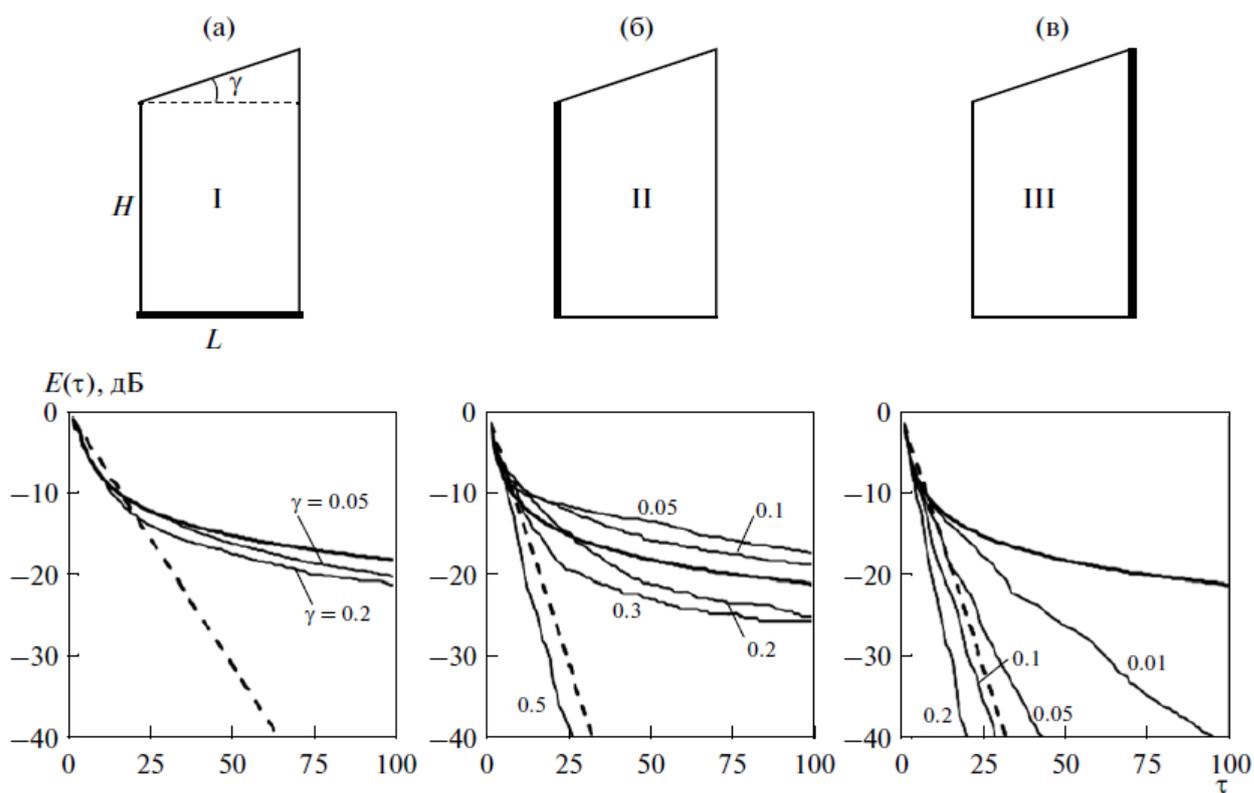


Рис. 7-3. Расчет затухания звуковой энергии в трапецевидном помещении с размерами  $L:H=2:1$  с различным распределением звукопоглощения на стенках: толстыми линиями выделены поглощающие стенки. Значения, обозначающие кривые затухания на графиках, соответствуют углу  $\gamma$  между непараллельными стенками. Толстые линии на графиках – кривые затухания в прямоугольном помещении ( $\gamma=0$ ), пунктирные линии – затухание по Сэбину.

В помещении III (рис. 7-3,в) кривая затухания даже при малом угле  $\gamma = 0.01$  близка к экспоненте для  $\tau > 25$ . При увеличении угла  $\gamma$  закон затухания

становится экспоненциальным, при этом скорость экспоненциального затухания может быть больше, чем по закону Сэбина.

Отметим, что при равномерном распределении поглощения на стенках помещения закон затухания, как и в прямоугольном помещении, близок к закону Сэбина.

Таким образом, численный эксперимент показал, что закон затухания зависит от распределения поглощения на стенках помещения.

Отдельно выделим следующий результат. Кривые затухания звука в помещениях II и III при  $\gamma = 0.05$  существенно различаются. Однако оба эти помещения по форме мало отличаются от прямоугольного. Помещение II можно получить из прямоугольного, отклонив короткую стенку на угол  $0.05$  в сторону поглощающей стенки, при этом затухание звука остается аномально медленным. Помещение III также можно получить из прямоугольного, для чего короткую стенку нужно отклонить на тот же угол, но в противоположную сторону, при этом закон затухания становится экспоненциальным. Следовательно, закон затухания может радикально измениться при малом изменении формы помещения.

Медленное затухание звуковой энергии имеет место в помещениях, в которых существуют устойчивые лучевые траектории, т.е. такие траектории, которые не попадают на поглощающие стенки. Простейшие устойчивые лучевые траектории существуют в помещениях с параллельными непоглощающими стенками, они представляют собой линии, параллельные поглощающим стенкам .

В трапециевидном помещении, основания которого являются отражающими, а поглощающими являются одна (рис. 7-4,а) или две непараллельных стенки, устойчивые траектории, как и в прямоугольном помещении, перпендикулярны основаниям. Эти траектории существуют при любом угле  $\gamma$  между непараллельными стенками, поэтому закон затухания близок к  $E(t) \sim 1/t$  (рис. 7-3,а) и слабо зависит от  $\gamma$ .

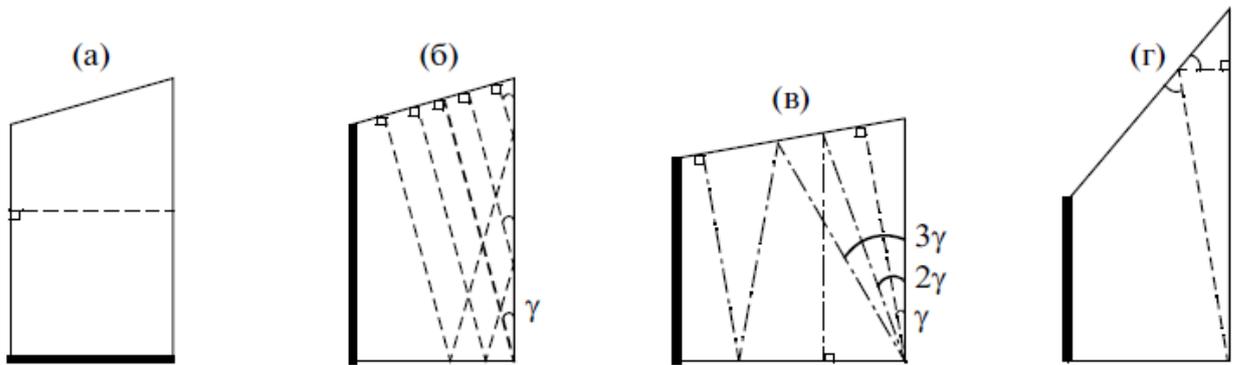


Рис. 7-4. Устойчивые лучевые траектории в трапециевидном помещении. Поглощающая стенка помещения выделена жирной линией.

В помещении с поглощающим коротким основанием (помещение II на рис. 7-3) также существуют устойчивые траектории. На рис. 7-4,б построены однотипные устойчивые траектории – они перпендикулярны наклонной стенке и падают на длинное основание под углом  $\gamma_1 = \gamma$ . Для упрощения этот тип устойчивых траекторий обозначим одной траекторией, попадающей точно в угол помещения (она выделена на рис. 7-4,б жирным пунктиром). Также в помещении II могут существовать другие типы устойчивых траекторий (рис. 7-4,в). Их свойства таковы: угол между одним из прямолинейных отрезков траектории и основаниями трапеции кратен  $\gamma$ , и траектория перпендикулярна одной из непараллельных стенок. Каждый тип траекторий можно характеризовать углом  $\gamma_n = n\gamma$ . Из построения на рис. 7-4,в ясно, что с увеличением угла наклона  $\gamma$  траектории попадают на поглощающую стенку при некотором его значении и перестают быть устойчивыми. Устойчивые траектории, показанные на рис. 7-4,б, существуют при условии  $\text{tg}\gamma < L/H$ .

При дальнейшем увеличении угла наклона возникает новый тип устойчивых траекторий (рис. 7-4,г) для значений  $\text{tg}\gamma > 1$ . Можно сформулировать условие, при котором в помещении II не существуют устойчивые траектории

$$L/H < \text{tg}\gamma < 1. \quad (7.20)$$

При выполнении условия (7.20) затухание звука происходит по экспоненциальному закону. Также из (7.20) следует, что в помещении, для

которого  $L/H > 1$ , устойчивые траектории существуют при любом угле наклона  $\gamma$ .

На рассмотренном выше расчетном примере для помещения II с размерами  $L:H = 1:2$  можно проверить выполнение условия (7.20), которое для этого примера имеет вид  $0.46 < \gamma < 0.79$ . Рассчитаем кривые затухания для помещения с углами  $\gamma = 0.3, 0.6, 0.9$  (рис. 7-5). Для значений 0.3 и 0.9 устойчивые траектории существуют, и затухание звука происходит аномально медленно. При  $\gamma = 0.6$  устойчивых траекторий нет, и затухание экспоненциально, при этом оно происходит даже быстрее, чем по закону Сэбина.

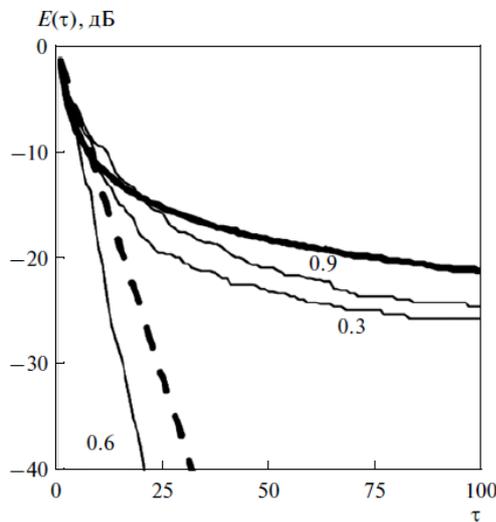


Рис. 7-5. Расчет затухания звуковой энергии в помещении II на рис. 7-3 для различных значений угла  $\gamma$  между непараллельными стенками. Толстая линия – степенной закон затухания  $1/\tau$ , имеющий место в прямоугольном помещении ( $\gamma = 0$ ), пунктир – экспоненциальное затухание по Сэбину.

Из построения лучевых траекторий в помещении II ясно, что все траектории попадают на длинное основание, поэтому, если оно является поглощающим (помещение III на рис. 7-3), то устойчивых траекторий не существует, и затухание звука происходит по экспоненциальному закону при любом угле наклона  $\gamma > 0$ . Из результатов расчета на рис. 7-3, в также следует, что даже при малом угле наклона закон затухания существенно отличается от

степенного  $E(t) \sim 1/t$ , имеющего место в прямоугольном помещении, т.е. при  $\gamma = 0$ .

Кратко обсудим полученные результаты с точки зрения волнового подхода. Как отмечено выше, в прямоугольном помещении с одной поглощающей стенкой при ограничении частотной полосы закон затухания в пределе  $t \rightarrow \infty$  становится экспоненциальным, причем скорость экспоненциального затухания зависит от самой медленно затухающей моды в заданной полосе частот. Аналогичная ситуация имеет место для трапецевидных помещений, хотя определение собственных мод для них [103, 368] существенно сложнее, чем для прямоугольных. Поэтому полученные результаты применимы для описания процесса реверберации на высоких частотах, что принимается во внимание при рассмотрении следующих практических примеров.

Для проверки полученных результатов выполнен лабораторный эксперимент, в котором исследовалось затухание в помещении, размеры которого указаны на рис. 7-6,а. В данном помещении стенки ABCD и  $A_1B_1C_1D_1$  параллельны, угол между стенками  $AA_1D_1D$  и  $BB_1C_1C$  составляет  $6^\circ$ , угол между стенками  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$  –  $8^\circ$ . При этом стенка  $AA_1D_1D$  перпендикулярна стенкам ABCD и  $A_1B_1C_1D_1$ , других пар стенок, образующих прямой угол, в помещении нет. Все стенки помещения выполнены из кирпича, оштукатурены и окрашены, поэтому их коэффициент поглощения имеет малые значения.

В проведенном эксперименте параллельные стенки поочередно покрывались звукопоглощающим материалом (минераловатная плита толщиной 5 см) по всей площади. Сначала (помещение А на рис. 7-6,а) звукопоглотителем покрывалась стенка меньшего размера, т.е. стенка ABCD. В этом случае устойчивые лучевые траектории существуют, отражение лучей происходит от стенок  $BB_1C_1C$ ,  $A_1B_1C_1D_1$  и  $AA_1D_1D$ . Стенки  $A_1B_1C_1D_1$  и  $AA_1D_1D$  образуют прямоугольный уголкового отражателя такой же, как в

трапециевидном помещении II на рис. 7-3. Устойчивые траектории лежат в плоскостях, перпендикулярных сторонам  $ABCD$  и  $AA_1D_1D$ , и имеют в этих плоскостях вид как на рис. 7-4,в. Таким образом, устойчивые траектории в трехмерном помещении А на рис. 7-6 эквивалентны устойчивым траекториям в двумерном помещении. Во втором случае (помещение Б на рис. 7-6) звукопоглотителем покрывалась стенка большего размера, т.е. стенка  $A_1B_1C_1D_1$ . В этом помещении, как и в трапециевидном помещении с поглощающим длинным основанием (помещение III на рис. 7-3), устойчивые траектории не существуют.

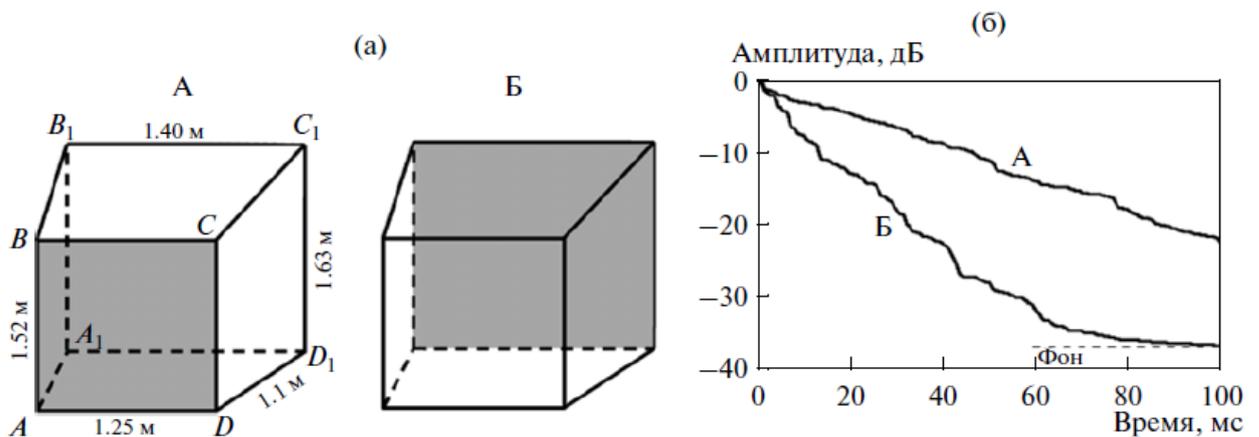


Рис. 7-6. Кривые затухания (б) в октавной полосе частот со среднегеометрической частотой 4000 Гц, измеренные в помещении с двумя параллельными стенками (а) при различном распределении звукопоглощения. Серым цветом выделена поглощающая стенка.

На рис. 7-6,б представлены кривые затухания в октавной полосе со среднегеометрической частотой 4000 Гц, измеренные в помещениях А и Б. Отметим, что кривые, измеренные в разных точках помещения очень близки друг к другу, поэтому приведены только по одной кривой для каждого варианта распределения поглощения на стенках помещения. Из представленных графиков следует, что в помещении Б затухание звука происходит существенно быстрее, чем в помещении А. В обоих случаях спад близок к экспоненциальному закону, поэтому можно оценить время реверберации: для помещения А оно составляет 0,27 с, а для помещения Б – 0,11 с. Таким образом, в зависимости от способа расположения

звукопоглощающего материала время реверберации помещения изменяется более, чем в два раза, хотя площадь звукопоглощающего материала в помещении Б всего на 20% больше, чем в помещении А.

Обратим внимание, что затухание звука в помещении А происходит по закону, близкому к экспоненциальному, в то время как согласно результатам численного эксперимента (рис. 7-3,б) закон затухания должен иметь вид, близкий к степенному. Это связано с тем, что параллельная стенка большей площади (отмечена серым цветом в помещении Б) на самом деле не является плоской – на ней расположена дверца, выступающая внутрь помещения, через которую осуществляет доступ в помещение, а также на этой стенке размещены излучатели звука. Поэтому на высоких частотах эта стенка обладает звукорассеивающими свойствами, что, как показано в работе [279], приводит к более быстрому по сравнению со степенным законом затуханию звука.

## **7.2. Метод измерения коэффициентов поглощения и рассеяния звука в недиффузном звуковом поле**

### **7.2.1. Методика**

Количественная характеристика рассеяния и поглощения звуковых волн при отражении от поверхностей [260, 382] имеет большое значение для многих прикладных задач, в том числе в области архитектурной акустики. Одной из функций звукорассеивающих поверхностей является повышение рандомизирующих свойств помещений, что позволяет сделать звуковое поле более диффузным и обеспечить экспоненциальное затухание звуковой энергии в помещении. В помещениях со слабыми рандомизирующими свойствами закон затухания может существенно отличаться от экспоненциального [67, 302, 330], при этом изменение рассеивающих свойств стенок помещения приводит к изменению закона затухания, что дает возможность количественно определить коэффициент рассеяния стенок. Ниже приводятся теоретические основы измерения коэффициента рассеяния и

поглощения в недиффузном звуковом поле, общая идея которого была предложена впервые, по-видимому, в работе [259].

Предлагаемый метод измерения имеет сходство со стандартным методом измерения коэффициента звукопоглощения в реверберационных камерах, описанным в ГОСТ 31704-2011, согласно которому определяется время реверберации в камере с испытуемым образцом и без него при условии достаточной степени диффузности звукового поля. Последнее требование является наиболее существенным среди прочих требований упомянутого стандарта, поскольку в этом случае затухание звука в камере происходит по экспоненциальному закону, а кривые затухания (зависимость логарифмического уровня звуковой энергии от времени) являются прямыми, которые задаются единственным параметром – углом наклона, однозначно связанным со временем реверберации. Помещение образца в камеру приводит к снижению времени реверберации, по изменению которого вычисляется коэффициент звукопоглощения образца.

Для измерения коэффициента рассеяния, напротив, требуется недиффузное звуковое поле, затухание энергии которого происходит по закону, максимально отличающемуся от экспоненциального. Такое поле может быть создано, например, в помещении, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, с неравномерным распределением поглощения на стенках, подробно рассмотренном в предыдущем разделе. Если только одна стенка поглощает звук, то закон затухания в таком помещении имеет вид  $E \sim 1/\sqrt{t}$ . При покрытии непоглощающих стенок исследуемыми образцами звуко рассеивающих или звукопоглощающих конструкций затухание звука происходит быстрее, при этом закон затухания отличается от экспоненциального, что позволяет по кривой затухания определить коэффициент рассеяния. Нахождение коэффициента рассеяния по измеренной кривой затухания возможно, если она существенно отличается от прямой, т.е. пока затухание остается неэкспоненциальным.

Для интерпретации изменения кривой затухания при увеличении рассеивающих свойств стенок необходимо знать, как закон затухания зависит от коэффициента рассеяния. Закон затухания может быть найден в лучевом приближении согласно теории реверберации в прямоугольном помещении, в рамках которой используется, а энергия звукового поля разделяется на две компоненты: энергию зеркальных отражений и энергию диффузного поля, формируемую рассеянной при каждом отражении энергией [259, 279]. Применим данный подход для кубического помещения.

Рассмотрим кубическое помещение с длиной ребра  $L$ . Начало прямоугольной системы координат поместим в один из углов помещения, а ее оси направим вдоль ребер (рис. 7-1).

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  звуковое поле в помещении диффузно. В соответствии с принятым понятием диффузного поля [302, 343] представим начальное поле в помещении в виде суперпозиции плоских волн равной амплитуды и случайной фазы, равномерно распределенных по углам  $\phi$  и  $\theta$ . Звуковая энергия в помещении – это сумма энергий всех плоских волн. Полную энергию звукового поля в помещении найдем из (7.5)

$$E_s(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^6 n_i \ln \gamma_i} \cos \theta \, d\theta d\phi, \quad (7.21)$$

где  $\tau = ct/L$  – безразмерный параметр времени,  $\bar{n}_{1,2} = |\sin \theta|$ ,  $\bar{n}_{3,4} = |\cos \theta \cos \phi|$ ,  $\bar{n}_{5,6} = |\cos \theta \sin \phi|$ . Отметим, что введенные коэффициенты  $\bar{n}_i$  не зависят от времени, в отличие от введенных ранее коэффициентов  $n_i$ , и характеризуют количество отражений в единицу времени.

Выражение (7.21) определяет зависимость энергии зеркальных отражений в помещении от времени. Если стенки являются абсолютно отражающими, т.е.  $\gamma_i = 1$ , то энергия в помещении остается постоянной  $E_s(\tau) = 1$ . Зависимость (7.21) описывает реверберационный процесс только в случае гладких ограждающих поверхностей, в то время как на практике поверхности помещения часто являются неровными. Это приводит к тому, что

при отражении часть звука рассеивается. В архитектурной акустике обычно вводится коэффициент рассеяния, т.е. отношение энергии, рассеянной при отражении звуковой волны, к энергии падающей волны. Будем считать, что при каждом отражении звука от стенки помещения, часть звуковой энергии отражается зеркально, часть энергии рассеивается, а оставшаяся часть энергии поглощается. Зеркальное отражение характеризуется коэффициентом  $\gamma$ , введенным выше. Долю рассеянной и поглощенной энергии обозначим  $\delta$  и  $\alpha$  соответственно. Эти коэффициенты связаны простым отношением

$$\alpha + \delta + \gamma = 1. \quad (7.22)$$

Будем считать рассеяние звука изотропным. В этом случае при каждом отражении от рассеивающей стенки формируется звуковое поле с такими же свойствами, как и начальное звуковое поле в помещении, которое затухает в соответствии с найденным законом (7.21). Поэтому, зная рассеянную энергию, можно легко найти ее изменение во времени. Далее ограничимся учетом только однократного рассеяния на стенках, т.е. рассеянием рассеянного поля на стенках мы пренебрежем.

Каждая стенка характеризуется коэффициентом рассеяния  $\delta_i$ , где  $i$  – номер стенки. К моменту времени  $t_0$  волна, направление которой характеризуется углами  $\phi$  и  $\theta$ , испытывает  $n(t_0) = \sum_{i=1}^6 n_i(t_0, \theta, \phi)$  зеркальных отражения. Энергия зеркальных отражений перед последним отражением определяется первыми  $n - 1$  отражениями. Если  $n$ -ое отражение происходит от стенки  $i'$ , то энергия, рассеянная при  $n$ -ом отражении, составляет

$$\delta_{i'} \gamma_{i'}^{n_{i'}(t_0, \theta, \phi) - 1} \prod_{i \neq i'} \gamma_i^{n_i(t_0, \theta, \phi)} = \frac{\delta_{i'}}{\gamma_{i'}} \prod_i \gamma_i^{n_i(t_0, \theta, \phi)} = \frac{\delta_{i'}}{\gamma_{i'}} E_s(t_0). \quad (7.23)$$

За временной интервал от  $t_0$  до  $t_0 + dt_0$  происходит отражений  $n'_i dt_0$  от каждой стенки, где  $n'_i = dn_i/dt$  – число отражений от  $i$ -ой стенки в единицу времени. Для получения всей рассеянной энергии за этот интервал просуммируем отражения от всех стенок и проинтегрируем по углу

$$dE_d = \frac{dt_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{t_0 \sum_i n'_i(\theta, \phi) \ln \gamma_i} \sum_i \left( n'_i(\theta, \phi) \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right) \cos \theta d\theta d\phi. \quad (7.24)$$

За временной интервал от  $t_0$  до  $t_0 + dt_0$  рассеянная энергия равна  $dE_d$ , которая затухает по закону (7.21), поэтому к моменту времени  $t$  она составляет  $E_s(t - t_0)dE_d$ . Для получения рассеянной энергии в помещении к моменту времени  $t$  проинтегрируем последнее выражение по времени от начала реверберационного процесса

$$E_d = \frac{1}{4\pi} \int_0^\tau d\tau_0 E_s(\tau - \tau_0) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\tau_0}{2} \sum_i n_i \ln \gamma_i} \sum_i \left( n_i \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right) \cos \theta d\theta d\phi. \quad (7.24)$$

Полная звуковая энергия в помещении является суммой энергии зеркальных отражений и энергии рассеянного поля

$$E = E_s + E_d. \quad (7.25)$$

Рассмотрим помещение, в котором только одна стенка поглощающая. Пусть стенка с номером 1 характеризуется импедансом  $Z = 1$ , тогда коэффициент зеркального отражения  $\gamma_1$  определяется формулой (7.10). Полагаем, что ее поверхность гладкая, т.е.  $\delta_1 = 0$ . Параллельная стенка является абсолютно жесткой, т.е.  $\gamma_2 = 1$ . Остальные четыре стенки являются рассеивающими, для них  $\delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \delta$  и  $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ . При этом коэффициент рассеяния  $\delta$  полагается независимым от угла падения волны.

На рис. 7-7,а приведен расчет временной зависимости полной энергии  $E$  для коэффициента рассеяния  $\delta = 0.05$ , а также ее составляющих – энергии зеркальных отражений  $E_s$  согласно (7.21) и энергии рассеянного поля  $E_d$  согласно (7.24). В течение всего времени  $E_s$  значительно больше  $E_d$ , энергия в помещении определяется зеркальными отражениями и описывается (7.21), влияние энергии рассеянного поля незначительно. На рис. 7-7,б приведен расчет затухания энергии (7.25) в помещении при различных значениях коэффициента рассеяния  $\delta$ . С увеличением коэффициента рассеяния энергия затухает в помещении быстрее. При малых значениях коэффициента

рассеяния наклон кривой затухания меняется довольно значительно, что позволяет по закону затухания находить коэффициент рассеяния.

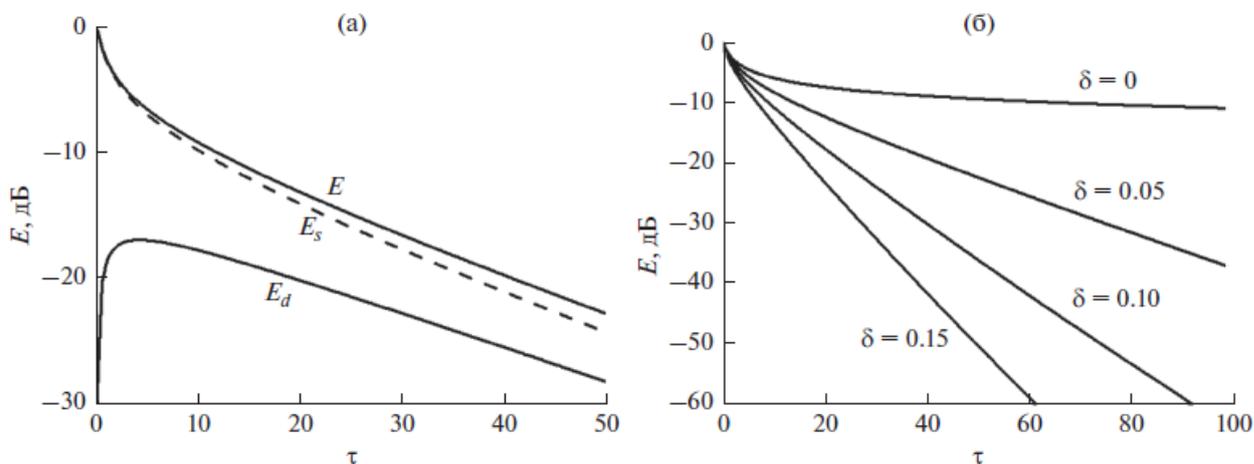


Рис. 7-7. Затухание энергии зеркальных отражений  $E_s$ , энергии рассеянного поля  $E_d$  и полной энергии  $E$  в кубическом помещении с одной поглощающей стенкой при коэффициенте рассеяния  $\delta = 0.05$  непоглощающих стенок (а). Затухание полной энергии в таком же помещении при различных коэффициентах рассеяния (б).

Если в помещении преобладает энергия зеркальных отражений, то кривая затухания, измеренная в кубическом помещении с одной поглощающей стенкой и четырьмя рассеивающими, может быть аппроксимирована выражением (7.25), которое зависит от одного неизвестного параметра – коэффициента рассеяния  $\delta$ . Следовательно, он может быть найден по измеренной кривой затухания – в этом и заключается суть предлагаемого метода.

Далее проанализируем границы применимости метода, для чего найдем упрощенные выражения для энергии звукового поля в помещении. Рассмотрим помещение с одной гладкой поглощающей стенкой, характеризуемой импедансом  $Z$ , и четырьмя рассеивающими стенками, характеризуемыми коэффициентом рассеяния  $\delta$ . Шестая стенка, параллельная поглощающей, является гладкой и абсолютно жесткой, т.е. для нее  $\gamma = 1$ . Из (7.21) и (7.22) получим энергию зеркальных отражений в таком помещении при  $\tau \gg 1$ :

$$E_s \approx E_s^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{8Zt}} e^{-\frac{4}{\pi}\delta t}. \quad (7.26)$$

Выражение (7.26) определяет зависимость энергии зеркальных отражений от коэффициента рассеяния. Очевидно, что она должна преобладать над энергией рассеянного поля, т.е.  $E_s \gg E_d$ , в противном случае поле будет близко к диффузному, и затухание звука будет происходить по экспоненциальному закону, что не позволит найти коэффициент рассеяния по измеренной кривой затухания.

Подставляя приближенное выражение (7.26) в (7.24), найдем энергию рассеянного поля

$$E_d \approx E_d^{(0)} = \frac{\pi^2}{16} \frac{\delta}{1 - \delta} e^{-\frac{4}{\pi}\delta t}. \quad (7.27)$$

Рассеянное поле затухает экспоненциально, при этом экспоненциальный множитель такой, как и в выражении для энергии зеркальных отражений (7.26). Но энергия зеркальных отражений затухает быстрее из-за степенного множителя в (7.26). Из (7.26) и (7.27) найдем условие, при котором  $E_s \gg E_d$ ,

$$\tau \ll \frac{32(1 - \delta)^2}{\pi^3 Z \delta^2}. \quad (7.28)$$

Если  $Z = 1$  и  $\delta \ll 1$ , то условие (7.28) имеет простой вид  $\tau \ll \delta^{-2}$ .

Таким образом, при использовании (7.26) кривая затухания должна анализироваться по ограниченному участку

$$1 \ll \tau \ll \delta^{-2}. \quad (7.29)$$

Согласно (7.29) для рассматриваемого кубического помещения диапазон измеряемых значений коэффициента рассеяния можно принять равным  $0 < \delta < 0.1$ .

Диапазон измеряемых значений коэффициента рассеяния может быть несколько увеличен при изменении площади звукорассеивающих стенок. Так, например, если звукорассеивающими являются только две из четырех стенок, перпендикулярных поглощающей стенке, то из (7.24) следует, что энергия рассеянного поля будет вдвое меньше, поэтому диапазон измеряемых

значений коэффициента рассеяния расширяется и становится равным  $0 < \delta < 0.2$ .

