ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО"

На правах рукописи

Пашин Дмитрий Сергеевич

Квантовая диссипативная динамика и эффекты переключения в сверхпроводниковых системах с джозефсоновскими переходами

Специальность 1.3.8 —
«физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к. ф.-м. н.
Бастракова Марина Валерьевна

Нижний Новгород — 2023

Оглавление

Стр.

Введение

Актуальность темы

Одними из перспективных направлений в области современных квантовых информационных технологий является разработка и развитие сверхпроводниковых квантовых цепей [1—3]. Благодаря использованию возможностей макроскопических квантовых эффектов в сверхпроводниках и нелинейных свойств джозефсоновских контактов данные системы успешно зарекомендовали себя в области квантовой электроники. На их основе уже созданы: сверхчувствительные сенсорные элементы, высокодобротные резонаторы, усилители, вплотную подходящие к квантовому пределу [2; 4], квантовые метаматериалы с уникальными электромагнитными свойствами [5], кубиты – базовые элементы для квантовых компьютеров [1; 6], первые прототипы алгоритмических квантовых процессоров [7; 8], а также разработаны первые нейрочипы [9]. Интерес к изучению подобных систем связан с их потенциальной возможностью использования как для квантовых вычислений, так и в области квантовой электродинамики цепей [1; 6].

Сверхпроводниковая платформа к настоящему времени является одним из лидирующих прототипов для построения на её основе универсального квантового компьютера, продемонстрировано "квантовое превосходство" – потенциальное преимущество квантового процессора перед его классическими аналогами [8], созданы квантовые симуляторы [10—12] для решения задач энергетической оптимизации, представлены первые протоколы по реализации квантовой коррекции ошибок [13; 14], разработаны подходы по квантовому машинному обучению для повышения скорости вычислений и хранения данных [15; 16]. Кроме этого, сверхпроводниковые устройства могут быть сильно связаны с электромагнитным полем, что открывает возможность для наблюдения в микроволновом диапазоне ряда интересных нелинейных квантовых эффектов [2; 4; 17], а также осуществлять гибкую настройку компонент схем, чтобы обеспечить как большие, управляемые нелинейности для быстрых квантовых операций, так и изоляцию от окружающей среды для надежной квантовой когерентности. Несомненно, данные научные и практические результаты, говорят о высокой перспективности и актуальности данной тематики исследований, однако несмотря на это остается ряд трудностей, связанных с проблемами масштабируемости, влиянием внешнего окружения – декогеренции, а также стоят задачи по совершенствованию и разработке новых топологий схем, способов оптимизации методов управления и измерений кубитов, совершенствованию методов по обработке квантовой информации.

Для масштабируемых квантовых вычислений и коррекции квантовых ошибок важным требованием является проведение высокоточных проективных измерений состояний кубитов на временах меньше, чем время потери когеренции в системе. В сверхпроводящих системах метод детектирования квантовых состояний обычно основывается на связи кубитов с классическим микроволновым резонатором (дисперсионное считывание) [1; 2; 6; 18]. При этом за счет связи с окружением происходит быстрый спонтанный распад кубитных состояний через резонатор (эффект Парселла). Для преодоления данных трудностей метода считывания требуется использование дополнительных фильтров Парселла [19; 20], которые дополнительно усложняют проектирование квантовых чипов. Другое перспективное направление развития методов дисперсионного считывания кубитов предполагает использование нелинейных элементов: многомодовых резонаторов [21; 22], джозефсоновских параметрических [23—25] и бифуркационных усилителей [26—33], большинство из которых функционирует на основе принципов бистабильного поведения джозефсоновского осциллятора.

В ранних работах [26; 27; 34; 35] было сделано существенное предположение, что измерительный прибор – низкодобротный бифуркационный усилитель – является сугубо классической системой и детектирует состояния кубита в сильно диссипативном режиме в присутствии шумов. При этом пренебрегается важным эффектом "перепутывания" состояний (*entanglement state*) кубита и измерительного осциллятора при возбуждении последнего, когда существенен эффект обратного влияния (*back-action*) измерительной системы на квантовые состояния, что в свою очередь сказывается на точность измерений кубитов. Дальнейшая модернизация схем на случай высокодобротных измерительных усилителей в микро волноводных линиях позволила продемонстрировать "однократные" измерения состояний трансмон кубитов с высокой точностью (*fidelity*) [29; 31]. Несмотря на значительный прогресс, случай измерения в слабо диссипативном режиме, когда необходимо рассматривать измерительный осциллятор мезоскопически и учитывать квантово-механические эффекты "перепутывания", влияния подсистем друг на друга при учете микроволнового транспорта остается мало изученным. Кроме этого, остается открытым вопрос по функционированию бифуркационного осциллятора в квантовом режиме работы, а именно изучение процесса захвата джозефсоновского осциллятора в одно из метастабильных состояний при большой добротности с учётом влияния окружения. Именно детальной проработке данных научных проблем и посвящена основная часть этой диссертационной работы. Отметим, что рассмотрение данных вопросов актуально для различных физических систем, например, для наномеханических высокодобротных резонаторов [36—39].

Другим не менее важным применением сверхпроводниковых схем является их использование при проектировании элементной базы искусственных нейронных сетей с минимальным энергопотреблением. Благодаря нелинейным свойствам джозефсоновских контактов удалось сформировать нейросетевые решения с требуемыми выходными характеристиками [40]. Заметим, что топология большинства данных схем схожа с устройством сверхпроводниковых кубитов [41], содержащих один или несколько джозефсоновских переходов. В связи с этим, интересной и актуальной задачей на сегодняшний день является изучение их функционирования при криогенных температурах в ультраквантовом режиме работы.

Интерес во всем мире к квантовым нейронным сетям продолжает стремительно расти – в частности компания Google и Лаборатория Квантового Искусственного Интеллекта НАСА (*NASA's Quantum Artificial Intelligence Lab*) используют принципы адиабатических квантовых вычислений для обработки и классификации большого объема данных и для машинного обучения. Важной составляющей частью успеха здесь стало использование радикально новой элементной базы для вычислительных систем, а именно — квантового симулятора от компании D-Wave на основе массивов связанных сверхпроводящих потоковых кубитов [11; 12]. Однако в этой области на границе квантовых и нейросетевых вычислений до сих пор не уделялось достаточного внимания анализу активационных функций нейронов, хотя в классических аналогах именно эта характеристика крайне важна как при обучении нейросетей, так и при работе уже обученных искусственных нейронных сетей. При этом также представляется перспективным использовать возможности сверхпроводниковой энергоэффективной адиабатической логики [42; 43], уже продемонстрировавшей возможности при моделировании динамики отдельных классических нейронов и синапсов [44; 45]. Таким образом, в данном направлении важной нерешенной научно-технической проблемой является разработка дизайна схемы энергоэффективной элементной базы для сверхпроводниковых нейроморфных сетей, способных функционировать в классическом и квантовом режимах при учете возможностей макроскопических квантовых эффектов и влияния окружения на нелинейную динамику систем.

Целью работы является аналитическое и численное исследование квантовой диссипативной динамики джозефсоновского бифуркационного измерительного осциллятора, разработка новых способов неразрушающего считывания состояний кубитов с минимальными потерями информации и создание энергоэффективной элементной базы для сверхпроводниковых квантовых нейроморфных сетей.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Теоретическое и численное исследование диссипативной динамики джозефсоновского бифуркационного осциллятора для классического и квантового режимов работы, а также изучение процессов захвата нелинейного осциллятора в одно из метастабильных состояний при большой добротности с учётом влияния окружения.
2. Разработка протокола проведения неразрушающего измерения суперпозиционного состояния кубита нелинейным джозефсоновским осциллятором. Анализ влияния измерительного прибора на процесс приготовления состояния кубита классическими микроволновыми импульсами Раби и однофотонным полем в линейном волноводе. Определение оптимальных параметров системы для выполнения однокубитных операций при учёте связи с резервуаром.
3. Изучение модифицированной схемы бифуркационного осциллятора в ультраквантовом режиме работы для реализации нейрона в составе многослойного персептрона. Аналитическое и численное моделирование поведения статических передаточных характеристик и особенности динамических процессов при конечной температуре термостата и эффектах диссипации, приводящих к разрушению когерентности состояний.

Научная новизна:

1. Доказана справедливость закона площадей для вероятности захвата в одно из состояний динамического равновесия для нелинейного джозефсоновского осциллятора при пересечении сепаратрисы.

2. Предложен оригинальный метод расчета квантовой диссипативной динамики системы под действием внешнего периодического поля, связанного с бозонным термостатом на примере джозефсоновского перехода. Впервые проведено обобщение теории захвата в динамические положения равновесия на квантовый случай и установлено, что вероятность захвата полностью определяется процессом прохождения уровней вблизи энергии, соответствующей классической сепаратрисе.
3. Предложен оригинальный метод неразрушающего измерения суперпозиционного состояния кубита на основе чувствительности вероятностей захвата нелинейного джозефсоновского осциллятора к малым внешним возмущениям. Такой метод может быть реализован в области параметров, когда нелинейный осциллятор демонстрирует бифуркационное поведение для двух базисных состояний кубита.
4. На основе метода неэрмитового эффективного гамильтониана впервые было изучено влияние измерительного осциллятора на микроволновой транспорт кубита в линейном волноводе. Показано, что с ростом среднего числа квантов начального состояния измерителя происходит смещение резонансной частоты кубита.
5. Предложена оригинальная схема для реализации квантового сверхпроводникового нейрона на основе модифицированного бифуркационного усилителя в ультраквантовом режиме. Найдены параметры схемы для реализации адиабатического переключения под действием внешнего магнитного потока. Показано, что адиабатический сверхпроводящий нейрон в составе многослойного персептрона может сохранять сигмоидальную форму функции активации в квантовом режиме.

Теоретическое и практическое значение:

1. Результаты выполненного исследования являются важными для понимания процесса квантовой релаксации многоуровневых систем, в том числе джозефсоновского перехода, который широко применяется в современных приборах, работающих на квантовых принципах.
2. На основе полученных результатов были найдены оптимальные параметры джозефсоновского перехода для использования его в качестве чувствительного датчика кубитных состояний. Продемонстрировано, что при управлении техникой Раби состоянием кубита в такой системе

невязка не превышает 10^{-3} при нахождении измерительного осциллятора в одном из его состояний равновесия.

3. Выработаны практические рекомендации и определены диапазоны характерных управляющих параметров для внешнего поля (скорости нарастания и спада адиабатического импульса, длительность воздействия) и значений индуктивных элементов схемы сверхпроводящего нейрона для формирования активационной функции сигмоидального вида в квантовом режиме.
4. Оригинальные научные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационных исследований, могут быть использованы при разработке новых способов управления регистрами кубитов микроволновыми фотонами в сверхпроводниковых волноводах и проведения анализа запутанных состояний многокубитного регистра с минимальными потерями информации, что является одной из основных тенденций развития технологии современных телекоммуникационных квантовых устройств памяти.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Вероятность захвата слабо диссипативного джозефсоновского осциллятора, работающего в бистабильной области параметров, в одно из состояний динамического равновесия пропорциональна площадям соответствующих областей притяжения, разделенных лепестками сепаратрисы в фазовом пространстве.
2. Захват в положения устойчивого динамического равновесия квантового джозефсоновского бифуркационного осциллятора не зависит от температуры резервуара и полностью определяется волновыми функциями состояний, располагающихся вблизи энергии классической седловой точки.
3. Чувствительность вероятностей захвата в положение устойчивого динамического равновесия бифуркационного джозефсоновского осциллятора к малым возмущениям позволяет осуществить неразрушающие квантовые измерения состояний кубита в области параметров, где существуют оба состояния динамического равновесия для каждой поляризации кубита.
4. Зависимость среднего выходного тока от внешнего потока в виде сглаженной трапеции в схеме квантового многослойного персептрона на

основе джозефсоновских контактов без резистивного шунтирования описывается функцией, среднеквадратичное отклонение которой от сигмоиды не превышает 10^{-4}.

Апробация работы. Изложенные в диссертации результаты обсуждались на семинарах ННГУ, ИФМ РАН, МГУ, МИСиС, ВНИИА, МИАН и докладывались на 23 конференциях, симпозиумах и научных школах, в том числе 15 международных:

– Всероссийская конференция с международным участием “Сверхпроводимость в наноструктурах 2023” (инновационный центр “Сколково”, Москва, 2023);

– 8th, 9th International School and Conference “Saint Petersburg OPEN 2021, 2022”on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures (Санкт-Петербург, 2021, 2022);

– Международная конференция “ФизикаА.СПб” (Санкт-Петербург, 2022);

– Международная конференция “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии” (Нижний Новгород, 2022);

– 5th International School on Quantum Technologies (Хоста, 2022);

– XXXIII Всероссийская школа-семинар “Волновые явления: физика и применения” имени А.П. Сухорукова (Московская область, Можайский район, д. Красновидово, 2022);

– Международные конференции “Микро- и наноэлектроника” (Москва, 2016, 2021);

– Всероссийская научная конференция с международным участием “Енисейская фотоника — 2020” (Красноярск, 2020);

– The Fifth International Conference on Quantum Technologies (Moscow, 2019);

– International Conference on Statistical Physics (Buenos Aires, Argentina, 2019);

– From Foundations of Quantum Mechanics to Quantum Information and Quantum Metrology & Sensing “Quantum 2019” (Turin, Italy, 2019);

– XVIII Научная школа “Нелинейные волны 2018” (Нижний Новгород, 2018);

– XXII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII международные симпозиумы “Нанофизика и наноэлектроника” (Нижний Новгород, 2018, 2020, 2021, 2022, 2023);

– The International Conference “Supercomputer Simulations in Science and Engineering” (Moscow, 2016);

– Конференции на базе расширенных научных семинаров “Методы суперкомпьютерного моделирования” (Таруса, 2015, 2016);

– XX Нижегородской сессии молодых ученых. Естественные, математические науки. (Нижний Новгород, 2015).

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Результаты, полученные аналитическими и численными методами, согласуются друг с другом и не противоречат имеющимся в литературе данным. Правильность выводов и согласованность полученных результатов неоднократно подтверждались при апробации работы.

Личный вклад. Автором внесен определяющий вклад в получение основных результатов диссертационной работы: принимал активную роль в постановке задач, проводил аналитические расчеты и численное моделирование, принимал активное участие в обсуждении полученных результатов и в подготовке работ к печати.

Результаты, составившие содержание диссертации, использовались при выполнении работ по грантам, где соискатель выступал в роли исполнителя: РФФИ № 18-07-01206-а, № 3.3026.2017/ПЧ в рамках государственного задания Минобрнауки ВУЗам, РНФ № 18-72-00158, РФФИ № 20-07-00952-а, РНФ № 22-72-10075.

Автор в 2017 году проходил стажировку на кафедре физики Государственного университета Чоннам, Кванджу, Республика Южная Корея. Проходил повышение квалификации в 2019 г. в ННГУ по программе дополнительного профессионального образования “Высокопроизводительные вычисления и искусственный интеллект”, а в 2022 г. в МИСиС по программе “Квантовая оптика и коммуникации”.

В результате работы над диссертацией была получена государственная регистрация программы для ЭВМ “Программный компонент моделирования диссипативной квантовой динамики в многоуровневых квантовых системах”, № 2022668792, авторы Д.С. Пашин, П.В. Пикунов, М.В. Бастракова, Н.В. Клёнов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 28 печатных изданиях, 7 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 21— в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 128 страниц и включает 45 рисунков. Список литературы содержит 141 наименование.

Глава 1. Нелинейная динамика бифуркационного джозефсоновского перехода. Квантовая формула Арнольда

В последние годы на основе джозефсоновских переходов (джозефсоновских контактов) удалось реализовать высокодобротные резонаторы и сверхпроводниковые кубиты, являющиеся ключевыми элементами современных квантовых технологий [29; 44; 46—52]. Как известно, физика эффекта Джозефсона основана на явлении сверхпроводимости, которая по природе является квантовым эффектом. Вместе с тем, туннельный ток и разность фаз контакта могут рассматриваться как классические переменные и описываются классическими уравнениями движения, поскольку они испытывают малые квантовые флуктуации [53]. На языке эквивалентной схемы джозефсоновский контакт сводится к последовательно соединенной емкости и нелинейной индуктивности, что позволяет трактовать переход как нелинейный осциллятор. Для наблюдения динамических эффектов джозефсоновский осциллятор запитывается переменным током. В классическом приближении динамику осциллятора можно интерпретировать как движение фазы по гамильтоновой поверхности, причем при определенных параметрах в системе происходит бифуркация и возникает сепаратриса, которая разделяет два устойчивых положения равновесия [54; 55]. Поскольку такие устойчивые состояния хорошо различимы на эксперименте, то на основе таких джозефсоновских переходов создаются усилители [26; 30; 33; 56]. Динамика такой системы вблизи точки бифуркации очень чувствительна и слабое возмущение может существенно изменить вероятность захвата в одно из устойчивых положений равновесия.

Впервые задача о нетривиальной динамике электронов со сложным законом дисперсии вблизи сепаратрисы рассматривалась в работе И.М. Лифшица [57]. Как известно, в импульсном пространстве траектория электрона в магнитном поле расположена в сечении ферми-поверхности плоскостью, перпендикулярной магнитному полю. В металлах со сложным законом дисперсии может реализоваться ситуация, когда сечение ферми-поверхности содержит седловую точку, разделяющую две петли сепаратрисы. В этом случае при учете малых возмущений траектории прохождение электроном седла может привести к сложному стохастическому движению, которое целесообразно описывать на вероятностном языке. В работе [57] показано, что вероятность попадания электрона в ту или иную область равновесия, то есть проникновение в области петель, пропорциональна площади фазового пространства, охватываемого петлями сепаратрисы. Выдвинутая идея получила дальнейшее развитие и нашла широкое применение в работах по нелинейной динамике [58—60]. Стохастическое поведение системы при затухании в фазовых джозефсоновских контактах экспериментально было проверено относительно недавно [61; 62], где джозефсоновские переходы работали в классическом режиме. Отметим, что рассмотрение вероятностной формулировки в задачах квантовой динамики встречается редко.

Хорошо известно, что задача о квантовой динамике джозефсоновского перехода при относительно малом токе может быть сформулирована в терминах осциллятора Дуффинга [63]. Внешний ток добавляет зависящий от времени член к потенциальной энергии, что делает эффективный гамильтониан неавтономным. Нелинейный осциллятор Дуффинга, управляемый зависящей от времени периодической силой, широко изучались в задачах нелинейной динамики. Например, появились ряд работ [54; 64—66], где сообщалось, что флуктуации, связанные со связью системы с резервуаром, приводят к переключению между устойчивыми состояниями динамического равновесия, а также подробно было изучено явление туннелирования между ними [55; 67—70]. Однако большинство работ были основаны на квазиклассическом приближении.

В данной главе будет рассмотрен вопрос о вероятности захвата джозефсоновского осциллятора в одно из устойчивых квазистационарных состояний в классическом и квантовом режимах. Ранее эта задача изучалась при движении заряженных частиц в электромагнитном поле [57]. Она была строго сформулирована в рамках классической механики В. И. Арнольдом [71] и известна как задача Арнольда в нелинейной динамике [58; 59; 72]. Стохастическое поведение системы при затухании в фазовых джозефсоновских контактах экспериментально было проверено относительно недавно [61; 62], где джозефсоновские переходы работали в классическом режиме.

1.1 Классическая задача Арнольда

В данном подразделе представлена оригинальная задача Арнольда, в которой рассматривается частица с массой m в стационарном двухъямном потенциале [71]. Движение частицы подчиняется уравнение движения в фазовом пространстве:

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \text{ и } \dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} - \gamma p, \tag{1.1}$$

где $V(x)$ представляет собой потенциальную энергию и γ - коэффициент затухания.

Сепаратриса представляет собой фазовый портрет частицы с энергией, совпадающей с максимальной энергией ($\equiv V_0$) центрального барьера в двухъямном потенциале при отсутствии диссипации $\gamma \to 0$. Такая сепаратриса изображена на рис.1.1, где точка пересечения соответствует точке неустойчивого равновесия. Сепаратриса определяет границу в фазовом пространстве, разделяя различные начальные условия при наличии диссипации: 1) состояния с начальными условиями вне сепаратрисы пересекут одну из её ветвей; 2) состояния с начальными условиями внутри сепаратрисы будут релаксировать к соответствующему устойчивому состоянию равновесия.

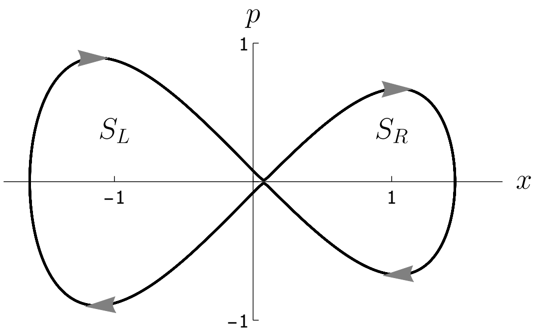

Рисунок 1.1 — Сепаратриса в двухъямном потенциале в фазовом пространстве с двумя устойчивыми центрами, разделенными неустойчивой точкой равновесия; S_L и S_R обозначают области, ограниченные левой и правой петлями соответственно и стрелки показывают направление движения.

В пределе малой диссипации можно рассчитать изменение энергии при движении по траектории близкой к сепаратрисе до линейного порядка по γ как

$$\Delta H = -\gamma \int p\dot{x}dt \to -\gamma \oint pdx = -\gamma(S_L + S_R). \tag{1.2}$$

Если частица начинает свое движение из случайно выбранной фазовой точки вне сепаратрисы, она в конечном итоге пересечет сепаратрису под действием диссипации и случайным образом войдет в область одного из бассейна притяжения. Известно, что вероятность захвата в один из бассейнов притяжения пропорциональна изменению энергии вдоль соответствующей гомоклинической траектории [72]. А значит вероятность P_α, что частица упадет в левое (L) или правое (R) состояние равновесия будет пропорциональна площади области ограниченной соответствующей петлей сепаратрисы S_L или S_R. Получившуюся вероятность P_α будем называть формулой Арнольда

$$P_\alpha = \frac{S_\alpha}{S_L + S_R}, \quad \alpha = L,\, R, \tag{1.3}$$

которая, очевидно, не зависит от коэффициента затухания.

1.2 Резистивная модель джозефсоновского перехода с резонансным внешним током

Джозефсоновский переход макроскопически описывается током проходящем через него

$$I = I_c \sin\varphi,$$

где φ — разность фаз на контакте или просто фаза джозефсоновского перехода, а I_c - критический ток. Второе соотношение Джозефсона связывает напряжение на контакте и разность фаз:

$$V = \Phi_0 \dot{\varphi},$$

где $\Phi_0 = \hbar/(2e)$ редуцированный квант магнитного потока. Классический гамильтониан для джозефсоновского перехода в присутствии внешнего тока I_{ex} может быть записан как

$$H = \frac{1}{2} C(\Phi_0 \dot{\varphi})^2 - E_J^R \cos\varphi - \Phi_0 I_{ex} \varphi. \tag{1.4}$$

Первое слагаемое в (1.4) является зарядовой энергией $\frac{1}{2}CV^2$ в переходе; где C — емкость джозефсоновского контакта. Второе слагаемое в (1.4) представляет собой так называемую энергию джозефсоновской связи, где $E_J^R = I_c\Phi_0$

— энергия Джозефсона. Последнее слагаемое описывает внешнее управление током $I_{ex}(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Этот гамильтониан может быть рассмотрен как функция двух канонически сопряженных переменных, φ и $p_\varphi = C\Phi_0^2\dot{\varphi}$, то есть $H = H(\varphi, p_\varphi)$. Уравнения Гамильтона можно записать как

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{C\Phi_0^2} p_\varphi, \\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -E_J \sin\varphi + \Phi_0 I_{ex},
\end{aligned}$$

из которых легко получить уравнение движения для фазы φ:

$$C\Phi_0^2\ddot{\varphi} + E_J^R \sin\varphi = \Phi_0 I_{ex}.$$

Для учета диссипации, согласно [73], мы вставим в это уравнение нормальный (омический) ток $I_N = \frac{1}{R}V$, где R — сопротивление контакта в нормальном состоянии и получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{RC}\dot{\varphi} + \frac{E_J^R}{C\Phi_0^2}\sin\varphi = \frac{1}{\Phi_0 C} I_{ex}. \tag{1.5}$$

Обозначим коэффициент затухания и собственную частоту джозефсоновского контакта как

$$\gamma \equiv \frac{1}{RC}, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{E_J^R}{C\Phi_0^2}} \tag{1.6}$$

и введем безразмерные переменные:

$$\tau \equiv \omega_0 t, \quad \bar{\gamma} \equiv \frac{\gamma}{\omega_0}, \quad \bar{I}_0 \equiv \frac{I_0}{I_c}, \qquad \bar{\omega} \equiv \frac{\omega}{\omega_0}.$$

После чего можно переписать уравнение (1.5) в безразмерном виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \bar{\gamma}\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = \bar{I}_0 \cos(\bar{\omega}\tau),$$

который представляет собой нелинейный затухающий гармонический осциллятор с накачкой. В случае малости фазы контакта можно разложить $\sin\varphi$ до кубического члена. Тогда уравнение движения становится уравнением Дуффинга:

$$\ddot{\varphi} + \bar{\gamma}\dot{\varphi} + \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 = \bar{I}_0 \cos(\bar{\omega}\tau). \tag{1.7}$$

Для изучения диссипативной динамики полезно перейти от переменной фазы φ к новым переменным синфазной (q) и квадратурной (p) по отношению к осциллятору [26; 74]. Перейдем к новым переменным $(\varphi,\dot{\varphi}) \to (q,p)$:

$$\varphi = q\cos(\bar{\omega}\tau) + p\sin(\bar{\omega}\tau), \tag{1.8}$$
$$\bar{\omega}^{-1}\dot{\varphi} = -q\sin(\bar{\omega}\tau) + p\cos(\bar{\omega}\tau). \tag{1.9}$$

Второе выражение накладывает дополнительное условие:

$$\dot{q}\cos(\bar{\omega}\tau) + \dot{p}\sin(\bar{\omega}\tau) \equiv 0. \tag{1.10}$$

Для получения уравнения движения для новых канонических переменных p и q, возьмем производную по времени уравнения (1.9) с учетом дополнительного ограничения (1.10). Следовательно, мы получаем

$$\ddot{\varphi} = \bar{\omega}(-\dot{q}\sin(\bar{\omega}\tau) + \dot{p}\cos(\bar{\omega}\tau)) - \bar{\omega}^2\varphi,$$

после подстановки в уравнение (1.7):

$$-\dot{q}\sin(\bar{\omega}\tau) + \dot{p}\cos(\bar{\omega}\tau) = \frac{1}{\bar{\omega}}\left(\bar{I}_0\cos(\bar{\omega}\tau) + (\bar{\omega}^2 - 1)\varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 - \bar{\gamma}\dot{\varphi}\right).$$

Используя здесь выражения (1.8) и (1.9) для φ и $\dot{\varphi}$, можно решить это уравнение совместно с уравнением (1.10) относительно $\dot{p}$ и $\dot{q}$:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}\dot{p} &= \bar{I}_0\cos^2(\bar{\omega}\tau) + (\bar{\omega}^2 - 1)\left\{q\cos^2(\bar{\omega}\tau) + p\sin(\bar{\omega}\tau)\cos(\bar{\omega}\tau)\right\}\\
&+ \frac{1}{6}\left\{q^3\cos^4(\bar{\omega}\tau) + p^3\cos(\bar{\omega}\tau)\sin^3(\bar{\omega}\tau) + 3q^2p\cos^3(\bar{\omega}\tau)\sin(\bar{\omega}\tau)\right.\\
&+ \left.3qp^2\cos^2(\bar{\omega}\tau)\sin^2(\bar{\omega}\tau)\right\} - \bar{\gamma}\bar{\omega}\left\{-q\sin(\bar{\omega}\tau)\cos(\bar{\omega}\tau) + p\cos^2(\bar{\omega}\tau)\right\},\\
\bar{\omega}\dot{q} &= -\bar{I}_0\cos(\bar{\omega}\tau)\sin(\bar{\omega}\tau) - (\bar{\omega}^2 - 1)\left\{q\cos(\bar{\omega}\tau)\sin(\bar{\omega}\tau) + p\sin^2(\bar{\omega}\tau)\right\}\\
&- \frac{1}{6}\left\{q^3\cos^3(\bar{\omega}\tau)\sin(\bar{\omega}\tau) + p^3\sin^4(\bar{\omega}\tau) + 3q^2p\cos^2(\bar{\omega}\tau)\sin^2(\bar{\omega}\tau)\right.\\
&+ \left.3qp^2\cos(\bar{\omega}\tau)\sin^3(\bar{\omega}\tau)\right\} + \bar{\gamma}\bar{\omega}\left\{-q\sin^2(\bar{\omega}\tau) + p\cos(\bar{\omega}\tau)\sin(\bar{\omega}\tau)\right\}.
\end{aligned}$$

Все слагаемые, зависящие от времени, осциллируют с частотой равной или кратной $2\bar{\omega}$. Усредним полученные уравнения по половине периода внешней силы $\pi/\bar{\omega}$. Данное аппроксимация называется приближением медленно меняющихся амплитуд. В результате явно зависящие от времени слагаемые занулятся:

$$\dot{p} = -\alpha q + \beta q(q^2 + p^2) + f - \frac{\bar{\gamma}}{2}p, \tag{1.11}$$
$$\dot{q} = \alpha p - \beta p(q^2 + p^2) - \frac{\bar{\gamma}}{2}q, \tag{1.12}$$

где коэффициенты определены как

$$\alpha \equiv \frac{1-\bar{\omega}^2}{2\bar{\omega}}, \quad \beta \equiv \frac{1}{16\bar{\omega}}, \quad f \equiv \frac{\bar{I}_0}{2\bar{\omega}}.$$

Отметим, что появилось необычное для уравнений движения диссипативное слагаемое $-\frac{1}{2}\bar{\gamma}q$ в уравнение (1.12)

При этом уравнения (1.11) и (1.12) представляют собой уравнения движения в крупнозернистом приближении. Для дальнейшего анализа удобно перейти к эффективному гамильтониану, который генерирует консервативные части уравнений (1.11) и (1.12). При этом легко проверить, что эффективный гамильтониан представляет собой следующую функцию:

$$\tilde{H}(q,p) = \frac{\alpha}{2}(q^2+p^2) - \frac{\beta}{4}(q^2+p^2)^2 - fq, \tag{1.13}$$

где $\tilde{H}$ нормирован по отношению к энергии $E_{nor} \equiv \omega\omega_0 C\Phi_0^2$.