В рассмотренном подходе к описанию затухания звуковой энергии в помещении не рассматривается ряд существенных характеристик звукового поля, в частности частота звука не является параметром задачи. Точное решение может быть получено в рамках волновой модели, которое получено для прямоугольного помещения с одной поглощающей стенкой в разделе 7.1.1, где показано, что с увеличением порядка моды коэффициент ее затухания стремится к нулю, и расчет в лучевом приближении совпадает с волновой моделью при учете всех мод. Однако, если частотная полоса, в которой возбуждается звук, ограничена сверху частотой  $\omega'$ , то в пределе  $\tau \rightarrow \infty$  закон затухания звука определяется самой медленно затухающей модой. В кубическом помещении, одна стенка которого имеет импеданс  $Z = 1$ , а остальные зеркально отражающие, то затухание звука в пределе  $\tau \rightarrow \infty$  происходит по закону

$$E \sim e^{-\frac{\pi^2}{2\Omega'}\tau}, \quad (7.30)$$

где  $\Omega' = \omega' L/c$  – безразмерная частота.

Если коэффициент рассеяния измеряется в полосе частот, что представляет интерес для получения частотной характеристики коэффициента рассеяния, например в октавных полосах частот, то затухание звука, определяемое коэффициентом рассеяния стенок, согласно (7.27) должно происходить быстрее, чем согласно предельному закону затухания (7.30) для данной полосы частот. Оценим ограничение для измеряемых значений коэффициента рассеяния в полосе частот, сопоставив экспоненциальные множители законов затухания (7.27) и (7.30)

$$\delta^2 > \frac{\pi^2}{2\Omega'}. \quad (7.31)$$

Оценка (7.31) может быть использована для подбора размеров помещения, необходимых для измерения коэффициента рассеяния в заданном частотном диапазоне.

В рассмотренной модели затухания звука в помещении с рассеивающими стенками коэффициент поглощения этих стенок полагался равным нулю. Учет поглощающие свойства этих стенок. Пусть  $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha$ , тогда при вычислении интегралов (7.21) и (7.24) необходимо использовать выражение  $\gamma = 1 - \alpha - \delta$  для этих стенок. Отсюда очевидно, что при малых значениях  $\alpha$  и  $\delta$  измеренным параметром является не коэффициент рассеяния, а сумма коэффициентов рассеяния и поглощения  $\alpha + \delta$ . При этом коэффициенты  $\alpha$  и  $\delta$  одинаково влияют на изменение кривой затухания, поэтому невозможно определить, дополнительное поглощение или рассеяние повлияло на изменение кривой затухание, если такое изменение наблюдается в эксперименте. В связи с этим иногда рассеяние, вносимое теми или иными конструкциями в помещение, называют «кажущимся поглощением» [259]. Для снятия этой неоднозначности необходимо провести отдельное измерение коэффициента звукопоглощения испытуемого образца  $\alpha$ , например, в реверберационной камере по стандартной методике ГОСТ 31704-2011, а затем вычесть это значение из значения параметра  $\delta$ , найденного путем аппроксимации измеренной кривой затухания приближенным выражением (7.26).

Поскольку фактически измеряется сумма  $\alpha + \delta$ , то в случае гладких стенок эта сумма равна коэффициенту поглощения. Поэтому предложенный метод в полной мере пригоден и для измерения коэффициента звукопоглощения. Поскольку измеряться могут сравнительно небольшие значения  $\alpha + \delta$ , определяемые условиями (7.29) и (7.31), то метод может быть полезен для измерения малых коэффициентов звукопоглощения. Отметим, что стандартные методы измерения коэффициента звукопоглощения в

реверберационном поле при некоторых условиях дают значительную погрешность измерений.

Как и при измерении коэффициента поглощения в реверберационной камере, в предлагаемом способе измерения коэффициента рассеяния необходимо провести калибровочные измерения в помещении без образца для того, чтобы определить коэффициент звукопоглощения стенок  $\alpha'$  без испытываемых образцов. Для этого измеряется кривая затухания в помещении без образцов, по которой при помощи выражения (7.26) находится параметр  $\delta$ , который в данном случае и есть коэффициент звукопоглощения стенок  $\alpha'$ . При дальнейшем измерении коэффициента рассеяния необходимо учитывать коэффициент поглощения стенок  $\alpha'$ , если поверхности стенок покрываются испытываемыми образцами не полностью.

В заключении кратко опишем предложенный метод измерения коэффициента рассеяния звука:

1. Измерения проводятся в нерандомизирующем помещении. В общем случае помещение должно иметь форму прямоугольного параллелепипеда, в настоящей работе рассмотрено измерение в кубическом помещении. Размеры помещения выбираются согласно (7.31) так, чтобы обеспечить возможность измерения коэффициента рассеяния в заданной полосе частот.
2. Одна из стенок помещения покрывается звукопоглощающим материалом с гладкой поверхностью, противоположная ей стенка остается отражающей. Четыре стенки, перпендикулярные поглощающей, предназначены для размещения испытываемых образцов и называются далее тестовые.
3. Измеряется кривая затухания, которая аппроксимируется выражением  $E(t) = a e^{-bt} / \sqrt{t}$  при  $t > 2/b$ . Найденный коэффициент  $b$  позволяет определить коэффициент звукопоглощения тестовых стенок  $\alpha' = bL/c$ .

4. Исследуемые образцы звукопоглощающих материалов или конструкций равномерно располагаются на тестовых стенках.
5. Измеряется кривая затухания, которая аппроксимируется выражением  $E(t) = a_1 e^{-b_1 t} / \sqrt{t}$  при  $t > 2/b_1$ . Найденный коэффициент  $b_1$  позволяет определить суммарный коэффициент поглощения  $\alpha$  и рассеяния  $\delta$  тестовых стенок  $\alpha + \delta = b_1 L/c$ .
6. Коэффициент звукопоглощения  $\alpha$  образца может быть измерен традиционным способом в реверберационной камере, измеренный коэффициент рассеяния звука исследуемого образца равен  $\delta = b_1 L/c - \alpha$ .
7. Диапазон измеряемых значений коэффициента рассеяния составляет  $\alpha' - \alpha < \delta < 0.1 - \alpha$ . Если  $\alpha' < \alpha$ , то диапазон равен  $0 < \delta < 0.1 - \alpha$ .

### 7.2.2. Экспериментальная проверка метода

Экспериментальное исследование описанного выше метода проведено в физической модели прямоугольного помещения размером 0.7x0.4x0.4 м [167]. Одна из стенок размером 0.7x0.4 м покрыта звукопоглощающим материалом (рис.7-8,а), на четырех перпендикулярных ей стенках располагаются звукопоглощающие элементы пирамидообразной формы (высота элемента — 5 см, размер основания 3x7 см). На рис. 7-8,б приведен пример измеренной кривой затухания звука в помещении и аппроксимирующей теоретической кривой  $E(t) = a e^{-bt} / \sqrt{t}$ , значения  $a$  и  $b$  подобраны так, чтобы обеспечить наилучшее совпадение с измеренной зависимостью методом наименьших квадратов.

На рис. 7-9 приведены схемы расположения звукопоглощающего материала и рассеивающих элементов. Конфигурация Е0 используется для определения коэффициента звукопоглощения стенок помещения  $\alpha'$ . Конфигурации А0, А7, А13, А20 отличаются количеством звукопоглощающих

элементов: число в обозначении конфигурации обозначает это количество. Конфигурация E20 используется для определения коэффициента звукопоглощения испытуемых элементов.

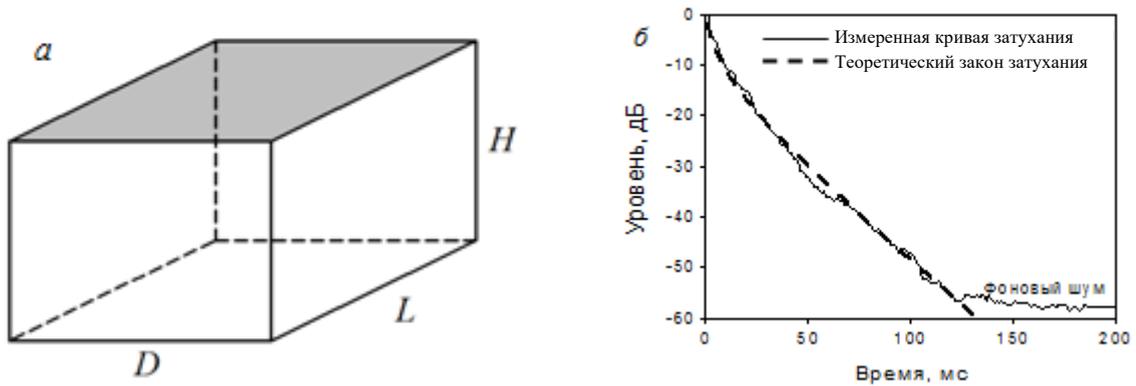


Рис. 7-8. Помещение для измерения коэффициента рассеяния (а) и пример измеренной в нем кривой затухания с теоретической кривой (б).

На графиках на рис. 7-9 представлены кривые затухания в октавных полосах частот 4, 8 и 16 кГц, измеренные в помещении при различных его конфигурациях. Три верхних графика демонстрируют влияние звукопоглощающей стенки на кривую затухания; три средних графика – влияние количества звукорассеивающих стенок на кривую затухания; три нижних графика используются для определения коэффициента звукопоглощения элементов.

Таблица 7-1. Время реверберации и коэффициенты поглощения и рассеяния

Конфигурация	4 кГц			8 кГц			16 кГц		
<b>Время реверберации</b>									
	$T_{20}, c$	$T_{30}, c$	$T_{30}/T_{20}$	$T_{20}, c$	$T_{30}, c$	$T_{30}/T_{20}$	$T_{20}, c$	$T_{30}, c$	$T_{30}/T_{20}$
E0	0.221	0.232	1.05	0.187	0.186	0.99	0.177	0.179	1.01
A0	0.115	0.160	1.39	0.151	0.162	1.07	0.151	0.154	1.02
A7	0.105	0.118	1.12	0.100	0.106	1.06	0.099	0.098	0.99
A13	0.093	0.108	1.16	0.081	0.084	1.04	0.066	0.075	1.14
A20	0.089	0.088	0.99	0.073	0.073	1.00	0.058	0.061	1.05
E20	0.185	0.189	1.02	0.142	0.145	1.02	0.131	0.130	0.99
<b>Коэффициент поглощения и рассеяния <math>\alpha + \delta</math></b>									
A7	0.12			0.16			0.19		
A13	0.15			0.22			0.26		
A20	0.19			0.27			0.27		

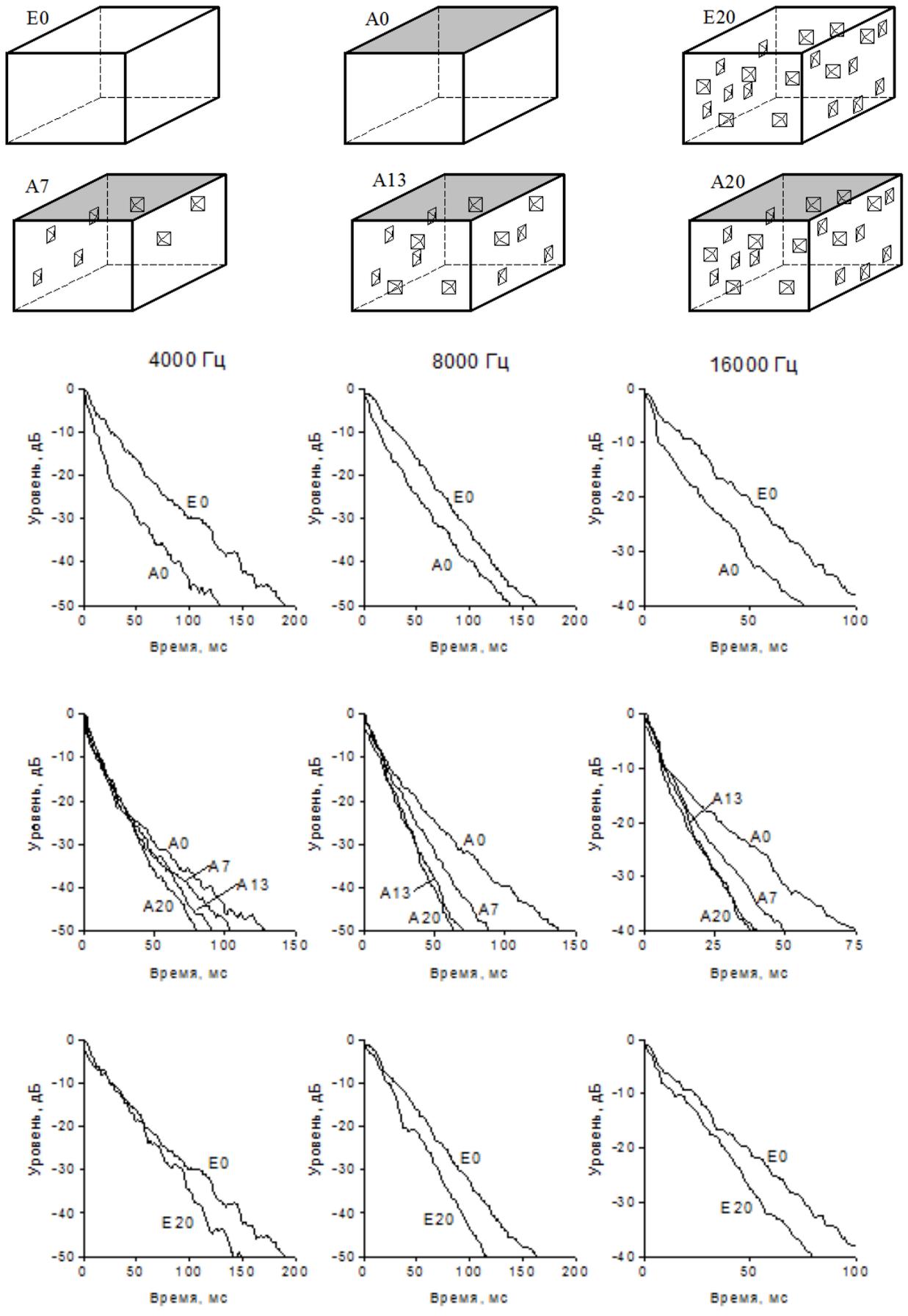


Рис. 7-9. Схемы расположения звукопоглощающего материала (обозначен серым цветом) и звукорассеивающих элементов в модельном помещении и измеренные кривые затухания.

Для оценки и сопоставления скорости затухания звука в разных конфигурациях в таблице 7-1 приведены значения времени реверберации. Поскольку во многих случаях затухание звука происходит неэкспоненциально, то используется два определения времени реверберации –  $T_{20}$  и  $T_{30}$ , вычисляемые по участку кривой затухания от  $-5$  до  $-25$  дБ и от  $-5$  до  $-35$  дБ соответственно, а также отношение  $T_{30}/T_{20}$  для характеристики отличия закона затухания от экспоненциального. Также в таблице 7-1 приведены значения коэффициента, найденного при помощи аппроксимации измеренной кривой затухания функцией (7.26).

При малом рассеянии отношение  $T_{30}/T_{20}$  существенно больше 1, поэтому влияние рассеяния по поглощения звука на тестовых стенках существенно. При большом количестве рассеивающих элементов (конфигурация А20) отношение  $T_{30}/T_{20}$  близко к 1, что говорит об экспоненциальном характере затухания звука. Дальнейшее увеличение количества звукорассеивающих элементов не приводит к изменению кривой затухания. Полученные значения в конфигурации А20 являются предельными для описанного эксперимента.

### **7.2.3. Возможность измерения анизотропии коэффициента рассеяния**

В помещении с одной поглощающей стенкой устойчивыми лучевыми траекториями являются линии, лежащие в плоскости, параллельной поглощающей поверхности. Поэтому звук падает под разными углами на испытываемые элементы, но в одной плоскости, и происходит усреднение по углу измеряемого параметра. Если рассеиватель несимметричен и имеет коэффициент рассеяния или поглощения, зависящий от угла падения, то изменение его ориентации относительно этой плоскости приведет к изменению коэффициента рассеяния и кривой затухания звука, что позволяет экспериментально выявить зависимость измеряемых параметров от угла падения. Данный подход был проверен в модельном эксперименте, описанном в предыдущем разделе, кратко приведем его результаты [280].

В помещении на рис. 7-8,а на четырех вертикальных стенках располагаются звукорассеивающие элементы в форме параллелепипеда (высота элемента 5 см, длина – 3 см, ширина – 1 см). Если элементы сориентированы вдоль поглощающей поверхности, то рассеяние звука минимально, а если поперек ей, то максимально. На рис. 7-10 приведены схемы расположения звукопоглощающего материала и рассеивающих элементов. Как и ранее, конфигурация E0 используется для определения коэффициента звукопоглощения стенок помещения  $\alpha'$ . Конфигурации A0, A6h, A6v, A12h, A12v отличаются количеством и расположением звукорассеивающих элементов: число в обозначении конфигурации обозначает количество элементов, буква h – рассеиватели сориентированы вдоль поглощающей поверхности, буква v – рассеиватели сориентированы поперек поглощающей поверхности.

На графиках на рис. 7-10 представлены кривые затухания в октавных полосах частот 4 и 8 кГц, измеренные в помещении при различных его конфигурациях. Кривые затухания имеют существенные отличия в зависимости от положения рассеивателей и от их пространственной ориентации, т.е. измеренный коэффициент рассеяния зависит от диаграммы рассеяния элементов. В таблице 7-2 приведены результаты измерения и расчета коэффициентов поглощения и рассеяния стенок с рассеивателями, а также вычислена эквивалентная площадь рассеяния  $S_m\delta$  ( $S_m\delta/n$  – эквивалентная площадь рассеяния одного элемента или его сечение рассеяния). Сечения рассеяния элементов при поперечном расположении относительно поглощающей стенки в несколько раз превышают сечение рассеяния при продольном расположении, что подтверждает работоспособность метода. Изменение теоретического подхода заключается лишь во введении зависимости искомых коэффициентов рассеяния и поглощения от угла падения звуковой волны, т.е.  $\alpha = \alpha(\theta, \phi)$  и  $\delta = \delta(\theta, \phi)$ , в исходные уравнения (7.21) и (7.24).

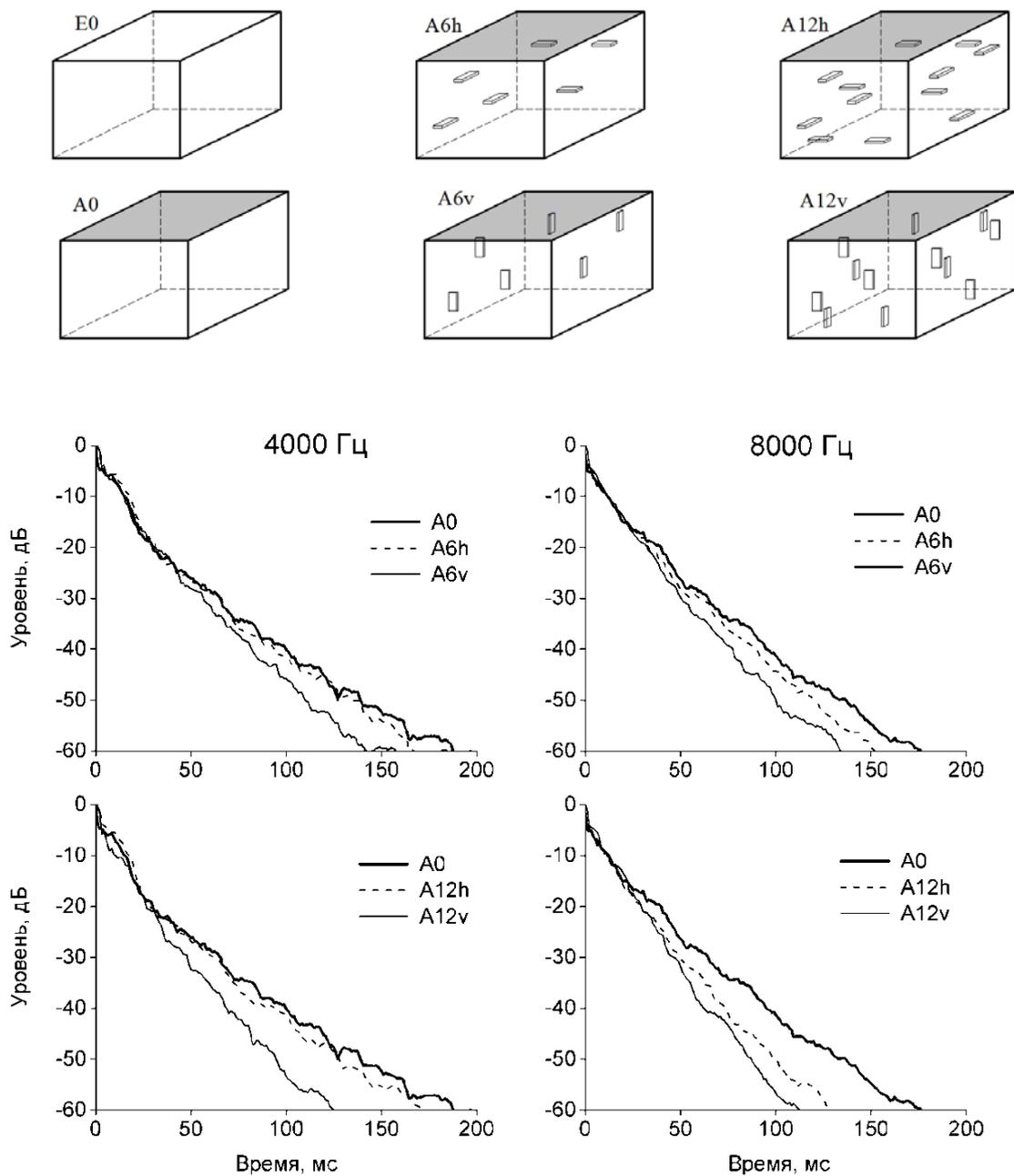


Рис. 7-10. Схемы расположения звукопоглощающего материала (обозначен серым цветом) и звукорассеивающих элементов в модельном помещении и измеренные кривые затухания при различной ориентации рассеивателей относительно поглощающей стенки.

Таблица 7-2. Расчет коэффициента рассеяния и эквивалентной площади рассеяния

Конфигурация	4000 Гц	8000 Гц
Суммарный коэффициент поглощения и рассеяния $\alpha + \delta$ , определенный по кривой затухания (для конфигурации A0 – коэффициент поглощения $\alpha$ )		
A0	0.086	0.095
A6h	0.093	0.110
A6v	0.116	0.137
A12h	0.103	0.135
A12v	0.140	0.166
Средний коэффициент рассеяния $\delta$ тестовых стенок		
A6h	0.007	0.015
A6v	0.030	0.042
A12h	0.017	0.040
A12v	0.054	0.071
Эквивалентная площадь рассеяния $S_m \delta$ , м <sup>2</sup>		
A6h	0.0045	0.0096
A6v	0.0192	0.0269
A12h	0.0109	0.0256
A12v	0.0346	0.0454
Эквивалентная площадь рассеяния одного рассеивающего элемента $S_m \delta / n$ , см <sup>2</sup>		
A6h	7	16
A6v	32	45
A12h	9	21
A12v	29	38

#### 7.2.4. Измерения при нормальном падении звуковой волны

Дальнейшее развитие метода состоит в том, чтобы проводить измерения коэффициентов рассеяния и поглощения при нормальном падении звуковой волны на рассеивающую поверхность. В помещении на рис.7-8,а устойчивыми лучевыми траектории лежат в плоскости, параллельной поглощающей поверхности. Очевидно, что если покрыть поглотителем еще одну стену, непараллельную первой, то останется одна устойчивая лучевая траектория –

прямая, параллельная двум поглощающим стенкам. Рассмотрим такую конфигурацию помещения подробнее.

Пусть стенки 1 и 3 помещения на рис. 7-1 имеют акустический импеданс  $Z$ , тогда их коэффициенты отражения равны

$$\gamma_1(\theta, \phi) = \left| \frac{Z \sin \theta - 1}{Z \sin \theta + 1} \right|^2, \quad \gamma_3(\theta, \phi) = \left| \frac{Z \cos \theta \sin \phi - 1}{Z \cos \theta \sin \phi + 1} \right|^2. \quad (7.32)$$

Остальные стенки являются отражающими, т.е.  $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 1$ , тогда закон затухания энергии зеркальных отражений при  $t \gg \frac{D}{c}, \frac{H}{c}$  имеет вид  $E_s(t) \sim 1/t$ .

Пусть в помещении с двумя поглощающими стенками, рассмотренном выше, непараллельная им третья стенка является рассеивающей. Ее коэффициент поглощения  $\alpha_6 = 0$ , а коэффициент рассеяния  $\delta_6$  в общем случае зависит от угла падения волны. Коэффициент зеркального отражения определяется из закона сохранения энергии

$$\gamma_6(\theta, \phi) = 1 - \delta_6(\theta, \phi). \quad (7.33)$$

Полагая остальные три стенки гладкими и абсолютно жесткими, подставляем (7.32) и (7.33) в (7.21) и находим закон затухания при  $t \gg \frac{L}{c}, \frac{D}{c}, \frac{H}{c}$

$$E_s(t) \approx \frac{\sqrt{HD}}{4ct \operatorname{Re} Z} e^{-\frac{ct}{2L} \delta_6(0,0)}. \quad (7.34)$$

Таким образом, закон затухания зависит от нормального коэффициента рассеяния стенки с номером  $i = 6$ , а значение этого коэффициента может быть определено по измеренной кривой затухания путем ее аппроксимации функцией (7.34).

Полная звуковая энергия в помещении определяется энергией зеркальных отражений (7.34) и рассеянной энергией. Расчет рассеянной энергии проводится по (7.24) и дает следующую оценку

$$E_d(t) \approx \frac{\pi^2}{64} \frac{\delta_{\perp}}{1 - \delta_{\perp}} \frac{HD}{ctL \operatorname{Re} Z} e^{-\frac{ct}{2L} \delta_{\perp}}. \quad (7.35)$$

где  $\delta_{\perp} = \delta_6(0,0)$ .

Энергия зеркальных отражений (7.34) и рассеянная энергия (7.35) зависят от времени одинаково, поэтому зависимость полной звуковой энергии в помещении  $E = E_s + E_d$  от времени имеет вид

$$E(t) \approx \frac{a}{t} e^{-bt}. \quad (7.36)$$

Таким образом, измеренная кривая затухания аппроксимируется зависимостью (7.36), определяются коэффициенты  $a$  и  $b$ , коэффициент рассеяния находится из выражения

$$\delta_{\perp} = \frac{2L}{c} b. \quad (7.37)$$

Отметим, что при выводе (7.35) рассмотрено только однократное рассеяния звука. Рассеянные при каждом отражении лучи через некоторое время вновь попадут на рельефную стенку, рассеянная при этом энергия также даст вклад в общую звуковую энергию в помещении, неучтенный в (7.35). Значение этой энергии можно оценить так же, как энергию однократных рассеяний (7.34), очевидно, что она будет пропорциональна  $\delta_{\perp}^2$ . Аналогичным образом можно ввести энергию многократных рассеяний, и она будет пропорциональна  $\delta_{\perp}^m$ , где  $m$  – количество отражений от рассеивающей стенки.

Энергия  $E_d$  с учетом всех рассеяний также затухает по закону (7.36), поэтому можно было бы заключить, что затухание звука в помещении происходит по этому же закону при любых значениях коэффициента рассеяния. Однако (7.36) получено с учетом зависимости (7.35), справедливой при  $t \gg \frac{L}{c}$ , т.е. предполагается, что рассеяние на стенке невелико, поэтому рассеянная энергия не успевает быстро поглотиться и ее затухание происходит по закону (7.36). Если значительная доля энергии рассеивается при отражении от рельефной стенки, то, во-первых, энергия зеркальных отражений  $E_s$  уменьшается достаточно быстро, а во-вторых, затухание рассеянной энергии происходит по закону (7.24) при  $t \sim \frac{L}{c}$ , что отличается от приближенного закона затухания (7.35). Здесь не рассматривается случай больших коэффициентов

рассеяния, но в предельном случае  $\delta_{\perp} \rightarrow 1$  закон затухания должен переходить к обычному закону Сэбина.

Предложенный способ измерения коэффициента рассеяния звука при нормальном падении также проверен в модельном эксперименте, результаты которого подробно изложены в работах [101, 306, 381], здесь приводятся только основные результаты. В описанном выше прямоугольном помещении (рис. 7-11) одна из стенок размером 0.4x0.4 м предназначена для размещения тестируемых рассеивателей звука. В одном из углов помещения располагается источник звука с достаточно широкой диаграммой направленности, чтобы считать звуковое поле изотропным в начальный момент времени. Измерения кривой затухания производятся ненаправленным микрофоном, расположенным примерно в центре помещения.

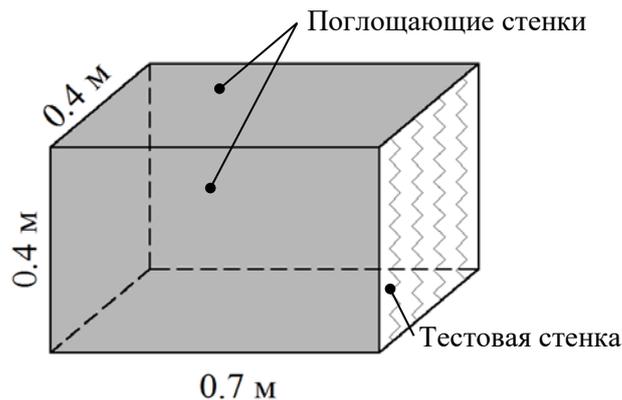


Рис. 7-11. Схема модельного эксперимента для измерения коэффициентов рассеяния и поглощения звука при нормальном падении.

В первую очередь проведены измерения в помещении без рассеивателей. На примере кривой затухания, измеренной в таком помещении, покажем процедуру обработки результатов измерений. На рис. 7-12,а приведена измеренная кривая затухания в октавной полосе со среднегеометрической частотой 8 кГц. Для анализа выбирается ее участок на временном интервале от  $t_1$  до  $t_2$ . Нижняя граница  $t_1$  принимается из соотношения  $t \gg \frac{L}{c} = 2\text{мс}$ . Значение  $t_2$  соответствует моменту времени, когда значение кривой затухания на 10 дБ превышает значение фонового

шума. Таким образом, аппроксимация измеренной кривой производится на временном интервале, ограниченном значениями  $t_1 = 20\text{мс}$  и  $t_2 = 196\text{мс}$ . Кривая (7.36) с коэффициентами  $a = 4.7 \cdot 10^{-4}$  и  $b = 37.0$ , значения которых подобраны методом наименьших квадратов, показана на рис. 7-12,а пунктиром.

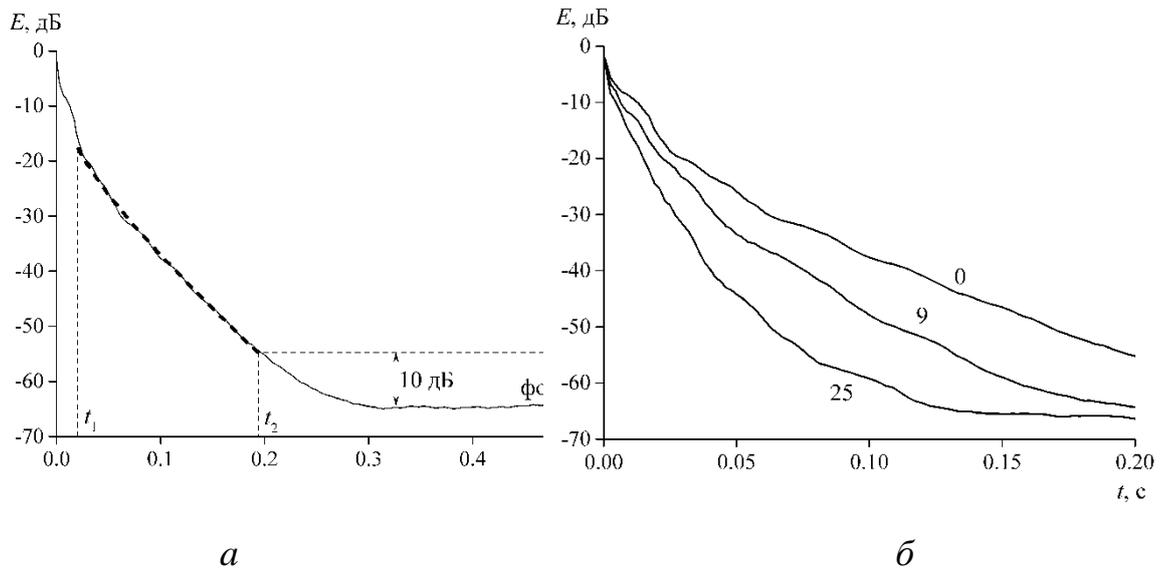


Рис. 7-12. Измеренные кривые затухания в модельном эксперименте (рис. 7-11): а – пример аппроксимации измеренной кривой затухания теоретической зависимостью (7.36), обозначенной пунктиром; б – кривые затухания, измеренные в помещении без рассеивающих кубических элементов (кривая 0), а также с 9 и 25 элементами.

Без рассеивателей тестовая и противоположная ей стенка обладают одинаковыми акустическими свойствами. По найденному значению  $b$  можно определить коэффициент поглощения стенок  $\alpha$ . В левую часть (7.37) вместо  $\delta_{\perp}$  необходимо подставить сумму коэффициентов поглощения этих стенок, т.е.  $2\alpha$ , тогда коэффициент звукопоглощения тестовой стенки равен  $\alpha = Lb/c = 0.078$ , где  $L = 0.7\text{м}$ .

На практике испытываемая поверхность всегда поглощает звук. Звукопоглощение может быть довольно существенным, особенно на высоких частотах. Если  $\alpha, \delta \ll 1$ , то влияние поглощения и рассеяния звука тестовой стенкой на закон затухания одинаков, поэтому вместо коэффициента рассеяния  $\delta_6(0,0)$  непоглощающей поверхности в (7.34) необходимо

подставить сумму коэффициентов поглощения и рассеяния реальной тестовой стенки  $\delta' = \delta_6(0,0) + \alpha_6(0,0)$ . При дальнейшем расчете коэффициента рассеяния необходимо учитывать коэффициент поглощения, измеренный в помещении без образцов.

В качестве рассеивающих элементов в эксперименте использовались деревянные кубики со стороной 3.5 см. Кубики приклеивались к поверхности тестовой стенки, их количество изменялось от 2 до 61, в последнем случае кубики располагались в шахматном порядке и занимали половину площади тестовой стенки. На рис. 7-13 приведены результаты измерения суммарного коэффициента поглощения и рассеяния  $\delta'$  тестовой стенки для частот 4 и 8 кГц в зависимости от количества кубиков  $n$  на тестируемой стенке.

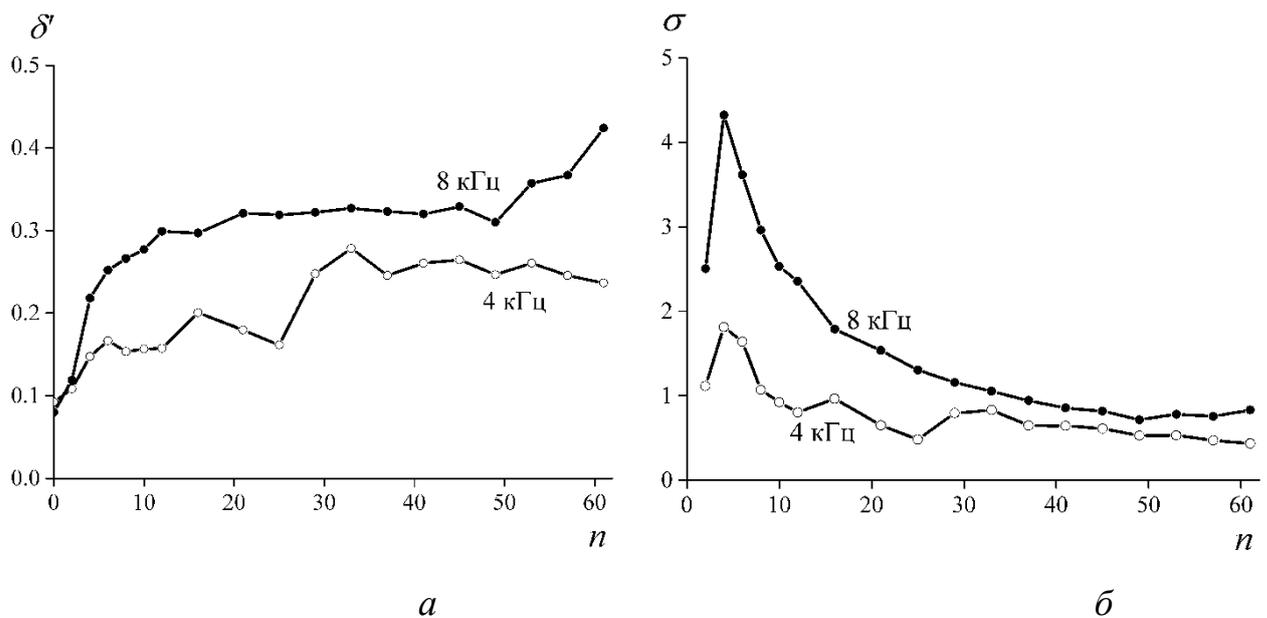


Рис. 7-13. Результаты измерения суммарного коэффициента поглощения и рассеяния  $\delta'$  тестовой стенки (а) и сечение рассеяния одного кубического элемента (б) в зависимости от количества рассеивателей  $n$ .

На частоте 8 кГц измеренный коэффициент  $\delta'$  монотонно увеличивается с ростом количества звукорассеивающих элементов на тестовой стенке. Но при расположении на стенке от 12 до 49 шт. измеренное значение коэффициента  $\delta'$  практически не изменяется и составляет около 0.32.

Звукорассеивающие свойства тестовой стенки остаются постоянными, хотя концентрация элементов, т.е. количество рассеивателей на единицу площади, изменяется в четыре раза. Следовательно, наблюдается некоторое предельное рассеивание звука, обеспечиваемое кубическими элементами, располагаемыми на жесткой плоской поверхности. При наличии 53-61 рассеивателей на тестовой стенке значительно увеличивается измеренный коэффициент  $\delta'$ . Это предположительно связано с увеличением поглощения звука на тестовой стенке из-за того, что при большом количестве элементов многие из них прилегают к стенкам помещения, перпендикулярным тестовой. При этом не удалось обеспечить плотное примыкание кубиков к этой стенке, что привело к наличию щелей между кубиками и стенками, приведшему к увеличению звукопоглощения.

На частоте 4 кГц полученная в эксперименте зависимость суммарного коэффициента поглощения и рассеяния от количества кубиков на тестовой стенке похожа на аналогичную зависимость на частоте 8 кГц: с увеличением количества рассеивателей коэффициент  $\delta'$  растет и достигает предельного значения 0.26 при 33 рассеивателях. Дальнейшее увеличение количества рассеивателей на плоской поверхности не приводит к значимым изменениям ее коэффициента рассеяния.

Для характеристики звукорассеивающих свойств одного элемента введем безразмерную величину – сечение рассеяния  $\sigma$ . Эквивалентная площадь рассеяния и поглощения [258] тестовой стенки равна  $\delta'S$ , где  $S$  – площадь тестовой стенки. Поглощение звука, вносимое поверхностью тестовой стенки, можно учесть как эквивалентную площадь звукопоглощения этой поверхности, незанятой рассеивателями. С учетом измеренного в помещении без рассеивателей коэффициента поглощения тестовой стенки  $\alpha = 0.078$ , эквивалентная площадь поглощения этой стенки с рассеивателями равна  $\alpha(S - S_0n)$ , где  $S_0$  – площадь поверхности кубического рассеивателя,  $n$  – количество рассеивателей на тестовой стенке. Сечение рассеяния одного

кубика в зависимости от количества кубиков на тестовой стенке определим следующим образом

$$\sigma(n) = \frac{\delta'S - \alpha(S - S_0n)}{S_0n}. \quad (7.38)$$

Полученная согласно (7.36) зависимость  $\sigma(n)$  представлена на рис. 3б для частот 4 и 8 кГц. Сечение рассеяния одного кубика максимально при наличии четырех кубиков на стенке на обеих частотах. С увеличением количества кубиков сечение рассеяния уменьшается и достигает значения 1, когда эквивалентная площадь рассеяния одного кубика равна площади его поверхности, при 10 рассеивателях на 4 кГц и 36 рассеивателях на 8 кГц. Отметим, что сечение рассеяния на 8 кГц примерно в два раза выше, чем на 4кГц, если количество рассеивателей не превышает 25. Очевидно, это связано с волновым размером рассеивателя: на частоте 8 кГц он в два раза выше, что и обеспечивает более эффективное рассеяние звука.

Итак, предложенная методика позволяет проводить измерения коэффициента рассеяния и поглощения при нормальном падении звуковой волны на поверхность.

### **7.3. Приложения в архитектурной акустике**

#### **7.3.1. Неэкспоненциальное затухание звука**

В разделе 7.1 показано, что при наличии устойчивых лучевых траекторий закон затухания звука может быть медленнее экспоненциального. Теоретически такие ситуации возникают в помещениях с низкими рандомизирующими свойствами, но могут наблюдаться и в помещениях сложной формы, но с неравномерным распределением звукопоглощения [330]. Неэкспоненциальное затухание исследовано во многих численн экспериментах, а также в постановочных экспериментах. Однако, сведений о наблюдении таких явлений в реальных помещениях, особенно большого размера, не так много. В работе [70] приведено два примера концертных залов,

в которых наблюдается существенное отличие закона затухания от экспоненциального. Первый зал – концертный зал Саратовской областной филармонии объемом 6300 м<sup>3</sup> (с учетом объема сцены), имеющий прямоугольную форму и относительно небольшое сценическое пространство. Второй зал – киноконцертный зал в г. Пензе с объемом зрительской части 16000 м<sup>3</sup>. Форма зала в плане – веерообразная, потолок зала имеет сложную геометрию, при этом в отделке зала применено достаточно большое количество звукопоглощающих материалов, что обеспечивает сильную заглушенность. В качестве меры неэкспоненциальности затухания выбрано отношение  $T_{30}/EDT$ , где  $T_{30}$  – время реверберации, определяемое по начальному участку кривой затухания от -5 до -35 дБ,  $EDT$  – время затухания ранних отражений (early decay time), определяемое как время затухания на 10 дБ от начала импульсного отклика, умноженное на 6. На рис. 7-14 приведено отношение  $T_{30}/EDT$  в зависимости от частоты, определенное по измерениям в точке, являющейся геометрическим центром зала, и для средних по залу значений.

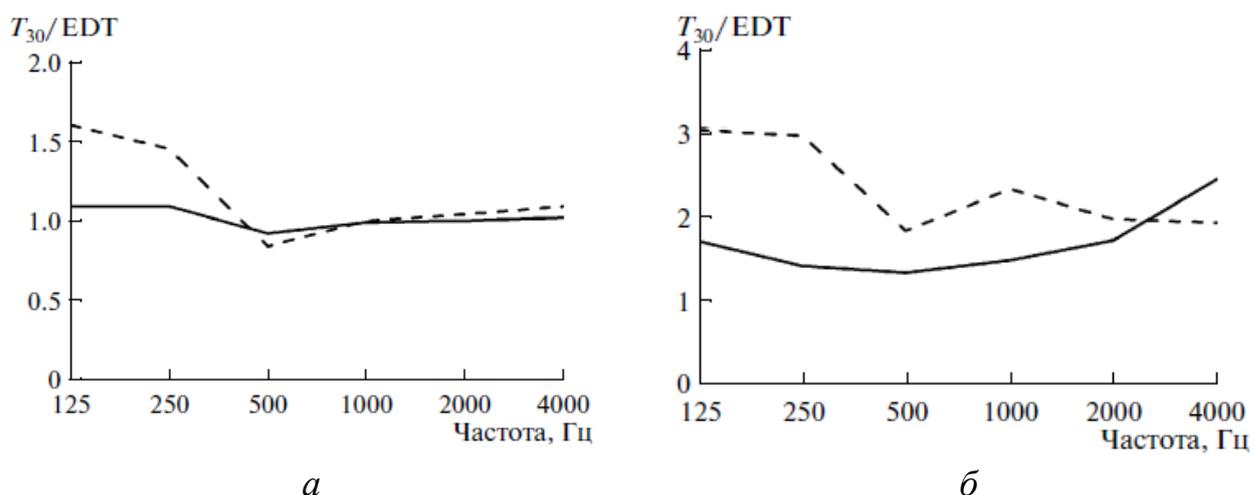


Рис. 7-14. Отношение  $T_{30}/EDT$ , измеренное в концертном зале Саратовской областной филармонии (а) и в киноконцертном зале г. Пензы (б) для геометрического центра залов (пунктирная линия) и для среднего по залу значения (сплошная линия).

Приведенные примеры из практики показывают, что в концертных залах звук может затухать неэкспоненциально, при этом такое затухание может наблюдаться как локально, т.е. в некоторых зонах зрительской части зала, так и по всей его площади, а также на отдельных частотах или во всем частотном диапазоне. Количественная значимость отличия закона затухания от экспоненциального связана главным образом с определением времени реверберации, значение которого может отличаться в несколько раз в зависимости от методики расчета [64, 69]. В приведенных примерах время реверберации, определенное по всей кривой затухания, превышает время реверберации, определенное по ее начальному участку, в некоторых точках в 1.5-3 раза.

Еще до недавнего времени многими практикующими акустиками считалось, что в залах должны обеспечиваться достаточно высокая диффузность звукового поля и, вследствие этого, экспоненциальное затухание звука. Сегодня эта позиция не столь решительна, поскольку появились убедительные сведения (см. работу [278] и библиографию к ней) о том, что диффузное поле лишает концертные залы особенностей звучания, а зеркальные отражения, наоборот, их подчеркивают. Уменьшение звукорассеивающих решений в отделке повышает вероятность появления устойчивых лучевых траекторий, обуславливающих затухание звука по экспоненциально-степенным законам. Субъективные оценки качества акустики залов не выявляют неблагоприятных впечатлений, поэтому создание условий для затянутого во времени затухания звука предлагается использовать как прием акустического проектирования многофункциональных помещений [187].

Использование поверхностей с регулируемым импедансом позволяет реализовать этот подход практически в любом помещении. Кроме этого, изменение акустических свойств поверхностей активным способом с поглощающей на отражающую и наоборот, описанным в разделе 4.1.3, позволяет изменять акустические параметры помещений в широком

диапазоне, что требуется для современных многофункциональных концертных залов.

Другим примером влияния на акустику помещений устойчивых лучевых траекторий является эффект «порхающего» эха [68], это негативное явление, ухудшающее разборчивость и вносящее искажения в звукозапись. Чаще всего порхающее эхо наблюдается в помещении с параллельными отражающими стенками, если при этом другие поверхности обладают существенным звукопоглощением. В качестве примера приведем импульсный отклик, записанный в аудитории прямоугольной формы (рис. 7-15,а). Потолок аудитории выполнен разноуровневым, на длинных стенах расположено несколько оконных проемов, закрытых плотными шторами, на полу размещен стол для заседаний и около 50 мягких зрительских кресел. Таким образом, две длинные стены, потолок и пол имеют значительные звукопоглощающие и звукорассеивающие свойства. Вместе с тем короткие стены являются плоскими и звукоотражающими, что создает условия для возникновения устойчивых лучевых траекторий между этими стенами.

На рис. 7-15,б и 7-15,в представлен импульсный отклик в октавных полосах частот со среднегеометрическими частотами 2000 и 4000 Гц, измеренный в точке М при расположении источника звука в точке S. На импульсных откликах наблюдаются эквидистантные пики, расстояние между которыми составляет 95 мс, что соответствует времени распространения звука от одной короткой стенки аудитории до другой и обратно. Отметим, что на частотах ниже 2000 Гц проявление порхающего эха на импульсных откликах значительно слабее. Субъективно порхающее эхо воспринимается как многократно повторяющиеся отзвуки, которые разрешаются как отдельные сигналы из-за большого временного интервала между ними. В конечном счете это приводит к дискомфорту для слушателей, а также, что более серьезно, к потере разборчивости исходного звукового сигнала.

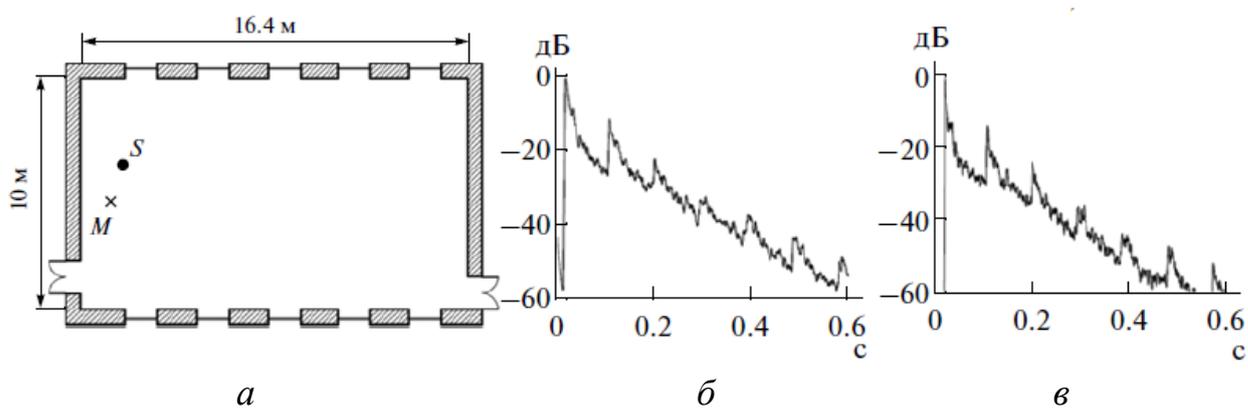


Рис. 7-15. Измерение импульсного отклика в аудитории (а),  $S$  – положение источника звука,  $M$  – положение микрофона. Импульсные отклики измерены в октавных полосах частот со среднегеометрическими частотами 2000 Гц (б) и 4000 Гц (в).

### 7.3.2. Резонаторы Гельмгольца в помещениях (голосники)

Широкоизвестным примером использования резонаторов в архитектурной акустике являются голосники – полые сосуды, встроенные в стены, потоки и своды помещений и сообщающиеся с основным объемом помещения через отверстия. Использование полых сосудов для облегчения сводов при возведении храмов было широко распространено в древнерусском каменном строительстве [155, 163, 164]. Существует устойчивое мнение, что голосники значительно улучшают акустику храмовых помещений, помогают голосу, отсюда, по-видимому, и произошло их название. Свидетельства использования таких сосудов найдены в Киеве, Новгороде, Гродно, Москве и других городах. Наибольшее количество архитектурных памятников, оборудованных голосниками, по-видимому, находится в Пскове [285]. Впервые голосники описаны у Витрувия [32]. Он предлагает делать медные сосуды в соответствии с размерами театра и размещать их в особые ниши между сидениями. Приводятся довольно подробные рекомендации по настройке сосудов, их количеству и оптимальному положению. Хотя археологических доказательств использования таких сосудов в античных театрах на сегодня нет.

Проанализируем физические механизмы действия голосников – резонаторов Гельмгольца, встроенных в жесткую поверхность (рис. 7-16) – на акустику помещения. Геометрические размеры резонатора Гельмгольца зададим следующими параметрами: объемом сосуда  $V$ , площадью сечения горлышка  $S$ , длиной горлышка  $l$ .

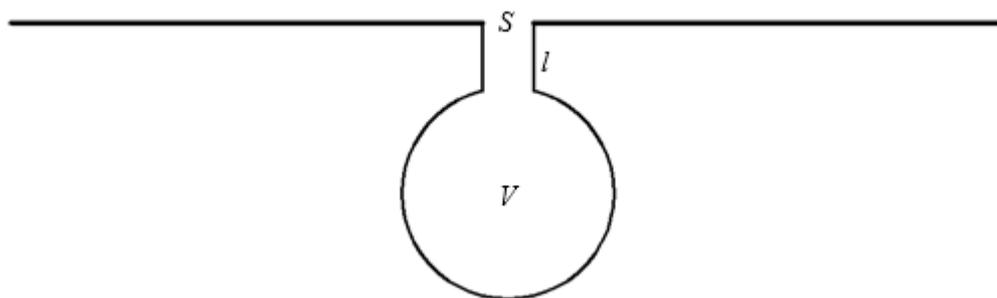


Рис. 7-16. Физическая модель голосника – резонатор Гельмгольца в жестком экране.

Обычно, воздействие резонаторов сводится к трем возможным механизмам [29]. Бездиссипативный резонатор совершает колебания в течение продолжительного времени, длительность которого определяется радиационным трением, поэтому он может, во-первых, влиять на процесс затухания звука в помещении, т.е. увеличивать время реверберации, а, во-вторых, влиять на импульсный отклик. Также резонатор Гельмгольца при оптимальном трении является эффективным поглотителем, т.е. может уменьшать время реверберации. Опуская достаточно простые выкладки [73], приведем только окончательные результаты.

Звуковая волна, падающая на резонатор, возбуждает его колебания, и часть энергии волны переходит в энергию колебаний резонатора, которая затем постепенно излучается обратно в помещение. Для того чтобы звук, излучаемый голосником, был слышен на фоне реверберационного процесса, необходимо, чтобы скорость затухания собственных колебаний голосника была меньше, чем скорость затухания звука в помещении, характеризуемая временем реверберации. На рис. 7-17 приведена кривая затухания звука (зависимость логарифмического уровня звуковой энергии  $E$  от времени) в

помещении со временем реверберации  $T_1$ , а также кривая затухания энергии, излучаемой голосниками, амплитуда колебаний которых уменьшается на 60 дБ за время  $T_2$ . Начальная звуковая энергия в помещении обозначена  $E_1$ ; начальная энергия, запасенная всеми голосниками, обозначена  $E_2$ . При выполнении условия  $T_2 > T_1$  существует момент времени  $t_0$ , после которого энергия, излучаемая голосниками, будет больше, чем остаточная энергия в помещении. Можно ожидать, что в этом случае влияние голосников на реверберацию будет заметным. Пунктиром на рис. 7-17 обозначена полная энергия в помещении. Отметим, что подобный закон затухания, называемый «double-slope decay», имеет место в связанных помещениях с разными временами реверберации [318].

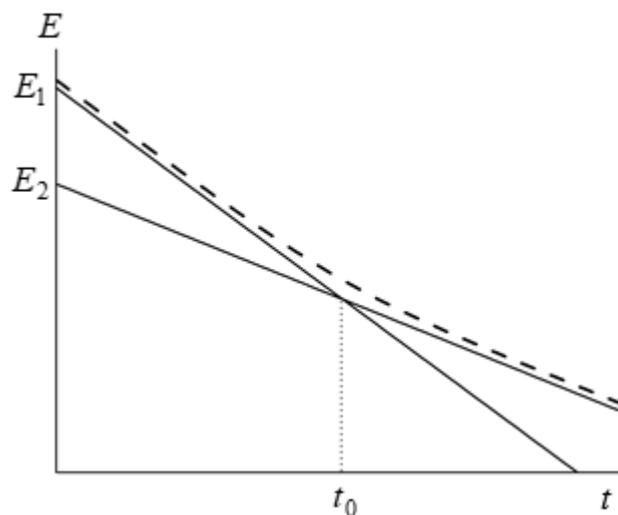


Рис. 7-17. Кривые затухание звука в помещении с голосниками.

Подбором параметров резонатора можно обеспечить достаточно низкое значение коэффициента радиационного трения, для того чтобы время затухания его колебаний  $T_2$  было больше  $T_1$ , но для заметного влияния на реверберацию необходимо также, чтобы энергия, запасенная голосниками, была больше или, по крайней мере, сопоставима со звуковой энергией в помещении, т.е.  $E_1 \sim E_2$ . При возбуждении резонатора импульсным звуком соотношение этих энергий составляет  $E_2/E_1 = NV/\Omega$ ,  $N$  – количество голосников в помещении,  $\Omega$  – объем помещения, и является заведомо малой

величиной. Если в помещении звук возбуждается тональным длительным сигналом, например распевами с частотой  $\omega_0$ , совпадающей с собственной частотой голосника, то его вынужденные колебания достигнут значительно большей амплитуды. Отношение энергий в голосниках и помещении составляет  $E_2/E_1 \sim N V^2 / (v \Omega)$ , где  $v = l^3$  – характерный объем горла резонатора. Поскольку для типовых параметров голосников и помещений, в которых они применяются, справедливо соотношение  $v/V \gg V/\Omega$ , то количество голосников должно быть очень велико. Принимая, что  $v/V = 0.1$ , находим необходимое количество  $N \sim 0.1 \Omega/V$  для выполнения условия  $E_1 \sim E_2$ . Во-первых, это на порядок меньше, чем при возбуждении импульсом, во-вторых, это количество очень велико и для помещений сравнительно небольшого объема исчисляется сотнями. Но даже при таком количестве их влияние возможно лишь в помещении со временем реверберации менее 0.5 с, т.е. в очень заглушенном помещении, поскольку для характерных размеров голосников, описанных в литературе [155, 163, 164], время затухания колебаний  $T_2$  без учета механического трения не превышает 0.5 с.

Рассмотрим второй механизм – влияние голосника на импульсный отклик. Пусть в помещении есть источник звука  $I$  и приемник  $П$  (рис. 7-18,а). В точку приема  $П$  приходит прямой звук  $1$ , отраженный от ближайших стенок звук  $2$  и  $4$ , а также звук  $3$ , рассеянный голосником. Очевидно, что хронологически они приходят в том же порядке. Амплитуда отраженного звука несколько меньше амплитуды прямого звука из-за геометрического расхождения сферической волны. На рис. 7-18,б схематично приведен импульсный отклик в точке  $П$ , на котором импульсы  $1, 2, 4$  соответствуют прямому и отраженным звукам. Волна  $3$  возбуждает колебания голосника, звук от которого на импульсном отклике представляет собой затухающую синусоиду  $3$ . В реальном помещении отклик состоит из большого количества импульсов, но присутствие синусоид в нем не является типичным.

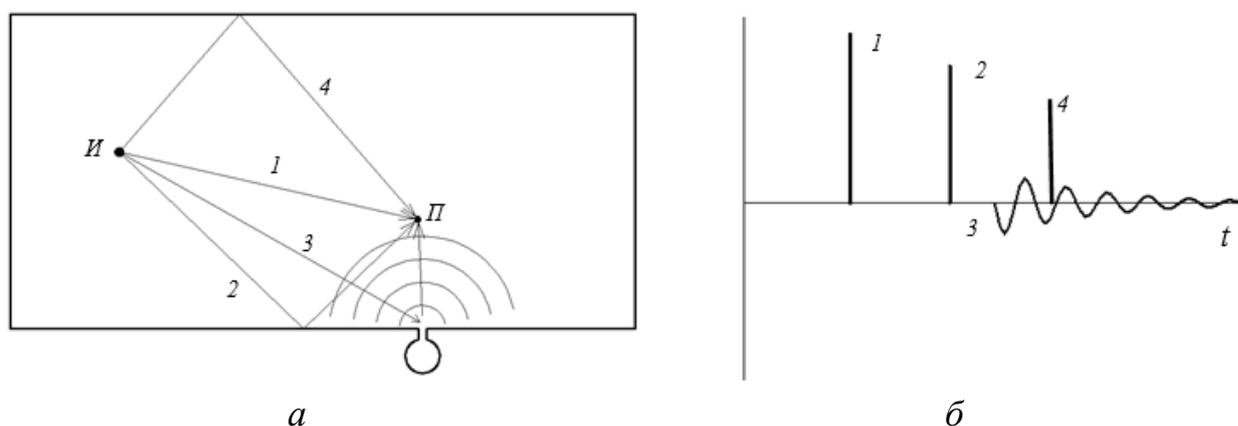


Рис. 7-18. Голосник в помещении (а) и импульсный отклик в точке П (б).

Если точка П расположена на расстоянии  $r$  от голосника много меньшем расстояния от точки П до источника И, т.е. если слушатель находится недалеко от голосника, то можно считать одинаковой амплитуду импульса 1 на рис. 7-18 и амплитуду импульса, возбуждающего колебания голосника. Отношение звукового давления от голосника в точке И к звуковому давлению импульса 1, выраженное в децибелах, составляет

$$L = 20 \lg \frac{\pi f_0^2 V}{c^2 r}, \quad (7.39)$$

где  $f_0$  – резонансная частота голосника. На расстоянии  $r = 1$  м значение отношения (7.39) для параметров размеров голосников ( $V = 10^{-2}$  м<sup>3</sup>,  $f_0 = 150$  Гц,  $S = 0.01$  м<sup>2</sup>) равно  $L = -44$  дБ. Таким образом, уровень звукового давления, создаваемого голосником на расстоянии 1 м, на 44 дБ меньше уровня звукового давления прямого звука. На больших расстояниях от голосника это отношение еще меньше. Следовательно, влияние голосников на структуру импульсного отклика незначительно.

Третий механизм возможного влияния голосников на акустику помещения заключается в резонансном поглощении, которое приводит к снижению гулкости и улучшению разборчивости [29]. Сечение поглощения резонатора Гельмгольца, встроенного в жесткую поверхность (рис. 7-16), составляет

$$\sigma = 4\rho c \frac{\gamma S^2}{(\gamma + RS^2)^2 + \omega^2 m^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}, \quad (7.40)$$

где  $\gamma$  – трение резонатора,  $R = \rho c k^2 / 2\pi$  – сопротивление излучения. Максимальное сечение поглощения достигается на резонансной частоте при коэффициенте трения  $\gamma = RS^2$  и составляет  $\sigma_m = \rho c / R = \lambda_0^2 / 2\pi$ , где  $\lambda_0$  – длина звуковой волны на частоте  $\omega_0$ . Голосник с собственной частотой 150 Гц имеет максимальное сечение поглощения 0,82 м<sup>2</sup>. На рис. 7.19,*a* приведена зависимость сечения поглощения от частоты, рассчитанная согласно (7.40). Голосник эффективно поглощает звук только в узкой полосе частот 140-160 Гц. Поэтому в лучшем случае снижение времени реверберации будет зафиксировано в одной третьоктавной полосе.

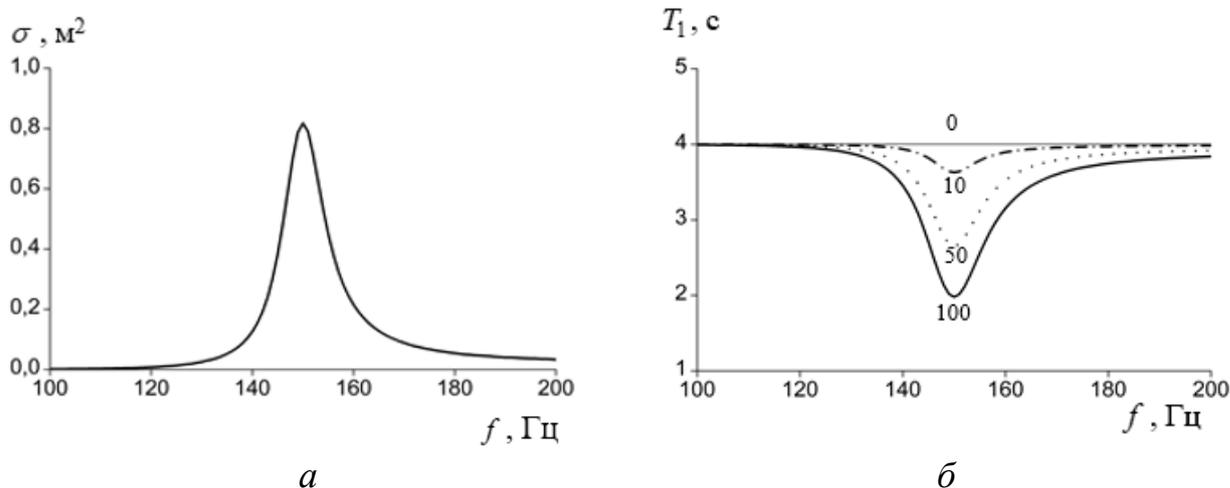


Рис. 7-19. Сечение поглощения голосника.