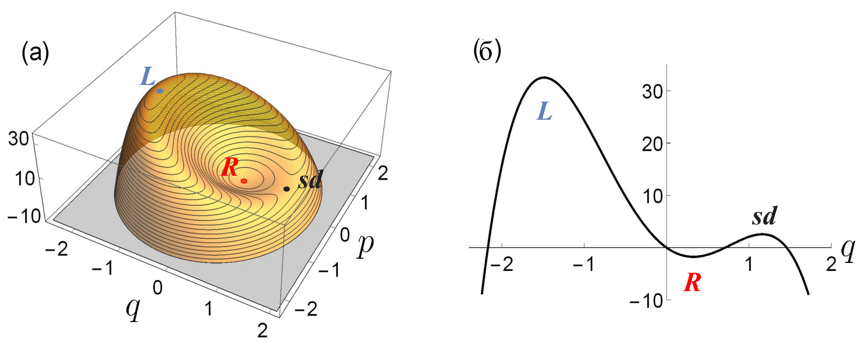

Рисунок 1.2 — Изображение квазиэнергетической поверхности: (а) Энергетическая поверхность $\tilde{E}(q,p)$, (б) Энергетический контур $\tilde{E}(q,p_{sd})$ при $p_{sd} = 0$, где амплитуда внешней силы $f = 0.04$, а энергия представлена в единицах $\hbar\omega_0$. Три фиксированные точки соответствуют состояниям равновесия с большой амплитудой (L-состояние), малой амплитудой (R-состояние) и седловой точки (sd).

Выражение (1.13) не может быть разделено на кинетическую и потенциальную энергию. Однако можно по-прежнему определять энергию системы как мгновенное значение функции Гамильтона, учитывая $q = q(t)$ и $p = p(t)$:

$$\tilde{E} \equiv \tilde{H}(q,p).$$

Отметим, что в результате приближения медленно меняющихся амплитуд, гамильтониан (1.13) не зависит от времени.

На рис.1.2(а) изображена энергетическая поверхность задаваемая гамильтонианом (1.13), где численные параметры для α и β были получены используя экспериментальные данные из статьи [26],

$$\alpha = 1.30 \times 10^{-1} \text{ и } \beta = 7.11 \times 10^{-2}.$$

Эти же параметры будут использованы при расчетах ниже. Для данной системы существует три точки равновесия и для всех из них $p = 0$: две точки являются устойчивыми L, R и одна является седловой точкой sd. Одна устойчивая точка равновесия L находится в глобальном максимуме энергетической поверхности рис.1.2(а) $(-1.49{,}0) \equiv (q_L{,}p_L)$, с энергией $\tilde{E}_L$. Вторая точка устойчивого равновесия R находится в локальном минимуме $(0.32{,}0) \equiv (q_R{,}p_R)$, с энергией $\tilde{E}_R$. Седловая точка sd имеет координаты $(q_{sd}{,}p_{sd}) = (1.16{,}0)$ и значение энергии $\tilde{E}_{sd}$. Все эти точки можно видеть на рис.1.2(б), где изображено сечение энергетической поверхности при $p = 0$, а все приведенные значения энергии даны в единицах $\hbar\omega_0$:

$$\tilde{E}_L = 33.1,\ \tilde{E}_{sd} = 2.60, \quad \tilde{E}_R = -1.79.$$

В дальнейшем будем называть точку $(q_L{,}p_L)$ как L-точка или левым положением равновесия и $(q_R{,}p_R)$ как R-точка или правым положением равновесия.

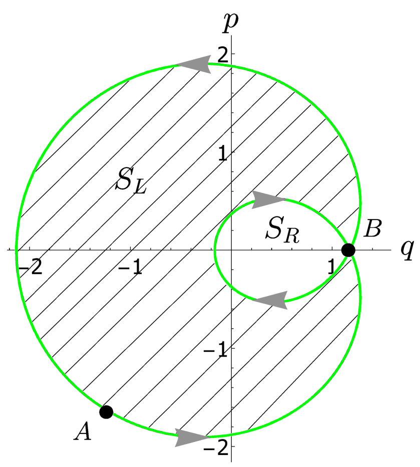

Рисунок 1.3 — Зеленая сепаратриса разделяет два устойчивых положения равновесия. L-точка находится внутри заштрихованной области с площадью S_L, а R-точка находится внутри внутренней гомоклинической орбиты (область внутри этой орбиты имеет площадь S_R). Седловая точка обозначена через B.

Рассмотрим уравнения (1.11) и (1.12) в приближении медленно меняющихся амплитуд, как уравнения Гамильтона с дополнительными диссипативными слагаемыми:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} - \frac{\bar{\gamma}}{2}p, \quad (1.14)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} - \frac{\bar{\gamma}}{2}q. \quad (1.15)$$

Отметим, что такое динамическое описание содержит не только обобщенную силу, но и обобщенную скорость, демонстрируя динамику в общей форме.

Как и в оригинальной задаче Арнольда, траектории, порожденные уравнениями (1.14) и (1.15), могут быть классифицированы относительно сепаратрисы, которая является траекторией на фазовой плоскости при отсутствии диссипации и при задании начальной энергии равной энергии седловой точки $\tilde{E}_{sd}$. На рис.1.3 зеленой линией изображена сепаратриса при тех же параметрах, которые использовались для построения рис.1.2. Она состоит из двух гомоклинических орбит, которые соединяют седловую точку с собой. Сепаратриса делит фазовую плоскость на три класса начальных состояний:
1) Фазовые точки внутри внутренней гомоклинической орбиты ограничены по энергии $\tilde{E}_R < \tilde{E} < \tilde{E}_{sd}$ и все они генерируют траектории, которые стремятся в правое положение равновесия независимо от коэффициента затухания;
2) Состояния заключенные между двумя гомоклиническими орбитами (заштрихованная область) обладают энергией $\tilde{E} > \tilde{E}_{sd}$ и могут релаксировать к обоим устойчивым состояниям равновесия в зависимости от коэффициента затухания;
3) Состояния, находящиеся вне сепаратрисы, имеют энергию меньшую энергии седловой точки $\tilde{E} < \tilde{E}_{sd}$. Эти начальные состояния так же могут релаксировать в любое состояние равновесия в зависимости от коэффициента затухания рис.1.4.

На рис.1.4 в качестве наглядного примера приведены две фазовые траектории с энергией начального состояния $\tilde{E}_0 = -1.84$, лежащей ниже седловой энергии $\tilde{E}_{sd}$. Видно, что диссипативная динамика частиц чувствительна к коэффициенту диссипации $\bar{\gamma} = 0.003$ и 0.007 (синяя и красные кривые), что приводит к захвату в правое или левое положение устойчивого равновесия. В противоположность, траектории, из области S_R на рис.1.3, всегда захватываются в правое положение равновесия независимо от затухания.

Для начала была численно изучена динамика захвата, когда начальные траектории выбирались вне сепаратрисы и внутри области S_L на рис.1.3. Для

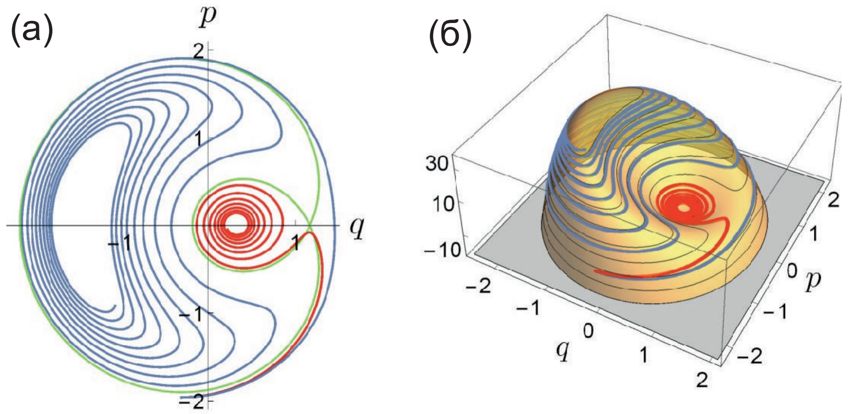

Рисунок 1.4 — (а) Синими и красными кривыми изображены фазовые траектории, стремящиеся к различным положениям равновесия при коэффициентах диссипации $\bar{\gamma} = 0.003$ и 0.007, соответственно. Начальное условие для двух траекторий $(q_0,p_0) = (-0.3, -1.96)$ выбрано вне сепаратрисы (зеленый цвет). (б) Наглядное представление этих же траекторий квазиэнергетической поверхности.

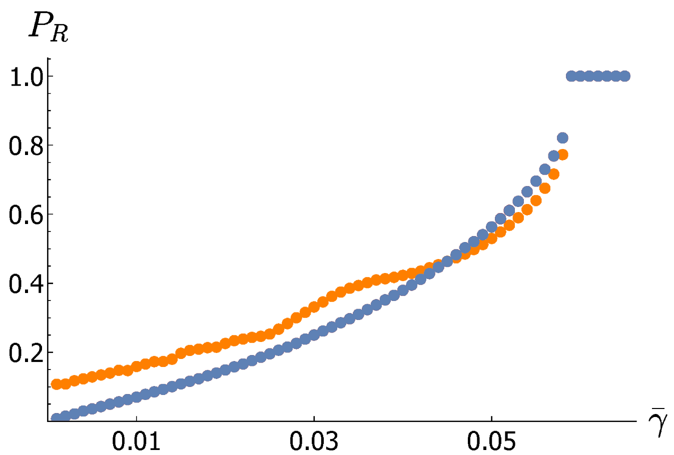

Рисунок 1.5 — Вероятность захвата системы внутрь области S_R на рис.1.3 как функция константы затухания при фиксированном токе; желтая — для начальных условий выбранных вне большой гомоклинической обиты; голубая — соответствует начальным условиям, выбранным внутри области S_L на рис.1.3.

этого выбрано 25000 начальных условий в каждой области и рассмотрена диссипативная динамика с заданным $\bar{\gamma}$ для постоянной силы $f = 0.04$, чтобы наблюдать число траекторий, которые притягиваются к точке R. Отношение числа траекторий, стремящихся к R-точке к полному числу начальных состояний, P_R, выбрана в качестве меры захвата в правое положение равновесия. Результат представлен на рис.1.5, где P_R принимает некоторое значение в интервале $0 < P_R < 1$ при затухании в интервале $0 < \bar{\gamma} < 0.06$. В предельном случае $\bar{\gamma} \to 0$, проявляется отличительное поведение для начальных состояний вне большой гомоклинической орбиты, заключающееся в том, что вероятность захвата в правое состояние равновесия стремится к конечному числу $P_R \doteq 0.10$. В противоположность этому, начальные траектории из области, соответствующей левому положению равновесия, S_L дают $P_R \to 0$, отражая невозможность перебросится в область S_R. В случае большого трения обе группы начальных условий дают $P_R \to 1$, отражая тот факт, что состояние джозефсоновского перехода в этом случае всегда захватывается в правое положение равновесия.

Обнаружив, что динамика для начальных состояний, находящихся вне большой гомоклинической орбиты, проявляет бистабильное поведение при сколь угодно малом коэффициенте затухания $\bar{\gamma} \to 0$, для решения задачи Арнольда в этом случае, необходимо определить вероятность захвата в каждое положение равновесия. Для изучения этого вопроса рассмотрим изменение энергии вдоль сегмента сепаратрисы при малом коэффициенте затухания ($\bar{\gamma} \ll 1$):

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{H} &= \int \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q}\dot{q} \right) d\tau \\ &= \int \left\{ (\dot{q} + \frac{\bar{\gamma}}{2}q)\dot{p} + (-\dot{p} - \frac{\bar{\gamma}}{2}p)\dot{q} \right\} d\tau \\ &= \frac{\bar{\gamma}}{2}\int (q\dot{p} - p\dot{q}) d\tau. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Хотя фазовые траектории не являются точно периодическими для рассматриваемой диссипативной динамики, мы можем считать, что в пределе малого затухания частица возвращается в начальную точку фазового пространства после одного оборота с ошибкой $O(\bar{\gamma})$. Соответственно, изменение энергии частицы вдоль внешней гомоклинической орбиты оценивается как

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{H}_{out} &= \frac{\bar{\gamma}}{2}\oint_{out}(qdp - pdq) = \frac{\bar{\gamma}}{2}\{(S_L + S_R) - (-(S_L + S_R))\} \\ &= \bar{\gamma}(S_L + S_R), \end{aligned} \tag{1.17}$$

где $S_{L,R}$ — площади, соответствующие левому и правому положениям равновесия и обозначены на рис.1.3. Аналогично, изменение энергии вдоль внутренней гомоклинической орбиты, рассчитывается как

$$\Delta\tilde{H}_{in} = \frac{\bar{\gamma}}{2}(-S_R - S_R) = -\bar{\gamma}S_R. \tag{1.18}$$

Таким образом, энергия увеличивается при движении частицы вдоль внешней петли сепаратрисы против часовой стрелки; в то время как при движении по часовой стрелке вдоль внутренней петли энергия убывает.

Выберем начальное состояние (q_0,p_0) вне сепаратрисы рис.1.3, с энергией $\tilde{E}_0 < \tilde{E}_{sd}$ и смоделируем его движение для небольшого коэффициента диссипации $\bar{\gamma}$. На рис.1.6 показана траектория до момента пересечения с сепаратрисой и видно, что она закручивается вокруг внешней гомоклинической орбиты против часовой стрелки. Траектория эволюционирует, постепенно уменьшая радиус, и в некий момент времени достигается значение энергии $\tilde{E}_{sd}$. В этом момент частица пересекает внешнюю гомоклиническую орбиту на фазовой плоскости и эта точка обозначена через A на рис.1.3. После момента пересечения части-

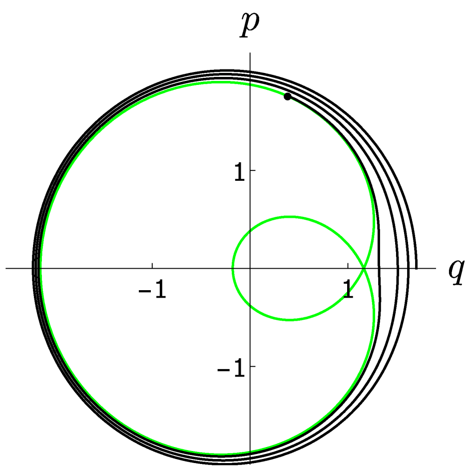

Рисунок 1.6 — Траектория в фазовом пространстве с начальными условиями вне сепаратрисы $(q_0,p_0) = (1.70{,}0)$ с энергией $\tilde{E}_0 = -7.9 < \tilde{E}_{sd}$ при $\bar{\gamma} = 0.001$; Зеленым цветом обозначена сепаратриса.

ца некоторое время следует вдоль внешней петли сепаратрисы и изменяет свое направление по часовой стрелке при движении вдоль внутренней петли. С течением времени, частица оказывается притянута либо в L-бассейн либо в R в зависимости от знака изменения энергии после пересечения сепаратрисы. На рис.1.7 представлены две различные траектории сразу после пересечения сепаратрисы, захваченные различными положениями устойчивого равновесия. Из рис.1.7(а) видно, что траектория с начальной точкой $(q_0,p_0) = (1.7{,}0)$ стремится к левому положению равновесия. С другой стороны, траектория с начальным состоянием $(q_0,p_0) = (-1.0, -1.87)$ стремится к правому положению равновесия и представлена на рис.1.7(б).

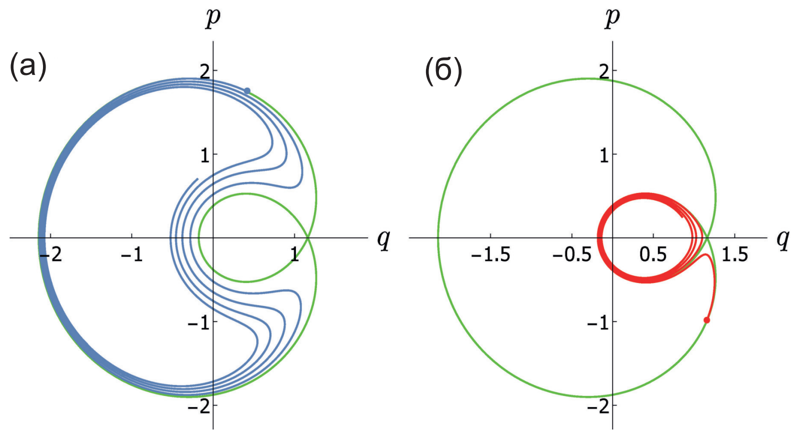

Рисунок 1.7 — Две различные траектории показанные сразу после пересечения траекторией внешней гомоклинической орбиты: (а) Начальное состояние $(q_0,p_0) = (1.70,0)$; (б) Начальное состояние $(q_0,p_0) = (-1,-1.87)$.

Далее проанализируем подробно динамику движения сразу после пересечения внешней гомоклинической линии в деталях. Отметим, что классическая задача Арнольда сформулирована для маленькой диссипации $\gamma \to 0$. При этом условии можно считать часть внешней гомоклинической орбиты в качестве приблизительной траектории движения частицы сразу после её пересечения. Для дальнейших рассуждений удобно обозначить через E_A энергию частицы в точке $A = (q_A, p_A)$ на рис.1.3, которая равна E_{sd}. После пересечения сепаратрисы частица непрерывно движется вдоль её внешней петли, увеличивая свою энергию за счет движения против часовой стрелки, и теряет энергию при движении вдоль внутренней петли сепаратрисы по часовой стрелке. Когда частица приближается к седловой точке, обозначенной через B на рис.1.3, её энергия становится равной

$$\tilde{E} = \tilde{E}_A + \delta\tilde{E}_{out} + \delta\tilde{E}_{in},$$

где $\delta\tilde{E}_{out} \equiv \delta\tilde{E}_{A\to B}$ представляет собой прирост энергии при движении вдоль части внешней петли сепаратрисы, а $\delta\tilde{E}_{in}$ представляет собой убыль энергии при движении вдоль внутренней петли сепаратрисы, которая равна $-\bar{\gamma}S_R$ из (1.18). Если $\delta\tilde{E}_{out} > |\delta\tilde{E}_{in}|$, то энергия частицы после полного оборота вокруг внутренней петли превышает энергию в седловой точке $\tilde{E}_{sd}$. В таком случае частица будет оставаться в области S_L и стремиться к левому положению равновесия со временем. Такая ситуация показана на рис.1.7(а). с другой стороны если $\delta\tilde{E}_{out} < |\delta\tilde{E}_{in}|$, то полное изменение энергии $\delta\tilde{E}_{in} + \delta\tilde{E}_{out}$ становится отрицательным и итоговая энергия после полного оборота вокруг внутренней петли сепаратрисы становится меньше, чем энергия седловой точки $\tilde{E}_{sd}$. При этом частица будет продолжать терять энергию, двигаясь по часовой стрелке и останется в области S_R, стремясь к правому положению равновесия рис.1.7(б). Из проведенного анализа можно сделать вывод, что все траектории возможно разделить по расположению точки пересечения внешней гомоклинической орбиты относительно A_c, в которой достигается равенство $\delta\tilde{E}_{out} + \delta\tilde{E}_{in} = 0$ и можно получить, что $\delta\tilde{E}_{A_c\to B} = \bar{\gamma}S_R$. Траектории, для которых точка пересечения внешней петли сепаратрисы находится на нижнем сегменте $(A_c \to B)$ будет захвачена в правое положение равновесия, так как $\delta\tilde{E}_{out} + \delta\tilde{E}_{in} < 0$. Соответственно, для тех траекторий, которые входят в верхний сегмент $(B \to A_c)$ будет выполнятся неравенство $\delta\tilde{E}_{out} + \delta\tilde{E}_{in} > 0$ и они будут захвачены в левое положение равновесия. С другой стороны изменение энергии при движении вдоль целой внешней гомоклинечекой орбиты $B \to A_c$ и $A_c \to B$ равняется $\Delta\tilde{H}_{out} = \bar{\gamma}(S_L + S_R)$ согласно (1.17). От сюда можно найти, что изменение энергии $\delta\tilde{E}_{B\to A_c}$ равняется $\bar{\gamma}S_R$. Известно, что вероятность для частицы пересечь любой сегмент сепаратрисы пропорциональна соответствующему изменению энергии [72]. Таким образом, вероятность того, что частица пересечет один из сегментов внешней гомоклинической орбиты пропорциональна площади соответствующей области сепаратрисы S_L или S_R:

$$P_\alpha = \frac{\bar{\gamma}S_\alpha}{\bar{\gamma}(S_L + S_R)} \to \frac{S_\alpha}{S_L + S_R}, \quad \alpha = L,\, R;$$

которая в точности совпадает с классической формулой Арнольда (1.3).

Таким образом, приведенный выше анализ показал, что для диссипативной динамики джозефсоновского осциллятора справедлива формула Арнольда (1.3): вероятность частицы с начальными условиями вне сепаратрисы быть захваченной в одно из состояний равновесия пропорциональна площади фазового пространства, заметаемой соответствующей гомоклинической петлей.

1.3 Модель обрезанных петель сепаратрисы

Как было понято из проведенного анализа в предыдущем разделе, важным моментом является исследование процессов захвата в одно из положений равновесия для дальнейшего рассмотрения случая квантовой диссипативной динамики. В связи с этим, прежде чем рассмотреть квантовый режим работы джозефсоновского бифуркационного осциллятора нами детально рассмотрена модифицированная задача Арнольда для случая двухъямного потенциала. При этом были сохранены все основные черты модели: наличие двух ям и сепаратрисы рис.1.8 (а) и (б). Упрощение будет состоять в том, что в разрешенной области изменения координаты имеется явное выражение для потенциала, что позволит получить аналитические формулы для фазовых интегралов (адиабатических инвариантов). Фактически, мы удаляем несущественные части – куски петель сепаратрисы, сохраняя седловую точку, которая и обусловливает сложное поведение траекторий частицы в яме.

Рассмотрим движение частицы в поле, изображенном на рис.1.8(а) и описываемым выражением:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & -a \leqslant x \leqslant b, \\ \infty, & x < -a, x > b. \end{cases} \tag{1.19}$$

Легко увидеть, что сепаратриса для такого потенциала представляет собой фигуру из прямых линий $p = \pm m\omega x, -a \leqslant x \leqslant b$, см. рис.1.8(б). А левая и правая площади, ограниченные сепаратрисами, определены простыми выражениями: $S_L = \frac{m\omega a^2}{4}$ и $S_L = \frac{m\omega b^2}{4}$. Следовательно, в рассматриваемой задаче вероятности захвата в левую и правую ямы равны, соответственно $P_L = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ и $P_R = \frac{b^2}{a^2+b^2}$.

В отсутствии трения траектории частицы с энергией вблизи сепаратрисы сильно неустойчивы. На рис.1.8 (в) и (г) показано “разбегание” траекторий, что оправдывает для описания динамики введение меры [57; 71] — вероятности попадания траектории в выбранную ячейку фазового пространства.

1.3.1 Расстояние между уровнями. Приближение широкой ямы

Квантовым аналогом рассмотренной выше задачи (без трения) будет система, описываемая уравнением Шрёдингера:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \tag{1.20}$$

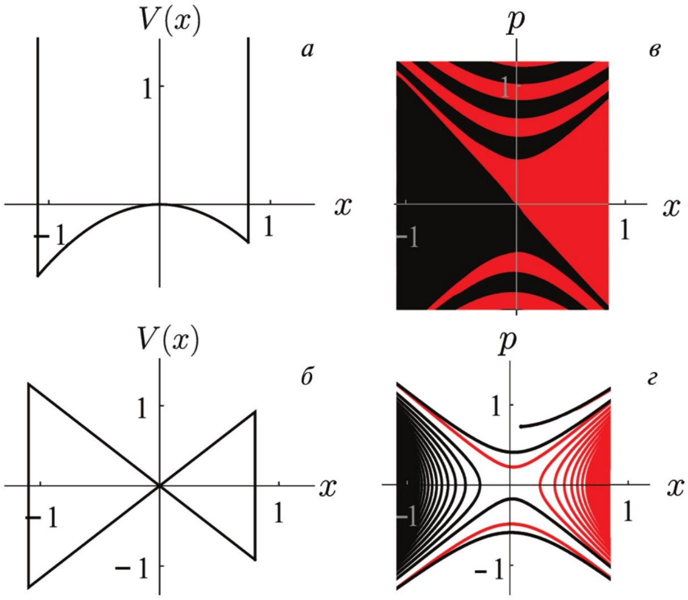

Рисунок 1.8 — (а) Пример двухъямного потенциала. (б) Сепаратриса на фазовой плоскости. (в) Фазовая плоскость для рассматриваемой системы с диссипацией. Черным цветом показано множество начальных точек, при котором частица стремится в левое положение равновесия, красным цветом – в правое. (г) Две типичные траектории с одинаковыми начальными условиями, которые стремятся из-за теплового шума к разным состояниям равновесия.

где потенциал $V(x)$ определяется выражением (1.19) и схематично изображен на рис.1.8 (а). Ниже представим результаты численного решения и сопоставим результаты с точным решением и квазиклассическим анализом.

Согласно правилу квантования Бора — Зоммерфельда [75] расстояние между уровнями может быть найдено из соотношения:

$$\Delta E_n = S(E_{n+1}) - S(E_n) = \frac{2\pi\hbar}{T(E_n)}, \tag{1.21}$$

где $T(E)$ — период классического движения частицы с энергией E, $S(E)$ — площадь, заметаемая траекторией. При этом период движения частицы, $T(E)$, вблизи сепаратрисы имеет вид для $E > 0$:

$$T(E) = \frac{2}{\omega}\left(\operatorname{Arcsh}\left(b\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\right) + \operatorname{Arcsh}\left(a\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\right)\right). \tag{1.22}$$

Выражение (1.22) при $E << \frac{m\omega^2 a^2}{2}$ $(a \approx b)$ приводит к

$$T(E) \approx \frac{2}{\omega} \ln \left(2a\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \right). \tag{1.23}$$

Аналогично, при $E < 0$ получаем период движения в левой яме:

$$T_L(E) = \frac{2}{\omega} \ln \left(a\sqrt{\frac{m\omega^2}{2|E|}} + \sqrt{\frac{m\omega^2 a^2}{2|E|} - 1} \right). \tag{1.24}$$

Период движения в правой яме $T_R(E)$ получается из (1.24) заменой a на b.

При приближении к сепаратрисе эти выражения приводят к логарифмическому росту времен колебания. Таким образом, квазиклассические формулы предсказывают сужение расстояния между уровнями (рис.1.9).

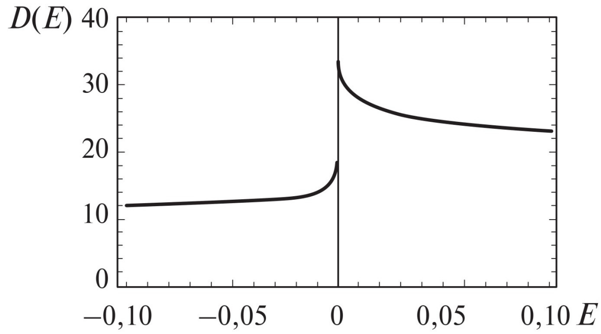

Рисунок 1.9 — Плотность уровней вблизи классической сепаратрисы для частицы в двухъямном потенциале с точки зрения квазиклассического подхода по Бору-Зоммерфельду.