Далее сравним сечение поглощения с эквивалентной площадью звукопоглощения помещения  $A$ , которая может быть вычислена по известной формуле Сэбина  $T_1 = 0.16 \Omega / A$ . Предположим, что время реверберации  $T_1$  помещения с объемом  $\Omega = 2000$  м<sup>3</sup> составляет 4 с в диапазоне частот, рассматриваемом на рис. 7-19,*a*. Тогда эквивалентная площадь звукопоглощения равна  $A = 80$  м<sup>2</sup>. Для того чтобы удвоить фонд звукопоглощения на частоте 150 Гц, необходимо примерно 100 голосников.

При этом голосники должны работать независимо, для этого расстояние между ними должно быть больше половины длины звуковой волны. На рис. 7-19,б приведен расчет времени реверберации по формуле Сэбина для помещения с 10, 50 и 100 голосниками, частотная зависимость сечения поглощения которых приведена на рис. 7-19,а. Существенное – на 10% и более – уменьшение времени реверберации происходит в узкой полосе частот. При сохранении времени реверберации на остальных частотах на прежнем уровне маловероятно, что данное это изменение будет субъективно заметно.

Таким образом, на основании простейших физических подходов дана оценка влияния голосников на акустику помещения, в котором они используются. Показано, что, во-первых, они вносят малое возмущение в звуковое поле в помещении, а, во-вторых, это возмущение проявляется лишь в узкой полосе частот. Оценки не продемонстрировали значимых изменений объективных параметров, поэтому нельзя ожидать, что вносимые голосниками возмущения будут заметны субъективно.

Влияние голосников на акустику исследовано в натуральных условиях в Рахманиновском зале Московской государственной консерватории им. П.И. Чайковского [282]. Зал имеет прямоугольную форму и рассчитан на 246 мест. В зале есть балкон по всему периметру, но сегодня там нет стационарных зрительских мест. Объем зала составляет около 2500 м<sup>3</sup>, его длина – 24 м. Подробное описание зала и его акустические параметры приведены в [287]. В стены зала вмонтированы 29 голосников, они расположены по периметру под балконами и под потолком (рис. 7-20,а).

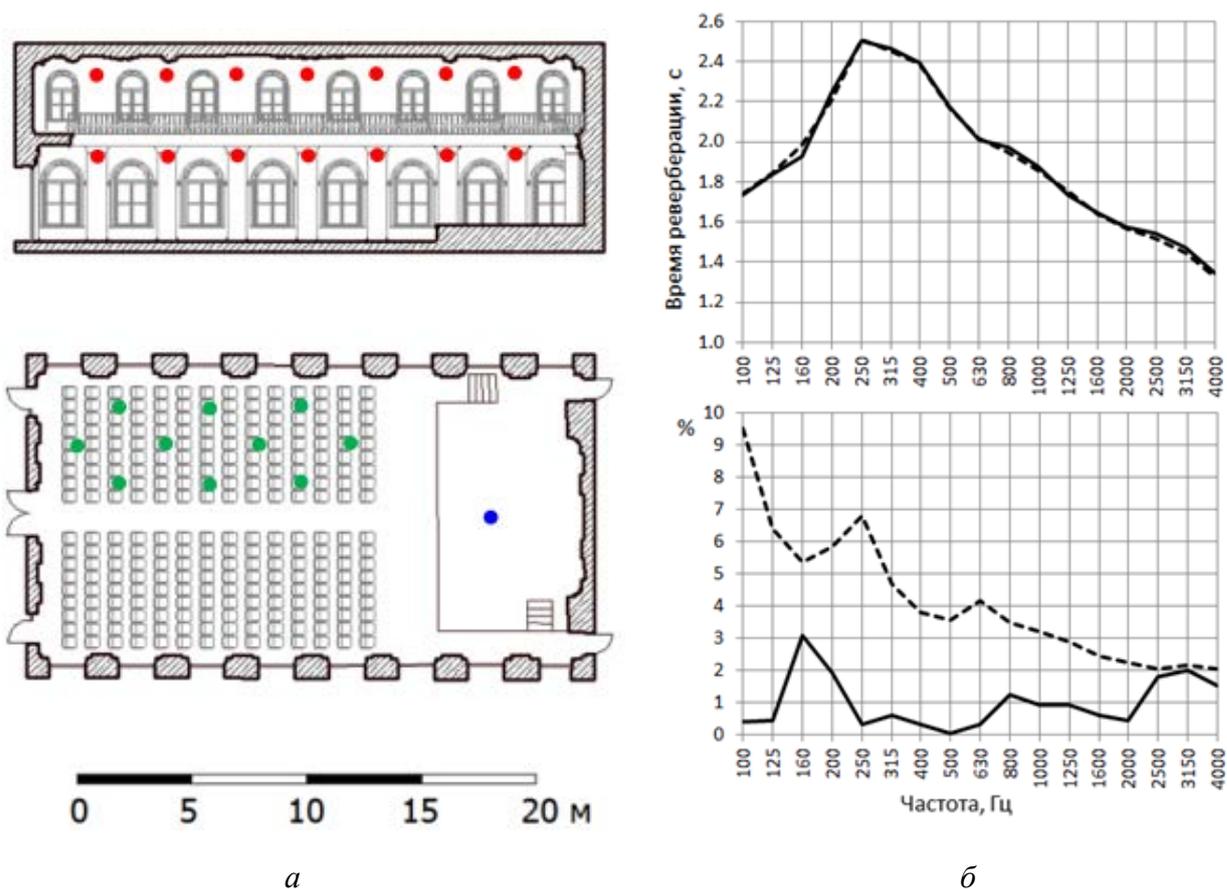


Рис. 7-20. Разрез и план Рахманиновского зала (а), красными точками указано расположение резонаторов на боковых стенах, зелеными – точки измерения, синей – положение источника звука. Измеренное время реверберации (б) с открытыми (пунктирная линия) и закрытыми (сплошная линия) голосниками; относительное изменение среднего значения времени реверберации  $\delta$  при закрытии голосников (сплошная линия) и среднеквадратичное отклонение по всем измерениям (пунктирная линия).

Диаметр резонаторов составляет 130-200 мм, диаметр горла – 95-115 мм, длина горла – 198-300 мм. Резонансные частоты голосников имеют значения 122-158 Гц. Во время стандартного акустического обследования был проведен ряд измерений действия голосников. В первую очередь было измерено время реверберации с открытыми и закрытыми голосниками. Измерение проведено по стандартной методике, установленной ГОСТ Р ИСО 3382-1-2013, в десяти точках в зале без публики при расположении ненаправленного источника звука на сцене (7-20,а). На рис. 7-20,б приведены средние по десяти измерениям значения времени реверберации.

Для характеристики изменения времени реверберации при закрытии голосников введем его относительное изменение

$$\delta = 100 \frac{|T_{откр} - T_{закр}|}{T_{откр}}, \quad (7.41)$$

где  $T_{закр}$  и  $T_{откр}$  – времена реверберации, измеренные при закрытых и открытых голосниках, усредненные по десяти измерениям.

Относительное изменение  $\delta$  приведено на рис. 7-20,б. Наибольшее отклонение, близкое к 3%, наблюдается на частоте 160 Гц, близкой к резонансным частотам голосников. Для оценки значимости этого отклонения, во-первых, сравним его со среднеквадратичным отклонением по всем измерениям (пунктирная линия на рис. 7-20,б). Относительное изменение среднего значения времени реверберации оказывается значительно меньше среднеквадратичного отклонения. Во-вторых, субъективно заметное изменение JND (just noticeable difference) времени реверберации составляет 5% [220]. Поэтому, с одной стороны, точность измерений достаточна для оценки заметности изменений времени реверберации, а с другой – возможное влияние голосников на время реверберации значительно ниже субъективной чувствительности человека.

Для исследования реакции голосника на возбуждение звуковой волной были измерены импульсные отклики внутри одного из голосников и на ближайшем к нему зрительском месте (рис. 7-21,а). Импульсный отклик в зале является, как обычно, широкополосным, а импульсный отклик внутри голосника – тональным. Следовательно, звуковое поле возбуждает колебания голосника на собственной частоте. При этом амплитуда звукового давления в голоснике оказывается выше, чем амплитуда возбуждающей волны. Также измерены амплитудно-частотные характеристики нескольких голосников. Результаты измерений микрофоном, расположенным в полости голосника, приведены на рис. 7-21,б для трех голосников. АЧХ является довольно изрезанной из-за влияния АЧХ зала, но резонансный характер колебания

голосников явно наблюдается. При этом голосники имеют разные резонансные частоты и добротности.

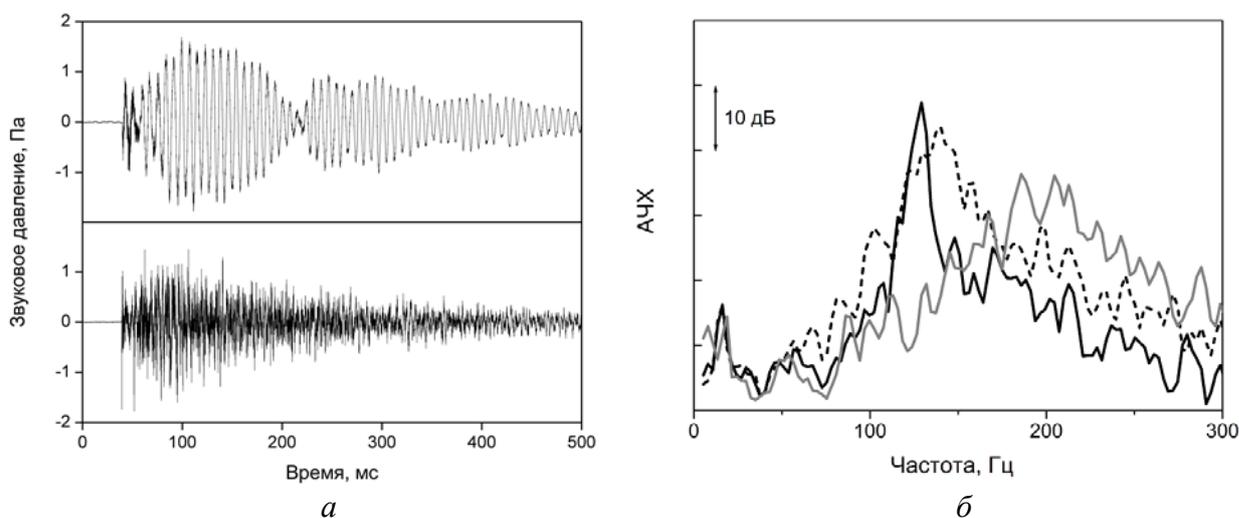


Рис. 7-21. Импульсные отклики внутри резонатора и на ближайшем к нему зрительском месте (а) и амплитудно-частотные характеристики резонаторов (б).

Натурные исследования, как и теоретическое рассмотрение, не показали заметных для восприятия изменений акустических условий в концертном зале, вносимых резонаторами-голосниками.

### 7.3.3. Возможности активных резонансных поглотителей

Активные резонаторы позволяют обеспечить резонансное поглощение звука в широкой полосе частот. Максимально возможное сечение поглощения для монополярного резонатора, встроенного в жесткую поверхность (рис. 7-16), составляет  $\sigma = \lambda^2/2\pi$ , где  $\lambda$  – длина звуковой волны. Очевидно, что наиболее эффективны активные резонаторы для поглощения звука на низких частотах. Для снижения времени реверберации в помещениях активные резонаторы являются альтернативой традиционным звукопоглощающим материалам. В некоторых случаях использование таких материалов в отделке помещений имеет ряд ограничений, что приводит к невозможности установки звукопоглощающей отделки в объеме, достаточном для обеспечения требуемых акустических параметров. В таких ситуациях применение точечных

активных поглотителей может стать подходящей альтернативой, поскольку они занимают сравнительно мало места и могут располагаться на значительном расстоянии друг от друга, хотя это расстояние уменьшается с частотой.

Рассчитать время реверберации в помещении, в котором установлены  $N$  активных резонаторов на расстоянии друг от друга, превышающем половину длины волны, можно по формуле Сэбина

$$RT = 0.16 \frac{V}{\bar{\alpha}S + N\sigma}, \quad (7.42)$$

где  $V$  – объем помещения,  $\text{м}^3$ ,  $S$  – общая площадь всех поверхностей,  $\text{м}^2$ ,  $\alpha$  – коэффициент звукопоглощения, усредненный по площади поверхностей.

В качестве примера рассмотрим общественное пространство объемом 106 тыс.  $\text{м}^3$  (помещение FC1 в [284]). Помещение не имеет специальной акустической отделки, при этом потолок и значительная часть стен светопрозрачные, что не позволяет применить на этих поверхностях звукопоглощающие материалы.

Оценим возможное снижение времени реверберации в помещении при использовании активных резонаторов. На рис. 7-22 приведен расчет по формуле (7.42) при использовании 1000 и 10000 активных резонаторов, настроенных на максимальное поглощение и равномерно распределенных по поверхностям помещения. Из расчета следует, что 1000 активных резонаторов недостаточно для существенного снижения гулкости. Увеличение количества элементов на порядок приводит к значительному уменьшению времени реверберации на 125 и 250 Гц. На частотах от 500 Гц и выше изменения остаются незначительными, поскольку сечение поглощения обратно пропорционально квадрату частоты.

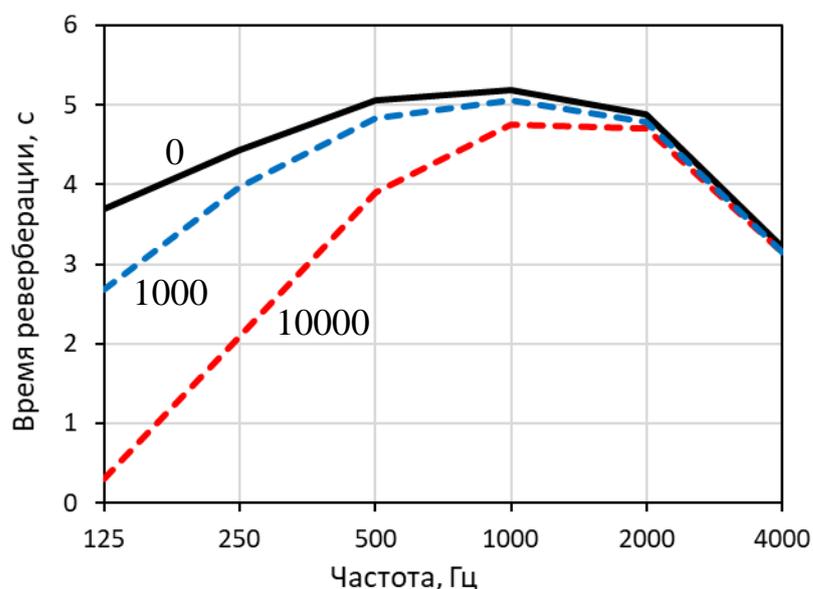


Рис. 7-22. Фактическое время реверберации в общественном помещении объемом 106 тыс. м<sup>3</sup> (0) и расчетное время реверберации при установке на стенах помещения 1000 и 10000 активных поглощающих резонаторов.

Таким образом, активные резонаторы могут в перспективе применяться для коррекции акустики помещений в области низких частот.

#### 7.4. Выводы к главе 7

В главе исследованы законы затухания звука в замкнутых объемах с неравномерными звукопоглощающими свойствами поверхностей, получены законы затухания и некоторые практически полезные следствия из них.

1. Получены законы затухания звука в прямоугольном помещении с импедансными стенками. Показано, что в общем случае затухание происходит по экспоненциально-степенному закону  $\sim e^{-At}/\sqrt{t}$ . Самое медленное затухание по закону  $\sim 1/\sqrt{t}$  имеет место в помещении, в котором только одна стенка обладает поглощающими свойствами. Самое быстрое затухание происходит в помещении, в котором все стенки имеют одинаковые свойства, при этом закон затухания близок к закону Сэбина на значимом участке кривой затухания.

2. Показано, что закон затухания зависит от существования в помещении устойчивых лучевых траекторий: если устойчивые траектории

существуют, то затухание происходит аномально медленно по закону близкому к степенному, в противном случае достаточно быстро – по экспоненциальному закону. Подробно рассмотрено трапецевидное помещение, в котором при определенных условиях могут существовать разные виды устойчивых лучевых траекторий. При этом малые изменения формы прямоугольного помещения с одной поглощающей стенкой, в котором затухание звука происходит медленно, могут привести к резкому изменению закона затухания, если эти изменения приводят к исчезновению устойчивых траекторий.

3. Получены законы затухания в помещениях с учетом рассеяния звука на стенках. При малом коэффициенте рассеяния закон затухания звука остается экспоненциально-степенным, а при достаточно большом – стремится к закону Сэбина.

4. Предложен новый метод измерения коэффициентов звукорассеяния и звукопоглощения поверхностей, основная идея которого состоит в измерении кривой затухания звука в условиях недиффузного звукового поля и в последующей аппроксимации измеренной кривой затухания известной экспоненциально-степенной функцией, одним из аргументов которой является коэффициент рассеяния или коэффициент поглощения.

5. Экспериментально продемонстрированы возможности нового метода на примере измерения коэффициента рассеяния звука рельефными поверхностями. Проверена возможность измерения зависимости коэффициента рассеяния от угла падения звуковой волны, что в перспективе позволит исследовать характеристики звукорассеивающих элементов с анизотропными свойствами.

6. Проведены оценки применимости полученных результатов для некоторых практических задач архитектурной акустики.

## Глава 8. Резонаторные метасреды

Акустическими метаматериалами называют сложноустроенные структуры, обладающие необычными свойствами и состоящие из элементов малого волнового размера - метаатомов, связанных между собой определенным образом. Согласно недавним обзорам по акустическим метаматериалам [19, 231, 312], в качестве метаатомов чаще всего используются резонаторы различного устройства: резонаторы Гельмгольца, четверть и полуволновые резонаторы [310, 384], мембранные элементы [316, 394]. Однако для создания метаматериалов исследователи почти не используют резонаторы, обладающие иным типом рассеяния звука, например дипольным, квадрупольным и т.д. Хотя можно ожидать, что метаматериалы из резонаторов немонопольного типа будут иметь другие свойства. В настоящей главе будут исследованы свойства сред с малыми включениями, обладающими резонансными характеристиками. Условимся называть среду с резонаторами метасредой, а, поскольку будут рассмотрены однотипные резонаторы, то будем уточнять тип метасреды: например, метасреду, содержащую дипольные включения, будем называть дипольной метасредой.

### 8.1. Дисперсия скорости звука в среде с периодической структурой резонаторов

#### 8.1.1. Монопольные резонаторы

Рассмотрим безграничную однородную упругую среду со скоростью звука  $c$  и плотностью  $\rho$ . Разместим в этой среде точечные монопольные резонаторы в узлах решетки с пространственным периодом  $L$  вдоль осей  $x, y, z$ , т.е. в точках  $\vec{r}_{sqr} = (sL, qL, pL)$ , где  $s, q, p$  - целые числа, характеризующие положения и номер резонатора [78]. Согласно теореме Блоха в такой среде распространяется плоская волна вида  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор,  $\vec{k}$  - искомый волновой вектор. Зависимость от времени  $t$ , как обычно, полагаем равной  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  - круговая частота.

Если объемная скорость нулевого ( $s = q = p = 0$ ) резонатора равна  $V$ , то объемные скорости остальных резонаторов определяются выражением

$$V_{sqp} = V e^{i\vec{k}\vec{r}_{sqp}}. \quad (8.1)$$

Запишем уравнение Гельмгольца для поля давления в среде с резонаторами

$$k^2 P + \Delta P = i\omega\rho V \sum_{sqp} e^{i\vec{k}\vec{r}_{sqp}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{sqp}), \quad (8.2)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\delta(\vec{r})$  - дельта-функция.

Для нахождения  $\vec{k}$  из (8.2) воспользуемся методом Фурье. Представим поле давления и дельта-функцию в виде спектров плоских волн

$$P = \iiint \hat{P} e^{i\vec{\xi}\vec{r}} d\vec{\xi}, \quad (8.3)$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\vec{\xi}\vec{r}} d\vec{\xi}, \quad (8.4)$$

подставим их в (8.2), найдем  $\hat{P}$  и из (8.3) после интегрирования получаем поле давления в метасреде

$$P_0 = i\omega\rho \frac{V}{L^3} \sum_{nml} \frac{e^{i\vec{\xi}_{nml}\vec{r}}}{k^2 - |\vec{\xi}_{nml}|^2}, \quad (8.5)$$

$$\vec{\xi}_{nml} = \left( \kappa_x + \frac{2\pi n}{L}, \kappa_y + \frac{2\pi m}{L}, \kappa_z + \frac{2\pi l}{L} \right). \quad (8.6)$$

Таким образом, поле в среде с периодической решеткой резонаторов представляет совокупность плоских волн (8.5), имеющих волновые векторы (8.6). На низких частотах поле определяется нулевым спектром, т.е. волной  $\vec{\xi}_{000} = \vec{\kappa}$ . Пренебрегая остальными слагаемыми в (8.5), найдем давление на нулевом резонаторе и получим сопротивление излучения монополя в решетке

$$Z_r = \frac{P_0(0,0,0)}{V} = i \frac{\omega\rho}{L^3} \frac{1}{k^2 - \kappa^2}. \quad (8.7)$$

Будем характеризовать монополюнный резонатор обобщенной массой  $M$  и обобщенной жесткостью  $K$ , полагая далее резонатор бездиссипативным. Отметим, что при необходимости диссипацию в резонаторе можно учесть с

помощью мнимой добавки к жесткости  $K$ . Уравнение движения резонатора запишется в виде

$$M\dot{V} = -K \int V dt - Z_r V. \quad (8.8)$$

Подставляя (8.7) и (8.8) и вводя резонансную частоту  $\omega_0^2 = K/M$ , находим дисперсионное уравнение для метасреды

$$\kappa^2 = k^2 - \frac{\rho}{ML^3} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (8.9)$$

В жидкой среде, заполненной пузырьками газа радиусом  $R$  с концентрацией  $N = L^{-3}$ , собственную массу пузырьков можно положить равной нулю, тогда  $M$  определяется присоединенной массой. Согласно определению массы монополя, следующему из (8.8),  $M = \mu/S^2$ , где  $\mu = 4\pi\rho R^3$  - присоединенная масса пульсирующей сферы,  $S = 4\pi R^2$  - площадь поверхности пузырька. Из (8.9) получаем классическое дисперсионное уравнение для бездиссипативной пузырьковой среды

$$\kappa^2 = k^2 + 4\pi NR \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (8.10)$$

совпадающее с [1].

Исследуем (8.9). В предельном переходе  $M \rightarrow \infty$  резонаторы перестают двигаться под воздействием звукового поля и не оказывают влияния на распространение звука: в среде распространяются обычные плоские волны  $\kappa = k$ . На низких частотах  $\omega \ll \omega_0$  выражение (8.9) преобразуется к виду  $\kappa^2 \approx k^2(1 + \rho c^2/ML^3\omega_0^2)$ . Эффективная скорость звука в метасреде  $c_1 = \omega/\kappa$  меньше, чем в самой среде, что характерно, например, для пузырьковых сред. С увеличением частоты скорость звука  $c_1$  уменьшается и становится равной нулю при  $\omega = \omega_0$ . В диапазоне частот

$$\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_0^2 + \frac{\rho c^2}{ML^3} \quad (8.11)$$

квадрат волнового числа  $\kappa^2$  отрицателен, поэтому в метасреде существуют только затухающие волны. Ввиду отсутствия условия для распространения

звука метасреду можно считать запертой. В пределе  $\omega \rightarrow \infty$  влияние резонаторов становится вновь исчезающе малым, поскольку  $k \rightarrow k$ . На рис.7-1 приведена зависимость  $c_1$  от частоты.

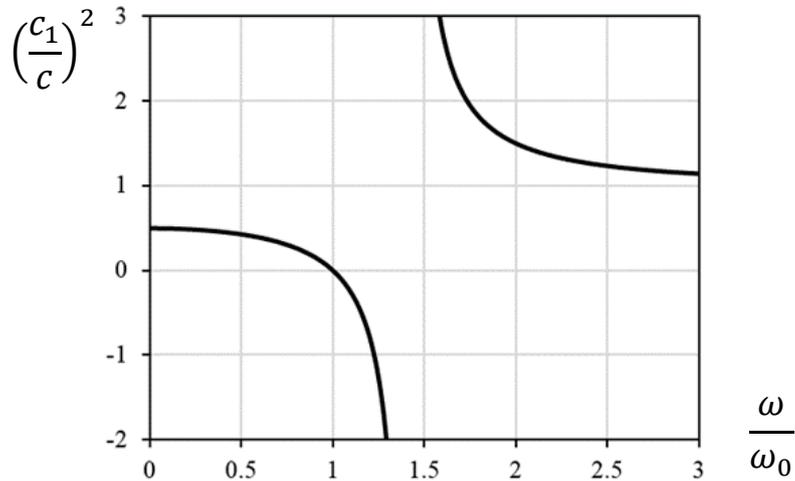


Рис. 7-1. Кривая дисперсии скорости звука в метасреде с монопольными резонаторами для значения безразмерного параметра  $ML^3\omega_0^2/\rho c^2 = 1$ .

Обратим внимание, что на резонансной частоте скорость звука в монопольной среде становится равной нулю. С физической точки зрения это можно интерпретировать следующим образом. Монополи на резонансе неограниченно меняют свой объем, т.е. при любом воздействии среда оказывается абсолютно сжимаемой, а при бесконечной сжимаемости скорость звука равна нулю.

### 8.1.2. Замечание о задаче Максвелла

В 1869 году Максвелл рассмотрел задачу о колебании атомов в упругой среде эфира [350] и получил решение, из которого следует известная формула Зельмейера [362], опубликованная в работе 1871 года, для диэлектрической проницаемости непоглощающей среды

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{M \omega_0^2 - \omega^2}, \quad (8.12)$$

где  $n$  - показатель преломления,  $N$  - число атомов в единице объема,  $e$  и  $M$  - их заряд и масса

Формула Зельмейера (8.12) допускает область частот, аналогичную (8.11) для монопольной метасреды, в которой показатель преломления отрицателен, а в среде существуют только затухающие волны. Однако в реальных средах из-за механизмов поглощения этот эффект не проявляется: квадрат показателя преломления не принимает отрицательные значения. Тем не менее Формула Зельмейера позволяет описать явление аномальной дисперсии света [161].

Дисперсия света в среде Максвелла и дисперсия звука в монопольной метасреде имеют одинаковые частотные зависимости в окрестности резонанса. Экзаменационную задачу Максвелла, возможно, следует считать первой постановкой задачи о резонаторных метасредах.

### 8.1.3. Дипольные резонаторы

Перейдем к рассмотрению среды, заполненной дипольными резонаторами. Пусть они также расположены в виде периодической решетки, при этом их дипольные моменты направлены вдоль оси  $x$ . Можно назвать такую метасреду поляризованной, в которой направление вектора поляризации совпадает с направлением дипольного момента. Поле давления в метасреде находим, продифференцировав (8.5) по  $x$ ,

$$P_1 = \omega \rho \frac{D}{L^3} \sum_{nml} \frac{\xi_{nml,x} e^{i\vec{\xi}_{nml}\vec{r}}}{k^2 - |\vec{\xi}_{nml}|^2}, \quad (8.13)$$

где  $D$  - дипольный момент,  $\xi_{nml,x}$  -  $x$ -компонента вектора  $\vec{\xi}_{nml}$ .

Сила, действующая на диполь со стороны среды, равна  $F = \mu(\dot{v}_x - \dot{u})$ , где  $\mu$  - присоединенная масса,  $u$  - скорость диполя,  $v_x$  - скорость среды в направлении  $x$ .

Скорость среды найдем из (8.13)

$$v_x = \frac{D}{L^3} \sum_{nml} \frac{\xi_{nml,x}^2 e^{i\vec{\xi}_{nml}\vec{r}}}{k^2 - |\vec{\xi}_{nml}|^2}. \quad (8.14)$$

Запишем уравнение движения резонатора без учета влияния выталкивающей силы

$$M\dot{D} = -K \int D dt + \mu(\dot{v}_x - \dot{u}). \quad (8.15)$$

Оставляя только нулевое слагаемое в (8.14) и подставляя его в (8.15), находим уравнение дисперсии для легкого диполя (его собственная масса много меньше присоединённой массы)

$$\kappa^2 = k^2 \left( 1 + \frac{\mu}{ML^3} \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos^2 \theta \right), \quad (8.16)$$

где  $\theta$  - угол между направлением дипольного момента и направлением вектора. Поскольку диполи направлены по оси  $x$ , то  $\kappa_x = \kappa \cos \theta$ .

Рассмотрим (8.16) подробнее. Во-первых, при уменьшении концентрации резонаторов  $L \rightarrow \infty$  их влияние на звуковое поле уменьшается и  $\kappa \rightarrow k$ . На низких частотах  $\omega \ll \omega_0$  волновое число составляет  $\kappa^2 \approx k^2(1 + \mu \cos^2 \theta / ML^3)$ , т.е. эффективная скорость звука в метасреде  $c_1$  ниже скорости звука в среде без резонаторов, и она растёт с частотой. Условие запирания  $\kappa^2 < 0$  выполняется в полосе частот

$$\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_0^2 \frac{1 + \frac{\mu}{ML^3} \cos^2 \theta}{1 - \frac{\mu}{ML^3} \cos^2 \theta}. \quad (8.17)$$

На рис. 7-2 приведена дисперсионная зависимость скорости звука для метасреды из дипольных резонаторов.

Поляризованная среда, очевидно, анизотропна: резонаторы оказывают наибольшее влияние на волны, распространяющиеся вдоль направления дипольных моментов, а в поперечных направлениях, задаваемых углом  $\theta = \pi/2$ , волны распространяются как в обычной среде. Если моменты диполей не имеют фиксированного направления (когда упругая часть резонатора реагирует одинаково на воздействия с любых направлений, например сфера, закрепленная тремя пружинами во взаимоперпендикулярных направлениях),

то метасреда становится изотропной, а в уравнениях (8.16) и (8.17) необходимо принять  $\theta = 0$ .

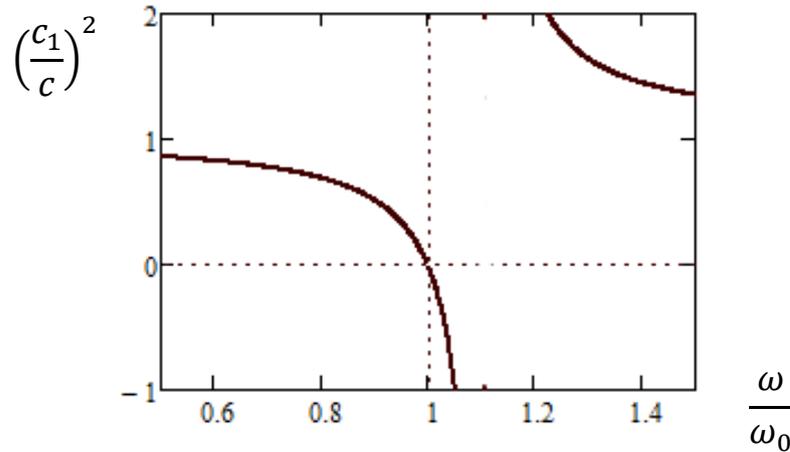


Рис. 7-2. Кривая дисперсии скорости звука в метасреде с дипольными резонаторами для значения безразмерного параметра  $ML^3\omega_0^2/(\mu \cos^2 \theta) = 1$ .

На резонансной частоте скорость звука в дипольной метасреде становится бесконечной. Это связано с тем, что диполи на резонансе при любом воздействии приобретают бесконечную скорость, т.е. эффективная плотность среды становится равной нулю, а скорость звука в ней – бесконечной.

#### 8.1.4. Монопольно-дипольные резонаторы

Рассмотрим среду, заполненную монопольно-дипольными резонаторами. Тогда поле в среде будет задаваться суммой  $P_0 + P_1$ , определяемой (8.5) и (8.13).

С помощью (8.8) и (8.15) запишем систему уравнений движения для нулевого резонатора

$$\begin{cases} M_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) V = \rho \frac{V - iD\kappa \cos \theta}{k^2 - \kappa^2} \\ M_1 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) D = \mu \frac{iV\kappa \cos \theta + D\kappa^2 \cos^2 \theta}{k^2 - \kappa^2} \end{cases} \quad (8.18)$$

где  $M_0$  и  $M_1$  - массы монопольного и дипольного резонаторов соответственно,  $\omega_0$  и  $\omega_1$  - их собственные частоты. Из (8.18) находим дисперсионное уравнение

$$\kappa^2 = k^2 \left( 1 + \alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \left( 1 + \alpha_1 \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos^2 \theta \right), \quad (8.19)$$

где введены безразмерные величины  $\alpha_0 = \rho c^2 / M_0 L^3 \omega_0^2$  и  $\alpha_1 = \mu / M_1 L^3$ , характеризующие параметры резонаторов. Если резонансные частоты монополей и диполей сильно отличаются, то дисперсионные кривые приближенно описываются уравнениями (8.9) или (8.15).

Обратим внимание на два случая. На рис. 7-3 приведены качественные зависимости квадрата скорости звука, получаемые из (8.19), от частоты. При этом пунктирные линии соответствуют средам с решетками монопольных и дипольных резонаторов, а сплошная – решетке монопольно-дипольных резонаторов метасреде. Во-первых, полосы запираения, в которых квадрат скорости звука отрицателен могут быть объединены (рис. 7-3,а), что позволяет увеличить полосу запираения. Резонансные частоты монополей  $\omega_0$  и диполей  $\omega_1$  подобраны так, чтобы верхняя граница полосы запираения, обусловленной монопольными резонаторами, совпадала с нижней границей полосы запираения дипольных резонаторов

$$1 < \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < (1 + \alpha_0) \frac{1 + \alpha_1 \cos^2 \theta}{1 - \alpha_1 \cos^2 \theta}. \quad (8.20)$$

Во-вторых, если  $\omega_0 = \omega_1$  полосы запираения монопольных и дипольных резонаторов совпадают, то в этой полосе скорость звука оказывается вещественной, поэтому звуковые волны в такой среде распространяются (рис. 7-3,б), несмотря на отрицательность эффективных параметров. Такие среды называют «дважды отрицательными», их свойства подробно рассмотрены в [27].

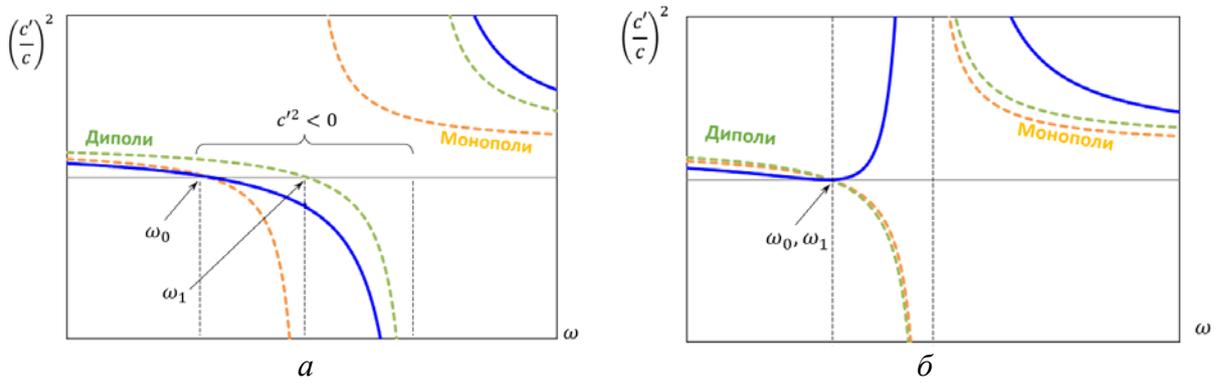


Рис. 7-3. Дисперсия скорости звука в монополюно-дипольной метасреде.

### 8.1.5. Квадрупольные резонаторы

Метасреду, сформированную периодической решеткой квадрупольных резонаторов, рассмотрим на примере продольных квадрупольных резонаторов. Следуя разделу 3.6, представим квадрупольный резонатор в виде двух несжимаемых сфер, связанных пружинкой. Центры сфер расположены на расстоянии  $l_0$ . Резонатор имеет две степени свободы и два собственных колебания. Первое имеет нулевую собственную частоту и представляет собой поступательное движение без растяжения пружины. При исследовании колебательных процессов такое движение резонатора не представляет интереса. Второе собственное движение - противофазные колебания двух сфер вдоль прямой, соединяющей их центры, без смещения центра масс. Физически такая конструкция квадрупольного резонатора представляет собой два противофазных диполя, моменты которых лежат на одной прямой (продольный диполь), для определенности - на оси  $x$ . Колебания квадрупольного резонатора зададим смещением  $w = l - l_0$  между центрами сфер, где  $l$  - расстояние между центрами колеблющихся сфер, скорость и ускорение резонатора будут равны  $\dot{w}$  и  $\ddot{w}$ . На сферы со стороны среды действуют силы, пропорциональные  $\mu v_x$ , но противоположно направленные. Поэтому смещение  $w$  будет определяться градиентом скорости среды  $dv_x/dx$ .

Поле давления в среде с периодической решеткой квадрупольных резонаторов находим, продифференцировав (8.13) по  $x$ ,

$$P_2 = -i\omega\rho \frac{Q}{L^3} \sum_{nml} \frac{\xi_{nml,x}^2 e^{i\vec{\xi}_{nml}\vec{r}}}{k^2 - |\vec{\xi}_{nml}|^2}, \quad (8.21)$$

где  $Q$  - квадрупольный момент резонатора.

Градиент скорости среды находим из (8.21)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{Q}{L^3} \sum_{nml} \frac{\xi_{nml,x}^4 e^{i\vec{\xi}_{nml}\vec{r}}}{k^2 - |\vec{\xi}_{nml}|^2}. \quad (8.22)$$

Из уравнения движения резонатора

$$M\dot{Q} = -K \int Q dt - i\omega\mu l_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (8.23)$$

находим дисперсионное уравнение, которое представим в следующем виде

$$\frac{\mu l_0}{ML^3} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos^4 \theta \kappa^4 + \kappa^2 - k^2 = 0. \quad (8.24)$$

Как и в уравнениях (8.9) и (8.16) предельные переходы  $M \rightarrow 0$ , соответствующий «выключению» резонаторов, и  $\theta \rightarrow \pi/2$ , соответствующий распространению волны поперек вектора поляризации, приводят к обычной среде  $\kappa \rightarrow k$ . Но принципиальное отличие заключается в том, что (8.24) является биквадратным уравнением, поэтому у него есть два корня для  $\kappa^2$ , т.е. существует две ветви закона дисперсии. Кратко их исследуем. На низких частотах  $\omega \ll \omega_0$  одна ветвь описывается закономерностью  $\kappa^2 \approx k^2$ , что соответствует распространению звуковой волны в среде без резонаторов. Для второй ветви получаем выражение  $\kappa^2 \sim k^{-2}$ , соответствующее достаточно медленной волне. Таким образом, в среде распространяются две волны. На высоких частотах  $\omega \gg \omega_0$  решения (8.24) имеют вид  $\kappa^2 \sim \pm k^{-1}$ , т.е. существует распространяющаяся и затухающая волны.

На рис. 8-4 приведены результаты расчета фазовой скорости  $c_1$  в метасреде. На низких частотах обе ветви соответствуют распространяющимся волнам, при этом по мере роста частоты ветви сближаются, образуя точку бифуркации на частоте  $\omega'$ . На частотах выше резонансной существует только одна незатухающая волна. В полосе частот  $\omega' < \omega < \omega_0$  дисперсионное

уравнение (8.24) не имеет действительных решений, поэтому эта частотная полоса является полосой запираания квадрупольной метасреды.

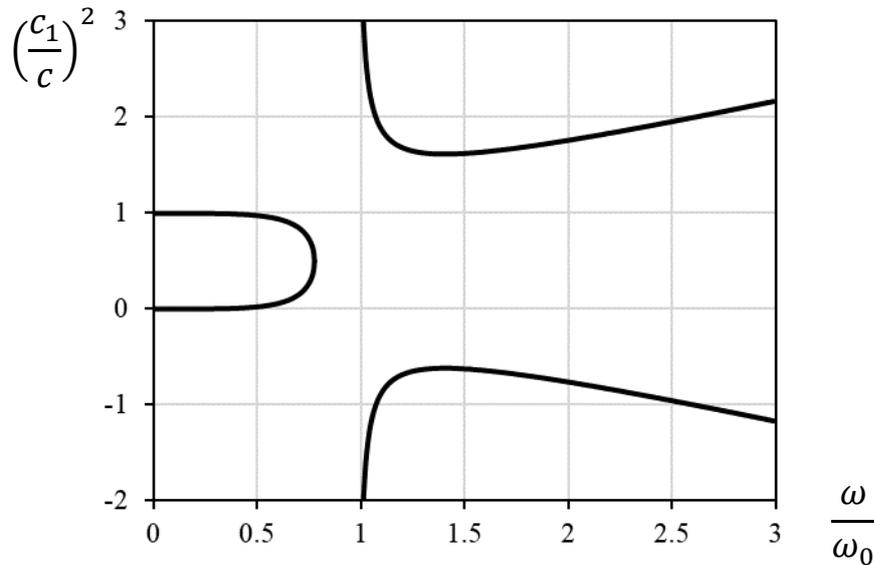


Рис. 8-4. Кривая дисперсии скорости звука в метасреде с квадрупольными резонаторами продольного типа с параметрами  $ML^3/\mu l_0 k_0^2 = 2$ .

## 8.2. Уравнение Гельмгольца для среды, заполненной мультипольными рассеивателями

В разделе 8.1 получены дисперсионные соотношения для монопольных, дипольных и квадрупольных метасред. Действуя аналогичным образом, можно было бы получить уравнения дисперсии для сред с периодической решеткой резонаторов произвольного порядка мультипольности. Такой же результат можно получить и из волнового уравнения с правой частью, которая описывает источники рассеянного поля. Только в этом случае требуется уравнение движения метасреды, описывающее влияние рассеивателей. Найдем уравнение Гельмгольца для среды, заполненной однотипными резонаторами, размер которых и расстояние между ними значительно меньше длины звуковой волны, в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Предположим, что в среде равномерно расположены мультипольные источники звука, тогда уравнение для давления в среде имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \rho \frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \vec{f} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots + \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} \frac{\partial^\sigma S_{\alpha\beta\dots\sigma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots \partial x_\sigma} + \dots \quad (8.25)$$

Первое слагаемое в правой части (8.25) описывает монопольные источники с объемной скоростью  $q$  на единицу объема, второе слагаемое - дипольные источники с силой  $\vec{f}$  на единицу объема, третье - квадрупольные источники с квадрупольным моментом  $D_{\alpha\beta}$  на единицу объема, последнее описывает в общем виде источники с порядком мультипольности  $\sigma$ .

В случае пассивных рассеивателей производительности источников  $q$ ,  $\vec{f}$ ,  $D_{\alpha\beta}$  и  $S_{\alpha\beta\dots\sigma}$  зависят от поля  $p$ , поскольку их движение вызывается полем  $p$  и его производными. Кроме того, из (8.25) следует, что рассеиватели одного типа акустически взаимодействуют с рассеивателями всех других типов.

Для каждого рассеивателя можно ввести проводимости - отношение производительности рассеивателя к воздействию на него со стороны звукового поля. Аналогичные соотношения справедливы для элементарного объема метасреды. Выбор величин, характеризующих воздействие и производительность, зависит от типа резонаторов. В общем случае проводимость зависит от частоты, поэтому далее рассмотрим гармонически колеблющиеся среды, заполненные рассеивателями одного типа.

Начнем с монопольных рассеивателей. Движение монополя вызывается давлением около его поверхности, производительность задается объемной скоростью, тогда импеданс монополя - это отношение давления, действующего на него, к объемной скорости. Если элементарный объем среды заполнен монопольными рассеивателями, то можно ввести проводимость, справедливую для этого объема

$$q = Y_0 p. \quad (8.26)$$

Проводимость (8.26) позволяет описать свойства среды с рассеивателями на макроскопическом уровне, абстрагировавшись от ее микроскопического устройства. Подставляя (8.26) в (8.25), находим уравнение для метасреды

$$\Delta p + \kappa^2 p = 0, \quad (8.27)$$

где волновое число

$$\kappa^2 = k^2 - i\omega\rho Y_0. \quad (8.28)$$

Уравнение (8.28) является обычным уравнением дисперсии для среды с неоднородностями, отличающимися сжимаемостью.

Движение дипольных рассеивателей вызывается силой, действующей со стороны среды, которая пропорциональна градиенту давления. Если диполи одинаково реагируют на звук, пришедший с любых направлений, то градиент давления пропорционален силе диполей. Определим проводимость  $Y_1$  среды с дипольными рассеивателями с учетом того, что градиент давления и сила, действующая на элементарный объем и вызванная этим градиентом, имеют противоположные знаки,

$$\vec{f} = -Y_1 \nabla p. \quad (8.29)$$

Подставляя (8.29) в (8.25), находим

$$(1 + Y_1)\Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.30)$$

Уравнение (8.30) является обычным волновым уравнением, в котором скорость звука равна

$$c_1^2 = \frac{c^2}{1 + Y_1}. \quad (8.31)$$

Если устройство дипольных рассеивателей таково, что они могут колебаться только вдоль одного выделенного направления, задаваемого вектором  $\vec{\tau}$ , то воздействие со стороны звукового поля определяется скалярным произведением  $(\nabla p \vec{\tau})$ , а сила  $\vec{f}$  направлена вдоль  $\vec{\tau}$ . Тогда определение проводимости будет таким

$$\vec{f} = -Y_1 (\nabla p \vec{\tau}) \vec{\tau}. \quad (8.32)$$

Выражая  $\vec{f}$  и подставляя в (8.25), находим уравнение для давления

$$Y_1 \Delta_\tau p + \Delta p + k^2 p = 0, \quad (8.33)$$

где  $\Delta_\tau = \tau_\alpha^2 \partial^2 / \partial x_\alpha^2$  - лапласиан по направлению  $\vec{\tau}$ .

Наконец, в общем случае связь между силой диполей и градиентом поля можно записать в тензорном виде

$$f_{\alpha} = -Y_{\alpha\beta}(\nabla p)_{\beta}. \quad (8.34)$$

Тогда уравнение (8.25) сводится к виду

$$Y_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.35)$$

Уравнение (8.33) и (8.35) описывают волновой процесс в анизотропных средах. Анизотропные свойства метасреды определяются механическим устройством дипольных рассеивателей. Подставим решение для плоской волны  $p = e^{\vec{k}\vec{r}}$  в (8.35) и найдем дисперсионное уравнение

$$Y_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta} - \kappa^2 + k^2 = 0. \quad (8.36)$$

Перейдем к квадрупольной метасреде. Движение квадрупольных рассеивателей вызывается второй производной поля давления, т.е. воздействие пропорционально величине  $\partial^2 p / \partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}$ . Например, для продольного квадруполья, совершающего колебания вдоль направления  $\vec{\tau}$ , воздействие пропорционально  $\Delta_{\tau} p$ . Движение квадрупольей описывается тензором квадрупольного момента  $D_{\alpha\beta}$ .

Рассмотрим несколько примеров простого устройства квадрупольей. Пусть продольный квадруполь колеблется вдоль оси  $x_1$ , тогда только один компонент тензора  $D_{\alpha\beta}$  отличен от нуля. Введем коэффициент пропорциональности между ним и второй производной давления по направлению  $x_1$

$$D_{11} = 2Y_{\parallel} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}. \quad (8.37)$$

Подставляем (8.37) в (8.25) и находим уравнение для давления

$$-Y_{\parallel} \frac{\partial^4 p}{\partial x_1^4} + \Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.38)$$

Для поперечного квадрупольного, движущегося в плоскости  $(x_1, x_2)$ , ненулевыми являются компоненты  $D_{12} = D_{12}$ , связанные с производной давления

$$D_{12} = Y_{\perp} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (8.39)$$

Из (8.25) находим уравнение Гельмгольца

$$-Y_{\perp} \frac{\partial^4 p}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.40)$$

Теперь рассмотрим изотропную метасреду, в которой квадрупольные являются упругими сферическими оболочками с проводимостью  $Y_{\odot}$ . Тогда из соображений симметрии сразу запишем уравнение для давления

$$-Y_{\odot} \Delta^2 p + \Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.41)$$

В общем случае квадрупольный момент связан с производными по давлению

$$D_{\alpha\beta} = Y_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 p}{\partial x_{\gamma} \partial x_{\delta}}, \quad (8.42)$$

что при подстановке в (8.25) дает

$$-Y_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^4 p}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} \partial x_{\gamma} \partial x_{\delta}} + \Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.43)$$

Наконец, перейдем к среде, содержащей включения, дающие мультипольное рассеяние порядка  $\sigma$ . Производительность рассеивателей опишем тензором  $S_{\alpha\beta\dots\sigma}$ , связанным с полем

$$S_{\alpha\beta\dots\sigma} = \frac{\sigma!}{(-1)^{\sigma}} Y_{\alpha\beta\dots\sigma\alpha_1\beta_1\dots\sigma_1} \frac{\partial^{\sigma} p}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\beta_1} \dots \partial x_{\sigma_1}}. \quad (8.44)$$

Из (8.25) получаем уравнение для давления

$$Y_{\alpha\beta\dots\sigma\alpha_1\beta_1\dots\sigma_1} \frac{\partial^{2\sigma} p}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} \dots \partial x_{\sigma} \partial x_{\alpha_1} \partial x_{\beta_1} \dots \partial x_{\sigma_1}} + \Delta p + k^2 p = 0. \quad (8.45)$$

Таким образом, звуковое давление описывается дифференциальным уравнением порядка  $2\sigma$ .

Подставим в (8.45) решение для плоской волны в виде  $p = e^{\vec{k}\vec{r}} = e^{ik(x_1 \sin \theta \cos \varphi + x_2 \sin \theta \sin \varphi + x_3 \cos \theta)}$  и найдем дисперсионное уравнение

$$F(\theta, \varphi)k^{2\sigma} - \kappa^2 + k^2 = 0. \quad (8.46)$$

Если проводимость рассеивателей мала, то  $F(\theta, \varphi) \rightarrow 0$ , и мы имеем обычную среду с волновым числом  $\kappa \approx k$ .

В пределе несжимаемой среды  $k \rightarrow 0$  для любых мультипольных метасред с  $\sigma \geq 2$  уравнение (8.46) допускает существование двух действительных решений для  $\kappa$ . Первое связано с распространением обычной звуковой волны  $\kappa \approx k$ , как в среде без рассеивателей. Второе решение имеет вид

$$\kappa \approx {}^{2\sigma-2}\sqrt{F(\theta, \varphi)}. \quad (8.47)$$

Решение (8.47) соответствует распространяющейся волне, если функция  $F$  принимает положительные действительные значения.

Таким образом, результат, полученный в разделе 8.1 для квадрупольных резонаторов и связанный с появлением волны нового типа, обусловленный сложным, т.е. отличным от пульсации и колебаний, движением рассеивателей, оказывается справедливым и для рассеивателей любого порядка мультипольности выше 1.

### 8.3. Дипольная метасреда

Среды с включениями, отличающимися сжимаемостью, могут быть охарактеризованы эффективной сжимаемостью. Если включения являются резонаторами, то в некотором диапазоне частот эффективная сжимаемость может быть отрицательной. Несжимаемые включения, отличающиеся плотностью, изменяют эффективную плотность среды, которая при некоторых условиях может быть отрицательной.

В литературе отмечено [27], что среды с отрицательными сжимаемостью и плотностью могут быть созданы с помощью монопольных и дипольных резонаторов, например в виде полостей в упругой среде [180], однако

существенное отличие между ними не принимается во внимание. Дело в том, что движение монопольных резонаторов возбуждается звуковым давлением, поэтому их влияние на звуковое поле заведомо изотропно. А движение дипольных резонаторов возбуждается градиентом давления, что в общем случае приводит к анизотропии акустических свойств среды с включениями. В настоящем разделе рассмотрены такие свойства.

### 8.3.1. Среда с включениями, отличающимися плотностью

В упругой среде с плотностью  $\rho$ , скоростью звука  $c$  и сжимаемостью  $\beta$  равномерно распределены несжимаемые включения с плотностью  $\rho_1 \neq \rho$  и объемом  $V$  в количестве  $N$  на единицу объема. Средняя плотность среды составляет

$$\rho_{av} = \rho(1 - NV) + \rho_1 NV. \quad (8.48)$$

Будем считать, что размеры включений и расстояния между ними много меньше длины звуковой волны. Волновое движение среды вызывает движение включений со скоростью, отличной от скорости среды; они являются источниками силы для среды, т.е. диполями. Состояние среды с диполями описывается следующей системой уравнений

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \vec{v} = 0, \quad (8.49)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = \vec{f}, \quad (8.50)$$

где  $p$  – звуковое давление,  $\vec{v}$  – скорость среды,  $t$  – время,  $\vec{f}$  – сила, действующая со стороны диполей на единицу объема.

Уравнение движения диполя имеет вид

$$\rho_1 V \dot{u} = -\mu(\dot{u} - \dot{v}) + \rho V \dot{v}. \quad (8.51)$$

где  $u$  и  $v$  – скорость диполя и среды в его окрестности,  $\mu$  – присоединенная масса диполя. Полагаем, что скорости  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  имеют одинаковое направление. Из (8.51) находим силу, действующую со стороны диполей на единицу объема,

$$\vec{f} = \mu N(\dot{\vec{u}} - \dot{\vec{v}}) = \mu NV \frac{\rho - \rho_1}{\mu + \rho_1 V} \dot{\vec{v}}. \quad (8.52)$$

Сила диполей более легких по сравнению со средой, т.е.  $\rho_1 < \rho$ , противофазна ускорению среды, а сила тяжелых ( $\rho_1 > \rho$ ) диполей синфазна ускорению.

Подставляя (8.52) в (8.50), запишем уравнение Эйлера в следующем виде

$$\left(\rho - \mu NV \frac{\rho - \rho_1}{\mu + \rho_1 V}\right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (8.53)$$

Уравнения (8.49) и (8.53) описывают состояние обычной упругой среды с эффективной плотностью

$$\rho' = \rho - \mu NV \frac{\rho - \rho_1}{\mu + \rho_1 V}. \quad (8.54)$$

Для безмассовых диполей  $\rho_1 = 0$  эффективная плотность равна  $\rho' = \rho(1 - NV)$  и совпадает с физической плотностью  $\rho_{av}$ . Для тяжелых диполей  $\rho_1 \rightarrow \infty$  эффективная плотность достигает максимального значения  $\rho' = \rho + \mu N$ , при этом физическая плотность среды также становится бесконечной.

На рис. 8-5 приведены зависимости физической и эффективной плотностей среды со сферическими диполями ( $\mu = \rho V/2$ ) с концентрацией  $NV = 0.1$  от плотности диполей.

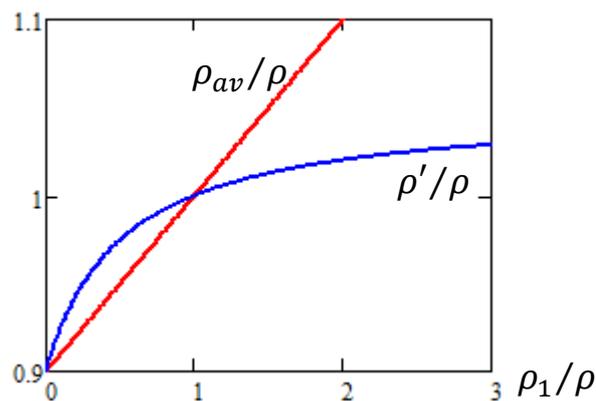


Рис. 8-5. Физическая и эффективная плотности среды с диполями

### 8.3.2. Неполаризованная метасреда

Теперь рассмотрим среду с дипольными резонаторами, называя далее ее метасредой. В непolarизованной метасреде резонаторы одинаково реагируют

на звуковые волны, приходящие с любого направления. Для учета силы, возвращающей диполь к положению равновесия, добавим в правую часть (8.47) слагаемое  $-K \int u dt$ , где  $K$  – упругость резонатора. Откуда находим силу диполя для гармонического случая, полагая зависимость всех параметров метасреды от времени равной  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  – частота,

$$\vec{f} = \mu N \frac{\rho V - \rho_1 V + K/\omega^2}{\mu + \rho_1 V - K/\omega^2} \dot{\vec{v}}. \quad (8.55)$$

Подставим (8.54) в (8.50) и найдем эффективную плотность метасреды

$$\rho' = \rho + \mu N \frac{A\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad A = \frac{(\rho_1 - \rho)V}{\mu + \rho_1 V}, \quad (8.56)$$

где введена резонансная частота  $\omega_0^2 = K/(\mu + \rho_1 V)$ . На рис. 8-6 приведены зависимости эффективной плотности метасреды от частоты для значений параметров  $\mu N/\rho = 0.1$  и  $A = -1$ . Из рис. 8-6 следует, что в области частот  $\omega_0 < \omega < \omega_1$  эффективная плотность принимает отрицательные значения. На этих частотах в метасреде могут существовать только затухающие звуковые волны, т.е. среда оказывается запертой.

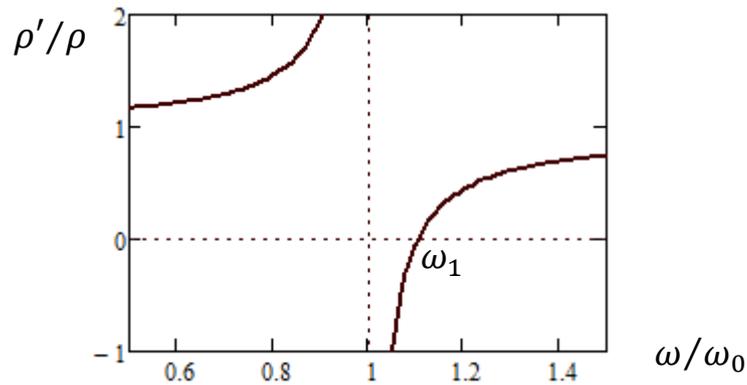


Рис. 8-6. Эффективная плотность дипольной метасреды

Верхняя граница полосы запираения может быть найдена из (8.56)

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \Omega N}{1 + \Omega N A}}, \quad (8.57)$$

где  $\Omega = \mu/\rho$  – присоединенный объем диполя.

Считая, что плотность диполей  $\rho_1$  может принимать значения от 0 до  $\infty$ , из (8.56) получаем диапазон возможных значений  $-V/\Omega < A < 1$ . Из (8.57) следует, что значение  $\omega_1$  тем выше, чем меньше значения параметра  $A$ , минимальное значение которого соответствует нулевой плотности  $\rho_1$ . Таким образом, безмассовые дипольные резонаторы обеспечивают максимальную ширину полосы запираания.

Подставляя в (8.57) минимальное значение  $A = -V/\Omega$ , находим для резонаторов с нулевой массой

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \Omega N}{1 - VN}}. \quad (8.58)$$

Ширина полосы запираания зависит от объема диполей, их присоединенного объема и концентрации. Если концентрация диполей мала, т.е.  $VN \ll 1$ , то из (8.58) получаем простую оценку для относительной ширины полосы запираания

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} N(\Omega + V). \quad (8.59)$$

В неполяризованной метасреде диполь одинаково реагирует на звуковую волну, пришедшую с любых направлений, для этого он должен иметь сферическую форму. В этом случае  $\Omega = V/2$ , и из (8.59) получаем  $\delta \approx 3NV/4$ .

### 8.3.3. Поляризованная метасреда

В поляризованной метасреде диполи могут колебаться только вдоль одного выделенного направления. Пусть для определенности это направление совпадает с осью  $z$ . Тогда  $z$ -компонента силы диполя согласно (8.55) равна

$$f_z = \mu_z N \frac{\rho V - \rho_1 V + K/\omega^2}{\mu_z + \rho_1 V - K/\omega^2} v_z. \quad (8.60)$$

где  $\mu_z$  – присоединенная масса диполя при колебаниях вдоль оси  $z$ .

Резонаторы не колеблются вдоль осей  $x$  и  $y$ , поэтому соответствующие компоненты силы находим из (8.48)

$$f_x = -\mu_x N v_x, f_y = -\mu_y N v_y, \quad (8.61)$$

где  $\mu_x$  и  $\mu_y$  – присоединенные массы диполя при колебаниях вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Из уравнений (8.49), (8.50), (8.60) и (8.61) находим уравнение Гельмгольца

$$\beta\omega^2 p + \frac{1}{\rho'_x} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho'_y} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho'_z} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (8.62)$$

где  $\rho'_x, \rho'_y, \rho'_z$  – эффективные плотности метасреды при колебании вдоль соответствующих осей, которые находятся из (8.54) или (8.56).

Далее рассмотрим двумерную среду. Введем относительную эффективную плотность среды  $\gamma = \rho'_z / \rho'_x$ , характеризующую отличие между эффективными плотностями метасреды при колебаниях в перпендикулярных направлениях. Для неподвижных диполей  $\rho'_x = \rho + \mu N$  плотность принимает только положительные значения и при малой концентрации резонаторов приближенно равна  $\rho$ . Точное значение  $\rho'_x$  для дальнейших оценок несущественно, поэтому примем  $\rho'_x = \rho$ . Относительная плотность  $\gamma$ , как следует из (8.56) и рис. 8-6, принимает любые действительные значения.

Расположим точечный источник в начале координат и запишем уравнение (8.62) в следующем виде

$$k^2 p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 2\pi i Q \delta(x, z), \quad (8.63)$$

где  $Q$  – производительность источника. Методом Фурье находим из (8.59) поле давления

$$p = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x + i\kappa|z|}}{\kappa} d\xi, \quad (8.64)$$

где  $\kappa = \sqrt{\gamma(k^2 - \xi^2)}$ .

Найдем поле для различных значений  $\gamma$ . Обратим внимание, что по оси  $x$  (при  $z = 0$ ) распространяется гармоническое возмущение со скоростью  $c$ , фаза которого меняется на  $\pi/2$  при изменении знака  $\gamma$ .

На рис. 8-7 приведены линии равных значений величины  $\text{Re}p$  для  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 0.5$ . Линии нулевых значений показывают фронты волны, которые отличаются от круговых: кривые фронтов вытянуты вдоль оси, фазовая скорость вдоль которой максимальна.