Для более глубокого изучения нелинейной динамики вблизи сепаратрисы, обратимся к аналитическому решению уравнения Шрёдингера для данной системы. Как и в случае обычного гармонического осциллятора, в качестве единицы длины удобно выбрать $\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, а в качестве единицы энергии $\hbar\omega$. После изменения масштаба стационарное уравнение Шрёдингера в области $-a < x < b$ запишется в виде:

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{x^2}{4}\psi(x) = \varepsilon\psi(x), \tag{1.25}$$

причем выбранный вид потенциальной энергии (1.19) дает граничные условия $\psi(-a) = 0$ и $\psi(b) = 0$. Отметим, что ниже под a и b понимаются безразмерные величины.

Как известно, общее решение (1.25) можно выразить через линейную комбинацию двух действительных функций Вебера [76]:

$$\psi(x) = AW(\varepsilon,x) + BW(\varepsilon,-x). \tag{1.26}$$

Из граничных условий имеем уравнение для энергетических уровней:

$$W(\varepsilon,b)W(\varepsilon,a) - W(\varepsilon,-b)W(\varepsilon,-a) = 0. \tag{1.27}$$

В общем случае из (1.26) спектр может быть найден только численно. Однако аналитическое решение вблизи сепаратрисы можно получить для симметричной ямы ($a = b$), когда либо $W(\varepsilon,a) = W(\varepsilon,-a)$ (симметричные состояния), либо $W(\varepsilon,a) = -W(\varepsilon,-a)$ (антисимметричные состояния).

В случае широкой ямы ($a \approx b >> 1$) воспользуемся асимптотическим разложениями [76] для функций Вебера в (1.27):

$$W(\varepsilon,x) \approx \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)}{x}}\{s_1(\varepsilon,x)\cos\Phi(\varepsilon,x) - s_2(\varepsilon,x)\sin\Phi(\varepsilon,x)\}, \tag{1.28}$$

$$W(\varepsilon,-x) \approx \sqrt{\frac{2}{k(\varepsilon)x}}\{s_1(\varepsilon,x)\sin\Phi(\varepsilon,x) - s_2(\varepsilon,x)\cos\Phi(\varepsilon,x)\}, \tag{1.29}$$

где $\Phi(\varepsilon,x) = \frac{x^2}{4} - \varepsilon\ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\varepsilon))$, $\Gamma(x)$ —гамма функция, $k(\varepsilon) = \sqrt{1 - e^{2\pi\varepsilon}} - e^{\pi\varepsilon}$, $s_1(\varepsilon,x) \approx 1 + \frac{\nu_2}{2x^2}$, $s_2(\varepsilon,x) \approx \frac{u_2}{2x^2}$; а коэффициенты u_2 и ν_2 определены соотношением: $u_2 + i\nu_2 = \frac{\Gamma(\frac{5}{2}+i\varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\varepsilon)}$.

Для симметричного случая получаем

$$\mathrm{tg}\,(\Phi(\varepsilon,a)) = \frac{k(\varepsilon)s_1(\varepsilon,a) - s_2(\varepsilon,a)}{s_1(\varepsilon,a) + k(\varepsilon)s_2(\varepsilon,a)}. \tag{1.30}$$

Аналогичная формула для антисимметричного случая здесь не приводится. Решения (1.30) существенно зависят от знака ε. Нетрудно показать, что при $\varepsilon << 1$, правая часть (1.30) медленно зависит от ε. Воспользуемся теперь тем, что при переходе от уровня ε_n к ε_{n+1} изменение фазы в аргументе функции в левой части (1.30) равно π. Тогда используя разложение фазы $\Phi(\varepsilon,a)$, найдем минимальное расстояние между уровнями:

$$\Delta E_n = \frac{\pi\hbar\omega}{\ln a - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2})}, \tag{1.31}$$

где $\psi(\frac{1}{2})$ — дигамма-функция [76].

Таким образом, квазиклассическое рассмотрение неприменимо для малых энергий. Как видно, имеется минимальное расстояние между уровнями, которое определяется параметрами потенциала.

1.3.2 Результаты численных расчетов диссипативной динамики в модели обрезанных петель сепаратрисы

Приведем теперь результаты численного решения, которые далее также можно будет использовать при рассмотрении квантовой релаксации. Для моделирования использовались параметры $a = 60$, $b = 45$ (в безразмерных единицах), позволяющие выполнить условия квазиклассичности для состояний вблизи классической сепаратрисы. При таких параметрах для гамильтониана (1.20) были найдены собственные функции и соответствующе им уровни энергий рис.1.10(а). Для уровней, находящихся далеко от сепаратрисы ниже по энергии, собственные функции сильно локализованы в одной из ям. Обозначим номер уровня, с максимальной энергией, волновая функция которого, считаем, полностью равна нулю в одной из ям, через n_s. Количество уровней, находящихся в левой или правой яме, равны соответственно $N_L = 823$ и $N_R = 460$. Вблизи классической сепаратрисы, как и ожидалось, происходит сгущение уровней, что показывает гистограмма распределения плотности уровней $D(E_n)$ на рис.1.10(б) .

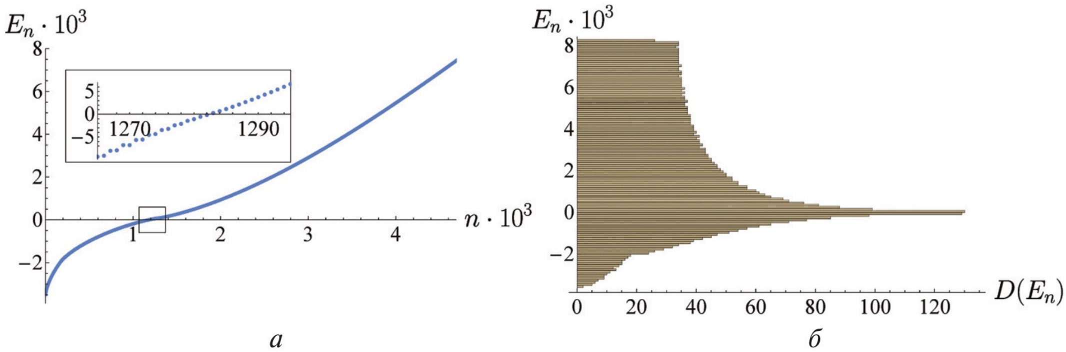

Рисунок 1.10 — (а) Зависимость энергии E_n от n. (б) Гистограмма распределения плотности уровней $D(E_n)$ по энергии.

В классической теории задача о захвате в одно из положений равновесия обусловлена влиянием возмущения на гамильтонову систему, в частности, влиянием трения. При этом квантовая диссипативная динамика частицы описывается матрицей плотности: $\rho(x,x^{'},t) = \sum\limits_{n,n^{'}} \psi_n(x)\rho_{n,n'}(t)\psi^*_{n^*}(x^{'})$. Учет диссипации требует введения взаимодействия квантовой частицы с бозонным термостатом [77]. Обычно эта связь выбирается линейной по координате частицы:

$$\hat{V}_{int} = \hat{x}\sum_i k_i \hat{X}_i, \tag{1.32}$$

где $\hat{x}$ – оператор координаты рассматриваемой системы, $\hat{X}_i$ – оператор координаты для бозонов термостата, k_i – коэффициент связи. Будем считать, что частотный спектр бозонного термостата достаточно широкий, а коэффициент связи k_i медленно зависит от номера моды термостата. Уравнение для матрицы плотности подсистемы после усреднения по состояниям бозонного термостата хорошо известно [77; 78]. Для нашего рассмотрения существенно, что недиагональные элементы матрицы плотности меняются как $\rho_{n,n'}(t) \approx e^{-i\omega_{n,n'}t}$, то есть являются быстрыми переменными и в приближении вращающейся волны ими можно пренебречь. Следовательно

$$\rho(x,x^{'},t) = \sum_n \psi_n(x)P_n(t)\psi^*_n(x^{'}), \tag{1.33}$$

где введено обозначение $P_n(t) = \rho_{n,n}(t)$ – вероятность найти частицу на уровне с номером n. Зависимость вероятностей населенностей уровней от времени $P_n(t)$ подчиняется основному кинетическому уравнению [78]:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \sum_m W_{m\to n}P_m - P_n\sum_m W_{n\to m}, \tag{1.34}$$

где $W_{m\to n}$ – вероятность перехода системы из состояния $|m\rangle$ в состояние $|n\rangle$ в единицу времени, которые определяются матричными элементами оператора координаты на собственных функциях гамильтониана (1.20). Если связь частицы с термостатом подчиняется соотношению (1.32), то матричные элементы перехода при нулевой температуре определены выражением:

$$W_{m\to n} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\langle n\left|\hat{x}\right|m\rangle\right|^2 \int\limits_0^\infty d\omega g(\omega)k^2(\omega)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dte^{-i(\omega_{n,m}+\omega)t}, \tag{1.35}$$

где $g(\omega)$ – спектральная плотность бозонных мод. Видно, что при нулевой температуре (1.35) дает отличные от нуля вероятности перехода

$$W_{m\to n} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left|\langle n \left|\hat{x}\right| m\rangle\right|^2 g(\omega_{m,n}) k^2(\omega_{m,n}), \tag{1.36}$$

только при условии, что $\omega_{m,n} > 0$, то есть учитываются только процессы приводящие к уменьшению энергии в системе.

Понятно, что вблизи сепаратрисы эти матричные элементы существенно определяются видом волновых функций вблизи неё. Они также зависят от барьера, разделяющего ямы, поэтому захват частицы в ямы зависит от вида матричных элементов отвечающих за переходы между уровнями.

Определим вероятность обнаружить частицу в левой яме как

$$P_L(t) = \int\limits_{-a}^{0} \rho(x,x,t)dx = \sum_n P_n(t) \cdot \int\limits_{-a}^{0} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx. \tag{1.37}$$

Вероятность обнаружить частицу в правой яме $P_R(t)$ получается из (1.37) заменой пределов интегрирования $(-a,0)$ на $(0,b)$.

Вычисление матричных элементов получено путем численного решения уравнения Шрёдингера (1.25), а временная эволюция $P_n(t)$ путем решения основного кинетического уравнения (1.34). На рис.1.11 приведена временная эволюция заселенностей уровней.

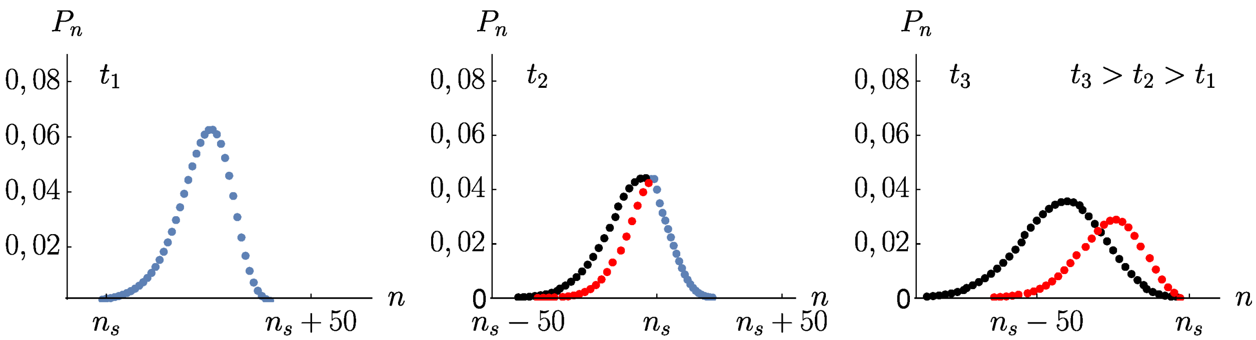

Рисунок 1.11 — Заселенность уровней в разные моменты времени. Черным цветом показаны уровни, для которых $P_L(t) > 0.99$; красным цветом – уровни для которых $P_R(t) > 0.99$; синим цветом - все остальные уровни; n_s – ближайший к сепаратрисе уровень по энергии.

Численное моделирование, представленное на рис.1.11, показало, что для любой начальной заселенности, созданной выше энергии, соответствующей сепаратрисе, система релаксирует в ту или иную яму с различными вероятностями. При большом барьере отношение вероятностей нахождения в одной из ям пропорционально отношению числа уровней в каждой из ям. В частности, при указанных выше параметрах вероятность нахождения в левой яме равна $P_L = \frac{N_L}{N_L+N_R} = 0.64$.

Таким образом, на примере модельного потенциала можно сделать общие выводы, касаемо процесса похождения сепаратрисных уровней. Поскольку вблизи сепаратрисы квазиклассическое описание нарушается, а также происходит сгущение уровней, то необходимо учитывать эволюцию системы в рамках квантовой механики.

1.4 Квазиэнергетический спектр и квазистационарные состояния

Для рассмотрения процесса захвата в одно из состояния динамического равновесия джозефсоновского перехода в квантовом случае проведем процедуру канонического квантования и заменим классические наблюдаемые в (1.4) величины операторами:

$$\varphi \to \hat{\varphi} \quad \text{и} \quad N = \frac{1}{2e} C\Phi_0\dot{\varphi} \to \hat{N},$$

где $N = Q/(2e)$ — разница в количестве куперовских пар на различных берегах джозефсоновского перехода, Q — соответствующий заряд. Операторы $\hat{\varphi}$ и $\hat{N}$ являются канонически сопряженными и удовлетворяют коммутационному соотношению $[\varphi,\hat{N}] = i$. Квантовая эволюция джозефсоновского перехода описывается оператором Гамильтона:

$$\hat{H} = E_c\hat{N}^2 - E_J^R \cos\hat{\varphi} - \Phi_0 I_{ex}\hat{\varphi}, \tag{1.38}$$

где $E_C = (2e)^2/2C$ — зарядовая энергия. Последнее слагаемое в (1.38) связано с управляющим током.

Как и в классическом случае будем считать, что фаза мала

$$\cos\hat{\varphi} \approx 1 - \hat{\varphi}^2/2! + \hat{\varphi}^4/4!.$$

Введем операторы рождения $\hat{a}^\dagger$ и уничтожения $\hat{a}$ так, чтобы они удовлетворяли коммутационному соотношению $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$. Тогда оператор Гамильтона принимает следующий вид:

$$\hat{H} \ = \ \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})-\varepsilon(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^4-f_0\cos(\omega t)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)-E_J, \tag{1.39}$$

где $\hbar\omega_0 \equiv \sqrt{2E_C E_J^R}$ и ω_0 собственная частота. Другие обозначения связанны с классическими коэффициентами через соотношения:

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{48}E_C = \frac{1}{3}\hbar\omega\sqrt{\frac{E_C}{2E_J^R}}\beta,$$
$$f_0 \equiv I_0\Phi_0(\frac{E_C}{2E_J^R})^{1/4} = \hbar\omega(\frac{2E_J^R}{E_C})^{1/4}f.$$

Полученный оператор Гамильтона является периодическим по времени с периодом управляющего тока $2\pi/\omega$.

Для исследования поведения системы в приближении вращающейся волны [79], совершим каноническое преобразование волновой функции

$$\mid \Psi\rangle \rightarrow \mid \Psi_{RWA}\rangle = \hat{U} \mid \Psi\rangle, \tag{1.40}$$

где $|\Psi\rangle$ и $|\Psi_{RWA}\rangle$ векторы состояния, которые определяются первоначальным гамильтонианом $\hat{H}$ и преобразованным $\hat{H}_{RWA}$ соответственно. Унитарный оператор $\hat{U}$ определим как:

$$\hat{U} = e^{i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}. \tag{1.41}$$

Не сложно показать, что гамильтониан в приближении медленно меняющихся амплитуд имеет вид:

$$\hat{H}_{RWA} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{1.42}$$

и квантовая динамика описывается временным уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \Psi_{RWA}\rangle = \hat{H}_{RWA} \mid \Psi_{RWA}\rangle. \tag{1.43}$$

Явный вид оператора Гамильтона запишется как:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{RWA} \ &= \ (\hbar(\omega_0-\omega)-6\varepsilon)\,(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})-6\varepsilon(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 \\
&- \ \varepsilon\left(e^{-4i\omega t}\hat{a}^4+e^{-2i\omega t}\hat{a}^3\hat{a}^\dagger+e^{-2i\omega t}\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\hat{a}+e^{-2i\omega t}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^2+e^{2i\omega t}\hat{a}\hat{a}^{\dagger 3}\right. \\
&+ \ \left. e^{-2i\omega t}\hat{a}^\dagger\hat{a}^3+e^{2i\omega t}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^{\dagger 2}+e^{2i\omega t}\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}\hat{a}^\dagger+e^{2i\omega t}\hat{a}^{\dagger 3}\hat{a}+e^{4i\omega t}\hat{a}^{\dagger 4}\right) \\
&- \ f_0\cos(\omega t)(e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger+e^{-i\omega t}\hat{a})-E_J.
\end{aligned}$$

Для получения точного вида гамильтониана $\hat{H}_{RWA}$ используются следующие соотношения:

$$e^{i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger e^{i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad e^{i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a} = \hat{a}e^{i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}e^{-i\omega t}.$$

В новом операторе Гамильтона появились слагаемые, которые осциллируют с кратной частотой управляющего тока, например: $\hat{U}\hat{a}^\dagger\hat{a}^3\hat{U}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a}^3e^{-i2\omega t}$. Далее усредним $\hat{H}_{RWA}$ по половине периода π/ω. Такое приближение называется приближением вращающейся волны и эквивалентно приближению медленно меняющихся амплитуд в классическом случае. Запишем получившийся оператор Гамильтона:

$$\hat{H}_{RWA} \to \hat{H}_{rwa} \equiv \hbar\bar{\omega}_0\hat{a}^\dagger\hat{a} - 6\varepsilon(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 - \frac{f_0}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \tag{1.44}$$

где введено обозначение $\hbar\bar{\omega}_0 \equiv \hbar(\omega_0 - \omega) - 6\varepsilon$. Отметим, что такой гамильтониан является стационарным и для него можно решить стационарное уравнение Шрёдингера.

Система в стационарном состоянии в приближении вращающейся волны описывается, в общем случае, как:

$$\mid \Psi_{rwa}(t)\rangle = \sum_j a_j e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{E}_j t} \mid \varphi_j\rangle, \tag{1.45}$$

где $\tilde{E}_j$ — энергетический спектр усредненного гамильтониана и $\mid \varphi_j\rangle$ — соответствующие собственные функции:

$$\hat{H}_{rwa} \mid \varphi_j\rangle = \tilde{E}_j \mid \varphi_j\rangle. \tag{1.46}$$

Будем называть величины $\tilde{E}_j$ квазиэнергией. Отметим, что строгое понятие квазиэнергии без приближения вращающейся волны подробно введено и рассмотрено в работах [80—82].

Будем решать стационарное уравнение Шрёдингера (1.46) в фоковском базисе:

$$\mid \varphi_j\rangle = \sum c_n^{(j)} \mid n\rangle, \tag{1.47}$$

где $|n\rangle$ — собственные функции оператора числа частиц $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ и $c_n^{(j)}$ — коэффициенты разложения. Так же как и в разделе 1.2 в дальнейших численных расчетах были использованы экспериментальные параметры из статьи [26],

$$\omega = 0.878\omega_0, \quad \varepsilon = 3.28 \cdot 10^{-5}\hbar\omega_0, \qquad f_0 = 0.89\hbar\omega_0,$$

которые эквивалентны параметрам, использованным расчета классической динамики. Собственная частота $Al/Al_2O_3/Al$ туннельного перехода $\omega_0 \doteq 11.3$ ГГц, которая дает температурный масштаб $\hbar\omega_0/k_B \doteq 0.1$ K. Также приведем значения зарядовой энергии куперовской пары и джозефсоновскую энергию $E_C \doteq 1.9 \times 10^{-20}$ эрг и $E_J \doteq 3.9 \times 10^{-15}$ эрг.

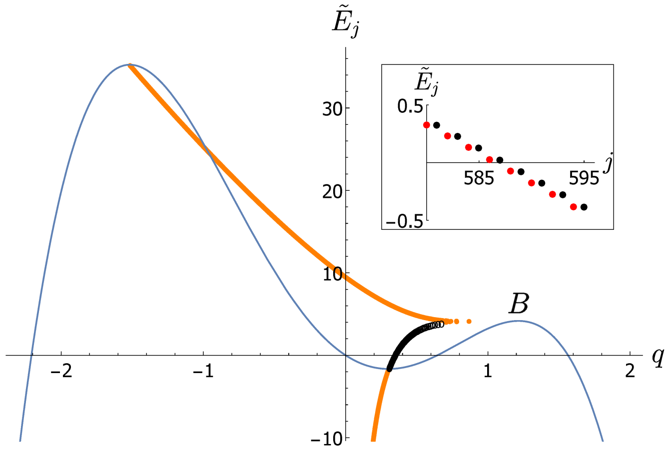

Рисунок 1.12 — Собственные квазиэнергии в приближении вращающейся волны в зависимости от ожидаемого значения фазы от соответствующих собственных функций $\langle\varphi\rangle = q$. Контур классической энергетической поверхности при $p = 0$ представлен для наглядности (рис.1.2(б)). Наиболее близкий уровень к седловой точке помечен через B.

Энергетический спектр представлен на рис.1.12, как функция от среднего значения фазы $\langle\varphi\rangle_j = \langle\varphi_j|\hat{\varphi}|\varphi_j\rangle$ джозефсоновского перехода для квантового уровня j, которая соответствует медленной амплитуде q в классике. В классической динамике квантовое усреднение может быть заменено временным усреднением. Временное усреднение классического представления, уравнение (1.8), для φ по симметричному отрезку времени равному половине периода $-\pi/2\omega \leqslant t \leqslant \pi/2\omega$ дает среднюю амплитуду $\langle\varphi\rangle = q$. Состояния отмеченные черным цветом внутри ямы $\tilde{E}_R \leqslant \tilde{E}_j \leqslant \tilde{E}_{sd}$ соответствуют уровням $488 \leqslant j \leqslant 619$, . На вставке к рис.1.12 видно, что такие уровни представляют собой дублеты. Два дублетных уровня ближайших к энергии $\tilde{E}_R$ внутри ямы — это $\tilde{E}_{618}$ и $\tilde{E}_{619}$ лежат внутри внутренней гомоклинической орбиты и снаружи сепаратрисы соответственно (рис.1.3). Численно было проверено, что увеличение количества уровней приводит только к увеличению количества уровней с отрицательной энергией без влияния на верхнюю ветвь спектра. Отметим, что спектр $\hat{H}_{rwa}$ ограничен сверху, но не снизу по энергии.

Решив стационарную задачу в приближении вращающейся волны, рассмотрим теперь динамику изначального гамильтониана $\hat{H}$, проведя обратное преобразование (2.60), которое дает приблизительную волновую функцию $|\Psi\rangle \approx \hat{U}^\dagger \mid \Psi_{rwa}\rangle$. Временная эволюция описывается как:

$$\mid \Psi(t)\rangle = e^{-i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{rwa}t} \mid \Psi(0)\rangle, \tag{1.48}$$

где $|\Psi(0)\rangle$ — начальное состояние, которое может быть представлено в базисе $|\varphi_j\rangle$,

$$\Psi(0) = \sum a_j \mid \varphi_j\rangle.$$

Уравнение (1.48) можно переписать в виде:

$$\mid \Psi(t)\rangle = \sum_j a_j e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{E}_j t} \mid \psi_j(t)\rangle, \tag{1.49}$$

где введено обозначение

$$\mid \psi_j(t)\rangle \equiv e^{-i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t} \mid \varphi_j\rangle = \sum_n c_n^{(j)} e^{-in\omega t} \mid n\rangle. \tag{1.50}$$

Это выражение является периодическим по времени

$$\mid \psi_j(t + 2\pi/\omega)\rangle =\mid \psi_j(t)\rangle.$$

В частности, если система приготовлена в начальном состоянии $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_j\rangle$, её эволюция описывается как:

$$\mid \Psi(t)\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{E}_j t} \mid \psi_j(t)\rangle \equiv\mid \Psi_{E_j}(t)\rangle. \tag{1.51}$$

Такие состояния мы будем называть квазистационарными состояниями. Хотя гамильтониан $\hat{H}$ явно зависит от времени, энергия E_j системы в квазистационарном состоянии $|\Psi_{E_j}\rangle$ может быть определена как ожидаемое значение $E_j \equiv \langle\Psi_{E_j}|\hat{H}|\Psi_{E_j}\rangle$. Посчитаем его используя (1.42):

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi_{E_j} \mid (\hat{U}^\dagger\hat{H}_{rwa}\hat{U} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}) \mid \Psi_{E_j}\rangle \\
= \; &\langle\Psi_{rwa} \mid \hat{H}_{rwa} \mid \Psi_{rwa}\rangle_j + \hbar\omega\langle\Psi_{E_j} \mid \hat{a}^\dagger\hat{a} \mid \Psi_{E_j}\rangle \\
= \; &\tilde{E}_j + \hbar\omega\sum_n n|c_n^{(j)}|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, квазистационарная энергия E_j связанная с состоянием $|\Psi_{E_j}\rangle$ через выражение:

$$E_j = \tilde{E}_j + \hbar\omega \sum_n n|c_n^{(j)}|^2. \tag{1.52}$$

Отметим, что обозначения E_j выбранные для ожидаемого значения $\hat{H}$, отличаются от $\tilde{E}_j$ для стационарных энергий в приближение вращающейся волны. Полученная приближенная энергия собственных состояний $\hat{H}$ не зависит от времени.

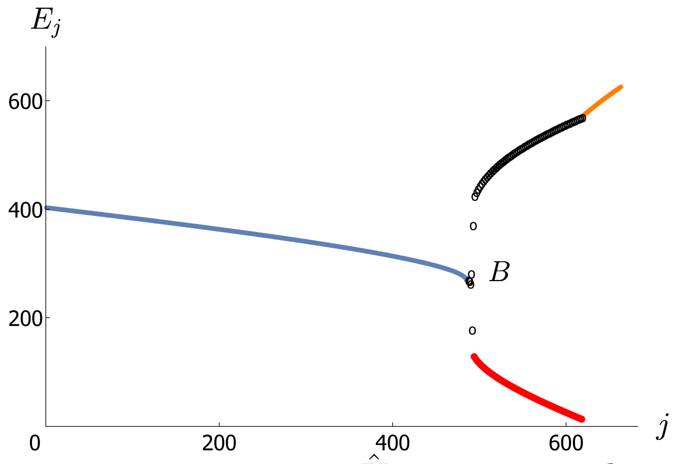

Рисунок 1.13 — Энергетический спектр $\hat{H}$ в единицах $\hbar\omega_0$. Раздвоенные красные и черные точки, $488 \leqslant j \leqslant 619$, соответствуют вырожденным уровням внутри ямы на классическом контуре рис.1.12. Уровень, который находится ближе всего к седловой точке обозначен через В.

Энергетический спектр гамильтониана $\hat{H}$ (1.52) представлен на рис. 1.13. Отметим, что из-за вклада второго слагаемого в уравнении (1.52) спектральная зависимость от номера уровня j радикальным образом отличается от представленной на рис.1.12. Расщепленная структура уровней $488 \leqslant j \leqslant 619$ появилась из почти вырожденных состояний находящихся в яме на рис.1.12. Самый высокий уровень по энергии $j = 1$ на рис.1.12 больше не является таковым на рис.1.13. И наименьший уровень $j = 618$ на красной ветви на энергетическом спектре является основным состоянием гамильтониана $\hat{H}$. Другой уровень из того же дублета $j = 619$ оказался на верхней черной ветви с большей энергией. Два уровня с номерами $j = 488$ и $j = 489$ возле отметки В на рис.1.13 соответствуют самому большому по энергии дублету на рис.1.12.

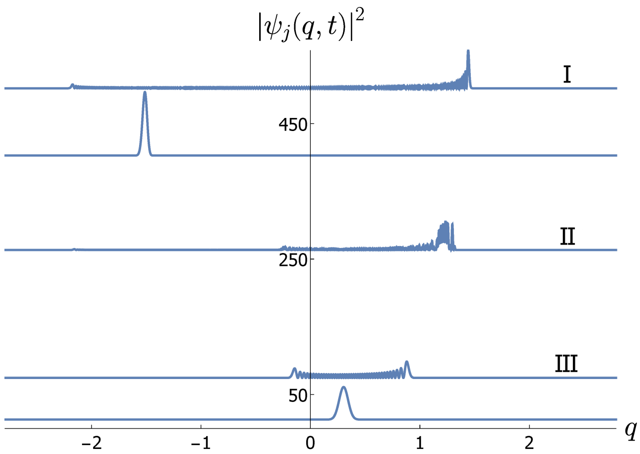

Рисунок 1.14 — Несколько квазистационарных волновых пакетов в произвольный момент времени. Все они осциллируют вокруг центра с периодом $2\pi/\omega$. По вертикальной оси отложен энергетический масштаб как на рис.1.13.

Изучим временную эволюцию $|\Psi_{E_j}(t)\rangle$, выражение (1.51). Запишем волновую функцию в q-представлении

$$\Psi_{E_j}(q,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{E}_j t}\psi_j(q,t), \tag{1.53}$$

где

$$\psi_j(q,t) = \sum_n c_n^{(j)} e^{-i\omega n t} H_n(q),$$

$H_n(q) \equiv \langle q|n\rangle$ — собственные функции гармонического осциллятора.

На рис.1.14 изображены квадраты амплитуд волновых функций, $\left|\Psi_{E_j}(q,t)\right| = |\psi_j(q,t)|$, для нескольких уровней. Ярко выраженной характеристикой квазистационарных состояний является что их волновые функции колеблются в резонансе с внешним частота Два хорошо локализованных волновых пакета на рис.1.14 соответствуют уровням $j = 1$ и $j = 618$ на рис.1.13, которые соответствуют L и R положениям равновесия на рис.1.12. Волновой пакет II соответствует уровню $j = 487$, который наиболее близко располагается к седловой точке. Волновой пакет I и III являются дублетными с номерами $j = 537$ и 536 на рис.1.13.

1.5 Связь джозефсоновского перехода с бозонным термостатом

В квантовой механике диссипация системы всегда связана с влиянием другой системы, обладающей большим количеством степеней свободы [83]. Для аналитического описания можно считать, что система помещена в тепловой резервуар с температурой T. Гамильтониан для системы в резервуаре запишется в виде:

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H} + \hat{H}_R + \hat{V}, \tag{1.54}$$

где $\hat{H}_R$ — гамильтониан бозонного термостата,

$$\hat{H}_R = \sum_i \hbar\Omega_i \hat{b}_i^+ \hat{b}_i, \tag{1.55}$$

Ω_i - частота i-ой бозонной моды, $\hat{V}$ - оператор взаимодействия между системой и резервуаром. Выберем в качестве модели линейную связь системы с термостатом:

$$\hat{V} = (\hat{a}^+ + \hat{a}) \sum_i \kappa_i (\hat{b}_i^+ + \hat{b}_i), \tag{1.56}$$

где κ_i — константа связи системы с i-ой бозонной модой.

Эволюция матрицы плотности рассматриваемой системы в резервуаре может быть записана как:

$$\rho_{tot}(t) = \hat{U}(t)\rho_{tot}(0)\hat{U}^\dagger(t), \tag{1.57}$$

где $\hat{U}(t)$ — оператор эволюции. Дифференцирование уравнения (1.57) по времени даёт известное уравнение Лиувилля или уравнение фон Неймана [78]:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}_{tot}(t)}{\partial t} = [\hat{H}_{tot}, \hat{\rho}_{tot}(t)], \tag{1.58}$$

где $\hat{\rho}_{tot}$ обозначает матрицу плотности для объединенной системы вместе с резервуаром. Рассматриваемая одиночная система описывается матрицей плотности $\hat{\rho}(t)$, которая получается из общей матрицы плотности $\hat{\rho}_{tot}(t)$ взятием частичного следа по всем степеням свободы резервуара,

$$\hat{\rho}(t) = Tr_R \hat{\rho}_{tot}(t),$$

где Tr_R обозначает взятие следа по состояниям резервуара.

Необходимо построить замкнутое уравнение для $\hat{\rho}(t)$, которое описывает желаемую диссипативную квантовую динамику системы. Для этой цели будем использовать преобразование $\hat{\rho}_{tot}(t) \to \tilde{\rho}_{tot}(t)$ (здесь и в дальнейшем будем опускать циркумфлекс у оператора матрицы плотности в представлении взаимодействия):

$$\tilde{\rho}_{tot}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_R t}\hat{S}^{\dagger}(t)\hat{\rho}_{tot}(t)\hat{S}(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_R t}, \tag{1.59}$$

где $\hat{S}$ является, по сути, оператором эволюции, что явно видно из формулы (1.48):

$$\hat{S}(t) \equiv e^{-i\omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a}t}e^{-(i/\hbar)\hat{H}_{rwa}t}. \tag{1.60}$$

Подставляя (1.59) в уравнение (1.58) и после преобразований, мы получаем уравнение Лиувилля в представлении взаимодействия:

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\rho}_{tot}(t)}{\partial t} = [\hat{V}_I(t), \tilde{\rho}_{tot}(t)], \tag{1.61}$$

где $\hat{V}_I$ — оператор взаимодействия в представлении взаимодействия

$$\hat{V}_I(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_R t}\hat{S}^{\dagger}(t)\hat{V}\hat{S}(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_R t} = \hat{x}_I\sum_i \hat{X}_{Ii}, \tag{1.62}$$

который явно зависит от времени. Здесь были введены следующие обозначения:

$$\hat{x}_I \equiv \hat{S}^{\dagger}(\hat{a}^{\dagger} + \hat{a})\hat{S},$$

$$\hat{X}_{Ii} \equiv e^{i\Omega_i\hat{b}_i^{\dagger}\hat{b}_i t}\kappa_i(\hat{b}_i^{\dagger} + \hat{b}_i)e^{-i\Omega_i\hat{b}_i^{\dagger}\hat{b}_i t}.$$

Формальное решение уравнения (1.61) можно записать как:

$$\tilde{\rho}_{tot}(t) = \tilde{\rho}_{tot}(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t [\hat{V}_I(t'),\tilde{\rho}_{tot}(t')]dt'.$$

Подставив получившийся результат снова в уравнение (1.61), можно получить уравнение следующего вида:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{V}_I(t),\tilde{\rho}_{tot}(0)] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t [\hat{V}_I(t),[\hat{V}_I(t'),\tilde{\rho}_{tot}(t')]]dt' \tag{1.63}$$

которое эквивалентно уравнению Лиувилля (1.61). Далее возьмем след уравнения (1.63) по состояниям резервуара:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar}Tr_R[\hat{V}_I(t),\tilde{\rho}_{tot}(0)] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr_R[\hat{V}_I(t),[\hat{V}_I(t'),\tilde{\rho}_{tot}(t')]]dt', \tag{1.64}$$

где $\tilde{\rho}(t)$ — матрица плотности, описывающая одиночную систему в представлении взаимодействия, которая задается выражением:

$$\tilde{\rho}(t) = \hat{S}^{\dagger}\hat{\rho}(t)\hat{S}.$$

Отметим, что уравнение (1.64) является точным за исключением процедуры редуцирования по степеням свободы резервуара. Для получения замкнутого уравнения для $\tilde{\rho}(t)$ необходимо произвести некоторые приближения. Поскольку нет никакой корреляции между системой и резервуаром до включения взаимодействия, общая матрица плотности системы, связанной с бозонным термостатом, является факторизованной в момент времени $t = 0$

$$\tilde{\rho}_{tot}(0) = \tilde{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_R(0),$$

где $\hat{\rho}_R(0)$ и $\tilde{\rho}(0)$ - матрицы плотности резервуара и выделенной системы в начальный момент времени. Можно считать, что такой резервуар описывается равновесной матрицей плотности:

$$\hat{\rho}_R(0) = \prod_i e^{-\beta\hbar\Omega_i\hat{b}_i^{\dagger}\hat{b}_i}(1 - e^{-\beta\hbar\Omega_i}),$$

где введена константа $\beta = 1/(k_B T)$, k_B – постоянная Больцмана. Заметим, что первое слагаемое в (1.64) обращается в ноль за счет того, что оператор $\hat{X}_{Ii}$ не имеет диагональных элементов в собственном базисе гамильтониана (1.55):

$$Tr_R[\hat{V}_I(t),\tilde{\rho}_{tot}(0)] = [\hat{x}_I,\hat{\rho}(0)]Tr_R\left(\hat{\rho}_R(0)\sum \hat{X}_{Ii}\right) \to 0.$$

Благодаря этому уравнение (1.64) сводится к

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t Tr_R[\hat{V}_I(t),[\hat{V}_I(t'),\tilde{\rho}_{tot}(t')]]dt'. \tag{1.65}$$

При $t > 0$ состояния системы и резервуара станут скоррелированными и общее состояние нельзя будет представить и виде прямого произведение подсистем. Здесь мы делаем два следующих предположения для того, чтобы выделить матрицу плотности системы:

1) связь между системой и резервуаром слабая;

2) резервуар остается в исходном равновесном состоянии вследствие огромного количества степеней свободы.

Соответственно, с учетом приближений общая матрица плотности с точностью до линейного порядка по взаимодействию $\hat{V}$ выглядит как:

$$\tilde{\rho}_{tot}(t) \cong \tilde{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_R(0) + O(\hat{V}), \tag{1.66}$$

где через $O(\hat{V})$ обозначены все ненулевые порядки малости по взаимодействию $\hat{V}$. Используя выражение (1.66) можно переписать уравнение (1.65) с точностью до второго порядка малости по $\hat{V}$, что является фактически приближением Борна. Кроме того, будем использовать приближение Маркова [78], в рамках которого считаем, что $\dot{\tilde{\rho}}(t)$ зависит только от текущего значения $\tilde{\rho}(t)$, то есть пренебрегаем эффектом памяти, заменяя временную зависимость $\tilde{\rho}(t')$ за прошедший период $(0,t)$ её значением в настоящий момент времени $\tilde{\rho}(t)$. В рамках данных приближений Борна-Маркова [84], мы получаем уравнение для оператора плотности системы:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t Tr_R[\hat{V}_I(t),[\hat{V}_I(t'),\tilde{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_R(0)]]dt'. \tag{1.67}$$

Далее в уравнение (1.67) подставляем $\hat{V}_I$ определенное в (1.62) и получаем:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^t Tr_R[\hat{V}_I(t),[\hat{V}_I(t^{'}),\tilde{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_R(0)]]dt' \\
= &\int\limits_0^t dt' \Bigg\{ [\hat{x}_I(t),\hat{x}_I(t')\tilde{\rho}(t)]Tr_R\Bigg(\sum_i \hat{X}_{Ii}(t)\sum_j \hat{X}_{Ij}(t')\hat{\rho}_R(0)\Bigg) \\
&- [\hat{x}_I(t),\tilde{\rho}(t)\hat{x}_I(t')]Tr_R\Bigg(\sum_i \hat{X}_{Ii}(t')\sum_j \hat{X}_{Ij}(t)\hat{\rho}_R(0)\Bigg)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Выражения с двойным суммированием могут быть упрощены в связи с линейностью операции взятия следа:

$$Tr_R\Bigg(\sum_i \hat{X}_{Ii}(t)\sum_j \hat{X}_{Ij}(t')\hat{\rho}_R(0)\Bigg) = \sum_i Tr_R\left(\hat{X}_{Ii}(t-t')\hat{X}_i\hat{\rho}_R(0)\right),$$

выражение под знаком суммирования называется временной корреляционной функцией и может быть посчитано явно:

$$Tr_R\left(\hat{X}_{Ii}(t-t')\hat{X}_i\hat{\rho}_R(0)\right) \to \kappa_i^2\left\{e^{-i\Omega_i(t-t')}(\bar{n}(\Omega_i)+1) + e^{i\Omega_i(t-t')}\bar{n}(\Omega_i)\right\},$$

где $\bar{n}(\Omega_i)$ — средняя заселенность состояний для бозонной моды Ω_i, которая выражается как:

$$\bar{n}(\Omega_i) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega_i} - 1}.$$

Предполагая, что число мод резервуара велико, можно перейти от суммирования к интегрированию:

$$\begin{aligned} & \sum_i Tr_R\left(\hat{X}_{Ii}(t-t')\hat{X}_i\hat{\rho}_R(0)\right) \\ \rightarrow \quad & \int_0^{\infty} d\Omega g(\Omega)\kappa(\Omega)^2\left\{e^{-i\Omega(t-t')}(\bar{n}(\Omega)+1)+e^{i\Omega(t-t')}\bar{n}(\Omega)\right\} \\ \equiv \quad & A(t'-t); \end{aligned} \tag{1.68}$$

где $g(\Omega)$ — плотность бозонных мод. Для численных расчетов мы будем использовать модель Дебая с предельной частотой Ω_D:

$$g(\Omega) = \frac{V}{2\pi^2 c_s^3}\Omega^2, \quad \Omega \leqslant \Omega_D,$$

где V – объем изучаемого рассматриваемого джозефсоновского перехода, c_s – скорость звука в нём. Используя полученное тождество (1.68) для $A(t'-t)$, мы можем преобразовать уравнение (1.67) к виду:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) \;=\; -\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t dt'\left\{[\hat{x}_I(t),\hat{x}_I(t')\tilde{\rho}(t)]A(t-t') - [\hat{x}_I(t),\tilde{\rho}(t)\hat{x}_I(t')]A(t'-t)\right\}.$$

Перейдем к матричному представлению, используя базис собственных состояний $\hat{H}_{rwa}$, определенных в выражении (1.46):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{ij}(t) = \quad & -\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t dt' A(t-t')\langle\varphi_i \mid [\hat{x}_I(t),\hat{x}_I(t')\tilde{\rho}(t)] \mid \varphi_j\rangle \\ & +\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_0^t dt' A(t'-t)\langle\varphi_i \mid [\hat{x}_I(t),\tilde{\rho}(t)\hat{x}_I(t')] \mid \varphi_j\rangle, \end{aligned} \tag{1.69}$$

где

$$\tilde{\rho}_{ij}(t) = \langle\varphi_i|\tilde{\rho}(t)|\varphi_j\rangle.$$

После преобразований оказывается возможным (подробный вывод приведен в приложении A) из 1.69 получить основное кинетическое уравнение A.4:

$$\dot{P}_j = \sum_{l\neq j}(W_{jl}P_l - W_{lj}P_j), \tag{1.70}$$

где P_j — вероятность нахождения рассматриваемой системы на произвольном уровне $|\varphi_j\rangle$

$$P_j(t) \equiv \tilde{\rho}_{jj}(t) = \rho_{jj}(t). \tag{1.71}$$

Отметим, что диагональные элементы матрицы плотности в представлении взаимодействия идентичны диагональным элементам матрицы плотности в базисе квазистационарных состояний:

$$\tilde{\rho}_{jj} = \langle\varphi_j|\,\tilde{\rho}\,|\varphi_j\rangle = \langle\varphi_j|\,\hat{S}^\dagger\hat{\rho}\hat{S}\,|\varphi_j\rangle = \left\langle\Psi_{E_j}(t)\right|\hat{\rho}\left|\Psi_{E_j}(t)\right\rangle = \rho_{jj}.$$

В уравнении (1.70) W_{jl} являются вероятностями перехода в единицу времени из состояния l в состояние j, которые мы определили как

$$W_{jl} = \frac{2\pi\kappa^2}{\hbar^2}\Big(|a_{jl}|^2\bar{W}_{jl} + |a_{lj}|^2\bar{W}_{lj}\Big), \tag{1.72}$$

где были введены обозначения

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{jl} &\equiv g(-\omega_{jl}+\omega)(\bar{n}(-\omega_{jl}+\omega)+1) + g(\omega_{jl}-\omega)\bar{n}(\omega_{jl}-\omega),\\
\bar{W}_{lj} &\equiv g(\omega_{lj}-\omega)(\bar{n}(\omega_{lj}-\omega)+1) + g(-\omega_{lj}+\omega)\bar{n}(-\omega_{lj}+\omega).
\end{aligned}$$

Отметим, что аргументы у плотности состояний g и распределения Планка $\bar{n}$ должны быть положительно определены.

1.6 Численное решение основного кинетического уравнения и вывод квантовой формулы Арнольда

Поскольку нас интересует вероятность захвата осциллятора в одно из положений равновесия рассмотрим процесс диссипации, уделяя особое внимание прохождению уровней вблизи энергии классической сепаратрисы.

Для численного решения основного кинетического уравнения (1.70) введем безразмерные величины

$$t^* = t/t_p \quad \text{и} \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{\hbar\omega_0},$$

где t_p определено как

$$t_p \equiv \frac{\pi c_s^3}{V\omega_0^2\omega^2}.$$

Тогда уравнение (1.70) перепишется в безразмерном виде:

$$\frac{dP_j}{dt^*} = \kappa^{*2} \sum_{l \neq j} (W^*_{jl} P_l - W^*_{lj} P_j),$$

где безразмерные вероятности перехода W^*_{jl} можно легко получить из (1.72).

На рис.1.15 изображена временная эволюция заселенности P_j в нескольких моментах времени, где система была изначальна приготовлена на энергетическом уровне $j = 625$. Этот уровень лежит ниже энергии основного состояния $\tilde{E}_R$ на классическом энергетическом контуре рис. 1.12 и соответствует траектории вне сепаратрисы на рис.1.3. В процессе релаксации система проходит через сепаратрисные уровни и при больших временах стремится к смешанному состоянию, состоящему из нескольких уровней возле $j = 1$ и $j = 618$.

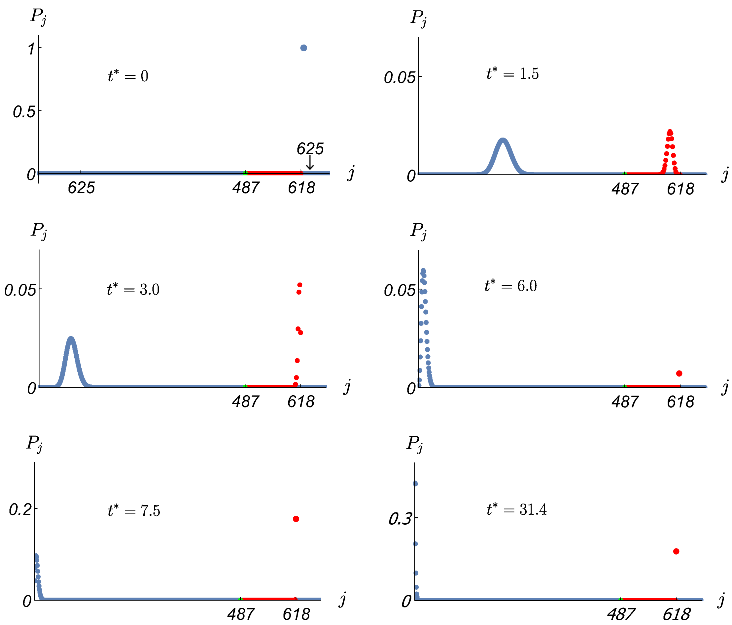

Рисунок 1.15 — Временная эволюция заселенностей уровней джозефсоновского осциллятора P_j при $\kappa^* = 1$ и нулевой температуре $T = 0$. В начальный момент времени система была приготовлена на уровне $j = 625$. Красным цветом обозначены уровни, которые относятся к правому положению равновесия и их траектории лежат внутри области S_R на рис.1.3.

Важным фактором влияющим на временную эволюцию заселенности уровней в системе является температура. В связи с этим в работе было проведено моделирование динамики при $T = 0.1$ K, что соответствует температурному масштабу $\hbar\omega_0/k_B$ рассматриваемого джозефсоновского перехода, см. рис.1.16.

Видно, что увеличение температуры приводит к увеличению дисперсии заселенности.

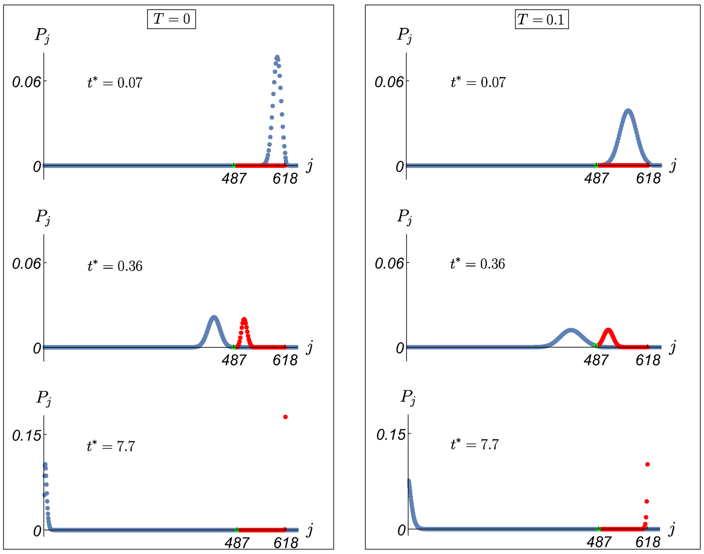

Рисунок 1.16 — Сравнение временной эволюции заселенностей при двух различных температурах $T = 0$ и 0.1 К для $\kappa^* = 1$ (левая колонка, аналог тому что изображено на рис.1.15). При $t^* = 0$ система инициализирована на 625 уровне.

Удобно также провести рассмотрение эволюции системы в координатном представлении (q-представлении) для матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$\rho(q,t) = \sum_j P_j(t)|\psi_j(q,t)|^2. \tag{1.73}$$

За счет того, что в квазистационарных состояниях (1.50) присутствуют осциллирующие члены с $e^{-i\omega nt}$, то даже в состоянии равновесия q-представление матрицы плотности $\hat{\rho}$ будет осциллировать с частотой управляющего тока.

На рис.1.17 изображена временная эволюция матрицы плотности в q-представлении.

Для изучения задачи Арнольда в квантовом режиме функционирования джозефсоновского нелинейного осциллятора определим вероятности нахождения системы на уровнях, относящихся к правому или левому положению равновесия:

$$P_\alpha(t) = \sum_{j=\{\alpha\}} P_j(t), \quad \alpha = L,\, R, \tag{1.74}$$

где через $\{R\}$ и $\{L\}$ обозначены группы уровней, которые непременно диссипируют в правое и левое состояние равновесия соответственно. На рис.1.18

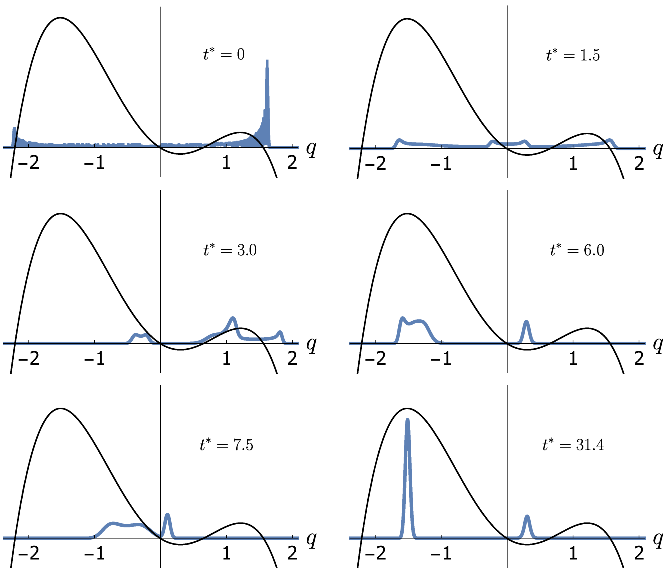

Рисунок 1.17 — Временная эволюция матрицы плотности в q-представлении $\rho(q,t)$ с начальным состоянием заселенным на уровень $j = 625$ при $T = 0$ и $\kappa^* = 1$. Время t^* дано в единицах $t_p \equiv \omega^{-1}$.

показан численный результат расчета временной эволюции P_R при различных температурах. Заметим, что данная величина вероятности захвата в правое положение равновесия при больших временах стремится к постоянному значению 0.18 при всех рассмотренных температурах. Нетрудно заметить, что время захвата (достижение кривых на рис. рис.1.18 стационарного значения 0.18) зависит от температуры – чем выше температура, тем медленнее протекает данный процесс. Будем называть пороговым временем t_c время за которое система полностью прошла область вблизи сепаратрисы, а значит полностью находится в одной из областей притяжения, то есть $P_L(t) + P_R(t) \to 1$ при $t \geqslant t_c$.

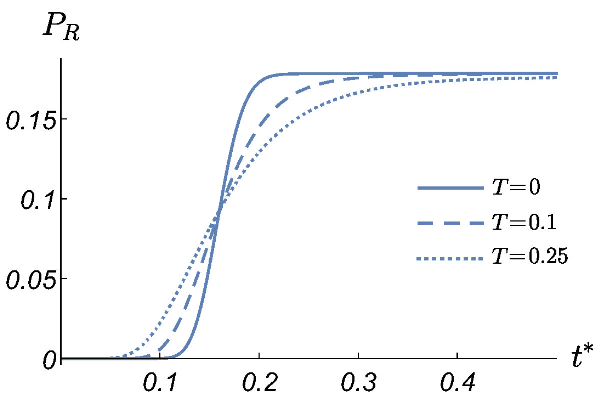

Рисунок 1.18 — Временная эволюция вероятности P_R для различных температур T при $\kappa^* = 1$ с начальным состоянием заселенным на уровень $j = 625$.

Для решения квантовой задачи Арнольда необходимо найти вероятности P_R и P_L при больших временах $t \geqslant t_c$. Пусть начальное состояние было выбрано как $P_j(0) = \delta_{jm}$ с $E_m > E_{618}$, то есть оно соответствует классической области вне сепаратрисы. Проинтегрируем основное кинетическое уравнение (1.70) по времени от начала отсчета до t_c:

$$P_j(t_c) - \delta_{jm} = \sum_{l \neq j} \left(W_{jl} \int_0^{t_c} P_l(t)dt - W_{lj} \int_0^{t_c} P_j(t)dt \right), \tag{1.75}$$

где суммирование по l происходит по всем уровням. Далее просуммируем по всем уровням из $\{R\}$:

$$\sum_{j \in \{R\}} \left(P_j(t_c) - \delta_{jm} \right) = \sum_{j \in \{R\}} \sum_{l \neq j} \left(W_{jl} \int_0^{t_c} P_l(t)dt - W_{lj} \int_0^{t_c} P_j(t)dt \right), \tag{1.76}$$

где второе слагаемое в левой части зануляется, так как $m \notin R$. Далее, принимая во внимание, что:

$$\sum_{j \in \{R\}} \sum_{l \in \{R\}} \left(W_{jl} \int_0^{t_c} P_l(t)dt - W_{lj} \int_0^{t_c} P_j(t)dt \right) = 0, \tag{1.77}$$

получаем:

$$P_R(t_c) = \sum_{j \in \{R\}} \sum_{l \notin \{R\}} W_{jl} \int_0^{t_c} P_l(t)dt - \sum_{j \in \{R\}} \sum_{l \notin \{R\}} W_{lj} \int_0^{t_c} P_j(t)dt, \tag{1.78}$$

где $P_R(t_c)$ определено выражением (1.74). Аналогично можно найти, что:

$$P_L(t_c) = \sum_{j \in \{L\}} \sum_{l \notin \{L\}} W_{jl} \int_0^{t_c} P_l(t)dt - \sum_{j \in \{L\}} \sum_{l \notin \{L\}} W_{lj} \int_0^{t_c} P_j(t)dt. \tag{1.79}$$

Проведен численный анализ, чтобы выяснить, что не все энергетические уровни в суммировании дают заметный вклад в P_L или P_R и из которого следует, что необходимо учитывать лишь несколько уровней лежащих близко к классической седловой точке рис.1.13. Как оказалось, временной интеграл от вероятности заселения на таких уровнях почти не зависит от номера уровня:

$$\int_0^{t_c} P_l(t)dt \doteq 2.5 \times 10^{-3},$$

с относительным расхождением между различными уровнями менее 3%. Учитывая это, из выражений (1.78) и (1.79), поделив каждое на их сумму, можно получить квантовый аналог формулы Арнольда (1.3):

$$P_\alpha = \frac{\tilde{S}_\alpha}{\tilde{S}_L + \tilde{S}_R}, \tag{1.80}$$

где $\alpha = L$, R и $\tilde{S}_\alpha$ обозначены через:

$$\tilde{S}_\alpha \approx \sum\nolimits'_{j\in\{\alpha\}} \sum\nolimits'_{l\notin\{\alpha\}} (W_{jl} - W_{lj}), \tag{1.81}$$

где штрих возле знака суммирования указывает, что суммирование необходимо проводить лишь по квантовым уровням находящимся близко к седловой точке.

Применяя формулу (1.80), можно получить вероятность $P_R \doteq 0.18$, которая хорошо совпадает с результатами численного моделирования, изображенном на рис. 1.18. Заметим, что как и в классическом случае формула (1.80) для вероятностей захвата в правое или левое положение равновесия не зависит от постоянной затухания κ.

1.7 Выводы к главе 1

В данной главе представлены аналитические и численные расчеты классической и квантовой диссипативной динамики частицы, движущейся в потенциале с двумя состояниями устойчивого равновесия, разделенных седловой точкой. В такой системе в процессе захвата в резонанс частица, теряя энергию, неминуемо должна пройти группу уровней вблизи сепаратрисы. В предложенной точно решаемой модели обрезанных петель сепаратрисы был проведен теоретический анализ плотности уровней вблизи энергии барьера. Данная модель сохраняет все значимые элементы стандартного двухъямного потенциала: наличие двух состояний равновесия и седловой точки. Показано, что плотность уровней вблизи сепаратрисы велика, хотя расстояние между ними логарифмически медленно зависит от ширины ямы. Путем численного моделирования исследована квантовая диссипативная динамика такой системы и обнаружено, что при большом барьере вероятность захвата в одно из положений равновесия пропорциональна количеству уровней, принадлежащих соответствующей яме.