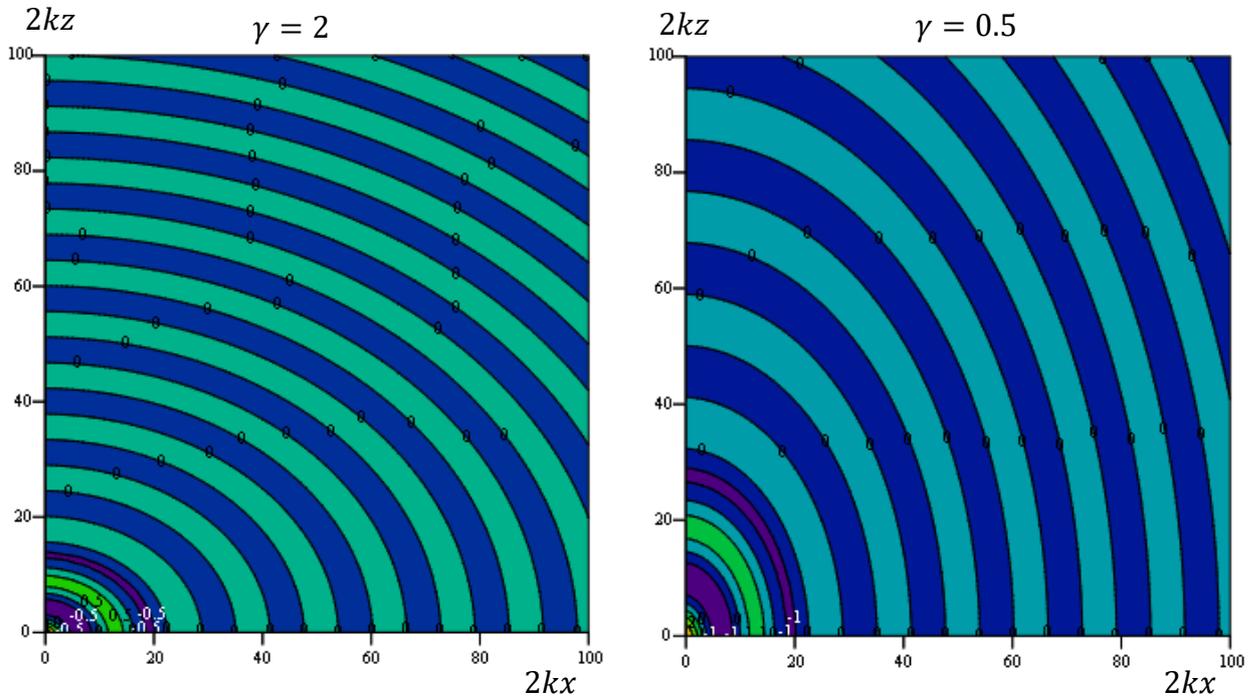


Рис. 8-7. Распределение давления  $\text{Re}p$  для  $\gamma = 0.5$  и  $\gamma = 2$ .

На рис. 8-8 приведен расчет  $\text{Re}p$  для  $\gamma = 0.01$  и  $\gamma = -1$ .

Поле при  $\gamma = 0.01$  качественно демонстрирует предел  $\gamma \rightarrow 0$ , откуда следует, что оно является плоской волной, распространяющейся вдоль оси  $x$ . Другими словами, в дипольной метасреде с  $\gamma = 0$  монополь является источником плоской волны. Нестрого это также следует из (8.63): при подстановке  $\gamma \rightarrow 0$  должно выполняться  $\partial^2 p / \partial z^2 \rightarrow 0$ , что и дает плоскую волну, бегущую вдоль оси  $x$ .

Если эффективная плотность  $\gamma$  отрицательна, то возникает область, в которой отсутствует звуковое поле. На рис. 8-8 она находится выше линии  $x = u$ . При этом фронты волны принимают необычный вид – они являются гиперболами. Кроме этого, фронты не охватывают источник, что происходит

в обычных средах (круговые фронты с центром в точке расположения источника) и в метасреде с  $\gamma > 0$  (рис. 8-7).

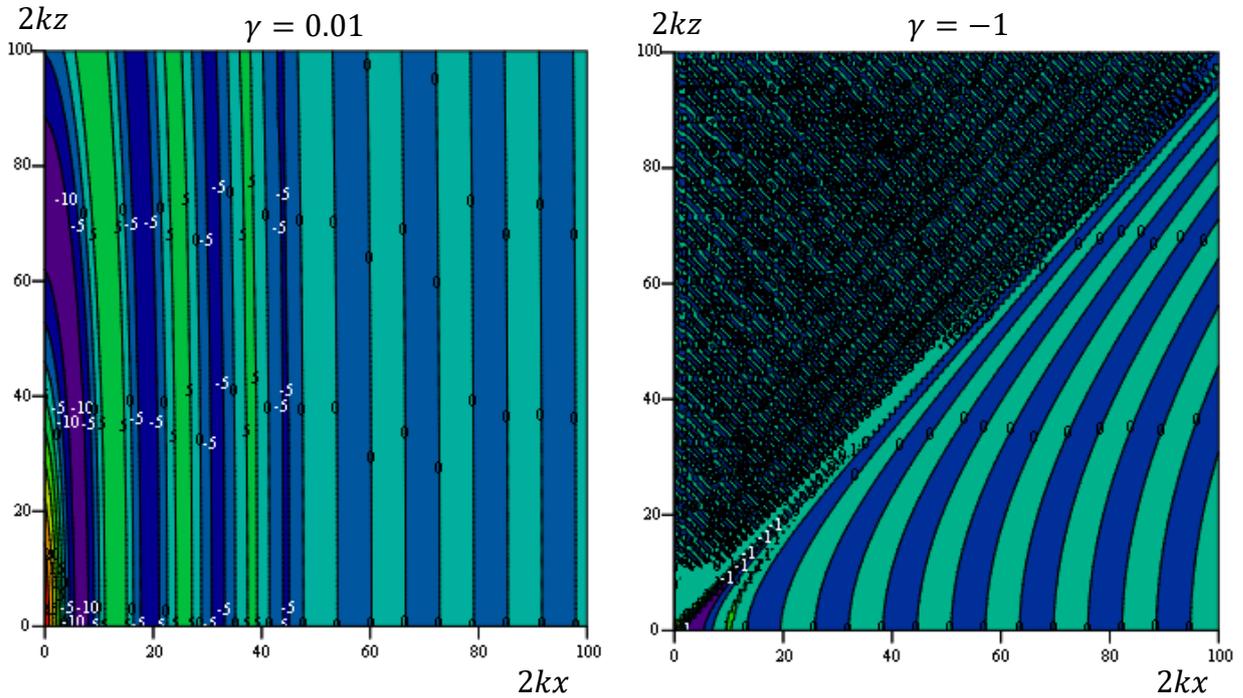


Рис. 8-8. Распределение давления  $\text{Re } p$  для  $\gamma = 0.01$  и  $\gamma = -1$

Угловое распределение поля на большом расстоянии  $R$  может быть найдено из (8.64) подстановкой  $x = R \cos \theta$ ,  $y = R \sin \theta$ . Диаграмма направленности для величины  $|p(\theta)/p(0)|$ , независимой от  $R$ , приведена на рис. 8-9.

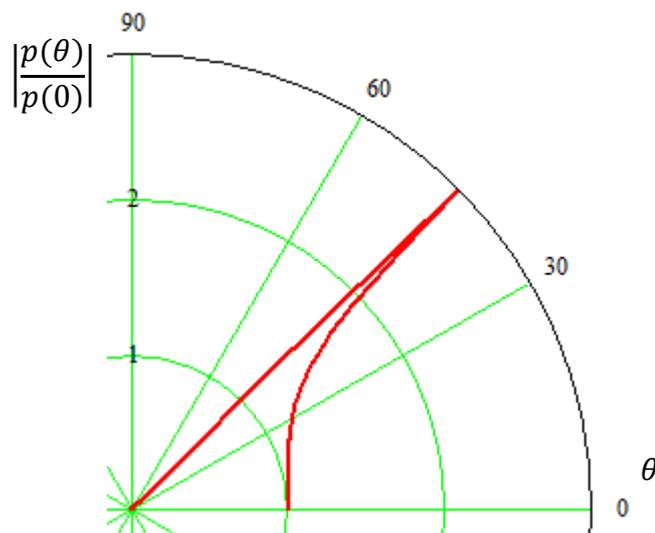


Рис. 8-9. Диаграмма направленности точечного источника в дипольной метасреде с  $\gamma = -1$ .

Вычисление интеграла (8.64) для больших расстояний можно выполнить методом перевала. Найдем точку перевала

$$\xi_0 = k \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \operatorname{tg}^2 \theta}}. \quad (8.65)$$

Волновой вектор  $(\xi_0, \sqrt{\gamma(k^2 - \xi_0^2)})$  задает плоскую волну, которая в основном определяет звуковое поле в точке наблюдения. Для  $\gamma > 0$  величина  $\xi_0$  принимает только действительные положительные значения, что соответствует однородным волнам.

Для отрицательных  $\gamma$  волны, задаваемые направлениями  $\theta_0 < \theta < \pi/2$ , где  $\operatorname{tg} \theta_0 = -\gamma$ , являются неоднородными. В пределе  $\gamma \rightarrow -\infty$  однородные волны в метасреде исчезают полностью, как и в неполяризованной метасреде на частотах, находящихся в полосе запираания.

#### 8.4. Волны в несжимаемой метасреде

Дисперсионные отношения (8.24) и (8.42), полученные для метасред, образованных мультипольными резонаторами, допускают в низкочастотной области существование распространяющихся плоских волн двух типов. При этом один тип существует и в пределе  $k \rightarrow 0$ , соответствующем несжимаемой среде. Это решение представляет особый интерес, хотя анализ дисперсионных закономерностей не позволяет определить физическую природу этих волн. Настоящий раздел посвящен более подробному исследованию этого вопроса с помощью уравнений состояния метасреды.

Постановка задачи о квадрупольной метасреде такова. Пусть в среде с плотностью  $\rho$  и сжимаемостью  $\beta$  равномерно распределены квадрупольные рассеиватели, размер  $l$  которых мал по сравнению со всеми другими характерными размерами. В среде справедливы линеаризованные уравнения непрерывности (8.49) и Эйлера (8.50).

Правая часть уравнения Эйлера (8.50) задает сторонние силы, распределенные с плотностью  $\vec{f}$  на единицу объема. Квадрупольное воздействие на среду можно представить в виде пары противоположно направленных сил, точки приложения которых соединены вектором  $\vec{a}$ . Тогда среднее значение  $\vec{f}$  по любому объему среды, характерные размеры которого значительно превышают  $l$ , будет равно нулю.

Применяя разложение в ряд Тейлора, силовое поле  $\vec{f}$ , создаваемое квадрупольными рассеивателями, запишем в виде

$$f_\alpha(\vec{r} + \vec{a}) - f_\alpha(\vec{r}) = a_\beta \frac{\partial f_\alpha(\vec{r})}{\partial x_\beta}. \quad (8.66)$$

Произведение  $a_\beta f_\alpha$  описывает момент пары сил для поперечных квадрупольей, который приводит к повороту элементарного объема. Момент продольных диполей приводит к деформации элементарного объема без его сжатия. Введем тензор квадрупольных моментов обычным образом  $\mu_{\alpha\beta} = a_\beta f_\alpha$ , тогда силовое поле в (8.46) имеет вид

$$f_\alpha = \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \quad (8.67)$$

Из (8.49), (8.50) и (8.67) найдём волновое уравнение для давления, применив к (8.50) операцию  $\text{div}$ , в обычном виде

$$-\rho\beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p = \frac{\partial^2 \mu_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (8.68)$$

Теперь применим к уравнению (8.46) операцию  $\text{rot}$ , что дает

$$\rho \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \text{rot} \vec{f}, \quad \vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}. \quad (8.69)$$

Из (8.53) следует, что завихренность в среде может быть ненулевой из-за наличия квадрупольных рассеивателей. Отметим, что дипольные рассеиватели не становятся причиной появления завихренности, поскольку для дипольного силового поля  $\text{rot} \vec{f} = 0$ .

Таким образом, движение метасреды определяется уравнениями (8.49), (8.50), (8.69), а также уравнениями движения рассеивателей, связывающими поле  $p$  с параметрами  $\mu_{\alpha\beta}$  или  $\text{rot}\vec{f}$ .

Анализ дисперсионных законов, получаемых из (8.67), показал, что на частотах значительно меньших резонансной частоты квадруполь в метасреде можно ожидать появление двух волн: обычной звуковой волны в среде, на которую рассеиватели не влияют, и волны, которая определяется, главным образом, движением рассеивателей, и которая существует в несжимаемой среде. Последняя волна представляет особый интерес, поэтому рассмотрим в первую очередь несжимаемую среду, в которой  $\beta = 0$ , ограничившись двумерным случаем.

#### 8.4.1. Метасреда с продольными квадрупольями

Представим квадрупольный резонатор в виде двух несжимаемых сфер, связанных пружиной, которые могут двигаться вдоль оси, соединяющей центры сфер (рис. 3-25,а). Зададим параметры резонатора: масса сферы  $m$ , жесткость пружины  $K$ , расстояние между центрами сфер при несжатой пружине  $l$ . Вектор  $\vec{a}$  имеет длину  $l$ , поэтому далее полагаем  $|\vec{a}| = a = l$ .

Пусть метасреда является поляризованной, это значит, что квадруполь ориентированы в определенном направлении, например, вдоль оси  $x$ . Состояние метасреды задается полями скоростей  $(u, v)$  и давления  $p$ .

Движение квадруполь опишем смещением  $w$ , при этом левая сфера на рис. 3-25,а смещается на расстояние  $w$ , а правая на расстояние  $-w$ . Левая сфера действует на среду с силой  $\mu(\ddot{w} - \dot{u})$ , а правая с силой  $-\mu(\ddot{w} + \dot{u})$ , где  $\mu$  – присоединенная масса сферы,  $u$  – компонента скорости среды вдоль оси квадруполь. На среду действует разность сил, направленная по оси квадруполь

$$f = \mu[\ddot{w}(x) - \dot{u}(x)] - \mu[\ddot{w}(x + a) + \dot{u}(x + a)] \approx -\mu a \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - 2\mu \dot{u}. \quad (8.70)$$

Для получения силы, действующей на единицу объема среды, необходимо  $f$  умножить на концентрацию квадруполь  $N$ .

Уравнение движения квадруполя имеет вид

$$2m\ddot{w} = -Kw + \mu[\dot{u}(x) - \ddot{w}(x)] - \mu[\dot{u}(x+a) + \ddot{w}(x+a)]. \quad (8.71)$$

Второе слагаемое справа – это сила, действующая на левую сферу, третье слагаемое – сила, действующая на правую сферу. Применяя разложение в ряд Тейлора для  $\dot{u}(x+a)$ , перепишем (8.71) в следующий вид

$$2(m + \mu)\ddot{w} = -Kw - \mu a \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}. \quad (8.72)$$

Продифференцируем уравнение Эйлера для  $x$ -компоненты по  $x$ , а уравнение для  $y$ -компоненты по  $y$ , и запишем систему уравнений для метасреды

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8.73)$$

$$\rho' \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\mu a N \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2}, \quad (8.74)$$

$$\rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (8.75)$$

$$M\ddot{w} + Kw = -\mu a \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}. \quad (8.76)$$

где  $M = 2(m + \mu)$  – полная масса квадруполя,  $\rho' = \rho + 2\mu N$  – эффективная плотность метасреды при колебаниях вдоль оси  $x$ .

Из системы (8.73-8.76) получаем уравнение для  $w$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( A^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (8.77)$$

где использованы обозначения  $\gamma = \rho'/\rho$ ,  $A^2 = (\mu a)^2 N / (\rho M)$ ,  $\omega_0^2 = K/M$  – собственная частота квадрупольного резонатора.

Согласно (8.70), сила  $f$  направлена вдоль оси  $x$  и зависит только от координаты  $x$ , поэтому  $\text{rot} \vec{f} = 0$ . Следовательно, завихренность поля скорости метасреды также будет равна нулю.

Решение (8.77) позволяет легко найти поля давления и скорости. Будем искать решение (8.77) в виде плоской волны  $w_p = e^{-i\omega t + i\xi x + iky}$ . Подстановка в (8.77) дает дисперсионное уравнение

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\xi^2 + \gamma\kappa^2) = \omega^2 A^2 \xi^2 \kappa^2. \quad (8.78)$$

Распространяющимся волнам соответствует решение (8.78) для вещественных  $\xi$  и  $\kappa$ . Такие решения существуют только на частотах  $\omega < \omega_0$ . Выразим из (8.78) зависимость  $\kappa(\xi)$

$$\kappa^2 = \frac{\xi^2}{\frac{\omega^2 A^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \xi^2 - \gamma}. \quad (8.79)$$

Из (8.79) видно, что  $\kappa^2 > 0$  при  $\xi > \xi'$ , где

$$\xi' = \frac{1}{A} \sqrt{\gamma \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)}. \quad (8.80)$$

Зависимость  $\kappa(\xi)$  приведена на рис. 8-10. Вектор, проведенный из начала координат к некоторой точке на кривой  $\kappa(\xi)$ , является волновым вектором плоской волны, его направление задает направление волны на плоскости  $(x, y)$ , а его длина обратно пропорциональна фазовой скорости волны. Волновой вектор, соответствующий наиболее быстрой волне, показан на рис. 8-10 красной стрелкой. Из рис. 8-10 также следует, что в принципе возможны любые направления распространения волны, однако невозможны решения (8.77) в виде плоских волн, распространяющихся строго вдоль осей  $x$  ( $\xi \neq 0, \kappa = 0$ ) и  $y$  ( $\xi = 0, \kappa \neq 0$ ).

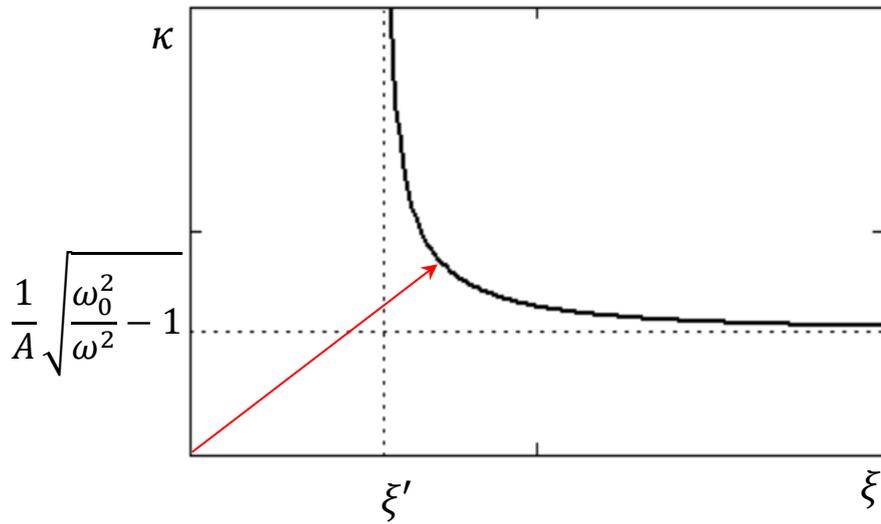


Рис. 8-10. Дисперсионная кривая (8.79).

Сделаем некоторые оценки. Во-первых, запишем выражение для параметра  $A$  следующим образом

$$A = a \sqrt{\frac{\mu}{M} \frac{\mu N}{\rho}}. \quad (8.81)$$

Для безмассового резонатора  $m = 0$  максимальное значение отношения  $\mu/M$  составляет  $1/2$ . Величина  $\mu N$  – это присоединенная масса всех резонаторов в единице объема, поэтому при достаточно большой концентрации резонаторов можно ожидать, что  $\mu N/\rho \sim 1$ . Однако в более реалистичной ситуации концентрация резонаторов не столь велика, поэтому будем полагать  $\mu N/\rho \ll 1$ . Поэтому из (8.77) получаем оценку  $A \ll a$ , в лучшем случае  $A \sim a$ . Параметр  $A$  – это характерный размер квадруполь с учетом концентрации резонаторов и их массы.

Во-вторых, оценим параметры задачи, при которых справедливо допущение о малости размеров резонатора по сравнению с длиной волны. Наибольшая длина волны, как следует из (8.80) и рис. 8-10, соответствует волновым числам порядка  $\xi \sim \xi'$  и  $\kappa \sim \xi'$ . Тогда должно выполняться соотношение  $\xi' a \ll 1$ . При небольшой концентрации резонаторов принимаем  $\gamma \sim 1$ . Из (8.80) получаем для  $\omega \ll \omega_0$

$$\xi'a \approx \frac{a \omega_0}{A \omega}. \quad (8.82)$$

Оба сомножителя справа имеют значения, существенно превышающие 1, поэтому предположение  $\xi'a \ll 1$  несправедливо для низких частот. Оценим допустимость этого предположения в окрестности частоты  $\omega_0$ . Для этого введем малый параметр  $\delta\omega = \omega_0 - \omega$ , принимающий только положительные значения. Из (8.80) получаем

$$\xi'a \approx \frac{a}{A} \sqrt{\frac{2\delta\omega}{\omega_0}}. \quad (8.83)$$

Из (8.83) следует, что предположение о малости квадруполья справедливо для частот, отличающихся от резонансной частоты в меньшую сторону не более чем на

$$\delta\omega \ll \omega_0 \left(\frac{A}{a}\right)^2. \quad (8.84)$$

Таким образом, полученные результаты справедливы лишь в небольшой окрестности резонансной частоты.

Оценим фазовую скорость для самых быстрых волн. Из (8.83) получаем для  $\omega \approx \omega_0$

$$c \approx A \sqrt{\frac{\omega_0^3}{2\delta\omega}}. \quad (8.85)$$

Скорость волны тем выше, чем выше резонансная частота квадрупольей и больше их эквивалентный размер. В пределе  $\omega \rightarrow \omega_0$  скорость  $c$  становится бесконечной.

Наконец, рассмотрим направление скорости колебаний метасреды относительно направления волнового вектора. Зададим направление распространения плоской волны углом  $\theta$ , при этом  $\operatorname{tg}\theta = \kappa/\xi$ , тогда компоненты скорости метасреды вдоль и поперек волнового вектора равны соответственно

$$u_t = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad (8.86)$$

$$u_n = -u \sin \theta + v \cos \theta. \quad (8.87)$$

Из (8.57) получаем отношение  $\xi u + \kappa v = 0$ , которое при подстановке в (8.86) и (8.87) дает  $u_t = 0$  и  $u_n = -u/\sin \theta$ . Следовательно, волны, распространяющиеся в рассматриваемой метасреде, являются поперечными. Более того, уравнения (8.71) и (8.86) никак не связаны с устройством метасреды, поэтому в любой несжимаемой метасреде могут существовать только поперечные волны.

#### 8.4.2. Метасреда с поперечными квадрупольями

Теперь рассмотрим аналогичную задачу для поперечных квадрупольей. Движение таких рассеивателей будет вращением вокруг их центра масс. Отметим, что звуковая волна вызывает вращательное движение рассеивателей со смещенным центром тяжести, что в вязкой среде приводит к дополнительной диссипации. Соответствующие эффекты оценены в работах [42, 43].

Представим квадрупольный резонатор в виде двух несжимаемых сфер, связанных пружиной, которые могут двигаться поперек оси, соединяющей центры сфер (рис. 3-25,б). Зададим параметры резонатора: масса сферы  $m$ , жесткость пружины на изгиб  $K$ , расстояние между центрами сфер при несжатой пружине  $l = a$ . Ось квадрупольей направим вдоль оси  $x$ .

Движение квадруполья опишем смещением  $w$  вдоль оси  $y$ , при этом левая сфера на рис. 3-25,б смещается на расстояние  $w$ , а правая на расстояние  $-w$ . Левая сфера действует на среду с силой  $\mu(\ddot{w} - \dot{v})$ , а правая с силой  $-\mu(\ddot{w} + \dot{v})$ , где  $v$  – компонента скорости среды поперек оси квадруполья. На среду действует разность сил, направленная по оси  $y$

$$f = \mu[\ddot{w}(x) - \dot{v}(x)] - \mu[\ddot{w}(x+a) + \dot{v}(x+a)] \approx -\mu a \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - 2\mu \dot{v}. \quad (8.88)$$

Для получения силы, действующей на единицу объема среды, необходимо  $f$  умножить на концентрацию квадрупольей  $N$ .

Уравнение движения квадруполья имеет вид

$$2m\ddot{w} = -Kw + \mu[\dot{v}(x) - \dot{w}(x)] - \mu[\dot{v}(x+a) + \dot{w}(x+a)]. \quad (8.89)$$

Второе слагаемое справа – это сила, действующая на левую сферу, третье слагаемое – сила, действующая на правую сферу. Применяя разложение в ряд Тейлора для  $\dot{v}(x+a)$ , перепишем (8.89) в следующий вид

$$2(m + \mu)\ddot{w} = -Kw - \mu a \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}. \quad (8.90)$$

Запишем систему уравнения для метасреды с поперечными квадрупольными резонаторами

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8.91)$$

$$\rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (8.92)$$

$$\rho' \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\mu a N \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y}, \quad (8.93)$$

$$M\ddot{w} + Kw = -\mu a \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}. \quad (8.94)$$

Кроме того, поскольку  $\text{rot} \vec{f} \neq 0$  в метасреде появляется завихренность скорости, для которой уравнение имеет вид

$$\rho \dot{\Omega} = \mu a N \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + 2\mu N \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}. \quad (8.95)$$

Из системы (8.91-8.94) получаем уравнение для  $w$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \omega_0^2 \left( \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (8.96)$$

Решение (8.96) в виде плоской волны  $w_p = e^{-i\omega t + i\xi x + i\kappa y}$  дает дисперсионное уравнение

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\gamma \xi^2 + \kappa^2) = \omega^2 A^2 \xi^4. \quad (8.97)$$

Вещественные решения  $\xi$  и  $\kappa$  уравнения (8.97) существуют только на частотах  $\omega < \omega_0$ , как и в случае продольных резонаторов.

Из (8.97) найдем зависимость  $\kappa(\xi)$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} A^2 \xi^4 - \gamma \xi^2}. \quad (8.98)$$

Волны в метасреде существуют при значениях  $\xi \geq \xi'$ , для которых подкоренное выражение (8.97) неотрицательно. Отсюда получаем

$$\xi' = \frac{1}{A} \sqrt{\gamma \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2}}. \quad (8.99)$$

Зависимость  $\kappa(\xi)$  приведена на рис. 8-11. Наиболее быстрые и длинные волны с волновым числом  $\xi'$  распространяются вдоль оси  $x$ . Оценим выполнение условия малости квадруполья  $\xi' a \ll 1$  для этой волны.

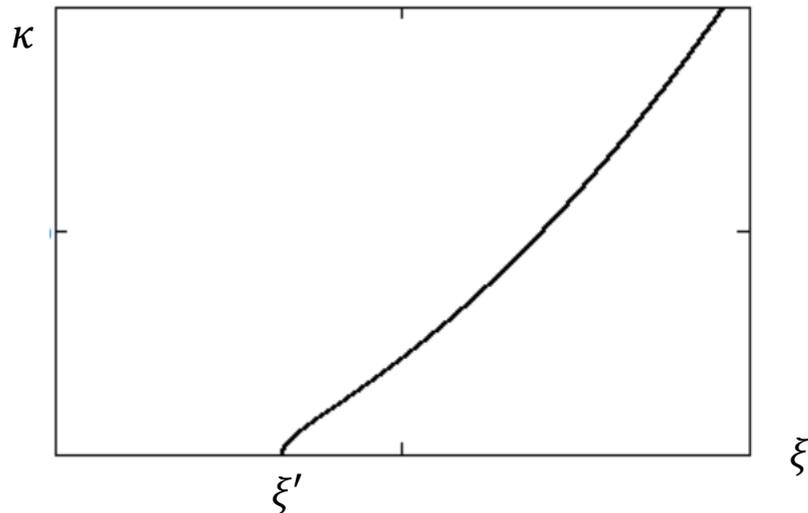


Рис. 8-11. Дисперсионная кривая (8.99).

Из (8.99) получаем  $\xi' a \approx \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega^2} a/A$  для  $\gamma \approx 1$ . Поскольку  $a/A \gg 1$ , то для выполнения условия  $\xi' a \ll 1$  необходимо, чтобы частота  $\omega$  была близка к частоте  $\omega_0$ , при этом допустимое отличие задается условием (8.84). Фазовая скорость волны также совпадает со скоростью в метасреде с продольными квадрупольями и равна (8.85).

## 8.5. Выводы к главе 8

В главе исследовано волновое движение в упругой среде с включениями, являющимися резонаторами различной мультипольности. Получены следующие результаты:

1. Рассмотрены дисперсионные свойства сред с включениями из монополюсных, дипольных или монополюсно-дипольных резонаторов. Для всех метасред существует частотный диапазон, в котором среда оказывается запертой – в ней не могут распространяться однородные звуковые волны. Подбор параметров резонаторов в монополюсно-дипольной метасреде позволяет объединить полосы запираения, обусловленные монополюсными или дипольными резонаторами, или сделать «дважды отрицательную» среду.

2. Показано, что в метасреде, сформированной квадрупольными резонаторами, также существует полоса запираения, в которой метасреда является непрозрачной для звука. Кроме этого, на частотах ниже собственной частоты резонаторов возможно существование двух типов волн: обычной звуковой волны, на которую не влияют резонаторы, и значительно более медленной волны, связанной с упорядоченным движением резонаторов. При этом волна второго типа может существовать и в несжимаемой среде.

3. Получено уравнение Гельмгольца для среды, заполненной рассеивателями произвольного порядка мультипольности, в общем виде. Анализ дисперсионных соотношений, полученных из уравнения Гельмгольца, показал, что, как и в случае квадрупольной метасреды, на низких частотах возможно существование волнового движения, обусловленных сложным, т.е. отличным от пульсации и колебаний, движением рассеивателей, мультипольность которых превышает 1.

## Основные результаты работы

1. Предложен подход к созданию систем активного гашения, позволяющий минимизировать влияние неточностей различного рода (в первую очередь ошибки в настройке управляющей части активной системы, неточности в задании положения вторичных излучателей и приемников, а также их характеристик) на основе оценки параметра робастности – величины, характеризующей потерю эффективности гашения при неоптимальной настройке активной системы. Показано, что параметр робастности активного резонатора зависит от типов приемника и излучателя, их взаимного расположения и ориентации, которые должны выбираться таким образом, чтобы параметр робастности принимал минимальное значение.

2. Представлены экспериментальные результаты по гашению колебаний в длинных линиях пассивными и активными резонаторами: рассеяние и поглощение звука в бесконечной узкой трубе; гашение звука, излучаемого из открытой трубы в свободное пространство; поглощение и изоляция изгибных колебаний в стержне. Также приведены результаты экспериментов по демпфированию собственных колебаний помещений.

3. Предложена теоретическая модель квадрупольного резонатора, в рамках которой найдены квадрупольные моменты и импедансы таких резонаторов. Получены экспериментальные результаты по гашению звука в узкой трубе квадрупольным резонатором.

4. Исследована поверхность с решеткой активных резонаторов монопольного типа. Показано, что при достаточно плотном расположении резонаторов акустические свойства поверхности могут быть описаны эквивалентным однородным импедансом, не учитывающим дискретную структуру активной системы и зависящим от импеданса резонаторов. Такие поверхности обладают переменным импедансом, значение которого выбирается в зависимости от решаемой задачи. Решетка резонаторов дипольного типа не может быть заменена эквивалентным импедансом,

поскольку она реагирует не на нормальное к поверхности воздействие, а на касательное, т.е. тангенциальное, возмущение.

5. Введено понятие тангенциального импеданса для характеристики акустических свойств тангенциально реагирующих поверхностей. Для поверхности, покрытой дипольными резонаторами, – это отношение второй производной звукового давления по направлению вдоль поверхности к нормальной скорости поверхности. Поверхности с диполями, момент которых имеет фиксированное направление, предложено по аналогии с электродинамикой называть поляризованными. Найдены коэффициенты отражения и поглощения для плоских тангенциально реагирующих поверхностей.

6. Исследовано затухание звука в канале, стенки которого покрыты регулярными системами резонаторов. Для активных резонаторов показано, что система устойчива и достаточно робастна. Найдены условия, при которых свойства системы резонаторов могут быть описаны эквивалентным однородным импедансом. Показано, что наибольшее затухание звука в каналах связано с появлением кратных мод: тройных для плоского канала и девяттерных для канала прямоугольного сечения. Также показано, что при ширине канала примерно равной длине волны оптимальный коэффициент затухания в канале с тангенциальным импедансом стенки больше, чем в канале с нормальным импедансом стенки.

7. Исследовано затухание звука в помещениях с резонаторами. На низких частотах задача гашения состоит в демпфировании собственных колебаний системы «помещение-резонатор». Найдены оптимальные параметры пассивных и активных точечных резонаторов, при которых коэффициенты затухания отдельных мод принимают наибольшие значения. Показано, что при этом образуются двойные моды. Прямоугольные помещения, стенки которого покрыты решетками резонаторов, а их свойства описываются эквивалентным импедансом, позволяют получить кратные моды, максимальный порядок которых может достигать 27.