Для джозефсоновского перехода с внешним гармоническим током была продемонстрирована справедливость оригинальной формулы Арнольда при классическом рассмотрении. В квантовом случае, в приближении вращающейся волны был найден квазистационарный спектр и квазистационарные собственные функции. Такой подход позволил обнаружить два хорошо локализованных состояния, которые соответствуют классическим положениям равновесия. Для учета влияния бозонного термостата была использована линейная модель связи, в которой задачу удалось свести к основному кинетическому уравнению и показать, что вероятность захвата в один из бассейнов притяжения в квантовом случае не зависит от коэффициента связи с бозонным термостатом. Были представлены результаты численного моделирования диссипативной динамики при различной температуре. Как и ожидалось, увеличение температуры приводит к замедлению релаксации.

Кроме того, выведена формула для вероятности обнаружить систему в одном из состояний динамического равновесия. Результаты расчета по этой формуле хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Глава 2. Измерение состояний кубита джозефсоновским бифуркационным осциллятором и его влияние на микроволновой транспорт

Первые эксперименты по использованию джозефсоновских бифуркационных усилителей для детектирования состояний квантовых систем проводились при малых добротностях [26; 27], благодаря чему переключение между различными устойчивыми колебаниями происходило за счет шумов, что негативно влияло на время жизни кубита. В дальнейшем значительный прогресс в управлении когерентностью был достигнут с использованием высокодобротных схем квантовой электродинамики [2; 85] при встраивании джозефсоновских нелинейных усилителей в компланарные волноводы (cavity Josephson bifurcation amplifier) [28; 29], где измерение состояний кубита основывается на эффекте переключения между динамическими состояниями равновесия джозефсоновского осциллятора. Типичные области параметров бифуркационного поведения таких усилителей представлены на рис.2.1 для двух поляризаций кубита. Процесс переключения между бистабильными состояниями в экспериментах [28; 29] происходит за счет сканирования по амплитуде управляющего тока, характерный вид которого показан на вставке рис.2.1, что подробно изложено, например, в работе [86]. Изначально за время t_{rise} происходит плавное нарастание тока до дискредитирующего (sampling) участка t_A, во время действия которого измерительный осциллятор демонстрирует бифуркационное поведение только для одной поляризации кубита (точка A на рис.2.1). Поскольку точка A находится на границе бифуркационной области, во избежание нежелательных переключений между состояниями динамического равновесия, в дальнейшем идет запирающий (holding) участок t_B управляющего тока, при котором измерительный осциллятор демонстрирует бифуркационное поведение для обеих поляризаций кубита (точка B на рис.2.1).

Заметим, что подобные системы в последние годы активно используются в качестве высокочувствительных детекторов в гибридных системах [87—90], для реализации однократных измерений (single-shot read-out) [29; 31], а также для наблюдения нелинейных эффектов [50; 91—93].

В данной главе предлагается новый метод измерений суперпозиционных состояний кубита с помощью дискриминирующего свойства бифуркационного

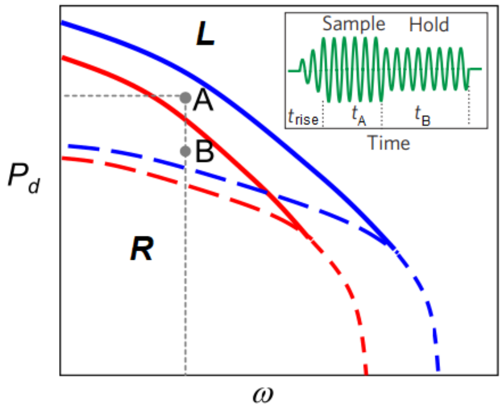

Рисунок 2.1 — Плоскость параметров мощности P_d и частоты ω управляющего тока джозефсоновского бифуркационного усилителя, на которой показаны области, где реализуются колебания малой амплитуды (R) и большой амплитуды (L) для двух различных состояний кубита. Синий цвет соответствует основному состоянию кубита, красный – возбужденному. Область бистабильного поведения заключена между пунктирной и сплошной линиями для каждого состояния кубита. На вставке продемонстрирована характерная зависимость управляющего тока от времени для реализации однократных измерений. Как правило, такую зависимость можно условно разбить на три части: время нарастания t_{rise}, дискретизации (sampling) t_A и запирающий (holding) участок t_B. Более подробное описание данного рисунка можно посмотреть в [29; 86].

джозефсоновского осциллятора, основанного на чувствительности вероятности захвата в одно из его метастабильных положений равновесия, а не на изменении вероятности переключения, как это предполагалось в работах [28; 29; 90]. В классическом приближении метастабильные состояния равновесия реализуются динамически под действием тока накачки (как и в случае осциллятора Дуффинга [94]). Эти состояния разделены в фазовом пространстве сепаратрисой, что подробно описано в главе 1. Для описания селективного поведения прибора – мезоскопического джозефсоновского осциллятора – необходим учет большого числа его состояний, так чтобы реализовать прохождение системы через область энергий, где в классическом приближении располагается сепаратриса. Заметим, что предлагаемый метод измерений не требует сканирования по амплитуде, поэтому допустимо использовать измерительный осциллятор с высокой добротностью в области параметров, где существует бифуркционное поведение для обеих поляризаций кубита. Рассмотрен квантовый аналог бифуркационного поведения осциллятора, что позволяет понять процесс “запутывания” состояний осциллятора и кубита. Предложена и численно промоделирована процедура проведения возможного эксперимента по инициализации состояний кубита на основе традиционной микроволновой техники и состояний измерительного осциллятора за счет модулируемого импульсного тока. Изучено влияние измерительного осциллятора на процесс инициализации кубита импульсами Раби.

Поскольку кубиты с такими измерительными приборами могут быть связаны друг с другом через волновод [33; 95], который в свою очередь может использоваться для инициализации и считывания состояния кубитов, важно изучить влияние бифуркационного осциллятора на микроволновой транспорт в таких системах. В связи с этим был произведен расчет коэффициентов отражения, прохождения и вероятностей возбуждения кубита однофотонным полем на основе метода неэрмитового эффективного гамильтониана.

2.1 Модель и основные уравнения

Прототипом кубита, состояния которого предполагается детектировать, служит расщепленный зарядовый переход – “квантрониум кубит” [27; 47]. Кубит представляет собой (рис.2.2) сверхпроводниковую гранулу (“ящик”) для куперовских пар (*Cooper-pair box*) с двумя джозефсоновскими переходами (каждый характеризуется джозефсоновской $E_J/2$ и ёмкостной E энергиями). Состояния кубита можно инициализировать подачей управляющего раби-импульса $U(t)$ через конденсатор C_g.

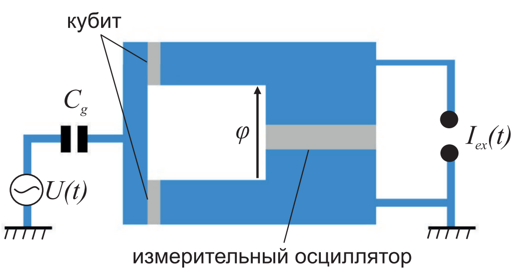

Рисунок 2.2 — Схематическое изображение квантрониум кубита связанного с измерительным осциллятором.

В качестве измерительного осциллятора выступает джозефсоновский переход с джозефсоновской энергией $E_J^R \gg E_J$, на который подается управляющий ток $I_{ex}(t)$. Гамильтониан такой системы может быть записан в виде

$$H = H_q + H_{osc} + H_{int}, \tag{2.1}$$

где гамильтониан кубита с учетом управляющего поля $\varepsilon(t) = 2E_c C_g U(t)/e$ и с использованием матриц Паули имеет вид:

$$H_q = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon(t)\sigma_x + E_J\sigma_z\right). \tag{2.2}$$

Гамильтониан рассматриваемого измерительного осциллятора определяется разностью фаз на джозефсоновском контакте φ:

$$H_{osc} = C\Phi_0^2\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - E_J^R\cos\varphi - \Phi_0 I_{ex}(t)\varphi, \tag{2.3}$$

где C – ёмкость перехода, $\Phi_0 \equiv \hbar/(2e)$ – квант магнитного потока и $I_{ex}(t)$ – управляющий внешний ток. Взаимодействие кубита и осциллятора происходит за счет общего участка цепи и определяется постоянной взаимодействия $\lambda = E_J/8E_J^R$:

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2}E_J^R\left(\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{48}\right)\sigma_z. \tag{2.4}$$

Управляющий раби-импульс $U(t)$ позволяет создать заданную суперпозицию состояний кубита. Ниже будет описан новый сценарий считывания состояний с помощью управляющего тока $I_{ex}(t)$, подаваемого на джозефсоновский осциллятор.

2.2 Основная идея считывания кубита с помощью высокодобротного нелинейного осциллятора

Хорошо известно, что нелинейный осциллятор (2.3) возбуждаемый периодической силой $I_{ex}(t) = I_0\cos(\omega t)$, может обладать двумя устойчивыми колебаниями с различной амплитудой и фазой [94]. Кратко опишем изменение фазового портрета осциллятора при его взаимодействии с кубитом.

В приближении медленно меняющихся амплитуд [74] этим колебаниям можно поставить в соответствие устойчивые состояния равновесия на фазовой плоскости, разделенные сепаратрисой, что было продемонстрировано в главе 1. Для этого будем использовать производящую функцию

$$F(\varphi, q, t) = \left(\varphi^2 \frac{\omega_0 C \Phi_0^2}{2\hbar} + \frac{q^2}{2}\right) \mathrm{ctg}(\omega t) - \varphi q \sqrt{\frac{\omega_0 C \Phi_0^2}{\hbar}} \frac{1}{\sin(\omega t)} \tag{2.5}$$

с валентностью $c = 1/\hbar$ для того, чтобы совершить каноническое преобразование $(\varphi, p_\varphi) \to (q, p)$, где старый импульс $p_\varphi = C\Phi_0^2 \dot{\varphi}$. Уравнения определяющие преобразования могут быть записаны как:

$$p_\varphi = \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \tag{2.6}$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial q}, \tag{2.7}$$

$$H_{osc}(q,p) = cH_{osc}(\varphi, p_\varphi) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{2.8}$$

Тогда возможно записать старые переменные как функции от новых:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_0 C \Phi_0^2}} (p \sin \omega t + q \cos \omega t), \tag{2.9}$$

$$p_\varphi = \sqrt{\hbar \omega_0 C \Phi_0^2} (p \cos \omega t - q \sin \omega t). \tag{2.10}$$

Соответственно, мы получаем гамильтониан для новых канонических переменных:

$$H_{osc}(q,p) = (\omega_0 - \omega)\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}\right) - \frac{\hbar}{16 C \Phi_0^2} (p \sin \omega t + q \cos \omega t)^4 - \frac{I_0}{\sqrt{\hbar \omega_0 C}} \cos \omega t (p \sin \omega t + q \cos \omega t). \tag{2.11}$$

В соответствии с приближением медленно меняющихся амплитуд, усредним гамильтониан по периоду внешнего поля $2\pi/\omega$. Вводя новое время $\tau = \hbar t$, в слабонелинейном режимы мы наконец получим:

$$\overline{H}_{osc} = \hbar(\omega_0 - \omega)\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}\right) - \beta \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}\right)^2 - fq, \tag{2.12}$$

где $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{E_J^R}{C\Phi_0^2}}$ – собственная частота измерительного осциллятора, $\beta \equiv \frac{e^2}{4C}$– параметр нелинейности и $f \equiv I_0 \sqrt{\frac{\hbar}{4\omega_0 C}}$ – амплитуда возбуждающей силы. Для иллюстрации будем использовать значения параметров, близкие к тем которые использовались в экспериментах [27; 88]:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = 0.16\,\mathrm{GHz}, \quad \omega = 0.95\omega_0, \quad \beta = 1.8{\times}10^{-4}\hbar\omega_0, \quad f = 0.05\hbar\omega_0, \quad \lambda = 0.03. \tag{2.13}$$

Получившийся гамильтониан (2.12) явно не зависит от времени и соответствующая квазиэнергетическая поверхность изображена на рис.2.3(а). Через L и R обозначены левое и правое положения равновесия, которые находятся в соответствующих экстремумах квазиэнергетической поверхности и через sd обозначена седловая точка, характеризующая сепаратрису.

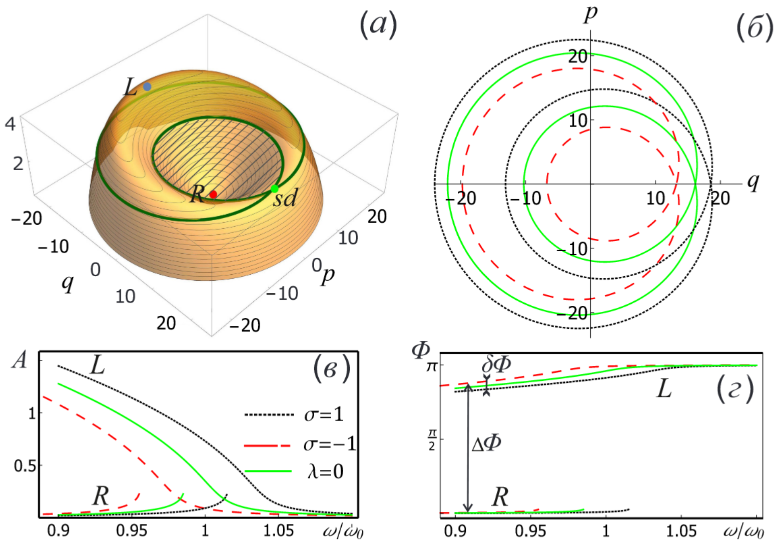

Рисунок 2.3 — (а) Квазиэнергетическая поверхность $H_{osc}(q,p)$ (в единицах $\hbar\omega_0$). Заштрихованная площадь S_R соответствует области захвата в правое положение равновесия. Через L и R обозначены левое и правое положения устойчивого равновесия, а sd - седловая точка. Вид сепаратрис (б), зависимости амплитуды (в) и фазы (г) устойчивых колебаний при изменении частоты внешнего поля, при различных поляризациях кубита $\sigma = \pm 1$ и без учета связи с кубитом $\lambda = 0$. Остальные параметры определены соотношениями (2.13).

При задании начальных условий внутри сепаратрисы и слабой диссипации (большой добротности резонатора Q) происходит процесс захвата в одно из положений равновесия. Принципиально другой сценарий захвата имеет место при задании начальных условий вне сепаратрисы. В этом случае осциллятор переходит одно из устойчивых положений равновесия случайным образом и процесс захвата можно рассматривать статистически. Как было показано в разделе 1.2, вероятность захвата определяется площадью области, заметаемой частью сепаратрисы, которая соответствует рассматриваемому положению равновесия. Полученный результат хорошо аппроксимируется формулой Арнольда 1.3 и вероятность захвата не зависит от конкретных начальных условий вне сепаратрисы.

Из вышесказанного и формируется основная идея предлагаемого метода измерения кубита, которая заключается в том, что связь рассматриваемого нелинейного осциллятора с кубитом создает зависимость вероятности его захвата, например, в правое положение равновесия P_R, от состояния кубита. Поскольку два устойчивых колебания измерительного осциллятора отличаются друг от друга фазой, то величину P_R оказывается возможным измерить на эксперименте.

Заметим, что различие фаз для двух устойчивых колебаний измерительного осциллятора в последнее время широко используется для дисперсионных квантовых измерений [28; 29; 87—89], при которых измеряется вероятность переключения осциллятора между двумя устойчивыми колебаниями, а не вероятность захвата. Наибольшую разрешающую способность такие методы показывают в случае, когда при рабочем значении амплитуды f и частоты ω внешнего поля для одной из поляризации кубита исчезает одно из устойчивых колебаний. Однако в области параметров, когда существуют два устойчивых колебания для обеих поляризаций кубита, разрешающая способность измерительного осциллятора с высокой добротностью (несколько сотен) будет крайне низкой. Предлагаемый же в данной главе метод позволяет проводить дисперсионные измерения кубита именно в такой области параметров, отказавшись от сканирования по амплитуде внешнего тока.

Для начала будем считать, что управляющее поле $\varepsilon(t) = 0$ и кубит находится в одном из базисных состояний с квантовым числом $\sigma = \pm 1$ (которое определяется собственным значением матрицы Паули σ_z).Тогда Гамильтониан измерительного осциллятора эффективно сводится к двум независимым гамильтонианам $H^{\pm}$ отвечающим основному $|\uparrow\rangle$ и возбужденному $|\downarrow\rangle$ состояниям кубита (поляризация “псевдоспина”), которые получаются из (2.12) заменами $\omega_0 \to \omega_0^{\pm} \equiv \omega_0(1 \pm \frac{\lambda}{2})$ и $\beta \to \beta^{\pm} \equiv \beta(1 \pm \frac{\lambda}{4})$. Поскольку состояние кубита эффективно влияет на собственную частоту и нелинейность измерительного осциллятора, оно также изменяет сепаратрису в фазовом пространстве, что продемонстрировано на рис.2.3(б). При этом устойчивые колебания нелинейного осциллятора в приближении медленно меняющихся амплитуд, соответствующие точкам L и R на рис.2.3(а), можно характеризовать амплитудой A и фазой Φ, которые находятся из решений уравнений:

$$A_\pm = \frac{I_0}{2C\Phi_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + (\omega - \omega_0(1\pm\lambda) + \frac{A_\pm^2(1\pm\lambda/4)}{16\omega_0(1\pm\lambda)})^2}}, \tag{2.14}$$

$$\Phi_\pm = Agr\left(\omega_0(1\pm\lambda) - \omega - \frac{A_\pm^2(1\pm\lambda/4)}{16\omega_0(1\pm\lambda)} - \frac{i}{2Q}\right). \tag{2.15}$$

В новых переменных амплитуда колебаний запишется как $A_\pm = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{E_J^R}(q_\pm^2 + p_\pm^2)}$, где $q_\pm$ и $p_\pm$ соответствуют координатам устойчивых положений равновесия L или R на рис.2.3(а) для каждой поляризации кубита. Фаза колебаний для левого положения равновесия $\Phi_\pm = \pi + acrtg(\frac{p_\pm}{q_\pm})$, для правого положения равновесия $\Phi_\pm = acrtg(\frac{p_\pm}{q_\pm})$. На рис.2.3(в-г) показаны зависимости амплитуд и фаз устойчивых колебаний измерительного осциллятора от частоты внешнего поля при добротности $Q = 500$, из которых наглядно виден диапазон рабочих частот управляющего тока.

В связи с тем, что предлагаемый метод измерения основывается на измерении разности фаз различных устойчивых колебаний измерительного осциллятора $\Delta\Phi$ (см. рис.2.3(г)) необходимо, чтобы такая разность была много больше возмущения фазы $\delta\Phi$, вносимого из-за различной поляризации кубита ($\Delta\Phi >> \delta\Phi$). На рис.2.4(а) продемонстрировано, что такое условие не выполняется при низкой добротности в рассмотренной области параметров. Кроме того, заметим, что при измерении результатов квантовых однокубитных операций необходимо проведение многократных измерений и набора статистики (вероятностей захвата) для достижения требуемой точности. Для оценки количества единичных измерений нами проанализировано влияние параметров управляющего тока на эффективность, Δ, разделения состояний кубита с различными поляризациями $\sigma = \pm 1$. Каждая поляризация кубита будет характеризоваться своей вероятностью захвата в одно из положений (например, в правое) равновесия $P_R^\pm$. Тогда величину Δ можно определить как $\Delta = P_R^+ - P_R^-$. На рис.2.4(б) изображена зависимость данной величины от различных параметров внешнего тока, подаваемого на измерительный осциллятор. Видно, что для любой частоты ω внешнего тока существует оптимальная амплитуда f. На основе анализа рис.2.4(б) и были выбраны оптимальные параметры внешнего тока (2.13).

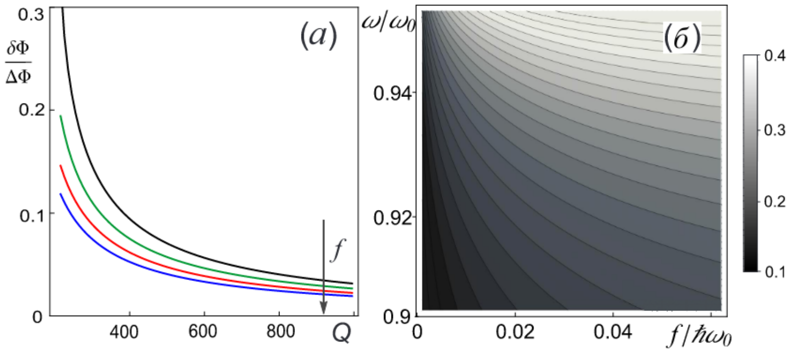

Рисунок 2.4 — (а) Величина $\delta\Phi/\Delta\Phi$ от добротности Q нелинейного осциллятора при различных значениях амплитуды управляющего тока f: $0.05\hbar\omega$, $0.06\hbar\omega$, $0.07\hbar\omega$ и $0.08\hbar\omega$. (б) Зависимость Δ от амплитуды f и частоты ω внешнего тока. Остальные параметры системы определены соотношениями (2.13).

Отметим еще раз, что ключевым элементом в предлагаемом методе измерения состояний кубита является прохождение системой сепаратрисы в фазовом пространстве. Это эквивалентно прохождению сепаратрисной энергии на квазиэнергетической поверхности (рис.2.3(а)). Поскольку вблизи этой энергии квазиклассическое описание нарушается, а температура считается достаточно низкой $T < \hbar\omega_0/k_B \approx 0.1K$, необходимо квантовое рассмотрение системы. Вводя операторы рождения и уничтожения для измерительного осциллятора и предполагая, что управляющее напряжение уже выключено $\varepsilon(t) = 0$, гамильтониан системы может быть записан следующим образом: [27]

$$H = H_q + \hbar\omega_0(1 + \frac{\lambda}{2}\sigma_z)a^\dagger a + \lambda\frac{\hbar\omega_0}{4}\sigma_z(a^{\dagger 2} + a^2) - \frac{\beta}{6}(1 + \frac{\lambda}{4}\sigma_z)(a^\dagger + a)^4 - \sqrt{2}f(a^\dagger + a)\cos(\omega t), \quad (2.16)$$

где выполняется коммутационное соотношение $[a,a^\dagger] = 1$.

В приближении вращающейся волны гамильтониан системы является стационарным и имеет вид:

$$H_{rwa} = H_q + \hbar(\omega_0(1 + \frac{\lambda}{2}\sigma_z) - \omega)a^\dagger a - \beta(1 + \frac{\lambda}{4}\sigma_z)aa^\dagger a^\dagger a - \frac{f}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a). \quad (2.17)$$

Квазистационарные состояния системы $\mid\psi_i\rangle$ определяются уравнением:

$$H_{rwa}\mid\psi_i\rangle = E_i\mid\psi_i\rangle. \quad (2.18)$$

Как и в классическом случае, при $\sigma = \pm 1$ в уравнении (2.17), формально имеются две подсистемы, отвечающие двум состояниями кубита. Данные подсистемы эволюционируют независимо и характеризуются различными гамильтонианами $H^{\pm}$:

$$H^{\pm} = \hbar(\omega_0^{\pm} - \omega)a^{\dagger}a - \beta^{\pm}aa^{\dagger}a^{\dagger}a - \frac{f}{\sqrt{2}}(a^{\dagger} + a). \tag{2.19}$$

Тогда вместо (2.18) можно записать:

$$H^{\pm} \mid \varphi_j^{\pm}\rangle = E_j^{\pm} \mid \varphi_j^{\pm}\rangle. \tag{2.20}$$

Пространство двухкомпонентных базисных функций $\{\mid \psi_i\rangle\}$ разбивается на два независимых подпространства с базисами $\{\mid \varphi_j^{+}\rangle \otimes |\uparrow\rangle\}$ и $\{\mid \varphi_j^{-}\rangle \otimes |\downarrow\rangle\}$ соответственно. Указанные базисные функции могут быть легко найдены численными методами.

Случай $\lambda = 0$ был изучен в главе 1, где учитывалась диссипация и было показано, что для квантовой системы с двумя бассейнами притяжения (которые могут рассматриваться как аналог потенциальных ям), может быть получена квантовая формула Арнольда для вероятностей захвата. В квазиклассическом приближении, обобщенная формула следует из правила квантования Бора–Зоммерфельда, в соответствии с которым площадь заметаемая траекторией движущийся частицы в потенциальной яме пропорциональна числу уровней в яме. Если количество уровней вблизи сепаратрисной энергии много меньше, чем число уровней относящихся к левому или правому положению равновесия, то можно использовать простую аналогию, что отношение между площадями петель сепаратрисы в (1.3) определяется отношением числа уровней в ямах.

Так же, как и в главе 1 будем учитывать связь подсистемы с окружением, рассматривая линейный гамильтониан взаимодействия с резервуаром. Тогда, добавив взаимодействие кубита с термостатом, получим:

$$V = \kappa(a^{\dagger} + a)\sum_k (B_k^{\dagger} + B_k) + \kappa_q r \sum_k (B_k^{\dagger} + B_k), \tag{2.21}$$

где оператор $r = \frac{1}{2}(1 - \sigma_x)$ отвечает за энергетическую релаксацию кубита [96]. Уравнение для матрицы плотности подсистемы в борн-марковском и секулярном приближении, после усреднения по состояниям бозонного термостата, удается свести к основному кинетическому уравнению для диагональных элементов $P_i(t) = \rho_{i,i}(t)$, которое в собственном базисе гамильтониана (2.17) принимает вид:

$$\dot{P}_i = \sum_{j \neq i}(W_{ji}P_j - W_{ij}P_i), \tag{2.22}$$

где введены обозначения:

$$W_{ji} \equiv \frac{2\pi}{\hbar^2}(\kappa^2(|a_{ji}|^2\bar{W}_{ji} + |a_{ij}|^2\bar{W}_{ij}) + \kappa_q^2|r_{ji}|^2(g(\omega_{ji})(\bar{n}(\omega_{ji})+1) + g(\omega_{ij})\bar{n}(\omega_{ij}))),$$
$$\bar{W}_{ji} \equiv g(\omega-\omega_{ji})(\bar{n}(\omega-\omega_{ji})+1) + g(\omega_{ji}-\omega)\bar{n}(\omega_{ji}-\omega),$$
$$\bar{W}_{ij} \equiv g(\omega_{ij}-\omega)(\bar{n}(\omega_{ij}-\omega)+1) + g(\omega-\omega_{ij})\bar{n}(\omega-\omega_{ij}),$$
$$a_{ji} \equiv \langle\psi_j|\, a \,|\,\psi_i\rangle, \quad r_{ji} \equiv \langle\psi_j|\, r \,|\,\psi_i\rangle, \quad \omega_{ji} \equiv \frac{E_j - E_i}{\hbar}.$$

Так же, как и в главе 1, подразумевается, что аргументы плотности бозонных мод g и распределения Планка $\bar{n}$ должны быть положительными. W_{ji} определяет вероятность перехода между различными состояниями системы(2.18): из $|\;\psi_i\rangle$ в $|\;\psi_j\rangle$.

2.3 Процедура измерения суперпозиции базисных состояний кубита

В данном разделе исследуется динамика кубита связанного с нелинейным осциллятором, обращая особое внимание на его потенциальную возможность как устройства для измерения суперпозиционных состояний кубита. Поскольку кубит и осциллятор непрерывно связаны, то неизбежно осуществляется "запутывание" (*entanglement*) подсистем. В связи с этим необходимо минимизировать процессы обратного воздействия (влияния детектирующего устройства на состояния кубита). На рис.2.5 представлена оригинальная схема для измерения кубитных состояний, которую условно удобно разделить на три этапа: 1) инициализация состояния кубита на основе микроволновой техники; 2) приготовление состояния измерительного прибора(вывод за сепаратрису); 3) считывание кубитных состояний измерительным осциллятором. Подробно рассмотрим каждый этап предлагаемого протокола.

2.3.1 Инициализация состояния кубита

В начальный момент времени, $t = 0$, мы предполагаем, что кубит и измеритель находятся недалеко от своих основных состояний (рис.2.5(a)). Состояние

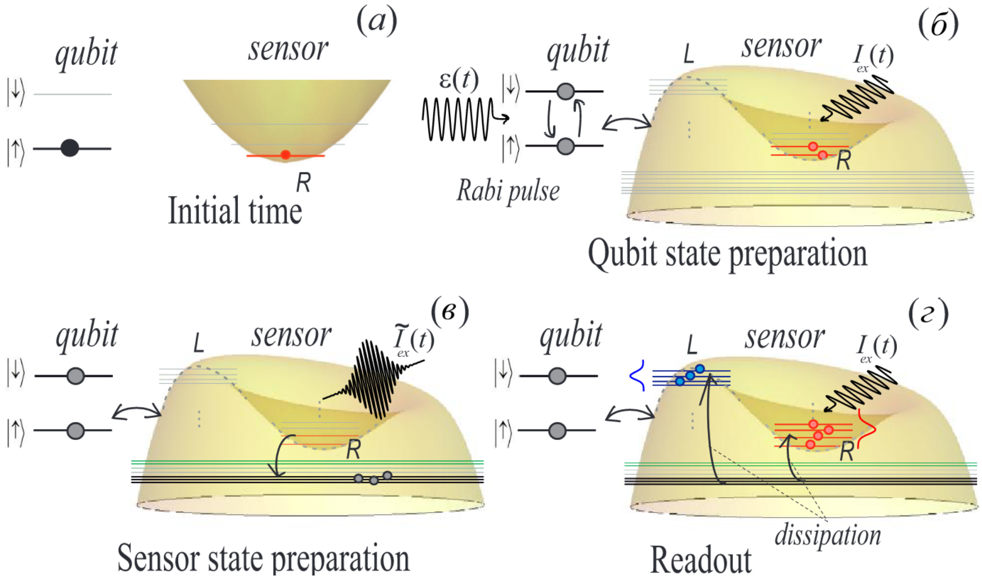

Рисунок 2.5 — Схематичное представление процедуры измерения. (а) В начальный момент времени мы подразумеваем, что кубит и измерительный осциллятор находятся в основном состоянии, отсутствует управляющий ток на измерителе. (б) Кубит инициализируется Раби-импульсом. Из-за связи происходит возмущение состояния измерителя. Включается управляющий ток для нелинейного осциллятора. (в) Измеритель возбуждается дополнительным импульсным током на уровни, соответствующие области вне классической сепаратрисы. (г) Измерительный осциллятор релаксирует в суперпозицию уровней, соответствующих правому и левому состоянию равновесия. Соответствующие вероятности зависят от состояния кубита.

общей системы “кубит и измеритель” является факторизованным $\mid \Psi(0)\rangle =\mid \Phi(0)\rangle\otimes \mid q(0)\rangle$, где $\mid \Phi(0)\rangle$ –начальное состояние измерительного осциллятора и $\mid q(0)\rangle{=}\mid \uparrow\rangle$ – начальное состояние кубита. Затем выполняется процесс инициализации кубита, используя управляющее поле $\varepsilon(t)$ (рис.2.5(б)). Пренебрегая процессами релаксации в процессе инициализации кубита, эволюцию системы (2.16) можно найти решая нестационарное уравнение Шредингера.

Поскольку в рассматриваемой системе кубит непрерывно взаимодействует с измерительным осциллятором, то необходимо проанализировать влияние этого взаимодействия на кубит (*back-action effect*). Для этого определим точность (*fidelity*), F, приготовления состояний кубита импульсом Раби, согласно [97]:

$$F = \frac{1}{6}\sum_{\alpha} \mathrm{Tr}\Big(\rho_\alpha \cdot \rho_\alpha^0\Big), \tag{2.23}$$

где $\rho_\alpha \equiv \mathrm{Tr}_{ocs}(\rho)$ соответствует редуцированной матрице плотности системы по состояниям измерительного осциллятора в момент окончания Раби-импульса при начальном состоянии кубита $|\,\alpha\rangle$, а ρ_α^0 – это матрица плотности кубита после импульса, но без учета связи с осциллятором ($\lambda = 0$). Суммирование в (2.23) происходит по шести начальным состояниям кубита $|\,q\rangle = |\,\alpha\rangle$: $|\downarrow\rangle$, $|\uparrow\rangle$, $\frac{|\downarrow\rangle\pm|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ и $\frac{|\downarrow\rangle\pm i|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$. При этом очевидно, что точность, F, будет зависеть не только от параметров управляющего поля кубита, но и от начального состояния измерительного осциллятора за счет связи подсистем, что неминуемо выражается в запутанности их состояний.

В качестве меры запутанности подсистем рассчитана энтропия фон Неймана:

$$S = -\eta_+ \ln \eta_+ - \eta_- \ln \eta_-, \tag{2.24}$$

где $\eta_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm |\mathbf{s}|)$. Заметим, что запутанность системы определяется только длиной вектора Блоха $\mathbf{s} = \mathrm{Tr}(\vec{\sigma}\rho_\alpha)$ [98].

На рис.2.6 приведены результаты численного расчета величины невязки $1-F$ (*infidelity*) и энтропии фон Неймана S при различных параметрах амплитуды 2π-импульса Раби и начальных состояниях измерительного осциллятора, усредненных по собственным состояниям Паули. Из анализа данного графика видно, что невязка, $1-F$, убывает с ростом амплитуды Раби-импульса ε_0. Это можно объяснить тем, что длительность 2π-импульса уменьшается с ростом амплитуды $\tau_R \sim 1/\varepsilon_0$, а следовательно, уменьшается и рассматриваемое время взаимодействия кубита с измерительным осциллятором. Однако естественно мы ограничиваемся диапазоном рабочих амплитуд управляющих импульсов для выполнения рассматриваемого двухуровневого приближения, при которых утечками в вышележащие кубитные состояния можно пренебречь. Заметим также, что на рис.2.6(а) наблюдается явный локальный минимум вблизи значения $\varepsilon_0 = 2\hbar\omega$, именно при такой амплитуде импульса частота Раби совпадает с собственной частотой измерительного осциллятора. Качественно схожее поведение наблюдается и для энтропии фон Неймана.

Другим важным результатом является рост величин $1-F$ и S с увеличением среднего значения числа квантов начального состояния измерительного осциллятора, см. серии кривых на рис.2.6. Отсюда следует, что эффективное управление (с минимальным эффектом обратного влияния) кубитом Раби-импульсами возможно только в том случае, когда измерительный осциллятор

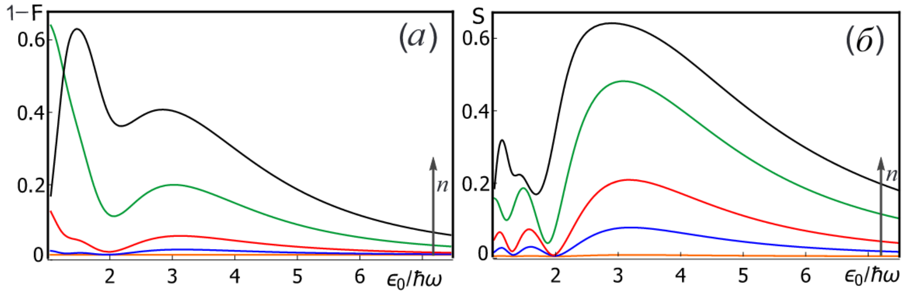

Рисунок 2.6 — Невязка (а) и энтропия фон Неймана (б) системы на момент окончания 2π-импульса Раби как функции от амплитуды управляющего поля кубита ε_0 для различных начальных чисел заполнения измерительного осциллятора n: 0, 5, 10, 20 и 30. Используемые параметры системы определены соотношениями (2.13).

находится в суперпозиции состояний лишь с маленьким значением числа квантов начального состояния измерительного осциллятора n. Отметим, что приемлемая точность выполнения однокубитных операций $(1 - F < 10^{-3})$ при оптимальной амплитуде $\varepsilon_0 = 2\hbar\omega$ достигается для начальных состояний измерительного осциллятора, при которых $n \leqslant 5$. Анализируя средние число квантов измерительного осциллятора для каждой из поляризаций кубитов, см. рис.2.7(а), можно увидеть, что необходимые состояния осциллятора $(n \leqslant 5)$ находятся вблизи уровня, соответствующего правому положению равновесия для каждой поляризации кубита (красный цвет на рис.2.7(а)). Заселение измерительного осциллятора на эти уровни может быть реализовано, например, адиабатически медленным включением внешнего тока, поскольку при $f = 0$ существует только правое устойчивое положение равновесия. В классике такой случай соответствует тому, что площадь S_L в формуле (1.3), относящаяся к левому положению равновесия, обращается в ноль.

2.3.2 Приготовление состояния измерительного прибора

После инициализации кубита необходимо возбудить осциллятор на уровни, соответствующие классической области вне сепаратрисы (обозначенные чёрным цветом на рис.2.7(а)). Схематически представление этого процесса показано на рис.2.5(в). Одним из способов такого возбуждения является ис-

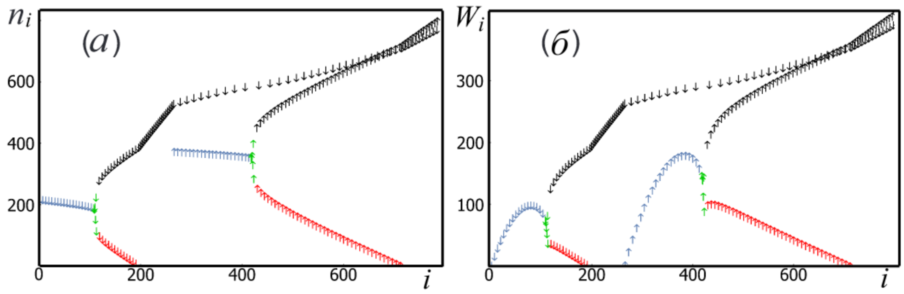

Рисунок 2.7 — (а) Зависимость среднего значения числа квантов измерительного осциллятора $n_i = \langle \psi_i \mid a^\dagger a \mid \psi_i \rangle$ от номера уровня гамильтониана (2.18). Символами $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены уровни системы, в которых кубит находится в основном состоянии $|\uparrow\rangle$ и возбуждённом $|\downarrow\rangle$ соответственно. (б) Вероятность ухода с i-ого уровня в единицу времени W_i в единицах $\frac{2\pi g \kappa^2}{\hbar^2}$. Четыре уровня со значениями W_i близкими к нулю соответствуют классическим устойчивым положениям равновесия. Синим и красным цветом отображены группы уровней, относящиеся к левому и правому положению равновесия на рис.2.3(а), зеленым цветом обозначены уровни, находящиеся вблизи сепаратрисной энергии, а чёрным цветом обозначены уровни, соответствующие классической области на фазовом пространстве вне сепаратрисы. Используемые параметры системы определены соотношениями (2.13).

пользование дополнительного короткого модулирующего импульса с несущей частотой ω равной частоте внешнего тока постоянной амплитуды вида: $\tilde{I}_{ex}(t) = I_{ex}(t) + I_p e^{-\frac{(t-t_p)^2}{2\tau^2}} \cos(\omega t)$, где $t_p = (t_0 - t_r)/2$. Данный импульс не изменяет среднее значение проекции кубита $\langle \sigma_z \rangle$, поскольку на этом этапе действие Раби-импульса закончилось $\varepsilon(t) = 0$, а $[\sigma_z, H_{rwa}] = 0$. Схематичное изображение последовательности подачи сигналов на кубит и измерительный осциллятор приведено на рис.2.8(а). Заметим, что при классическом рассмотрении процесс захвата измерительного осциллятора в одно из положений равновесия считается состоявшимся сразу после попадания системы в область на фазовом пространстве внутри сепаратрисы. При этом процесс перехода между областями сепаратрисы относящихся к различным состояниям равновесия невозможен. В квантовом случае уровни, находящиеся по энергии близко к классической сепаратрисе, не могут быть строго отнесены к одному из положения равновесия из-за туннельного эффекта, но по мере удаления от сепаратрисной энергии некоторые уровни все больше локализуются вблизи классических положений равновесия. Если таких уровней достаточно много, то для уровней, находящихся далеко от сепаратрисной энергии, туннельный эффект становится пренебрежимо мал. Именно благодаря этому, в процессе релаксации переходами между группами уровней относящихся к различным положениям равновесия можно пренебречь.

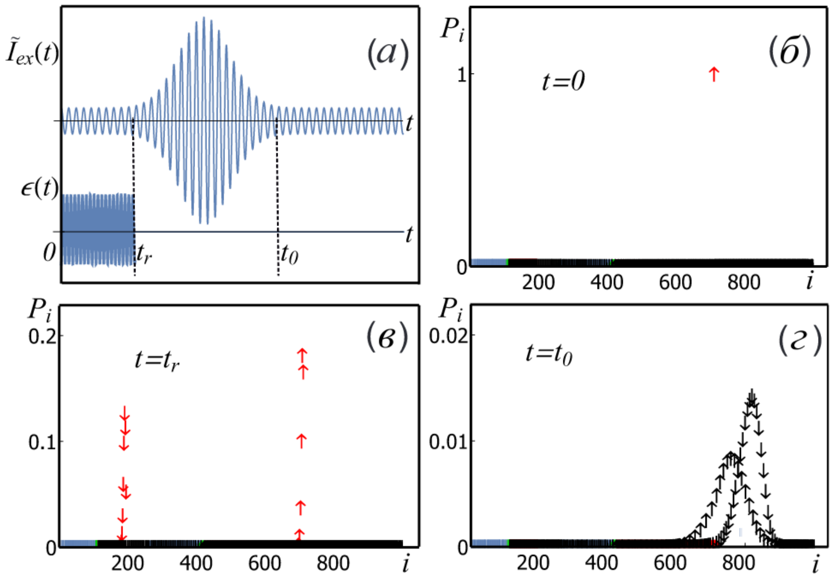

Рисунок 2.8 — (а): Временная развертка последовательности подачи инициализирующих импульсов на кубит $\varepsilon(t)$ и на измерительный осциллятор $\tilde{I}_{ex}(t)$. Инициализирующий Раби-импульс для кубита имеет длительность t_r. После окончания его действия, в моменты времени $t_r < t < t_0$ для возбуждения измерительного осциллятора на нужные уровни дополнительно подается модулирующий импульс. Значения диагональных элементов матрицы плотности системы P_i в зависимости от номера уровня i при последовательном воздействии $\pi/2$-импульса на кубит и импульсного тока на измерительный осциллятор в моменты времени: (б) в начальный момент времени $t = 0$, (в) в момент окончания действия Раби-импульса $t = t_r$, (г) при окончании инициализации измерительного осциллятора в $t = t_0$. Используемые обозначение такие же, как на рис.2.7(а-б). Численные расчеты производились при $\varepsilon_0 = 1.2\hbar\omega_0$, $I_p\sqrt{\frac{\hbar}{4\omega_0 C}} = 3.9\hbar\omega_0$, и $\tau = 5.5\frac{1}{\omega_0}$, остальные параметры системы определены соотношениями (2.13).

На рис.2.8(б-г) представлены результаты численного моделирования инициализации кубита $\pi/2$-импульсом и возбуждения измерительного осциллятора модулированным импульсом тока $\tilde{I}_{ex}(t)$. В начальный момент времени, рис.2.8(б), система находилась в состоянии $|\,\Phi(0)\rangle \otimes |\uparrow\rangle$, где волновая функция осциллятора $|\,\Phi(0)\rangle$ соответствует правому положению равновесия с малым числом квантов (красный цвет на рис.2.7(а)). Обычно, для создания суперпозиционного состояния кубита, стремятся уменьшить влияние измерительного устройства на кубит в процессе инициализации. В нашем случае это было бы возможно, если бы параметр связи $\lambda = 0$. Тогда волновая функция всей системы может быть факторизована, и волновая функция кубита принимает вид: $| q(t_r)\rangle = \alpha^+| \uparrow\rangle + \alpha^-| \downarrow\rangle$, где амплитуды вероятностей зависят от частоты Раби и длительности импульса. Как известно, комплексные параметры α^+ и α^- определяют углы, определяющие ориентацию вектора $\mathbf{s} = \langle q(t_r) \mid \vec{\sigma} \mid q(t_r)\rangle$ на сфере Блоха. Вероятность того, что z-проекция вектора $\mathbf{s}$ имеет положительное значение (иными словами, населенность нижнего уровня), равна $|\alpha^+|^2$, отрицательная проекция и населенность верхнего уровня равны $|\alpha^-|^2$.

Если существует связь между кубитом и осциллятором, $\lambda \neq 0$, после окончания $\pi/2$-импульса в момент времени $t = t_r$, рис.2.8(в), система находится в состоянии суперпозиции, которое состоит из группы уровней, относящихся к правому положению равновесия для различных поляризаций кубита (два узких красных пика на рис.2.8(в)). Последующее возбуждение измерительного осциллятора приводит к тому, что система в момент времени $t = t_0$ (см. рис.2.8(г)) оказывается в суперпозиции уровней, соответствующих классической области на фазовом пространстве вне сепаратрисы с различными поляризациями $\sigma = \pm 1$, что соответствует черным стрелочкам на рис.2.7(а) и рис.2.8(б-г). Для выбранных типичных параметров (2.13), время инициализации связанной системы (кубит+измерительный осциллятор) составляет $t_0 = 50$ нс.

2.3.3 Считывание состояний кубита нелинейным осциллятором

Далее мы будем полагать, что процесс инициализации кубита и возбуждения измерительного осциллятора закончился к моменту времени $t = t_0$, тогда общая волновая функция системы будет иметь вид

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_j b_j^+ \mid \varphi_j^+\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \sum_j b_j^- \mid \varphi_j^-\rangle \otimes |\downarrow\rangle \,. \tag{2.25}$$

Для учета связи с окружением будем использовать выведенное ранее основное кинетическое уравнение (2.22). Поскольку в секулярном приближении недиагональные элементы не оказывают влияния на эволюцию диагональных элементов, то будем следить только за диагональной частью соответствующей матрицы плотности:

$$\rho_d(t_0) = \sum_j \left(P_j^+(t_0)\left|\varphi_j^+\right\rangle\left\langle\varphi_j^+\right| \otimes \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + P_j^-(t_0)\left|\varphi_j^-\right\rangle\left\langle\varphi_j^-\right| \otimes \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\right), \quad (2.26)$$

где $P_j^+(t_0) \equiv |b_j^+|^2$ и $P_j^-(t_0) \equiv |b_j^-|^2$. Вероятность обнаружить кубит в основном состоянии определяется как $\sum_j P_j^+(t_0) = p^+$, где суммирование происходит по всем уровням j осциллятора, а вероятность обнаружить кубит в возбужденном состоянии – $\sum_j P_j^-(t_0) = p^-$, а также выполняется условие нормировки:

$$p^+ + p^- = 1. \quad (2.27)$$

Вероятности захвата осциллятора в динамические положения равновесия P_L и P_R соответствуют вероятностям нахождения системы на синих и красных уровнях соответственно на рис.2.7(а). Перед попаданием на эти группы уровней система из приготовленного состояния (рис.2.8(г)) диссипирует и неизбежно проходит уровни, лежащие вблизи сепаратрисной энергии (рис.2.5(г)). Тогда аналогично классическому случаю, вероятность захвата в процессе релаксации в одно из положений равновесия не зависит от конкретных номеров этих уровней, что было показано в главе 1. Важно, что вероятность ухода с i-ого уровня в единицу времени $W_i \equiv \sum\limits_{j\neq i} W_{ji}$ максимальна для уровней вне сепаратрисной энергии (черные стрелки на рис.2.7(б)). При этом величина W_i уменьшается при приближении к уровню, соответствующему классическому положению равновесия (красные стрелки на рис.2.7(б)). Благодаря этому, быстрая скорость релаксации вне сепаратрисных уровней энергии позволяет приближенно установить характерное время измерения состояния кубита как $t_{meas} \approx 1/W_{i_s}$, где i_s – номер любого уровня вблизи сепаратрисы (отображены зеленым цветом на рис.2.7(б)). В случае, когда время энергетической декогеренции кубита T_q много больше времени процесса измерения ($T_q >> t_{meas}$) переходы между состояниями с различными поляризациями кубита можно считать невозможными, тогда система дифференциальных уравнений (2.22) распадается на две независимых подсистемы:

$$\dot{P}_i^+ = \sum\nolimits_{j\neq i}^{+}(W_{ji}P_j^+ - W_{ij}P_i^+), \quad (2.28)$$

$$\dot{P}_i^- = \sum\nolimits_{j\neq i}^{-}(W_{ji}P_j^- - W_{ij}P_i^-), \quad (2.29)$$

где в (2.28) суммирование происходит лишь по уровням с поляризацией кубита $\sigma = 1$, а в (2.29) - по уровням с поляризацией кубита $\sigma = -1$. Поскольку отношение вероятностей захвата в левое и правое положение равновесия с одинаковой поляризацией кубита не зависит от величин p^+ и p^-, то общая вероятность обнаружить измерительный осциллятор в правом состоянии равновесия равна

$$P_R = p^+ P_R^+ + p^- P_R^-, \tag{2.30}$$

где P_R^+ – вероятность обнаружить измерительный осциллятор в правом положении равновесия с кубитом инициализированном в основное состояние, P_R^- – в возбужденное состояние. Из (2.27) и (2.30) можно получить искомую вероятность нахождения кубита в основном состоянии:

$$p^+ = \frac{P_R - P_R^-}{P_R^+ - P_R^-}. \tag{2.31}$$

Таким образом, измеряя величину P_R джозефсоновского осциллятора, становится возможным измерять населенности кубита в приготовленном суперпозиционном состоянии. При этом величины P_R^+ и P_R^- могут быть определены в процессе калибровки измерительного осциллятора при различных состояниях кубита с квантовым числом $\sigma = \pm 1$. Для определения вероятности захвата осциллятора в правое состояние равновесия P_R необходимо, как и в экспериментах [27; 28; 31; 89], измерить разности фаз между отраженным сигналом и подаваемым $I_{ext}(t)$. Частотная вероятность этой разности фаз, соответствующая R ветвям на рис.2.3(г), и будет определять искомую вероятность P_R. Отметим, что предлагаемый метод не требует изменений в методике эксперимента по измерению разности фаз.

На рис.2.9 изображены результаты моделирования процесса измерения при $t > t_0$, в результате которого инициализированная система (рис.2.8(г)) диссипирует из-за связи с бозонным термостатом, переходя в смешанное состояние, состоящее из групп уровней, относящихся к различным положениям равновесия для различных поляризаций кубита. На рис.2.9(а-с) приведены вероятности населенностей уровней системы P_i в различные моменты времени, которые были получены численным решением основного кинетического уравнения (2.22). При численных расчетах в качестве единицы времени используется $t^* = \frac{\hbar^2}{2\pi g \kappa^2}$. Как видно из рис.2.9(а-с), в процессе эволюции происходит перераспределение по уровням в системе. После пересечения группы уровней, соответствующих

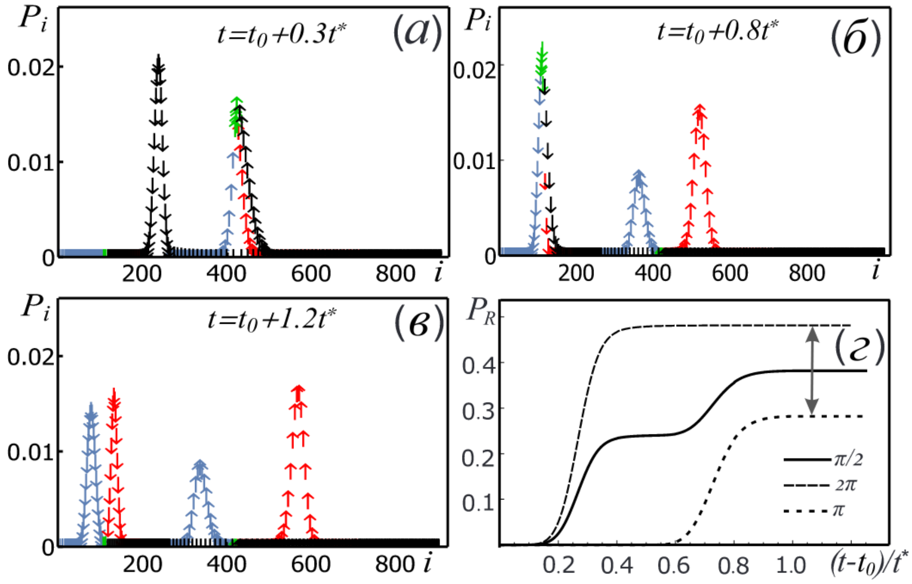

Рисунок 2.9 — (а)-(г)Временная эволюция диагональных элементов матрицы плотности системы P_i в процессе измерения состояния кубита нелинейным джозефсоновским осциллятором в различные моменты времени. (г) Зависимость вероятности захвата в правое положение равновесия P_R от времени в процессе измерения для Раби-импульсов различной длительности, инициализировавших кубит из основного состояния. Используемые обозначения аналогичны рис.2.7(а-б). Используемые параметры системы определены соотношениями (2.13).

сепаратрисной энергии (отмечены зеленым цветом), происходит сепарирование состояний кубита (за время $t_{meas} \sim 1.2t^*$). Поскольку вероятности P_R и P_L не будут изменяться при дальнейшей эволюции системы даже при нарушении когерентности состояний кубита, то измерительный осциллятор может функционировать в качестве запоминающего устройства. Заметим, что различное положение лоренцевских пиков на рис.2.9(в) связано с нумерацией уровней, в координатном представлении центры этих пиков будут близки друг другу из-за малого коэффициента связи кубита и осциллятора. Зная добротность измерительного осциллятора Q можно получить оценку времени измерения $t_{meas} \sim \frac{Q}{\omega_0}$, что дает $t_{meas} \sim 100$ нс при $Q \sim 100$, согласно [99]. Следовательно, мы получаем, что процесс инициализации системы (кубит и измерительный осциллятор) и процесс измерения составляет $t_0 + t_{meas} \sim 150$ нс, что согласно [1] намного меньше типичных времен декогеренции в исследуемых нами системах.

Для определения значения вероятности захвата осциллятора P_R необходимо просуммировать вероятности P_i всей группы уровней (красные стрелки на рис.2.9(а-с)) в момент времени t_{meas}, относящихся к правому положению равновесия для различных поляризаций кубита. На рис.2.9(г) представлена зависимость этой величины от времени для различных Раби-импульсов. Видно, что вероятность захвата P_R выходит на постоянное значение после того, как в процессе релаксации система прошла группу уровней, лежащих вблизи сепаратрисной энергии. Из проведенного анализа по предложенному протоколу инициализации (рис.2.8) и измерения (рис.2.9(а-с)), согласно (2.31) можно определить вероятности нахождения кубита в базисных состояниях. Пренебрегая обратным воздействием, величина Δ будет определять расстояние, отмеченное серой стрелочкой на рис.2.9(г). Так, например, для $\pi/2$-импульса Раби при выбранных параметрах систем мы получили, что вероятность нахождения кубита в основном состоянии равна $p^+ = 0.5003$. Отличие этой вероятности от 0.5 связано с влиянием измерительного осциллятора на кубит в процессе инициализации последнего, когда происходило запутывание состояний подсистем.

2.4 Влияние измерительного осциллятора на транспортные характеристики микроволновых фотонов

В настоящее время реализованы эксперименты по неразрушающему считыванию массивов невзаимодействующих кубитов, помещенных в сверхпроводящий микроволновый резонатор или копланарный волновод [33; 95], а также созданы метаматериалы, позволяющие управлять запрещенной зоной такого волновода посредством перестройки кубитных частот [5] и предложены схемы для микроволнового детектирования пассивной линейной джозефсоновской антенной [100]. Данный раздел посвящен обобщению методики неразрушающего считывания состояний сверхпроводникового кубита джозефсоновским бифуркационным усилителем при взаимодействии с однофотонными полями в микроволновом волноводе. Особое внимание уделяется влиянию измерителя на транспортные характеристики микроволновых фотонов в такой системе. При этом считается, что управление состояниями кубитов в ячейках происходит за счёт их емкостной связи с резонатором:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}^{k\dagger}\hat{b}^k + \hat{H}_{rwa} + \sum_k \hbar g(\hat{b}^{k\dagger}e^{-ikx_0} + \hat{b}^k e^{ikx_0})\hat{\sigma}_x, \tag{2.32}$$

где ω_k и $\hat{b}^{k\dagger}$, $\hat{b}^k$ - частота и операторы рождения, уничтожения k-ой моды волновода, а x_0 - координата кубита. Гамильтониан ячейки, состоящей из кубита связанного с нелинейным джозефсоновским осциллятором, в приближении вращающейся волны H_{rwa} определяется выражением (2.17). Поскольку процесс инициализации кубита при данном рассмотрении происходит однофотонным полем, то считаем $\varepsilon(t) = 0$. Данное поле может быть экспериментально реализовано за счет использования источников одиночных фотонов [101; 102].

2.4.1 Метод проекционных операторов

Для описания и изучения процессов микроволнового транспорта удобно использовать метод проекционных операторов и эффективного неэрмитового гамильтониана [103—110] для решения обобщенной задачи рассеяния, где помимо вероятностей прохождения и отражения фотона существует вероятность поглощения его кубитом и переход последнего в возбужденное состояние. Отметим, что одно из первых применений данного метода для расчета микроволнового транспорта через одномерную цепочку кубитов было представлено в статье [111].