8. Предложена модель затухания звука в прямоугольном помещении с импедансными стенками для высокочастотного случая. Показано, что если в помещении есть параллельные непоглощающие стенки, то закон затухания звука имеет степенную зависимость от времени. В общем случае, когда все стенки имеют ненулевое поглощение, закон затухания является экспоненциально-степенным. Также модель учитывает наличие рассеяния на стенках. Показано, что при коэффициенте рассеяния стенок 0.2 и выше закон затухания становится экспоненциальным и приближается к закону Сэбина.

9. На основе модели затухания звука в помещении разработан новый метод измерения коэффициентов поглощения и рассеяния поверхностей в условиях недиффузного звукового поля, суть которого состоит в аппроксимации измеренной кривой затухания известной экспоненциально-степенной функцией, одним из аргументов которой является коэффициент рассеяния или коэффициент поглощения. Экспериментально продемонстрированы возможности метода на примере измерения коэффициента рассеяния звука рельефными поверхностями.

10. Исследованы свойства метасред, образованных включениями с малыми волновыми размерами и обладающими резонансными свойствами. Найдены частоты, на которых в метасредах с монопольными, дипольными, монопольно-дипольными или квадрупольными резонаторами не распространяются звуковые волны, т.е. метасреды являются запертыми. Рассчитаны ширины полос запираения для различных метасред.

11. Показано, что в метасреде, образованной квадрупольными резонаторами, при определенных условиях существует волновое движение, несвязанное с сжимаемостью среды. Получена система уравнений состояния для двумерной метасреды, из которой найдены волновые уравнения, описывающие распространение колебаний. Проанализированы свойства, в т.ч. дисперсионные, новых волн и приведены условия их существования.

## Литература

1. Алексеев В.Н., Рыбак С.А. Распространение стационарных звуковых волн в пузырьковых средах // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 690-698.
2. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Математическое моделирование. 1991. Т. 3. № 12. С. 52-64.
3. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Об активном гашении звуковых полей в слоисто-неоднородных волноводах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 5–12.
4. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Нелинейные обратные задачи активного управления акустическими полями в двумерных волноводах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 1. С. 27-31.
5. Алексеев Г.В., Панасюк А.С. О задаче активного гашения звука в трехмерном волноводе // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 6. С. 723–729.
6. Андреев Н.Н. О скольжении звука вдоль поглощающих границ // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1936. № 5. С.625-632.
7. Арабаджи В.В. Поглощение длинных волн в нерезонансных параметрических микроструктурах // Изв. ВУЗов Радиофизика. 2001. Т. 44. № 3. С. 270-284.
8. Арабаджи В.В. О подавлении звукового поля вибрирующего тела монополями, прикрепленными к его поверхности. Препринт № 665. Нижний Новгород ИПФ РАН. 2004
9. Баженов Д.В., Баженова, Л.А., Римский-Корсаков А.В. Глушитель шума в виде резонатора Гельмгольца на выходе воздуховода конечной длины // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 306-311.
10. Белов В.Д., Мигун Ю.Г., Орлов А.И. Гибридный активно-пассивный звукопоглотитель // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 419-424.
11. Бобровницкий Ю.И. Метод полного согласования импедансов для активного управления акустическим полем в помещении // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 731–737.
12. Бобровницкий Ю.И. Новое решение задачи об акустически прозрачном теле // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 751–755.
13. Бобровницкий Ю.И. Импедансная теория рассеяния звука: общие соотношения // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 601–606.
14. Бобровницкий Ю.И. Импедансная теория поглощения звука: наилучший поглотитель и черное тело // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 742-752.
15. Бобровницкий Ю.И. Импедансная теория рассеяния и поглощения звука: условно лучший поглотитель и предельные возможности пассивных рассеивателей и поглотителей // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 113-118.
16. Бобровницкий Ю.И. Гистерезисное демпфирование и причинность // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 291-295.

17. Бобровницкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 137-144.
18. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Импедансный подход к проектированию эффективных поглотителей колебательной энергии // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 137-144.
19. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 517-525.
20. Бойко А.И. Об оценке размера излучателя в модельной задаче гашения поля // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 639–641.
21. Бойко А.И., Иванов В.П. О гашении поля, возбуждаемого пульсирующей сферой в прямоугольном волноводе // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 6. С. 818–824.
22. Бойко А.И., Тютюкин В.В. Система активного гашения звуковых полей, основанная на методе выделения пространственных гармоник // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 454–460.
23. Бойко А.И., Тютюкин В.В. Плоская активная система гашения звука, основанная на применении двумерных пространственных гармоник // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 5–13.
24. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973.
25. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение звука в периодических структурах. М.: ИЛ. 1959.
26. Буров В.А., Волошинов В.Б., Дмитриев К.В., Поликарпова Н.В. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением // УФН. 2011. Т.181. № 11. С. 1205-1211.
27. Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н. Акустические «дважды отрицательные» среды // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292-306.
28. Велижанина К. А., Вощукова Е.А., Свирина Л.Д. Влияние потерь в объеме резонатора на его акустические характеристики // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 386-388.
29. Верховская И.Н. Голосники и их роль в акустике помещения // Труды научно-исследовательского муз. ин-та Московской гос. Консерватории. 1936. Вып. 1. С. 46-72.
30. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными  $\epsilon$  и  $\mu$  // УФН. 1967. Т.92. Вып. 3. С. 517-526.
31. Веселаго В.Г. Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // УФН. 2011. Т.181. № 11. С. 1201-1205.
32. Витрувий. Десять книг об архитектуре. М.: Издательство Всесоюзной Академии архитектуры, 1936.
33. Генкин М.Д., Римский-Корсаков А.В., Целебровский А.Н., Яблонский В.В. Амортизатор с автоматическим управлением. Авт. свид. № 259568 от 06.09.68, бюл. №2. 1970.

34. Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А. О распространении звука в каналах с импедансными стенками при наличии воздушного потолка. Ч. II. Оптимизация затухания звука в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1982. Т. XIII. № 3. С. 61-68.
35. Гладилин А.В. Комплекс аппаратуры для активного гашения акустического шума вентиляционных систем // Вопросы радиоэлектроники. 2009. Т. 4. № 2. С. 170-178.
36. Гладилин А.В., Догадов А.А., Канев Н.Г., Миронов М.А. Рассеяние звука резонансным диполем с обратной связью // Сборник трудов XIII сессии РАО. 2003. Т. 1. С. 276-279.
37. Гладилин А.В., Канев Н.Г., Миронов М.А. Пример активного гашения изгибных колебаний стержня // Труды конференции «Защита населения от повышенного шумового воздействия», 17-19 марта, 2009, г. Санкт-Петербург. С. 461-466.
38. Гладилин А. В., Канев Н. Г., Миронов М. А., Смагин Д. А. Устройство для активного гашения акустических шумов в вентиляционных каналах // Патент № 2702252 С1 РФ. Заявл. 28.08.2018. Оpubл. 07.10.2019.
39. Гладилин А. В., Канев Н. Г., Миронов М. А., Смагин Д. А. Устройство для активного гашения акустических шумов в вентиляционных системах // Патент № 2709606 С1 РФ. Заявл. 24.04.2019. Оpubл. 18.12.2019.
40. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М: Советское радио. 1967.
41. Гуреев М.Ю., Миронов М.А. Сверхфокусировка сферической волны. Теория и эксперимент // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 6. С. 774-778.
42. Диденкулов И.Н., Езерский А.Б., Селивановский Д.А. Распространение звука в среде, содержащей частицы со смещенным центром масс // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 425-426.
43. Диденкулов И.Н., Сагачева А.А. Распространение звука в суспензии частиц с вращательной степенью свободы // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 16-19.
44. Дулов В.А. Влияние облицовки из водоподобного материала на затухание звука в трубах, заполненных жидкостью // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 54-57.
45. Завадская М.П., Попов А.В., Эгельский Б.Л. Об аппроксимации волновых потенциалов в задаче активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 5. С. 732-738.
46. Завадская М.П., Попов А.В., Эгельский Б.Л. Об одном приближенном решении задачи активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 6. С. 882-893
47. Завадская М.П., Попов А.В., Эгельский Б.Л. Вопросы аппроксимации и устойчивости систем активного гашения с конечным числом связей // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 480-482.
48. Завадская М.П., Урусовский И.А. О влиянии неточности распределения источников на компенсацию поля при активном подавлении шума // VIII Всесоюзная акустическая конференция. М.: Наука. 1973.

49. Залуцкая Р.Р., Миронов М.А. Волноводный изолятор – теория и эксперимент // Труды конференции «Акустика среды обитания», Москва. 2017. С. 93-98.
50. Иванов В.П. Гашение звука конечной решеткой излучателей // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 658–664.
51. Иванов В.П. Активная звукоизоляция ограниченной области для случая удаленных сторонних источников. Теория решетки Тротта // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 4. С. 661–670.
52. Иванов В.П. Гашение поля сторонних источников за отверстием в экране // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 68–76.
53. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
54. Исакович М.А. Теория волноводной изоляции волн в длинных линиях // Труды Всесоюзной конференции «Распространение и дифракция волн», Ереван. 1973. Т. 60. № 2. С. 145–151.
55. Исакович М.А., Кашина В.И., Тютюкин В.В. Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импедансными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384-389.
56. Канев Н.Г. Поглощение звука двумя резонансными поглотителями // Труды XV сессии РАО, Нижний Новгород. 2004. Т.1. С. 229–232.
57. Канев Н.Г. Оптимизация поглощения звука регулярными системами резонаторов // Труды XVI сессии РАО, Москва. 2005.Т.1. С. 236–240.
58. Канев Н.Г. О влиянии ошибок на эффективность работы локальных активных поглотителей // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 665-669.
59. Канев Н.Г. Пассивные и активные резонаторы для локальных систем гашения звука. Диссертация ... к.ф.-м.н.: 01.04.06. Москва, 2006. 134 с.
60. Канев Н.Г. Экспериментальное исследование присоединенной массы диполя, расположенного в узкой трубе // Труды XVIII сессии РАО, Москва. 2006. Т.1. С. 179-183.
61. Канев Н.Г. Присоединенная масса монополя и диполя в узкой трубе // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 632-636.
62. Канев Н.Г. Влияние зазора между поршнем и стенкой трубы на его импеданс // Труды XIX сессии РАО, Нижний Новгород. 2007. Т.1. С. 220-224.
63. Канев Н.Г. Об ослаблении резонаторами изгибных колебаний пластины в области конечного размера // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 3. С. 300-302.
64. Канев Н.Г. О проблеме прогнозирования и измерения времени реверберации в прямоугольных помещениях // Сборник трудов Научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.В. Римского-Корсакова. С. 83-87. Москва, ГЕОС, 2010.
65. Канев Н.Г. Реверберация в прямоугольном помещении с гладкими и рассеивающими стенками // Ежегодник РАО «Акустика неоднородных сред». Т. 11. С. 79-84. Москва, ГЕОС, 2010.
66. Канев Н.Г. О стабилизирующем действии обратной связи на работу системы активного гашения звука // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 284-285.

67. Канев Н.Г. Затухание звука в прямоугольном помещении с импедансными стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 656-662.
68. Канев Н.Г. Реверберация в трапециевидном помещении // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 5. С. 607-612.
69. Канев Н.Г. Об аномальном времени реверберации некоторых помещений // Труды конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Е.Я. Юдина, 30 ноября 2014 г, Москва. С. 191-201.
70. Канев Н.Г. Неэкспоненциальное затухание звука в концертных залах // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 106-110.
71. Канев Н.Г. Поглощение звука решеткой активных резонаторов вблизи импедансной поверхности // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 744-747.
72. Канев Н.Г. О максимальном поглощении звука резонатором Гельмгольца в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 752-755.
73. Канев Н.Г. Голосники // Труды III Всероссийской акустической конференции, 21-25 сентября 2020, г. Санкт-Петербург. С.460-466.
74. Канев Н.Г. Максимальное поглощение звука монополюс в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 3. С. 327-331.
75. Канев Н.Г. Граничные условия для поверхностей, реагирующих на касательное акустическое воздействие // Труды 9-й конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике». 26 сентября – 1 октября 2022, г. Светлогорск. С. 156-157.
76. Канев Н.Г. Оптимизация затухания звука в прямоугольном канале с импедансными стенками // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 4. С. 449-453.
77. Канев Н.Г. Опыт применения резонаторов Гельмгольца для демпфирования собственных мод помещений // Труды XXXV сессии Российского акустического общества, 13-17 февраля 2023, г. Москва. С. 221-226.
78. Канев Н.Г. Дисперсия скорости звука в метасреде, образованной периодической структурой резонаторов // Труды XXXV сессии Российского акустического общества, 13-17 февраля 2023, г. Москва. С. 998-1003.
79. Канев Н.Г. Способ оптимизации затухания звука в плоском и прямоугольном каналах методом кратных мод // Труды XXXV сессии Российского акустического общества, 13-17 февраля 2023, г. Москва. С. 1127-1132.
80. Канев Н.Г. Тангенциальный импеданс // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 2. С. 270-274.
81. Канев Н.Г., Миронов М.А. Дипольный резонансный рассеиватель звука // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 372-375.
82. Канев Н.Г., Миронов М.А. Монопольно-дипольный резонансный поглотитель в узком волноводе // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 111-116.
83. Канев Н.Г., Миронов М.А. Дипольный резонансный глушитель на выходе узкой трубы // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С.335-339.

84. Канев Н.Г., Миронов М.А. Активные резонаторы для гашения звука в узких трубах // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 505-512.
85. Канев Н.Г., Миронов М.А. Резонансное поглощение гравитационных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 82-88.
86. Клюкин И.И. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 4. № 2. С. 213-219.
87. Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д. О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60-65.
88. Князев А.С., Тартаковский Б.Д. О применении электромеханической обратной связи для демпфирования изгибных колебаний стержня // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 2. С. 181-186.
89. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука. 1976. С. 320.
90. Комкин А.И., Миронов М.А. Импеданс излучения поршня на стенке прямоугольного канала // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 296-300.
91. Комкин А.И., Миронов М.А. Характеристики поглощения резонатора Гельмгольца // Уч. зап. физ. фак-та. 2014. № 6. 146304.
92. Комкин А.И., Миронов М.А., Быков А.И. Поглощение звука резонатором Гельмгольца // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 356-363.
93. Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. О присоединенной длине отверстий // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 677-682.
94. Коняев С.И., Лебедев В.И., Федорюк М.В. Дискретная аппроксимация сферической поверхности Гюйгенса // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 650-651.
95. Коняев С.И., Лебедев В.И., Федорюк М.В. Факторизация звукового поля с помощью двух концентрических сферических приемных поверхностей // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 5. С. 732-736.
96. Копьев В.Ф., Битюрин В.А., Беляев И.В., Годин С.М., Зайцев М.Ю., Климов А.И., Копьев В.А., Моралев И.А., Остриков Н.Н. Управление шумом струи с помощью плазменных актуаторов диэлектрического барьерного разряда // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 473-481.
97. Копьев В.Ф., Пальчиковский В.В., Беляев И.В., Берсенев Ю.В., Макашов С.Ю., Храпцов И.В., Корин И.А., Сорокин Е.В., Кустов О.Ю. Создание заглушенной установки для аэроакустических экспериментов и исследование ее акустических характеристик // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 114-126.
98. Коротаев Е.В., Мазанников А.А. Об активном гашении звука ограниченной плоской решеткой // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 4. С. 539-542.
99. Коротаев Е.В., Тютюкин В.В. Экспериментальное исследование активной гасящей системы плоской формы // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 1. С. 84-88.

100. Коротин П.И., Потапов О.А., Фикс Г.Е., Фикс И.Ш., Почкин Я.С., Халецкий Ю.Д. Активное подавление шума в модели входного канала вентилятора ТРДД // *Авиац. двигатели*. 2021. Т. 2. № 11. С. 7-16.
101. Лаврова М.А., Канев Н.Г. Экспериментальное исследование рассеивателей звука различной формы // *Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та*. 2020. № 1. 2010601.
102. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
103. Лапин А.Д. Отражение нормальных волн от скошенного конца прямоугольного волновода // *Акуст. журн*. 1963. Т. 9. № 1. С. 120-122.
104. Лапин А.Д. Звукоизоляция в волноводах. Обзор // *Акуст. журн*. 1975. Т. 21. № 3. С. 337-350.
105. Лапин А.Д. Звукоизоляция в широких трубах // *Акуст. журн*. 1976. Т. 22. № 3. С. 400-405.
106. Лапин А.Д. Поперечники рассеяния и поглощения резонатора для продольных и сдвиговых волн в пластине // *Акуст. журн*. 1988. Т. 34. № 3. С. 543-545.
107. Лапин А.Д. Рассеяние волн Лэмба в пластине от резонаторов, присоединенных к ней // *Акуст. журн*. 1990. Т. 36. № 1. С. 64-67.
108. Лапин А.Д. Поперечник рассеяния резонатора для поверхностной рэлеевской волны // *Акуст. журн*. 1991. Т. 37. № 1. С. 202-205.
109. Лапин А.Д. Сечения рассеяния и поглощения резонатора Гельмгольца в многомодовом волноводе // *Акуст. журн*. 1999. Т. 45. № 3. С. 376-379.
110. Лапин А.Д. Импеданс излучения поршня в волноводе // *Акуст. журн*. 2000. Т. 46. № 4. С. 563-565.
111. Лапин А.Д. Низкочастотное звуковое поле в помещении с резонатором Гельмгольца // *Акуст. журн*. 2000. Т. 46. № 3. С. 427-429.
112. Лапин А.Д. Рассеяние изгибных волн в пластине от цепочки установленных на ней резонаторов // *Акуст. журн*. 2001. Т. 47. № 5. С. 714-716.
113. Лапин А.Д. Поглощение звука решеткой резонаторов с диссипацией // *Акуст. журн*. 2002. Т. 48. № 3. С. 428-429.
114. Лапин А.Д. Резонансные поглотители волн в узких трубах и стержнях // *Акуст. журн*. 2003. Т. 49. № 3. С. 427-428.
115. Лапин А.Д. Резонатор монопольно-дипольного типа в узкой трубе // *Акуст. журн*. 2003. Т. 49. № 6. С. 855-857.
116. Лапин А.Д. Резонатор монопольно-дипольного типа для изгибных волн в стержне // *Акуст. журн*. 2004. Т. 50. № 1. С. 441-447.
117. Лапин А.Д. Поглощение изгибных волн от источника нормальной силы в пластине, окруженного монопольно-дипольными резонаторами // *Акуст. журн*. 2004. Т. 50. № 2. С. 238-241.
118. Лапин А.Д. Изоляция звука решеткой резонансных рассеивателей в многомодовом волноводе // *Труды XV сессии РАО*. 2004. Т.1. С. 218-221.

119. Лапин А.Д. Поглощение звука монопольно-дипольными резонаторами в многомодовом волноводе // Акуст. журн. 2005. Т.51. №3. С. 428-430.
120. Лапин А.Д. Поглощение изгибных волн монопольно-дипольными резонаторами в пластине // Акуст. журн. 2006. Т.52. № 2. С. 280-282.
121. Лапин А.Д. Поглощение звука резонаторами в цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2006. Т.52. № 5. С. 716-719.
122. Лапин А.Д. Рассеяние рэлеевской волны монопольно-дипольными резонаторами // Акуст. журн. 2007. Т.53. № 1. С. 15-19.
123. Лапин А.Д. Поглощение нулевых волн Лэмба в упругом слое механическими резонаторами с трением // Акуст. журн. 2008. Т.54. № 3. С. 347-350.
124. Лапин А.Д. Сечение рассеяния монопольно-дипольного резонатора с трением в многомодовом волноводе // Труды XXIV сессии РАО. 2011. Т.1. С.190-194.
125. Лапин А.Д. Отражение рэлеевской волны решеткой механических резонаторов // Акуст. журн. 2011. Т.57. № 5. С. 591-594.
126. Лапин А.Д. Отражение звука решеткой резонаторов в многомодовом цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2012. Т.58. №5. С. 580-582.
127. Лапин А.Д. Отражение волн Лэмба в твердом слое решеткой механических резонаторов // Акуст. журн. 2013. Т.59. №3. С. 307-311.
128. Лапин А.Д. Поглощение изгибных волн парой цепочек механических резонаторов, установленных на пластине // Акуст. журн. 2014. Т.60. №3. С. 227-229.
129. Лапин А.Д. Поглощение звука решеткой резонаторов с трением в стоячем звуковом поле // Техн. акуст. 2017. №3. С. 1-6.
130. Лапин А.Д., Миронов М.А. Изоляция звукового поля плоской решеткой малых рассеивателей // Труды XI сессии РАО. 2001. Т.1. С. 192-194
131. Лапин А.Д., Миронов М.А. Поглощение звука плоской решеткой монопольно-дипольных рассеивателей // Акуст. журн. 2006. Т.52. № 4. С. 497-501.
132. Лапин А.Д., Миронов М.А. Поглощение звука парой плоских решеток монопольных рассеивателей // Труды XXVII сессии РАО, Санкт-Петербург. 2014.
133. Леонтьев Е.А., Мунин А.Г. Распространение звука в каналах с импедансными стенками при наличии воздушного потолка. Ч. I. Затухание звука в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1979. Т. X. № 2. С. 50-58
134. Любашевский Г.С., Орлов А.И., Тартаковский Б.Д. Адаптивная компенсация дискретных компонент шума и вибраций // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 489-495.
135. Любашевский Г.С., Орлов А.И., Тартаковский Б.Д., Чувильчиков М.С. О скорости сходимости адаптивного процесса гашения широкополосных

колебаний в одномерных структурах // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 496–501.

136. Мазанников А.А., Тютюкин В.В. Экспериментальное исследование активной системы гашения акустических полей // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 5. С. 807–808.

137. Мазанников А.А., Тютюкин В.В. Исследование активных автономных систем гашения акустических полей в одномодовых волноводах // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 5. С. 729–734.

138. Мазанников А.А., Тютюкин В.В., Федорюк М.В. Активное гашение звуковых полей методом пространственных гармоник // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 5. С. 759–763.

139. Мазанников А.А., Тютюкин В.В., Уколов А.Т. Активная система гашения звука в многомодовом волноводе // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 485–487.

140. Мазанников А.А., Уколов А.Т., Федорюк М.В. Об активном гашении звука ограниченной частоты в волноводах // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 6. С. 907–912.

141. Мальцев А.А., Масленников Р.О., Хоряев А.В., Черепенников В.В. Адаптивные системы гашения шума и вибраций // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 2. С. 242–258.

142. Малюжинец Г.Д. Об одной теореме для аналитических функций и ее обобщении для волновых потенциалов // III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн. М.: Наука. 1964. С. 113–116.

143. Малюжинец Г.Д. Простейшая модель поглощающей и прозрачной решетки с обратной связью // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 14. С. 7–22.

144. Малюжинец Г.Д. Нестационарные задачи теории дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 14. С. 124–139.

145. Малюжинец Г.Д. Задача о скачке в теории дифракции // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 14. С. 140–168.

146. Миронов М.А. Возможный подход к оптимизации параметров звукопоглощающих конструкций для многомодовых волноводов // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 741–745.

147. Миронов М.А. Активное гашение шума в трубах с потолком // Отчет Акус. ин-та. 2021.

148. Михайлов С.Г. Опыты по активному подавлению отражения и излучения звука поршнем в водозаполненном трубопроводе // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 2. С. 210–224.

149. Морз Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

150. Морз Ф. Колебания и звук. М.-Л., ГИТТЛ. 1949.

151. Остриков Н.Н., Яковец М.А., Ипатов М.С. Экспериментальное подтверждение аналитической модели распространения звука в прямоугольном канале при наличии скачков импеданса и разработка на ее

- основе метода извлечения импеданса // Акуст. журн. 2022. Т 66. № 2. С. 128-147.
152. Плесский В.П., Симонян А.В. Отражение волн Рэлея от резонирующего элемента // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 162-166.
153. Плесский В.П., Симонян А.В. Рассеяние волн Рэлея на резонирующем элементе // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 747-752.
154. Помпеи А., Сумбатян М.А., Тодоров Н.Ф. Виртуальные компьютерные модели помещений: метод лучевых траекторий и алгоритмы аурализации // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 760-771.
155. Раппопорт П.А. Строительное производство Древней Руси X-XIII вв. СПб.: Наука. 1994.
156. Римский-Корсаков А.В., Колев Н.Г. О распространении звука в цилиндрической трубе с импедансными стенками при наличии потока // Сб. «Физика аэродинамических шумов». М.: Наука. 1967.
157. Ржевкин С.Н. Обзор работ по резонансным звукопоглотителям // УФН. 1946. Т. 30. Вып. 1-2. С. 40-62.
158. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960.
159. Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит, 2002.
160. Сергеев М.В. Рассеянный звук и реверберация на городских улицах и в туннелях // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 3. С. 439-447.
161. Сивухин Д.В. Оптика. М.: Наука, 1985. 752 с.
162. Скучик Е. Основы акустики. М.: Мир, 1976.
163. Спегальский Ю.П. Каменное зодчество Пскова. Л.: Стройиздат, 1976.
164. Стасов В. В. Собрание сочинений. Т.1. СПб.: тип. М. М. Стасюлевича, 1894.
165. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 2.
166. Тиндаль. Звук. 2-е изд. СПб.: Типография Альтшулера, 1901.
167. Трушина П.А., Канев Н.Г. Измерение коэффициента рассеяния звука в масштабной модели прямоугольного помещения // Учен. зап. физ. факта Моск. ун-та. 2017. № 5. 1751112.
168. Тютюкин В.В. Модель плоской активной звукопоглощающей системы // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 238–243.
169. Тютюкин В.В., Шкварников А.П. Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
170. Уидроу Б., Гловер Д., Маккул Д. и др. Адаптивные компенсаторы помех. Принципы построения и применение // Тр. ИИЭР. 1976. Т. 63. № 12. С. 69-98.
171. Урусовский И.А. Об активной звукоизоляции в волноводе // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 304–312.

172. Урусовский И.А. О самовозбуждении системы активной звукоизоляции в волноводе // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 437–442.
173. Урусовский И.А. Об активной звукоизоляции волновода с излучателями – монополями и приемниками – диполями // Акуст. журн. 1980. Т. 24. № 2. С. 281–287.
174. Урусовский И.А. Об активном гашении звука монополями, распределенными по одной поверхности // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 4. С. 585–594.
175. Урусовский И.А. Об активном формировании рассеянного звукового поля // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 560–561.
176. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
177. Федорюк М.Ф. О работах Г.Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 14. С. 169-179.
178. Федорюк М.Ф. О гашении звука в волноводах активным методом // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 2. С. 281–285.
179. Федорюк М.Ф. Активное гашение звука непрерывными решетками из монополей // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 1. С. 113–118.
180. Федотовский В.С. Пористая среда как акустический метаматериал с отрицательными инерционными и упругими свойствами // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 547-553.
181. Фок В.А. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // ДАН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 875-878.
182. Шендеров Е.Л. О собственных функциях плоского волновода с импедансными стенками // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 661-669.
183. Шендеров Е.Л. О решениях уравнения Гельмгольца, соответствующих кратным корням дисперсионного уравнения для волновода с импедансными стенками // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 417-423.
184. Шкритек П. Справочное руководство по звуковой схемотехнике. М: Мир, 1991. С. 446.
185. Arau-Puchades H. An improved reverberation formula // Acustica. 1988. V. 65. P. 163-180.
186. Auregan Y. On the use of a stress–impedance model to describe sound propagation in a lined duct with grazing flow // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 143. № 5. P. 2975-2979.
187. Barron M., Kissner S. A possible acoustic design approach for multi-purpose auditoria suitable for both speech and music // Appl. Acoustics. 2017. V. 115. P. 42-49.
188. Beauvilain T.A., Bolton J.S., Gardner B.K. Sound cancellation by the use of secondary multipoles: Experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 3. P. 1189-1202.

189. Benedetto G., Spagnolo R. Reverberation time in enclosures: The surface reflection law and the dependence of the absorption coefficient on the angle of incidence // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. P. 1447-1451.
190. Benzaria E., Martin V. Secondary source location in active noise control: selection or optimization? // *J. Sound Vib.* 1994. V. 173. № 1. P. 137-144.
191. Bera K., Banerjee A. Active Metadamping: A phenomenon of damping enhancement in metamaterial via feedback control // *J. Sound Vib.* 2023. V. 546. 117452.
192. Beranek L.L. Sound absorption in rectangular ducts // *J. Acoust. Soc. Am.* 1940. V. 12. P. 228-231.
193. Beranek L.L., Vér I.L. Noise and vibration control engineering. Principles and applications. New York: John Wiley & Sons. 1992.
194. Beyene S.R., Bardisso R.A. A new hybrid/active noise absorption system // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 101. № 3. P. 1512-1515.
195. Billon K., De Bono E., Perez M., Salze E., Matten G., Gillet M., Ouisse M., Volery M., Lissek H., Mardjono J., Collet M. Experimental assessment of an active (acoustic) liner prototype in an acoustic flow duct facility // *Proc. SPIE.* 2021. V.11593.
196. Bistafa S.R., Morrissey J.W. Numerical solutions of the acoustic eigenvalue equation in the rectangular room with arbitrary (uniform) wall impedances // *J. Sound. Vib.* 2003. V. 263. P. 205-218.
197. Bistafa S.R., Bradley J.S. Predicting reverberation times in a simulated classroom // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 108. P. 1721-1731.
198. Bobber R.J. Active load impedance // *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. V. 34. № 3. P. 282-288.
199. Bobber R.J. An active transducer as a characteristic impedance of an acoustic transmission line // *J. Acoust. Soc. Am.* 1970. V. 48. № 1. P. 317-324.
200. Bobrovnitskii Y.I. Impedance theory of wave propagation on infinite periodic structures // *J. Sound Vib.* 2022. V. 525. 116081.
201. Bolton J.S., Gardner B.K., Beauvilain T.A. Sound cancellation by the use of secondary multipoles // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 98. № 4. P. 2343-2362.
202. Boulandet R., Laurence T., Lissek H. Design of remote quiet zones using spot-type sound reducers // *Acta Acust. united with Acust.* 2017. V.103. № 5. P. 858-868.
203. Boulandet R., Lissek H., Karkar S., Collet M., Matten G., Ouisse M., Versaevel M. Duct modes damping through an adjustable electroacoustic liner under grazing incidence // *J. Sound Vib.* 2018. V. 426. P. 19-33.
204. Boulandet R., Rivet E., Lissek H. Sensorless electroacoustic absorbers through synthesized impedance control for damping low-frequency modes in cavities // *Acta Acust. united with Acust.* 2016. V.102. № 4. P. 696-704.
205. Bullmore A.J., Nelson P.A., Curtis A.R.D., Elliott S.J. The active minimization of harmonic enclosed sound fields. Part II: A computer simulation // *J. Sound Vib.* 1987. V. 117. № 1. P. 15-33.