Кратко сформулируем суть метода: для квантовой системы, состояния которой определены эрмитовым гамильтонианом H, гильбертово пространство разбивается на два произвольно выбранных ортогональных подпространства с одноименными проекционными операторами P и Q, которые удовлетворяют свойствам полноты и ортогональности:

$$P \ + \ Q = 1, \tag{2.33}$$

$$QP \ = \ QP = 0. \tag{2.34}$$

Из определения проекционных операторов следует, что $P^2 = P$ и $Q^2 = Q$.

Волновая функция системы может быть представлена как сумма волновых функций лежащих в различных подпространствах:

$$\mid \Psi\rangle = P \mid \Psi\rangle + Q \mid \Psi\rangle = \mid \Psi_P\rangle + \mid \Psi_Q\rangle, \tag{2.35}$$

тогда стационарное уравнение Шрёдингера $H \mid \Psi\rangle = \mathrm{E} \mid \Psi\rangle$ может быть переписано в виде:

$$(P+Q)H(P+Q)(\mid \Psi_P\rangle + \mid \Psi_Q\rangle) = \mathrm{E} \mid \Psi_P\rangle + \mathrm{E} \mid \Psi_Q\rangle. \tag{2.36}$$

Действуя на уравнение (2.36) операторами P и Q, получим уравнения для подпространств:

$$(\mathrm{E} - H_{PP}) \mid \Psi_P\rangle \;=\; H_{PQ} \mid \Psi_Q\rangle, \tag{2.37}$$

$$(\mathrm{E} - H_{QQ}) \mid \Psi_Q\rangle \;=\; H_{QP} \mid \Psi_P\rangle, \tag{2.38}$$

где введены обозначения $H_{XY} = XHY$, а X, Y могут принимать значения операторов P, Q. Используя (2.38) для определения $\mid \Psi_P\rangle$ в терминах $\mid \Psi_Q\rangle$

$$\mid \Psi_P\rangle = \frac{1}{\mathrm{E} - H_{PP}} H_{PQ} \mid \Psi_Q\rangle. \tag{2.39}$$

Подставляя (2.39) в уравнение (2.37), формально получим стационарное уравнение Шредингера в Q-пространстве

$$H_{eff}(\mathrm{E}) \mid \Psi_Q\rangle = \mathrm{E} \mid \Psi_Q\rangle \tag{2.40}$$

с эффективным гамильтонианом явно зависящем от энергии:

$$H_{eff}(\mathrm{E}) = H_{QQ} + H_{QP} \frac{1}{\mathrm{E} - H_{PP}} H_{PQ}. \tag{2.41}$$

Отметим, что решение (2.39) не выполняется, когда H_{PP} имеет собственные значения равные энергии Е. В этом случае будем применять стандартное правило [110], согласно которому реальную энергию Е следует рассматривать как предельное значение из верхней половины плоскости комплексной энергии, $\mathrm{E}^+ = \mathrm{E} + i\varepsilon$, при этом эффективный гамильтониан (2.41) становится неэрмитовым.

Для решения задачи рассеяния необходимо восстановить общую волновую функцию $\mid \Psi\rangle$ из (2.37) и (2.38), определяемую "начальным" состоянием $\mid in\rangle$. Будем считать, что такое начальное состояние находится в P-подпространстве и удовлетворяет уравнению $H_{PP} \mid in\rangle = \mathrm{E} \mid in\rangle$, тогда формальное решение для $\mid \Psi_P\rangle$ из (2.37) запишется в виде:

$$\mid \Psi_P\rangle = \mid in\rangle + \frac{1}{\mathrm{E} - H_{PP}} H_{PQ} \mid \Psi_Q\rangle. \tag{2.42}$$

Соответствующее решение для $\mid \Psi_Q\rangle$ из (2.38):

$$\mid \Psi_Q\rangle = \frac{1}{\mathrm{E} - H_{eff}} H_{QP} \mid in\rangle. \tag{2.43}$$

Общая волновая функция (2.35), отвечающая начальному состоянию $\mid in\rangle$ может быть записана как:

$$\mid \Psi\rangle = \mid in\rangle + \frac{1}{\mathrm{E} - H_{eff}} H_{QP} \mid in\rangle + \frac{1}{\mathrm{E} - H_{PP}} H_{PQ} \frac{1}{\mathrm{E} - H_{eff}} H_{QP} \mid in\rangle. \tag{2.44}$$

Представленный явный вид волновой функции системы позволяет в дальнейшем, при проецировании на соответствующие базисы, определять вероятности прохождения и возбуждения фотона, а также вероятности возбуждения кубитов.

2.4.2 Кубит с измерительным осциллятором в волноводной линии

Для решения обобщенной задачи рассеяния методом проекционных операторов будем использовать однофотонное приближение. В этом приближении в волноводе может быть только один фотон, а кубит при этом находится в основном состоянии, либо в волноводе фотон отсутствует, а кубит – в возбужденном состоянии. Естественно измерительный джозефсоновский осциллятор, с которым связан кубит, будет влиять на общее состояние рассматриваемой системы. Используя (2.20), введем обозначение $\mid k, \varphi_n^+\rangle$ для состояния системы, при котором фотон находится в k-ой моде волновода с частотой ω_k, кубит находится в основном состоянии, а измерительный осциллятор возбужден на собственный уровень с номером n. Множество таких состояний будем называть подпространством P. Состояние, при котором фотон в волноводе отсутствует, кубит находится в возбужденном состоянии, а измерительный осциллятор возбужден на собственный уровень с номером n будем обозначать как $\mid e, \varphi_n^-\rangle$.

Множество таких состояний будем называть подпространством Q. Условия нормировки запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle k, \varphi_n^+ \mid k', \varphi_{n'}^+\rangle &= \frac{2\pi}{L}\delta(k-k')\delta_{nn'}, && (2.45)\\ \langle e, \varphi_n^- \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle &= \delta_{nn'}, && (2.46)\\ \langle k, \varphi_n^+ \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle &= 0, && (2.47)\end{aligned}$$

где L — длина волноводной линии.

В этих обозначениях можно записать явный вид проекционных операторов P и Q:

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k,n} \mid k, \varphi_n^+\rangle\langle k, \varphi_n^+ \mid = \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_n \mid k, \varphi_n^+\rangle\langle k, \varphi_n^+ \mid dk, && (2.48)\\ Q &= \sum_n \mid e, \varphi_n^-\rangle\langle e, \varphi_n^- \mid . && (2.49)\end{aligned}$$

Считаем, что начальное состояние представляет собой налетающий фотон $\mid in\rangle = \mid k, \varphi_n^+\rangle$. Энергия такого состояния может быть записана в виде:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_k^n = \hbar\omega_k - \frac{\hbar}{2}\Omega + E_n^+, \tag{2.50}$$

где $\Omega \equiv E_J/2$ — частота кубита в (2.2).

Для дальнейших вычислений необходимо найти матричные элементы в Q-пространстве эффективного гамильтониана (2.41):

$$\begin{aligned}\langle e, \varphi_n^- \mid H_{eff} \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle = \quad & \langle e, \varphi_n^- \mid H_{QQ} \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle \\ & + \langle e, \varphi_n^- \mid H_{QP}\frac{1}{\mathrm{E}_k^n - H_{PP}}H_{PQ} \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Первое слагаемое легко находится как

$$\langle e, \varphi_n^- \mid H_{QQ} \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle = (\frac{\hbar\Omega}{2} + E_n^-)\delta_{nn'}. \tag{2.52}$$

Второе слагаемое из (2.57) запишем в виде

$$\begin{aligned}&\langle e, \varphi_n^- \mid H_{QP}\frac{1}{\mathrm{E}_k^n - H_{PP}}H_{PQ} \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle = \frac{L^2}{4\pi^2}\iint\sum_m \langle e, \varphi_n^- \mid H_{QP} \mid q, \varphi_m^+\rangle \\ &\times\langle q, \varphi_m^+ \mid \frac{1}{\mathrm{E}_k^n - H_{PP}} \mid q', \varphi_m^+\rangle\langle q', \varphi_m^+ \mid H_{PQ} \mid e, \varphi_{n'}^-\rangle\, dq\, dq'.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Можно найти, что:

$$\begin{aligned} \langle e, \varphi_n^- \mid H_{QP} \mid q, \varphi_m^+ \rangle &= \hbar g e^{iqx} \langle \varphi_n^- \mid \varphi_m^+ \rangle, \\ \langle q', \varphi_m^+ \mid H_{PQ} \mid e, \varphi_{n'}^- \rangle &= \hbar g e^{-iq'x} \langle \varphi_m^+ \mid \varphi_{n'}^- \rangle. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Подставляя эти выражения в (2.53), получаем:

$$\langle e, \varphi_n^- \mid H_{QP} \frac{1}{\mathrm{E}_k^n - H_{PP}} H_{PQ} \mid e, \varphi_{n'}^- \rangle = \frac{L^2 \hbar^2 g^2}{4\pi^2} \sum_m \langle \varphi_n^- \mid \varphi_m^+ \rangle \langle \varphi_m^+ \mid \varphi_{n'}^- \rangle$$
$$\times \iint \langle q, \varphi_n^+ \mid \frac{e^{i(q-q')x}}{\mathrm{E}_k^n - H_{PP}} \mid q', \varphi_{n'}^+ \rangle \, dq \, dq'. \tag{2.55}$$

Учитывая, что $H_{PP} \mid q', \varphi_{n'}^+ \rangle = \mathrm{E}_{q'}^{n'} \mid q', \varphi_{n'}^+ \rangle$ и используя условие нормировки (2.45) получим

$$\langle e, \varphi_n^- \mid H_{QP} \frac{1}{\mathrm{E}_k^n - H_{PP}} H_{PQ} \mid e, \varphi_{n'}^- \rangle = -i\hbar\Gamma\delta_{nn'}, \tag{2.56}$$

где введено обозначение $\Gamma = \frac{Lg^2}{V_g}$, а $V_g = \omega_k/k$ - скорость движения фотона в волноводе. Явный вид матричных элементов эффективного гамильтониана (2.41):

$$\langle e, \varphi_n^- \mid H_{eff} \mid e, \varphi_{n'}^- \rangle = (\frac{\hbar\Omega}{2} + E_n^- - i\hbar\Gamma)\delta_{nn'}. \tag{2.57}$$

Поскольку в Q-подстространстве кубит находится в возбужденном состоянии, тогда амплитуда вероятность возбуждения кубита при условии, что измерительный осциллятор находится на уровне n' может быть найдена как:

$$\begin{aligned} e_{n'} &= \langle e, \varphi_{n'}^- \mid \Psi_Q \rangle = \langle e, \varphi_{n'}^- \mid \frac{1}{\mathrm{E} - H_{eff}} H_{QP} \mid k, \varphi_n^+ \rangle \\ &= \frac{\hbar g e^{iqx} \langle \varphi_{n'}^- \mid \varphi_n^+ \rangle}{\mathrm{E}_k^n - H_{eff}^{n'n'}}, \end{aligned} \tag{2.58}$$

где $H_{eff}^{n'n'} \equiv \langle e, \varphi_{n'}^- \mid H_{eff} \mid e, \varphi_{n'}^- \rangle$. Полная вероятность поглощения фотона кубитом

$$|e|^2 = \sum_{n'} |e_{n'}|^2. \tag{2.59}$$

Согласно [111] для получения вероятностей прохождения и отражения, необходимо найти волновую функцию фотона в координатном представлении при условии, что измерительный осциллятор находится на уровне n'. Функцию можно найти из выражения (2.60) домножением слева на вектор $\langle x, \varphi_{n'}^+ \mid$.

Учитывая, что $\langle x, \varphi_{n'}^{+} \mid k, \varphi_{n}^{+}\rangle = e^{ikx}\delta_{nn'}$ и производя аналогичные (2.56) вычисления, получим:

$$\langle x, \varphi_{n'}^{+} \mid \Psi\rangle = e^{ikx}\delta_{nn'} - i\hbar\Gamma e^{ikx_0}e^{iq_{n'}|x-x_0|}\sum_{m}\frac{\langle\varphi_{n'}^{+} \mid \varphi_{m}^{-}\rangle\langle\varphi_{m}^{-} \mid \varphi_{n}^{+}\rangle}{\mathrm{E}_k^n - H_{eff}^{mm}} \tag{2.60}$$

или, вводя обозначение $q_{n'} \equiv (\hbar\omega_k + E_n^+ - E_{n'}^+)/\hbar V_g$, и пологая $x_0 = 0$:

$$\langle x, \varphi_{n'}^{+} \mid \Psi\rangle = \begin{cases} t_{n'}e^{iq_{n'}x} & \text{при } (x > 0), \\ e^{ikx}\delta_{nn'} + r_{n'}e^{-iq_{n'}x} & \text{при } (x < 0), \end{cases} \tag{2.61}$$

где амплитуды вероятности прохождения и отражения фотона при условии, что осциллятор находится в состоянии $\mid \varphi_{n'}^{+}\rangle$ равны соответственно:

$$t_{n'} = \delta_{nn'} - i\hbar\Gamma\sum_{m}\frac{\langle\varphi_{n'}^{+} \mid \varphi_{m}^{-}\rangle\langle\varphi_{m}^{-} \mid \varphi_{n}^{+}\rangle}{\mathrm{E}_k^n - H_{eff}^{mm}}, \tag{2.62}$$

$$r_{n'} = -i\hbar\Gamma\sum_{m}\frac{\langle\varphi_{n'}^{+} \mid \varphi_{m}^{-}\rangle\langle\varphi_{m}^{-} \mid \varphi_{n}^{+}\rangle}{\mathrm{E}_k^n - H_{eff}^{mm}}. \tag{2.63}$$

Несложно получить общие вероятности прохождения $|t|^2 = \sum_{n'}|t_{n'}|^2$ и отражения $|r|^2 = \sum_{n'}|r_{n'}|^2$ фотона при любом конечном состоянии измерительного осциллятора.

Поскольку сумма всех вероятностей должна равняться единице, то для представления численных результатов будем использовать нормированные величины:

$$|\bar{\alpha}|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|e|^2 + |t|^2 + |r|^2}, \quad \alpha = e,\, t,\, r. \tag{2.64}$$

На рис.2.10 представлены зависимости коэффициентов прохождения, отражения фотона и возбуждения кубита в зависимости от частоты. Кубит на начальный момент времени находился в основном состоянии, а измерительный осциллятор в состоянии, которое соответствует правому состоянию равновесия (состояние с наименьшим числом квантов n_i на рис.2.7(а)). Видно, что при отсутствии нормировки (2.64) суммарная вероятность (серая пунктирная линия на рис.2.10) может быть больше единицы. Получившиеся зависимости хорошо совпадают с известными результатами [111], когда вероятности отражения фотона и возбуждения кубита быстро убывают при удалении от резонансной частоты. На рис.2.11(а-б) продемонстрировано, что влияние на микроволновой транспорт возрастает при увеличении числа квантов начального состояния измерительного осциллятора. Как и в случае с управлением состоянием кубита

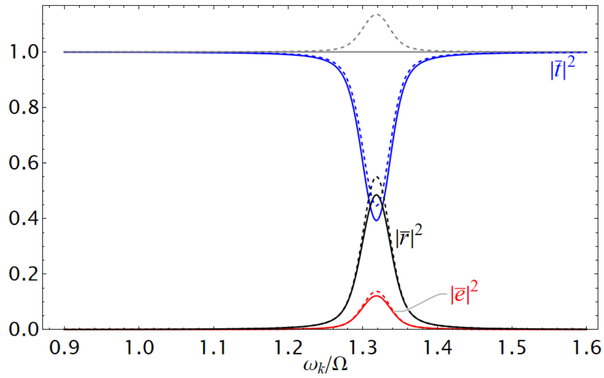

Рисунок 2.10 — Зависимость вероятностей прохождения (синий сплошной цвет - $|\bar{t}|^2$, синий пунктирный - $|t|^2$), отражения (черный сплошной цвет - $|\bar{r}|^2$, черный пунктирный - $|r|^2$) фотона и вероятности возбуждения кубита (красный сплошной цвет - $|\bar{e}|^2$, красный пунктирный - $|e|^2$) от частоты одиночного фотона ω_k. Серым цветом отображены суммарные вероятности $|\bar{t}|^2 + |\bar{r}|^2 + |\bar{e}|^2$ и $|t|^2 + |r|^2 + |e|^2$ соответственно. Используемые параметры системы: $\Gamma = 0.01\Omega$, $\gamma = 0.5\Gamma$, $\omega_0 = 0.1\Omega$, остальные параметры определены соотношениями (2.13). В начальный момент времени измерительный осциллятор находился на уровне, который соответствует правому положению равновесия.

импульсами Раби (рис.2.6), влияние измерителя минимально при начальном состоянии вблизи уровня соответствующему правому состоянию равновесия. В отличие от простейшей модели Джейнса-Каммингса [18], когда связь кубита с резонатором смещает эффективную частоту кубита без изменения резонансной кривой, в рассматриваемом варианте происходит нетривиальное изменение зависимости вероятности возбуждения кубита от частоты фотона при изменении числа квантов измерительного осциллятора. Характерные зависимости приведены на рис.2.12. Такое изменение резонансных кривых связано с тем фактом, что фоковский базис не является собственным для измерительного осциллятора.

2.5 Выводы к главе 2

В данной главе был предложен новый метод измерения состояний кубита нелинейным джозефсоновским осциллятором. Данная методика, во-первых,

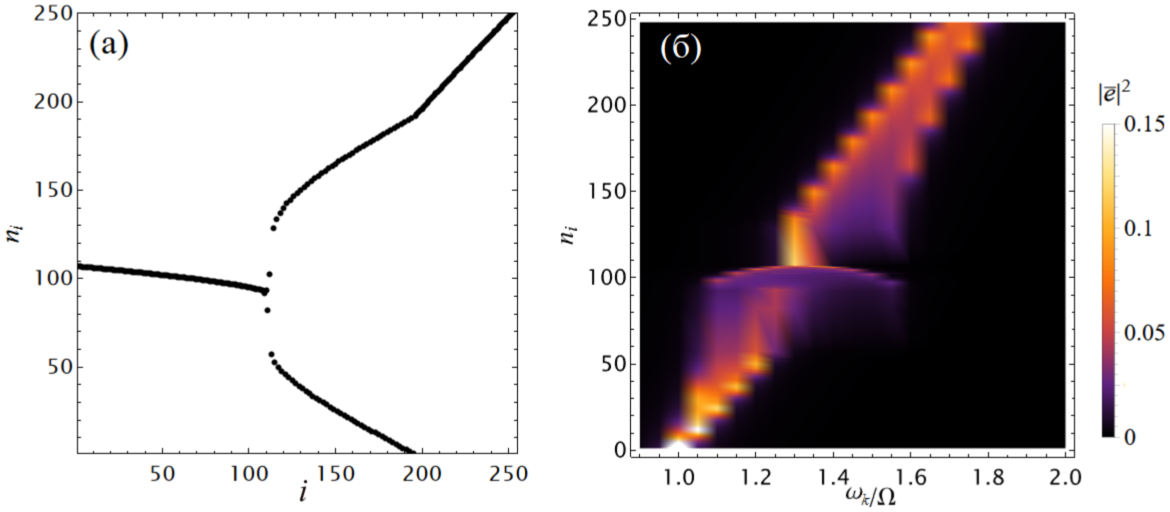

Рисунок 2.11 — (а) Зависимость среднего числа квантов от номера уровня нелинейного осциллятора. Данный график идентичен рис.2.7(а) для кубита в основном состоянии. (б) Зависимость вероятности возбуждения кубита от среднего числа квантов начального состояния нелинейного осциллятора и частоты фотона. Используемые параметры идентичны тем, что использовались для построения рис.2.10.

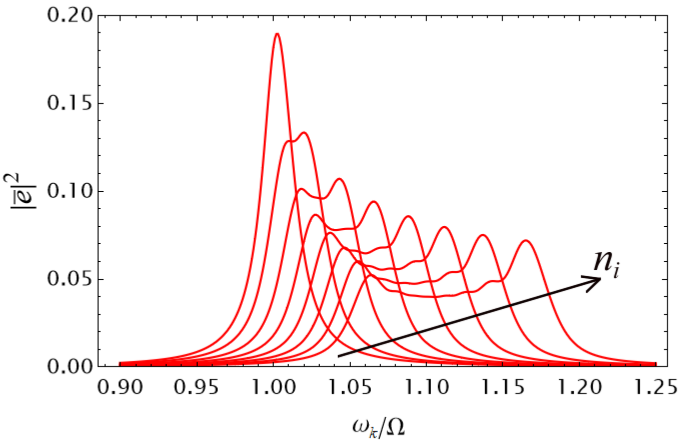

Рисунок 2.12 — Зависимость вероятности возбуждения кубита от частоты одиночного фотона ω_k при различных номерах уровней начального состояния измерительного осциллятора расположенных в порядке возрастания среднего числа квантов. На рисунке представлены зависимости для номеров начальных состояний: 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35. Остальные параметры идентичны тем, что использовались для построения рис.2.10.

была апробирована на случай управления классическим Раби-импульсом состояниями кубита связанного с осциллятором, а во-вторых, проведено обобщение методики на случай, когда система кубит и измерительный осциллятор помещены в волноводную линию.

Метод измерения основывается на чувствительности вероятностей захвата последнего в состояния динамического равновесия к поляризации кубита. Это происходит из-за чувствительности вероятностей перехода уровней вблизи сепаратрисной энергии. Поскольку после инициализации кубита ($\varepsilon(t) = 0$) оператор взаимодействия коммутирует с гамильтонианом осциллятора: $[\sigma_z, H_{rwa}] = 0$, то процедура измерения является неразрушающей. Были найдены параметры управляющего тока, для которых эффективность разделения состояний кубита с различными поляризациями является максимальной. Проведенный анализ влияния измерительного осциллятора на эффективность управления состоянием кубита в рамках микроволновой техники Раби позволяет заключить, что для управления кубитом с необходимой точностью измерительный осциллятор должен находиться в состоянии с небольшим средним значением числа квантов. Также была определена оптимальная амплитуда импульсов Раби для достижения наилучшей точности инициализации кубита — такая амплитуда должна задавать частоту Раби равную собственной частоте измерительного осциллятора.

Разработан протокол квантовых измерений высокодобротным бифуркационным осциллятором суперпозиционного состояния сверхпроводникового кубита. Одно из преимуществ данного подхода заключается в способности измерителя хранить информацию о состоянии кубита. Это оказывается возможным, поскольку в процессе релаксации осциллятор оказывается в суперпозиции состояний, уровни которых находятся далеко от классической сепаратрисы, а переходы между группами уровней относящихся к различным положениям равновесия под действием внешних воздействий маловероятны.

Произведена оценка времени приготовления и измерения состояний для типичных параметров системы "кубит+осциллятор" [27; 88]: ~ 150 нс. Поскольку предложенный метод может быть использован в диапазоне параметров, где существует бифуркационное поведение для обоих базисных состояний кубита, то дополнительный так называемый "запирающий" участок рис.2.1 в импульсе считываемого тока не требуется. Мы надеемся, что благодаря этому можно сократить время измерения состояний кубита.

В последнем разделе изучалась методика инициализации кубита при взаимодействии с однофотонными полями в микроволновом волноводе. Методом неэрмитового гамильтониана теоретически было найдено влияние состояния измерительного джозефсоновского осциллятора на микроволновой транспорт в такой системе. Было показано, что смещение эффективной частоты кубита растет при увеличении числа квантов измерительного осциллятора.

Таким образом, мы продемонстрировали, что высокодобротный нелинейный осциллятор может играть роль измерительного прибора в диапазоне параметров, где существует бифуркационное поведение для обоих базисных состояний кубита. Мы ожидаем, что этот метод применим к другим типам кубитов, таким как трансмоны [33].

Глава 3. Динамика и нейроморфные свойства джозефсоновского осциллятора

В настоящее время поиск оптимальной элементной базы искусственных нейронных сетей являются активно развивающейся областью исследований [112]. Нейроморфные вычисления используют нелинейно-динамическую аналогию между физическими системами и нейронными биофизическими процессами в человеческом мозге. Предложены различные реализации нейроморфных систем, а именно КМОП (комплементарный металлоксидный полупроводник) и мемристорные устройства [113], фотонные сети [114], спинтронные наноустройства [115] и сверхпроводящие системы [116].

Параллельно развивается гибридный подход к созданию сверхпроводниковых нейроморфных сетей способный функционировать как в квантовом режиме, так и классическом, а также комбинировать возможности различных элементных баз. Данный подход позволит интегрировать вычислительные нейросетевые блоки в состав сложной криогенной системы и эффективно решать наиболее актуальные на сегодняшний день задачи, затрачивая минимальное количество энергии при высокой производительности. Специфические возможности квантовой обработки информации, представленной в виде комплексных векторов и матриц большой размерности, органично дополнили достоинства нейрономорфных сетей. Однако в этой области на границе квантовых и нейросетевых вычислений до сих пор не уделялось достаточного внимания анализу активационных функций нейронов, хотя в классических аналогах именно эта характеристика крайне важна как при обучении нейросетей, так и при работе уже обученных искусственных нейронных сетей. При этом также представляется перспективным использовать возможности сверхпроводниковой энергоэффективной быстрой одноквантовой логики [43; 117], уже продемонстрировавшей возможности при моделировании динамики отдельных классических нейронов и синапсов [44; 45; 118].

Эффективная архитектура гибкой гибридной системы требует тесного пространственного расположения классической ИНС и управляющего квантового сопроцессора(см. рисунок 3.1(а)). Сверхпроводящая технология является перспективной платформой для такого решения, поскольку обе технологии сверхпроводящие квантовые схемы машинного обучения [1; 119; 120] и сверхпроводящие ИНС [121—129] быстро развиваются в настоящее время.

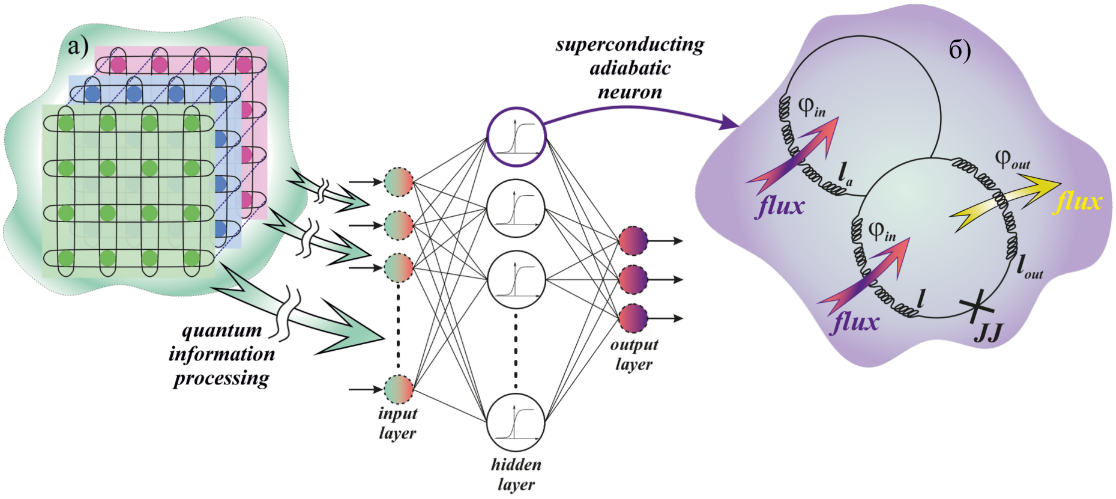

Рисунок 3.1 — (а) Эскиз гибридной системы, состоящей из классической ИНС, конфигурация которой (веса синапсов) динамически регулируется квантовым сопроцессором. (б) Схематическое изображение S_Q-нейрона, обеспечивающего нелинейное преобразование магнитного потока.

Надежная реализация рассматриваемой квантово-классической системы выиграет от использования единой технологии, подходящей для сверхпроводящих кубитов. В этом случае классическая часть может работать в адиабатическом режиме, обеспечивая минимальное воздействие на квантовые схемы. Однако квантовые эффекты, в свою очередь, могут существенно повлиять на работу нейроморфных элементов. В данной работе мы учитываем это, рассматривая работу нейронной ячейки в квантовом режиме. Исследуется квантовая динамика данной нейро-ячейки с целью поиска условий, обеспечивающих требуемую сигмоидную функцию активации (преобразование входного магнитного потока в средний выходной ток), подходящую для работы ИНС в качестве перцептрона [130]. Для краткости, исследуемая ячейка называется, соответственно, квантовым нейроном или S_Q-нейроном. Его ближайшим аналогом является потоковый кубит, используемый компанией D-Wave Systems в квантовых отжигах [131—134].

Важным стимулом для данного исследования являются ранее полученные результаты по классическим адиабатическим нейронам с чрезвычайно малой диссипацией энергии [117; 135—137]. Недавно была продемонстрирована возможность адиабатической эволюции состояния для нейрона в многослойном перцептроне с джозефсоновским переходом без резистивного шунтирования

[138]. Именно такая гетероструктура без резистивного шунтирования используется в реализации квантового нейрона на основе потокового кубита.