206. Burgess I.C. Active adaptive sound control in a duct: a computer simulation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. V. 70. № 3. P. 715-726.
207. Cai C., Mak C.M. Noise control zone for a periodic ducted Helmholtz resonator system // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 140. № 6. P. EL471-EL477.
208. Cai C., Zhou J., Wang K., Xu D., Wen G. Metamaterial plate with compliant quasi-zero-stiffness resonators for ultra-low-frequency band gap // *J. Sound Vib.* 2022. V. 540. 117297.
209. Canevet G., Jessel M. Les absorbeurs acoustiques actifs // VII Intern. Congress on acoustics. Budapest. 1971. P. 337-340.
210. Cervenka M., Bednarik M. Optimized reactive silencers with narrow side-branch tubes // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 144. № 4. P. 2015-2021.
211. Celestinos A., Nielsen S. B. Controlled acoustic bass system (CABS) a method to achieve uniform sound field distribution at low frequencies in rectangular rooms // *J. Audio Eng. Soc.* 2008. V. 56. № 11. P.915-931
212. Chaitanya P, Munjal M.L. Effect of wall thickness on the end correction of the extended inlet and outlet of a double-tuned expansion chamber // *Appl. Acoust.* 2011.V. 72. № 1. P.41-51.
213. Chanaud RC. Effects of geometry on the resonance frequency of Helmholtz resonator // *J. Sound Vib.* 1994. V. 178. № 3. P. 337–348.
214. Chaplin G.B. Active attenuation of recurring sound. U.S. Patent No. 4,153,815. 1977.
215. Chen Y., Huang G., Zhou X., Hu G. Analytical coupled vibroacoustic modeling of membrane-type acoustic metamaterials: Membrane model // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 136. № 3. P. 969-979.
216. Clark R.L., Gibbs G.P., Saunders W.R. Adaptive structures, dynamics and control. New York: Wiley. 1998.
217. Cobo P., Pfretzchner J., Cuesta M., Anthony D.K. Hybrid passive-active absorption using micro perforated panels // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 4. P. 2118-2125.
218. Collet M., David P., Berthillier M. Active acoustical impedance using distributed electrodynamical transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. V. 125. № 2. P. 882-894.
219. Corsaro R.D., Houston B., Bucaro J.A. Sensor-actuator tile for underwater surface impedance control studies // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 102. № 3. P. 1573-1581.
220. Cox T.J., Davies W.J., Lam, Y.W. The sensitivity of listeners to early sound field changes in auditoria // *Acustica.* 1993. V. 79. P. 27-41.
221. Cox T.J., Kilpatrick A. A record “longest echo” within the Inchindown oil despository // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 137. № 3. P. 1602-1604.
222. Cremer L. Theory regarding the attenuation of sound transmitted by air in a rectangular duct with an absorbing wall, and the maximum attenuation constant produced during this process // *Acustica.* 1953. V. 3. P. 249-263.
223. Cuesta M., Cobo P. Active control of the exhaust noise radiated by an enclosed generator // *Appl. Acoust.* 2000. V. 61. P. 83-94.

224. Cuesta M., Cobo P. Optimization of an active control system to reduce the exhaust noise radiated by a small generator // *Appl. Acoust.* 2001. V. 62. P. 513-526.
225. Cummings A. The effects of a resonator array on the sound field in a cavity // *J. Sound Vib.* 1992. V.154. № 1. P.25–44.
226. Curtis A.R.D. A methodology for the design of feedback control systems for the active control of sound and vibration // *Proc. Active-97.* 1997. P. 851-860.
227. Curtis A.R.D., Nelson P.A., Elliott S.J. Active reduction of a one-dimensional enclosed sound field: An experimental investigation of three control strategies // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 85 № 5. P. 2265-2268.
228. Curtis A.R.D., Nelson P.A., Elliott S.J., Bullmore A.J. Active suppression of acoustic resonance // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 3. P. 624-631.
229. Davis A.M.J., Nagem R.J. Influence of viscosity on the diffraction of sound by a circular aperture in a plane screen // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 3. № 6. P. 3080-3090.
230. Dogra S., Gupta A. Design, Manufacturing, and Acoustical Analysis of a Helmholtz Resonator-Based Metamaterial Plate // *Acoustics.* 2021. V. 3. № 4. P. 630-641.
231. Du Y., Wu W., Chen W., Lin Y., Ghi Q. Control the structure to optimize the performance of sound absorption of acoustic metamaterial: A review // *AIP Advances.* 2021. V. 11. 060701.
232. Eghtesadi Kh., Leventhall H.G. Active attenuation of noise: The Chelsea dipole // *J. Sound Vib.* 1981. V. 75. № 1. P. 127-134.
233. Eghtesadi Kh., Leventhall H.G. Active attenuation of noise – The monopole system // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V.71. № 3. P. 608-611.
234. Elliott S.J. Signal processing for active control. London: Academic Press. 2001.
235. Elliott S.J., Curtis A.R.D., Bullmore A.J., Nelson P.A. The active minimization of harmonic enclosed sound fields. Part III: Experimental verification // *J. Sound Vib.* 1987. V. 117. № 1. P. 35-58.
236. Elliott S.J., Garsia-Bonito. Active cancellation of pressure and pressure gradient in a diffuse sound field // *J. Sound Vib.* 1995. V. 186. № 4. P. 696-704.
237. Elliott S.J., Joseph P., Bullmore A.J., Nelson P.A. Active cancellation at a point in a pure tone diffuse sound field // *J. Sound Vib.* 1988. V. 120. № 1. P. 183-189.
238. Elliott S.J., Joseph P., Nelson P.A., Johnson M. E. Active output minimization and power absorption in the active control sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 90. № 5. P. 2501-2512.
239. Elliott S.J., Nelson P.A., Stothers I.M., Boucher C.C. In-flight experiments on the active control of propeller-induced cabin noise // *J. Sound Vib.* 1990. V. 140. № 2. P. 219-238.

240. Emms G.M., Fox C. Control of sound transmission through an aperture using active sound absorption technique: a theoretical investigation // *Appl. Acoust.* 2001. V. 62. № 6. P. 735-747.
241. Eyring C.F. Methods of calculating the average coefficient of sound absorption // *J. Acoust. Soc. Am.* 1932. V. 4. P. 69-82.
242. Esfahlani H., Karkar S., Lissek H., Mosig J.R. Acoustic carpet cloak based on an ultrathin metasurface // *Phys. Rev. B.* 2016. V. 94. 014302.
243. Fahy F. J., Schofield C.A. Note on the interaction between a Helmholtz resonator and an acoustic mode of an enclosure // *J. Sound Vib.* 1980. V. 72. P. 365-378.
244. Ffowcs-Williams J.E. Anti-sound // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* 1984. V. 395. P. 63-88.
245. Felbacq D. Impedance operator description of a metasurface with electric and magnetic dipoles // *Math. Prob. Eng.* 2015. V. 2015. 473079.
246. Fitzroy D. Reverberation formula which seems to be more accurate with nonuniform distribution of absorption // *J. Acoust. Soc. Am.* 1959. V. 31. P. 893-897.
247. Ford R.D. Where does the power go? // *Proc. 11th Inter. Congr. Acoust. Paris.* 1983. P. 270-280.
248. Furstoss M., Thenail D., Galland M.A. Surface impedance control for sound absorption: Direct and hybrid passive/active strategies // *J. Sound and Vib.* 1997. V. 203. № 2. P. 219-236.
249. Galland M.A., Mazeaud B., Sellen N. Hybrid passive/active absorbers for flow ducts // *Appl. Acoust.* 2005. V. 66. № 6. P. 691-708.
250. Garcia-Bonito J., Elliott S.J. Local active control of diffracted diffuse sound fields // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V.98. № 2. P. 1017-1024.
251. Gautam A., Celik A., Azarpeyvand M. An Experimental and Numerical Study on the Effect of Spacing between Two Helmholtz Resonators // *Acoustics* 2021. V. 3. № 1. P. 97-117.
252. Ghaffarivardavagh R., Nikolajczyk J., Anderson S., Zhang X. Ultra-open acoustic metamaterial silencer based on Fano-like interference // *Phys. Rev. B.* 2019. V. 99. 024302.
253. Gao N., Zhang Z., Deng J., Guo X., Cheng B., Hou H. Acoustic metamaterials for noise reduction: A review // *Adv. Mater. Technol.* 2022. 2100698.
254. Guicking D., Karcher K. Active impedance control for one-dimensional sound // *ASME J. Vib. Acoust. Stress Reliability Des.* 1984. V. 106. P. 393-396.
255. Guicking D., Karcher K., Rollwage M. Coherent active methods for application in room acoustics // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 78. No. 4. P. 1426-1434.
256. Guicking D., Lorenz E. An active sound absorber with porous plate // *J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Design.* 1984. V. 106. P. 389-392.
257. Guo X., Lissek H., Fleury R. Improving sound absorption through nonlinear active electroacoustic resonators // *Phys. Rev. Applied.* 2020. V. 13. 014018.

258. Hanyu T. A theoretical framework for quantitatively characterizing sound field diffusion based on scattering coefficient and absorption coefficients of walls // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 128. P. 1140-1148.
259. Hanyu T., Hoshi K., Nakakita T. Method for measuring sound scattering coefficients of walls and diffusers by using a non-diffuse sound field with unevenly-distributed sound absorption // *Proc. INTER-NOISE*, August 21 – 24, 2016, Hamburg, Germany. P. 1022-1030.
260. Hargreaves T. J., Cox T. J., Lam Y. W., D'Antonio P. Surface diffusion coefficients for room acoustics: Free field measures // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V.108. P.1710–1720.
261. Helmholtz H. *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Berlin: J.A. Barth, 1882. V.1.
262. Heuchel F. M., Fernandez-Grande E., Agerkvist F. T., Shabalina E. Active room compensation for sound reinforcement using sound field separation techniques // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 143. № 3. P. 1346-1354.
263. Howarth T. R., Varadan V. K., Bao X., Varadan V.V. Piezocomposite coating for active underwater sound reduction // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. V. 91. № 2. P. 823-831.
264. Hu N., Utyuzhnikov S.V. Optimized nonlocal active sound control in frequency domain // *Appl. Acoust.* 2022. V. 187. 108506.
265. Hu Z., Yang C., Cheng L. Acoustic resonator tuning strategies for the narrowband noise control in an enclosure // *Appl. Acoust.* 2018. V. 134. P. 88-96.
266. Ingard U. On the radiation of sound into a circular tube, with an application to resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 1948. V. 20. № 5. P. 665–682.
267. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. № 6. P. 1037-1061.
268. Isermann R., Lachmann K.-H., Matko D. *Adaptive control systems*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1992.
269. Jakob A., Möser M. Active control of double-glazed windows. Part I: Feedforward control // *Appl. Acoust.* 2003. V. 64. P. 163-182.
270. Jakob A., Möser M. Active control of double-glazed windows. Part II: Feedback control // *Appl. Acoust.* 2003. V. 64. P. 183-196.
271. Jessel M. *Sur les absorbeurs actifs* // 6th Int. Cong. Acoust. Tokyo. 1968.
272. Jessel M. *Acoustique théorique*. 1973. Masson et Cie, Paris.
273. Jessel M., Mangiante G.A. Active sound absorbers in an air ducts // *J. Sound Vib.* 1972. V. 23. № 3. P. 383-390.
274. Johansson T. A., Kleiner M. Theory and experiments on the coupling of two Helmholtz resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. № 3. Pt. 1. P. 1315-1328
275. Jordan V.L., The application of Helmholtz resonator to sound absorption structure// *J. Acoust. Soc. Am.* 1947. V.19. № 6. P. 972-981.
276. Joseph P., Elliott S.J., Nelson P.A. Near field zones of quiet // *J. Sound Vib.* 1994. V. 172. № 5. P. 605-627.

277. Kabral R., Du L., Abom M. Optimum sound attenuation in flow ducts based on the “exact” Cremer impedance // *Acta Acust. united with Acust.* 2016. V.102. P. 851-860.
278. Kahle E. Halls without qualities – or the effect of acoustic diffusion // *Proc. Inst. Acoust.* 2018. V. 40. Pt. 3. P. 169-173.
279. Kanev N. Sound decay in a rectangular room with specular and diffuse reflecting surfaces // *Proc. Forum Acusticum*, June 27 – July 1, 2011, Aalborg, Denmark. P. 1935-1940.
280. Kanev N. Measurement of sound scattering coefficients of surfaces in a non-diffuse sound field: theoretical and experimental investigation // *Proc. of INTERNOISE 2017*, August 27-30, 2017, Hong Kong, China. P.2367-2378.
281. Kanev N. Adjustability of acoustic properties of surfaces at low frequencies by an array of active resonators // *Proc. Euronoise 2018*, May 28-31, 2018, Crete, Greece. P. 859-866.
282. Kanev N. Resonant vessels in Russian churches and their study in a concert hall // *Acoustics*. 2020. V. 2. № 2. P. 399-415.
283. Kanev N. Active damping of room eigenmodes // *Proc. of INTERNOISE 2020*, August 23-26, 2020, Seoul, Korea.
284. Kanev N. Study and improvement of acoustic conditions in public spaces of shopping malls // *Acoustics*. 2021. V. 3. P. 137-155.
285. Kanev N. Review of sixteen Pskov churches equipped with acoustic vessels // *Proc. of the 2nd Symposium: The Acoustics of Ancient Theatres*, July 6-8, 2022, Verona, Italy.
286. Kanev N. Resonant metasurfaces with a tangential impedance // *Acoustics*. 2022. V. 4. P. 903-914.
287. Kanev N., Fadeev A., Livshits A., Nechaev A., Peretokin A., Rodenkov V., Shirgina N. Acoustics of new and renovated chamber music halls in Russia // *Proc. Mtgs. Acoust.* 2017. V. 28. 015010.
288. Kanev N., Gladilin A. An active resonant absorber for flexural waves in a rod // *Proc. of 9th Conference on Active Noise and Vibration Control Methods MARDiH*, June 24-27, 2009, Krakow-Zakopane, Poland. P. 22-27.
289. Kanev N., Gladilin A., Mironov M.A. An active resonator for vibration absorption // *Proc. of ACTIVE 2009*, August 20-22, 2009, Ottawa, Canada. P. 461-471.
290. Kanev N., Mironov M. Passive and active dipole reflector for a narrow tube open end // *Proc. of Euronoise-2006. Acta Acust. united with Acust.* 2006. V. 92. Suppl. 1. P. 15.
291. Kanev N., Mironov M. Sound absorption by an active resonator in a tube and in an enclosure // *Proc. of 19th ICA*, September 2-7, 2007, Madrid, Spain.
292. Kanev N., Mironov M., Gladilin A. Robustness of a feedback active noise control // *Proc. of INTERNOISE 2010*, June 13-16, 2010, Lisbon, Portugal.
293. Kanev N., Mironov M., Gladilin A., Dogadov A. A new approach to active noise control: active resonators // *Proc. of 8th Conference on Active Noise*

and Vibration Control Methods MARDiH, June 11-14, 2007, Krakow-Krasiczin, Poland. P. 225-232.

294. Kang Z.X, Ji Z.L. Acoustic length correction of duct extension into a cylindrical chamber // *J. Sound Vib.* 2008. V. 310. № 4-5. P. 782-791.

295. Karal F.C. The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. № 2. P. 327-334.

296. Kemp J.D., Clark R.L. Noise reduction in a launch vehicle fairing using actively tuned loudspeakers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. № 4. P. 1986-1994.

297. Kestell C.D., Cazzolato B.S., Hansen C.H. Active noise control in a free field with virtual sensors // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 109. № 1. P. 232-243.

298. Kim S., Kim Y.H., Jang J.H. A theoretical model to predict the low-frequency sound absorption of a Helmholtz resonator array // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. V. 119. № 4. P. 1933-1936.

299. Klaus J., Bork I., Graf M., Ostermeyer G.-P. On the adjustment of Helmholtz resonators // *Appl. Acoust.* 2014. V. 77. P. 37-41.

300. Komkin A., Bykov A., Saulkina O. Evaluation of the oscillation velocity in the neck of the Helmholtz resonator in nonlinear regimes // *Acoustics* 2022. V. 4. P. 564-573.

301. Krüger J., Leistner P. Noise reduction with actively absorbing silencers // *Appl. Acoust.* 1997. V. 51. № 2. P. 113-120.

302. Kuttruff K.H. Sound decay in reverberation chambers with diffusing elements // *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. V.69. P.1716-1723.

303. Kuttruff H. *Room Acoustics*. Spon Press, London, 2000.

304. Langfeldt F., Gleine W., von Estorff O. An efficient analytical model for baffled, multi-celled membrane-type acoustic metamaterial panels // *J. Sound Vib.* 2018. V. 417. P. 359-375.

305. Langfeldt F., Riecken J., Gleine W., von Estorff O. A membrane-type acoustic metamaterial with adjustable acoustic properties // *J. Sound Vib.* 2016. V. 373. P. 1-18.

306. Lavrova M., Kanev N. Sound Scattering Properties of Surfaces with Diffusers // *MATEC Web of Conferences*. 2020. V. 320. 00024.

307. Lawther J.M., Rockwell T.H. Compensation technique for active damping improvement // *J. Acoust. Soc. Am.* 1965. V. 38. № 3. P. 481-482.

308. Li D., Cheng L. Acoustically coupled model of an enclosure and a Helmholtz resonator array // *J. Sound Vib.* 2007. V.305. №.1. P. 272–288.

309. Li D., Cheng L., Yu G.H. Noise control in enclosures: Modeling and experiments with T-shaped acoustic resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 122. № 5. P. 2615-2625.

310. Li Y., Liang B., Gu Z.M., Zou X.Y., Cheng J.C. Reflected wavefront manipulation based on ultrathin planar acoustic metasurfaces // *Sci. Rep.* 3. 2013. 02546.

311. Li J., Wang W., Xie Y., Popa B.-I., Cummer S.A. A sound absorbing metasurface with coupled resonators // *Appl. Phys. Lett.* 2016. V. 109. 091908.

312. Li J., Wen X., Sheng P. Acoustic metamaterials // *J. Appl. Phys.* 2021. V. 129. 171103.
313. Lim H., Utyuzhnikov S.V., Lam Y.W., Kelly L. Potential-based methodology for active sound control in three dimensional settings // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 136. № 3. P. 1101-1111.
314. Lim H., Utyuzhnikov S.V., Lam Y.W., Turan A. Multi-domain active sound control and noise shielding // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 129. № 2. P. 717-725.
315. Lissek H., Boulandet R., Fleury R. Electroacoustic absorbers: Bridging the gap between shunt loudspeakers and active sound absorption // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 129. № 5. P. 2968-2978.
316. Lu Z., Yu X., Lau S.-K., Khoo B.C., Cui F. Membrane-type acoustic metamaterial with eccentric masses for broadband sound isolation // *Appl. Acoust.* 2020. V. 157. 107003.
317. Lueg P. Process of silencing sound oscillations. U.S. Patent No. 2,043,416. 1936.
318. Luizard P., Katz B.F.G., Guastavino C. Perceptual thresholds for realistic double-slope decay reverberation in large coupled spaces // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 137. № 1. P. 75-84.
319. Ma F., Wang C., Liu C., Wu J. H. Structural designs, principles, and applications of thin-walled membrane and plate-type acoustic/elastic metamaterials // *J. Appl. Phys.* 2021. V.129. 231103.
320. Ma G., Yang M., Xiao S., Yang Z., Sheng P. Acoustic metasurface with hybrid resonances // *Nature Materials.* 2014. V. 13. P. 873-878.
321. Magalotti R., Cardinali V. Modal decay times in ducts and rooms // *Audio Eng. Soc. Conv.* 2019.
322. Mameshina D., Kanev N. Maximum damping of the lowest room eigenfrequency by a monopole // *MATEC Web of Conferences.* 2020. V. 320. 00026.
323. Mangiante G.A. Application du Huygens en acoustique unidimensionell. Realisation d'un anti-bruit, Centre de Recherches Physiques de Marseille. 1968.
324. Mangiante G.A. Active sound absorption // *J. Acoust. Soc. Am.* 1977. V. 61. № 5. P. 1516-1523.
325. Mangiante G.A. The mechanism of active sound absorption in a duct: Equivalent circuit analysis // *Proc. Internoise-2001.* Hague, Netherlands.
326. Martin V., Bodrero A. An introduction to the control of sound fields by optimising impedance locations on the wall of an acoustic cavity // *J. Sound. Vib.* 1997. V. 204. P. 331-357.
327. Mechel F.P. Notes on the radiation impedance, especially of piston like radiator // *J. Sound Vib.* 1998. V. 123. P. 537-572.
328. Mellow T., Karkkainen L. On the sound field of an oscillating disk in a finite open and closed circular baffle // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 118. № 3. P. 1311-1325.

329. Mironov M. The dipole resonator and dipole waveguide insulator in dense liquid medium // *Acoustics*. 2022. V. 4. № 2. P. 469-478.
330. Mortessagne F., Legrand O., Sornette D. Role of the absorption distribution and generalization of exponential reverberation law in chaotic rooms // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. P.154-161.
331. Mungur P., Gladwell G.M.L. Acoustic wave propagation in sheared fluid contained in duct // *J. Sound Vib.* 1969. V. 9. № 1. P. 28-48.
332. Nelson P.A., Curtis A.R.D., Elliott S.J. Optimal multipole source distribution for the active suppression and absorption of acoustic radiation // *Proc. Euromech. Colloq.* 1986. P. 213.
333. Nelson P.A., Curtis A.R.D., Elliott S.J., Bullmore A.J. The minimum power output of free field point sources and the active control of sound // *J. Sound Vib.* 1987. V. 116. № 3. P. 397-414.
334. Nelson P.A., Curtis A.R.D., Elliott S.J., Bullmore A.J. The active minimization of harmonic enclosed sound fields. Part I: Theory // *J. Sound Vib.* 1987. V. 117. № 1. P. 1-13.
335. Ntumy E.A., Utyuzhnikov S.V. Active sound control in 3D bounded regions // *Wave Motion*. 2014. V. 51. P. 284-295.
336. Ntumy E.A., Utyuzhnikov S.V. Active sound control in composite regions // *Appl. Num. Math.* 2015. V. 93. P. 242-253.
337. Ohnishi K., Saito S., Teranishi S. et al. Development of the product-type active soft edge noise barrier // *Proc. ICA'04. Tokyo*. 2004. V. II. P. 1041-1044.
338. Olson H.F. Electronic control of noise, vibration and reverberation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28. № 5. P. 966-972.
339. Olson H.F., May E.G. Electronic sound absorber // *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. № 12. P. 1130-1136.
340. Orduna-Bustamante F., Nelson P.A. An adaptive controller for the active absorption of sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. V. 91 № 5. P. 2740-2747.
341. Parkins J.W., Sommerfeld S.D., Tichy J. Narrowband and broadband active control in an enclosure using the acoustic energy density // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 108. № 1. P. 192-203.
342. Parkins J.W., Sommerfeld S.D., Tichy J. Error analysis of a practical energy density sensor // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 108. № 1. P. 211-222.
343. Pearce A.D. *Acoustics*. Acoustical Society of America, New York, 1989.
344. Peng X., Ji J., Jing Y. Composite honeycomb metasurface panel for broadband sound absorption // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 144. № 4. P. EL255-EL261.
345. Perrey-Debain E., Nennig B., Lawrie J.B. Mode coalescence and the Green's function in a two-dimensional waveguide with arbitrary admittance boundary conditions // *J. Sound Vib.* 2022. V. 516. 116510.
346. Petersen C.D., Zander A.C., Cazzolato B.S., Hansen C.H. A moving zone of quiet for narrowband noise in a one-dimensional duct using virtual sensing // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V.121. № 3. P. 1459-1470.

347. Piraux J., Nayroles B. A theoretical model for active noise attenuation in three-dimensional space // Proc. Internoise'80. 1980. P. 703-706.
348. Prato A., Casassa F., Schiavi A. Reverberation time measurements in non-diffuse acoustic field by the modal reverberation time // Appl. Acoust. 2016. V.110. P. 160-169.
349. Qiu X., Du L., Jing X., Sun X. The Cremer concept for annular ducts for optimum sound attenuation // J. Sound Vib. 2019. V. 438. P. 383-401.
350. Rayleigh. The theory of anomal dispersion // Phil. Mag. 1899. V. 48. P.151.
351. Remington P.J., Knight J.S., Hanna D., Rowley C. A hybrid active/passive exhaust noise control system for locomotive // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V.117. № 1. P. 68-78.
352. Rivet E., Karkar S., Lissek H. On the optimization of multi-degree-of-freedom acoustic impedances of low-frequency electroacoustic absorbers for room modal equalization // Acta Acust. united with Acust. 2017. V.103. P. 1025-1036.
353. Ross C.F. An algorithm for designing a broadband active sound control system // J. Sound Vib. 1982. V. 80. № 3. P. 373-380.
354. Roure A. Self-adaptive broadband active sound control system // J. Sound Vib. 1985. V. 101. № 3. P. 429-441.
355. Ryaben'kii V.S., Utyuzhnikov S.V. Active shielding model for hyperbolic equations // J. Appl. Math. 2006. V. 71. P. 924-939.
356. Ryaben'kii V.S., Utyuzhnikov S.V., Turan A. On the application of difference potential theory to active noise control // Adv. Appl. Math. 2008. V. 40. P. 194-211.
357. Sabine W.C. Collected Papers on Acoustics. Peninsula, Los Altos, CA, 1992.
358. Sakuma T. Approximate theory of reverberation in rectangular rooms with specular and diffuse reflections // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 132. P. 2325-2336.
359. Samejima T. A state feedback electro-acoustic transducer for active control of acoustic impedance // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V.113 № 3. P. 1483-1491.
360. Schwan L., Umnova O., Boutin C. Sound absorption and reflection from a resonant metasurface: Homogenisation model with experimental validation // Wave Motion. 2017. V. 72. P. 154–172.
361. Selamet A., Dickey N.S., Novak J.M. Theoretical, computational and experimental investigation of Helmholtz resonators with fixed volume: lumped versus distributed analysis // J. Sound Vib. 1995. V. 187. № 2. P. 358-367.
362. Sellmeier W. Ueber die durch die Aetherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien // Annal. Phys. Chem. 1873. 223. P. 386–403.

363. Shabalina E.D., Shirgina N.V., Shanin A.V. High-frequency modes in a two-dimensional rectangular room with windows // *Acoust. Phys.* 2010. V.56. № 4. P. 525-536.
364. Smith J.P., Johnson B.D., Burdisso R.A. A broadband passive-active sound absorption systems // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. V.106. № 5. P. 2646-2652.
365. Stell J.D., Bernhard R.J. Active control of sound in acoustic waveguides. Part I. Theory // *J. Sound Vib.* 1994. V. 173. № 2. P. 179-196.
366. Stell J.D., Bernhard R.J. Active control of sound in acoustic waveguides. Part II. Considerations for implementations in ducts // *J. Sound Vib.* 1994. V. 173. № 2. P. 197-215.
367. Sugimoto N., Horioka T. Dispersion characteristics of sound waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 197. № 3. P. 1446-1459.
368. Sum K.S., Pan J. Effects of the inclination of a rigid wall on the free vibration characteristics of acoustic modes in a trapezoidal cavity // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. V. 19. P.2201-2210.
369. Swinbanks M.A. The active control of sound propagation in long ducts // *J. Sound Vib.* 1973. V. 27. № 3. P. 411-436.
370. Tang P.K., Sirignano W.A. Theory of a generalized Helmholtz resonator // *J. Sound Vib.* 1973. V. 26. P. 247-262.
371. Tang S.K., Ng C.H., Lam E.Y.L. Experimental investigation of the sound absorption performance of compartmented Helmholtz resonators // *Appl. Acoust.* 2012. V. 73. № 9. P. 969-976.
372. Tartakovskii B.D., Knjazev A.S. Theoretical and experimental results on negative feedback systems for reduction of noise and vibration // 5th ICA. Liege. 1965.
373. Tester B. J. The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // *J. Sound Vib.* 1973. V. 27. № 4. P. 477-513.
374. Tester B. J. Ray models for sound propagation and attenuation in ducts, in the absence of mean flow // *J. Sound Vib.* 1973. V. 27. № 4. P. 515-531.
375. Tester B. J. The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform of “plug” flow // *J. Sound Vib.* 1973. V. 28. № 2. P. 151-203.
376. Thenail D., Galland E., Synyach M., Sunhack M. Active enhancement of the absorbent properties of a porous material // *Smart Mater. Struct.* 1994. V. 3. P. 18-25.
377. Trinder M.C.J., Nelson P.A. Active control in finite length ducts // *J. Sound Vib.* 1983. V. 89. № 1. P. 95-105.
378. Utyuzhnikov S.V. Active wave control and generalized surface potentials // *Adv. Appl. Math.* 2009. V. 43. P. 101-112.
379. Utyuzhnikov S.V. Real-time active wave control with preservation of wanted field // *J. Appl. Math.* 2014. V. 79. P. 1126-1138.
380. Valière J.-C., Prax C. Dependence of the internal geometry for the calculation of the Helmholtz frequency in an axisymmetrical acoustic resonator // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. V.150. № 6. P. 4053-4063.

381. Vasilyev M., Lavrova M., Kanev N. Experimental Study of Cubic, Pyramidal and Hemispherical Diffusers at Normal Sound Incidence // Proc. ISRA-2019, September 15 – 17, 2019, Amsterdam, Netherlands. P.209-215.
382. Vorländer M., Mommertz E. Definition and measurement of random incidence scattering coefficients // Appl. Acoust. 2000. V. 60. P.187–199.
383. Walther K. The upper limits for the reverberation time of reverberation chambers for acoustic and electromagnetic waves// J. Acoust. Soc. Am. 1961. V. 33. P. 127-136.
384. Wang H., Mao Q. Development and investigation of fully ventilated deep subwavelength absorbers // Symmetry. 2021. V. 13. P. 1835.
385. Wang M., Yi K., Zhu R. Tunable underwater low-frequency sound absorption via locally resonant piezoelectric metamaterials // J. Sound Vib. 2023. V. 548. 117514.
386. Wang S., Sun H., Pan J., Qiu X. Near-field error sensing for active directivity control of radiated sound // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 144. № 2. P. 598-607.
387. Wang S., Tao J., Qiu X., Burnett I.S. Performance of a planar virtual sound barrier at the baffled opening of a rectangular cavity // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 138. № 5. P. 2836-2847.
388. Wang S., Tao J., Qiu X., Burnett I.S. Improving the performance of an active staggered window with multiple resonant absorbers // J. Acoust. Soc. Am. 2022. V. 151. № 3. P. 1661-1671.
389. Wang W., Thomas P.J. Low-frequency active noise control of an underwater large-scale structure with distributed giant magnetostrictive actuators // Sensors and Actuators A. 2017. V. 263. P.113-121.
390. Wang X., Mak C.-M. Wave propagation in a duct with a periodic Helmholtz resonator array // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 131. № 2. P. 1172-1182.
391. Wang X., Zhu W., Zhou Y. Sound transmission in a duct with a side-branch tube array mounted periodically // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 139. № 6. P. EL202-EL208.
392. Webster A.G. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1919. V. 5. № 7. P. 275–282.
393. Widrow B., Stearns S.D. Adaptive signal processing. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1985.
394. Yang Z., Mei J., Yang M., Chan N.H., Sheng P. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 204301.
395. Young C.P., Sommerfeld S.D. Global attenuation of broadband noise fields using energy density control // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V.101. № 1. P. 350-359.
396. Yu G., Li D., Cheng L. Effect of internal resistance of a Helmholtz resonator on acoustic energy reduction in enclosures // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 124. № 6. P. 3534–3543.

397. Yuan J., Causal impedance matching for broadband hybrid noise absorption // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. № 6. P. 3226-3232.
398. Zhang Z., Boden H., Abom M. The Cremer impedance: An investigation of the low frequency behavior // *J. Sound Vib.* 2019. V. 459. 114844.
399. Zhang L., Xin F. Perfect low-frequency sound absorption of rough neck embedded Helmholtz resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2022. V. 151. № 2. P. 1191-1199.
400. Zhong J., Zhuang T., Kirby R., Karimi M., Zou H., Qiu X. Quiet zone generation in an acoustic free field using multiple parametric array loudspeakers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2022. V. 151. № 2. P. 1235-1245.
401. Zhou C., Utyuzhnikov S.V. Real-time active noise control with preservation of desired sound // *Appl. Acoust.* 2020. V. 157. 106971.
402. Zhou C., Utyuzhnikov S.V. Study of the nonlocal active sound control with preservation of desired field in time domain // *J. Acoust. Soc. Am.* 2020. V. 148. № 6. P. 3886-3899.
403. Zhu H., Rajamani R., Stelson K.A. Active control of acoustic reflection, absorption and transmission using thin panel speakers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. № 2. P. 852-870.
404. Zorumski W.E., Mason J.P. Multiple eigenvalues of sound absorbing circular and annular ducts // *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 55. № 6. P. 1158-1165.