Таким образом, анализ современного состояния исследований по теме научной работы свидетельствуют, что использование именно сверхпроводниковых решений с RSFQ техниками управления [44; 45; 117], для реализации гибридных нейроморфных сетей, работающих в классическом и квантовых режимах вполне оправдано. Это связано с тем, что такие показатели как энергоэффективность и быстродействие на много порядков превосходят существующие аналоги, построенные с использованием полупроводниковых транзисторов на CMOS технологии. Кроме того, стремительное развитие и интерес к квантовым вычислениям, в частности создание компаниями IBM, Google, Microsoft, Intel первых прототипов квантовых компьютеров, которых основаны именно на сверхпроводниковой элементной базе ставит перед научным сообществом ряд нерешенных научных задач по реализации энергоэффективной сверхпроводниковой квантовой сети с быстрым вычислением активационных (в частности, логистических) функций, пригодной для работы с квантовой информацией, что в перспективе позволит радикально повысить эффективность систем интеллектуальной обработки данных.

Главной задачей данной главы является – теоретическое и численное изучение функционирования энергоэффективной элементной базы для сверхпроводниковых нейроморфных сетей, способных работать в классическом и квантовом режимах. Мы исследуем динамику этой ячейки в поисках условий, обеспечивающих требуемую сигмоидную функцию активации (преобразование входного магнитного потока в средний выходной ток), подходящую для работы ИНС в качестве перцептрона [130].

3.1 Функция активации нейрона

Искусственный нейрон должен обладает определённой передаточной функцией – функцией активации [139], которая задаёт соответствие между сигналом на выходе нейрона и сигналами на его входе. Самый простой является линейная функция активации $f(x) = \alpha x$, где α – параметр функции. Данную функцию активации используют в основном при тестировании искусственной нейронной сети.

Самая распространённая функция активации – это сигмоидальная функция активации. Именно благодаря данному типу функции удалось перейти от бинарных выходов нейрона к аналоговым. Аналитически сигмоидальную или логистическую функцию можно записать:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 - exp(-\alpha x)}.$$

Данная функция активации получила широкое распространение благодаря простому виду её производной:

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \alpha\sigma(x)(1 - \sigma(x)).$$

Благодаря этому данную функцию можно использовать в алгоритмах с обратным распространением ошибки.

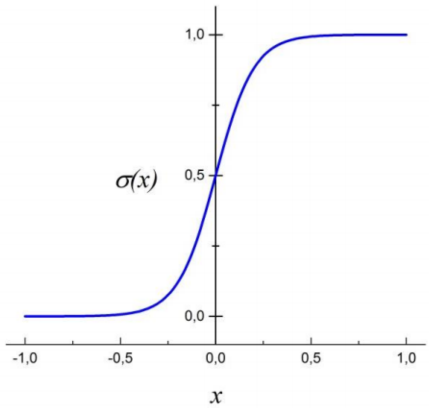

Рисунок 3.2 — Вид сигмоидальной функции активации.

3.2 Модель нейрона и основные уравнения

Квантовый нейрон, основанный на модифицированной схеме одноконтактного сверхпроводящего интерферометра с индуктивностью l без резистивного шунтирования с дополнительной индуктивностью l_a и выходной индуктивностью l_{out} (см. рисунок 3.1(б)), позволяет совместить нелинейность джозефсоновского контакта с линейным ток-потоковым преобразованием обычной индуктивности, чтобы получить передаточную характеристику, близкую к математической сигмоидальной функции. Эта схема ранее была представлена как классический сверхпроводящий нейрон для адиабатического персептрона [135; 138].

Ток-потоковое преобразование системы на рис. 3.1(б) можно представить в виде совместного решения уравнений Кирхгофа и условия баланса фаз в сверхпроводниковых контурах:

$$\begin{cases} \varphi + l \cdot i = \frac{\varphi_{in}}{2} + l_{out} i_{out}, \\ \varphi + l \cdot i = \frac{\varphi_{in}}{2} + l_a i_a, \\ i + i_{out} + i_a = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Полагаем, что при работе на вход подается импульс магнитного потока типа флаксон в цепях сверхпроводниковой адиабатической электроники:

$$\varphi_{in}(t) = A\left(\left(1 + e^{-2D(t-t_1)}\right)^{-1} + \left(1 + e^{2D(t-t_2)}\right)^{-1}\right) - A, \tag{3.2}$$

где $A = 4\pi$ – нормированная амплитуда внешнего воздействия, t_1 и $t_2 = 3t_1$ – характерные времена нарастания/спада управляющего сигнала, крутизна которого определяется параметром D. Отметим, что входной поток при этом нормирован на квант магнитного потока $\varphi_0 = \frac{\hbar}{2e} \approx 2.07 * 10^{-15}$Вб.

Из первого уравнения в системе (3.1) легко получить активационную функцию, которая представляет собой зависимость i_{out} выходного тока от входящего потока $\varphi_{in}(t)$, определенного выражением (3.2), и тока на джозефсоновском контакте i:

$$i_{out} = \frac{\varphi_{in} - 2l_a i}{2(l_a + l_{out})}, \quad i = b\varphi_{in} - a\varphi, \tag{3.3}$$

где введены параметры

$$a = \frac{l_a + l_{out}}{ll_a + l_{out}(l + l_a)}, \; b = \frac{l_a + 2l_{out}}{2(ll_a + l_{out}(l + l_a))}, \; l_a = 1 + l.$$

Классическая динамика рассматриваемой системы в рамках резистивной модели с ёмкостью для джозефсоновского контакта описывается с помощью уравнения для динамики джозефсоновской фазы:

$$\omega_p^{-2}\ddot{\varphi} + \omega_c^{-1}\dot{\varphi} + \sin(\varphi) = b\varphi_{in}(t) - a\varphi, \tag{3.4}$$

где индуктивности нормированы на $\frac{2\pi I_c}{\varphi_0}$, а I_c – критический ток джозефсоновского перехода. Инерционные свойства системы обусловлены емкостью перехода, которая наряду с критическим током I_c определяет плазменную частоту джозефсоновского перехода, $\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$. В этом случае диссипативные свойства системы определяются характерной джозефсоновской частотой $\omega_c = \frac{2eRI_c}{\hbar}$ (здесь R и C – сопротивление нормального состояния и емкость джозефсоновского перехода соответственно).

Рассматриваемая система становится подобна движению классической частицы с массой $M = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\frac{1}{\beta}$ и импульсом $p = \dot{\varphi}$ (нормированном на величину $\sqrt{ME_J}$). Соответствующие уравнение движения запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H(\varphi,p)}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(\varphi,p)}{\partial \varphi} = -a\varphi + b\varphi_{in} - \sin\varphi \end{cases} . \tag{3.5}$$

3.3 Спектр квантового нейрона

Квантовый режим проявляется когда характерные расстояния между уровнями в спектре эффективного гамильтониана значительно больше, чем тепловое размытие в исследуемом случае, и уширение уровня из-за влияния окружающей среды также относительно невелико. Описанные особенности влияют на способность нейрона нелинейно преобразовывать магнитный сигнал. Чтобы описать квантово-механическое поведение системы (3.4), мы начнем со случая джозефсоновского перехода с большим шунтируемым сопротивлением ($\omega_c^{-1} \to 0$). В этом случае уравнение (3.4) можно интерпретировать как уравнение движения для частицы с массой $M = \frac{\hbar^2}{2E_c}$ (энергия заряда $E_c = \frac{(2e)^2}{2C}$) в потенциале

$$U(\varphi, \varphi_{in}(t)) = E_J \frac{(b\varphi_{in}(t) - a\varphi)^2}{2a} + E_J(1 - \cos\varphi), \qquad E_J = \frac{I_C\varphi_0}{2\pi}. \tag{3.6}$$

Динамика системы определяется функцией Гамильтона, $H(p, \varphi, \varphi_{in}(t)) = \frac{p^2}{2M} + U(\varphi, \varphi_{in}(t))$. Процедура канонического квантования приводит к гамильтониану:

$$H(p, \varphi, \varphi_{in}(t)) = \frac{E_c p^2}{\hbar^2} + E_J\left(\frac{(b\varphi_{in}(t) - a\varphi)^2}{2a} + (1 - \cos\varphi)\right), \tag{3.7}$$

где операторы p и φ подчиняются коммутационному соотношению $[\varphi, p] = i\hbar$.

Форма потенциала (3.6) в каждый момент времени, и, следовательно, динамическое поведение системы, определяется физическими параметрами схемы, показанной на рисунке 3.1. Существует диапазон индуктивностей, в котором профиль потенциала (3.6) имеет форму двухъямного потенциал под действием входного потока (3.2). Их значения могут быть получены из решения трансцендентного уравнения

$$\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} \equiv a\varphi - b\varphi_{in}(t) + \sin\varphi = 0.$$

Потенциал имеет более одного экстремума в случае, когда $a < 1$, и, следовательно: $l > l^* \equiv \sqrt{l_{out}^2 + 1} - l_{out}$. Заметим, что для классического режима функционирования данной схемы сигмоидальная форма функции активации возможна только тогда, когда $l < l^*$, что продемонстрировано в работе [138].

Одной из целей этой работы является определение параметров адиабатического переключения квантового нейрона для $l < l^*$ (режим с одной ямой) и $l > l^*$ (режим с двумя ямами). В рамках адиабатического подхода возможно численно решить не зависящее от времени уравнение Шредингера для каждого момента времени, чтобы найти мгновенные уровни энергии, $E_n(t)$, и мгновенные волновые функции системы, $\psi_n(\varphi, t)$:

$$H(p, \varphi, \varphi_{in}(t))\psi_n(\varphi, t) = E_n(t)\psi_n(\varphi, t). \tag{3.8}$$

На рис. 3.3 приведена система мгновенных энергетических уровней и волновых функций системы в начальный момент времени (см. рис. 3.3 (а, в)) и в момент t_1 нарастания входящего магнитного потока (3.2), см. рис. 3.3 (б, г). Заметим, что для случая $l < l^*$ вид потенциала можно аппроксимировать гармоническим осциллятором. Симметрия потенциала при внешнем воздействии не изменяется, а на временах нарастания/спада сигнала наблюдается лишь сдвиг энергетических уровней с сохранением межуровневого расстояния. Иное поведение наблюдается для $l > l^*$, когда на временах нарастания/спада сигнала появляется двухъямный потенциал (рис. 3.3(в,г)), а в структуре уровней наблюдается выделение двух близких по энергии уровней, отделенных энергетической щелью от остального спектра, что напоминает формирование спектра потокового кубита [73].

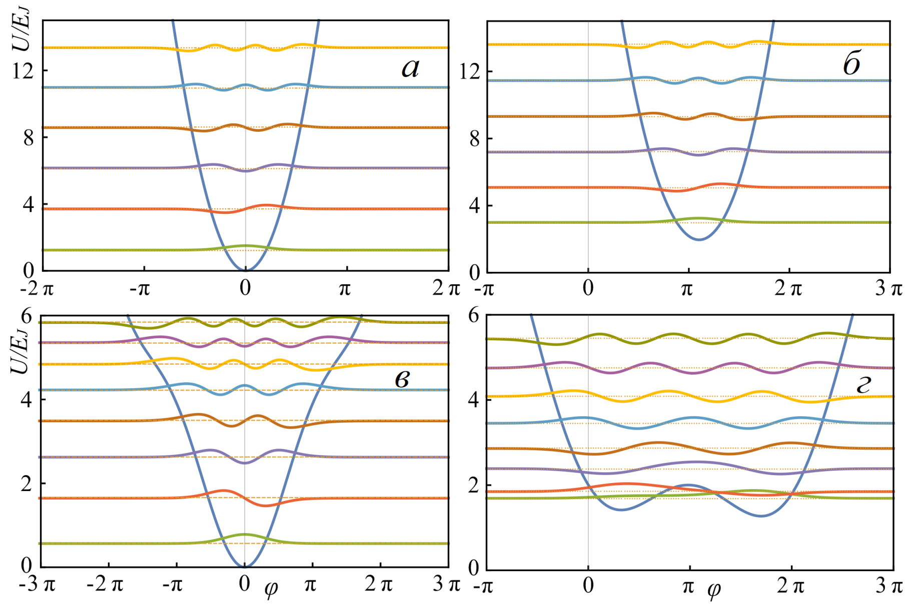

Рисунок 3.3 — Энергетический спектр и вид мгновенных волновых функций в моменты времени $t = 0$ (а, в) и при $t_1 = 500$ (б, г) в выражении (2) для значения индуктивности $l = 0.1$ (а, б) и $l = 2.5$ (в, г). Параметры системы и входящего магнитного потока: $E_J = 2E_C$, $l_a = l + 1$, $l_{out} = 0.1$, $D = 0.008$, $A = 4\pi$, $t_2 = 3t_1$.

3.4 Динамика квантового нейрона без диссипации

Процесс переключения квантового нейрона (3.6) происходит на основе нелинейного преобразования входящего магнитного потока (3.2), а динамика системы описывается временным уравнением Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H(p, \varphi, \varphi_{in}(t))\Psi(t). \tag{3.9}$$

В общем случае волновые функции могут быть найдены численным решением уравнения (3.9). После этого, исходя из эволюции средних значений операторов фазы и тока, мы находим передаточную характеристику $i_{out}(\varphi_{in})$ для квантового S_Q-нейрона, его функцию активации. Основная концепция наших расчетов такова, что мы предполагаем, что система инициализирована в начальный момент времени. При криогенных температурах ($\sim$мК) это соответствует локализации системы на нижних энергетических уровнях (обычно в основном или в первом возбужденном состоянии).

Согласно уравнению (3.3) вычисляется зависимость среднего значения выходного тока i_{out} от входного магнитного потока φ_{in}:

$$\begin{cases} \langle \varphi(t) \rangle = \langle \Psi(t) \left| \varphi \right| \Psi(t) \rangle , \\ i_{out} \equiv \langle i(t) \rangle = b\varphi_{in} - a \langle \varphi(t) \rangle . \end{cases} \tag{3.10}$$

Для визуализации адиабатической динамики в пространстве "фаза — сопряженный импульс" полезно использовать функцию Вигнера, которая определяется фурье-образом от билинейной комбинации волновых функций соотношением:

$$W(\varphi, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} \Psi(\varphi + \xi/2, t) \Psi^*(\varphi' - \xi/2, t). \tag{3.11}$$

Волновая функция $\Psi(\varphi, t)$ может быть разложена по мгновенным собственным функциям $\psi_n(\varphi, t)$:

$$\Psi(\varphi, t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(\varphi, t) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \right], \tag{3.12}$$

где коэффициенты $c_n(0)$ определяются из начальных условий для волновой функции $\Psi(\varphi, 0)$. Изменения коэффициентов $c_n(t)$ во времени определяются связанной системой уравнений

$$i \frac{dc_n(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \frac{d\varphi_{in}(t)}{dt} \sum_{m \neq n} \frac{1}{\omega_{n,m}(t)} \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_{in}} \right)_{n,m} c_m(t) exp \left[i \int_0^t \omega_{n,m}(t') dt' \right] - \\ - i c_n(t) \left\langle \psi_n | \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \right\rangle , \tag{3.13}$$

где фигурируют зависящие от времени матричные элементы, скорость изменения которых определяется выражением $\hbar\omega_{n,m}(t) = E_n(t) - E_m(t)$. Если для пар уровней выполнены условия адиабатичности

$$\left| \frac{1}{\hbar \omega_{n,m}(t)} \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_{in}} \right)_{n,m} \right| << 1, \tag{3.14}$$

то переходы между ними становятся маловероятными.

Мы рассматриваем случай, когда учитываются только два нижних уровня. В этом случае оставшиеся уровни энергии лежат заметно выше выбранного дублета. Кроме того, должны выполняться условия адиабатичности (3.27). Когда эти условия выполнены, для аппроксимации волновой функции можно записать следующее выражение:

$$\Psi(\varphi,t) = c_0(t)\psi_0(\varphi,t)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_0(t')dt'\right] + \\ + c_1(t)\psi_1(\varphi,t)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_1(t')dt'\right]. \quad (3.15)$$

Тогда для функции Вигнера получаем:

$$W(\varphi,p,t) = |c_0(t)|^2 K_{0,0}(\varphi,p,t) + |c_1(t)|^2 K_{1,1}(\varphi,p,t) + \\ + c_0(t)c_1^*(t)K_{0,1}(\varphi,p,t)\exp\left[i\int_0^t \omega_{0,1}(t')dt'\right] + \\ + c_1(t)c_0^*(t)K_{1,0}(\varphi,p,t)\exp\left[-i\int_0^t \omega_{0,1}(t')dt'\right], \quad (3.16)$$

где

$$K_{n,m}(\varphi,p,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ip\xi}\psi_n(\varphi+\xi/2,t)\psi_m^*(\varphi-\xi/2,t). \quad (3.17)$$

Далее мы продемонстрируем два эффекта, наблюдаемые в данном приближении:

1) можно построить суперпозицию базисных состояний и наблюдать проявление интерференции квантовых состояний в осцилляциях выходной характеристики;

2) существуют осцилляции на выходной характеристике из-за влияния неадибатичности.

3.4.1 Одноямный потенциал

Численный анализ показал, что функции активации для квантового нейрона, инициализированного в основных состояниях, имеют сигмоидальную форму (черная и красная кривые на рис. 3.4). Это хорошо согласуется с классическим режимом, см. работу [138].

Обратим внимание, что когда входной поток (3.2) меняется от 0 до 4π, фаза φ на джозефсоновском переходе меняется от 0 до 2π и наоборот. Полное

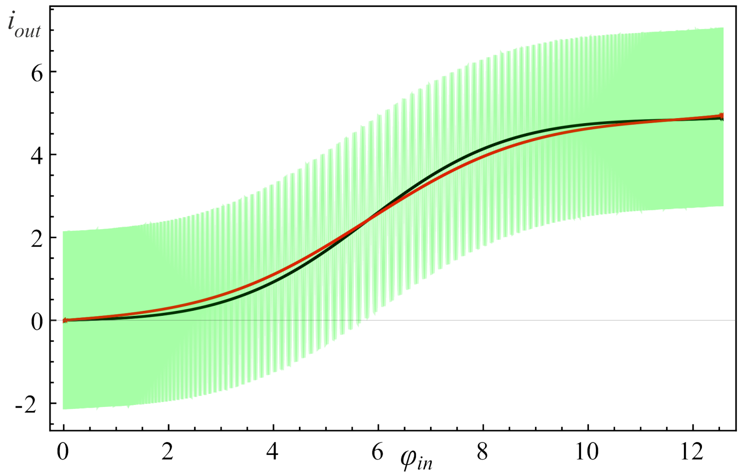

Рисунок 3.4 — Активационная функция нейрона для $l = 0.1$ при инициализации в основном состоянии $\psi_0(\varphi, 0)$ – черная кривая, первом возбужденном состоянии $\psi_1(\varphi, 0)$ – красная кривая и суперпозиционном состоянии $(\psi_0(\varphi, 0) + \psi_1(\varphi, 0))/\sqrt{2}$ – зеленая кривая. Для параметров входящего потока $D = 0.008$, $A = 4\pi$, $t_1 = 500$, $t_2 = 3t_1$.

совпадение двух путей эволюции системы происходит при значительном увеличении времени нарастания "$\uparrow$"($\varphi = 0 \to 2\pi$) и времени спада "$\downarrow$"($\varphi = 2\pi \to 0$) входного сигнала. Для суперпозиции основных состояний, как видно на рисунке 3.4, наблюдаются осцилляции в форме функции активации. В связи с этим, для ясности интерпретации полученных результатов квантовой динамики, мы рассматриваем эволюцию системы в фазовом пространстве.

Если условие адиабатичности (3.27) выполнено и система изначально находилась на основном уровне $|c_0(0)|^2 = 1$ (рис. 3.5(а)), то динамика функции Вигнера отражает распределение по фазе и сопряженному импульсу, связанное с этим уровнем. Аналогичные рассуждения можно привести и для случая, когда заселен первый возбужденный уровень (рис. 3.5 б). Здесь центр плотности вероятности $|\Psi(\varphi, t)|^2$ и распределение функции Вигнера (рис. 3.5(б)) плавно смещаются от $\varphi = 0$ до 2π, когда клетка подвергается воздействию входного магнитного потока. Система остается локализованной в начальном состоянии, и в результате функция активации принимает сигмоидальную форму без каких-либо колебаний (черная и красная кривые на рис. 3.4). Если система инициализирована в суперпозиции низших состояний (рис. 3.5 в), то возникает интерференционный член в функции Вигнера, см. последние два члена в (3.16). Это выражается в осцилляциях функции Вигнера между максимумом (красная область) и минимумом (синяя область), см. рис. 3.6. Когерентные осцилляции на ток-потоковой зависимости также являются свидетельством этого явления (см. зеленую кривую на рис. 3.4).

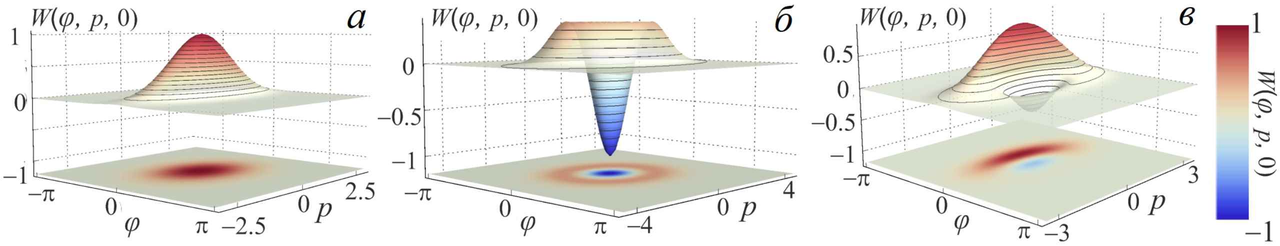

Рисунок 3.5 — Функция Вигнера $W(\varphi, p, t = 0)$ при инициализации системы при $t = 0$ (а) в основном состоянии $\psi_0(\varphi, 0)$, (б) первом возбужденном $\psi_1(\varphi, 0)$ (в) суперпозиционном состоянии $(\psi_0(\varphi, 0) + (\psi_1(\varphi, 0))/\sqrt{2}$ для $l = 0.1$ остальные параметры аналогичны тем, что приведены на рис.3.4.

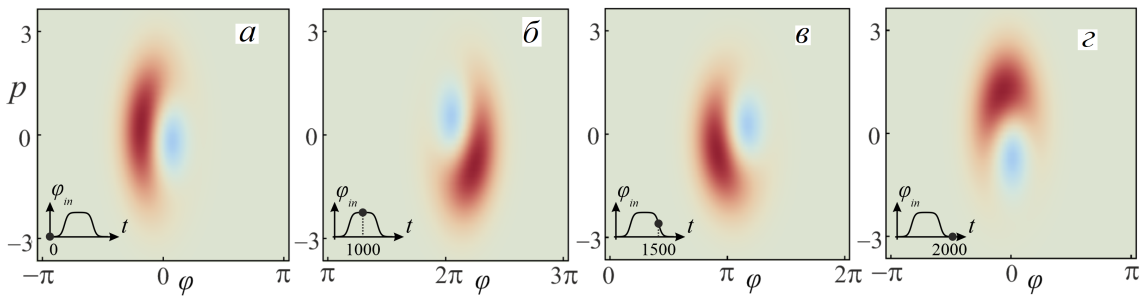

Рисунок 3.6 — Эволюция функции Вигнера под действием внешнего потока φ_{in} при инициализации $t = 0$ (а) в суперпозиционное состояние $(\psi_0(\varphi, 0) + \psi_1(\varphi, 0))/\sqrt{2}$ в моменты времени $t = 1000$ (б); 1500 (в); 2000 (г). Остальные параметры аналогичны тем, что приведены на рис.3.4.

3.4.2 Двухъямный потенциал

Для случая двухъямного потенциала при $l > l^*$ был изучен вопрос о квантовой динамике и формировании сигмоидальной активационной функции. Первоначально параметры внешнего воздействия были выбраны, аналогичны тем, что на рис. 3.4. При этом моделирование демонстрирует нарушение сигмоидального характера активационной функции даже при старте эволюции из базисных энергетических состояний, см. рис. 3.7.

В процессе эволюции происходит значительная перестройка в спектре энергетических уровней (сближение между основным и первым возбужденным

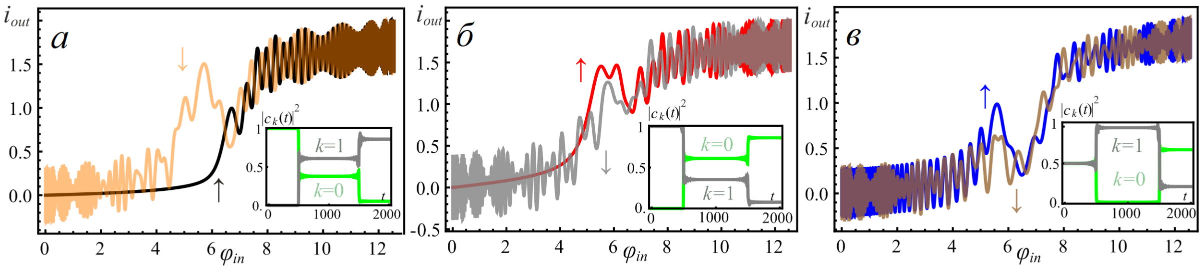

Рисунок 3.7 — Активационная функция нейрона для $l = 2.5$ при инициализации (а) в основном состоянии – черная “↑” ($\varphi = 0 \to 2\pi$) и оранжевая “↓” ($\varphi = 2\pi \to 0$) кривые, (б) в первом возбужденном состоянии – красная “↑” и серая “↓” кривые и (в) в суперпозиционном состоянии – синяя “↑” и коричневая “↓” кривые. Для параметров входящего потока $D = 0.008$, $A = 4\pi$, $t_1 = 500$, $t_2 = 3t_1$. “↑” соответствует ветви подъема φ_{in}, “↓” соответствует ветви спада φ_{in}.

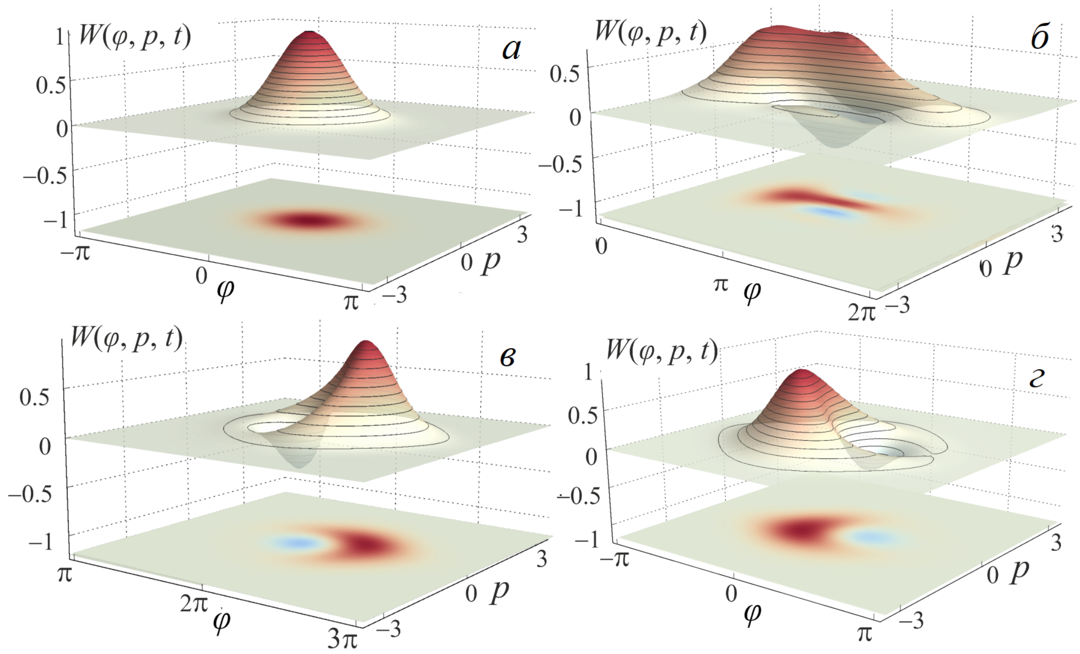

Рисунок 3.8 — Эволюция функции Вигнера нейрона $l = 2.5$ под действием внешнего потока φ_{in} при инициализации в основное состояние в моменты времени $t = 0$ (а); $t = 500$ (б); $t = 1000$ (в); $t = 2000$ (г). Параметры поля аналогичны тем, что приведены на рис.3.7.

уровнями) во время формирования двухъямного потенциала (см. рис. 3.3). Это соответствует периоду нарастания сигнала по пути $\varphi = 0 \to 2\pi$. Заметим, что в этом случае нарушается условие адиабатичности (3.27). Это является следствием увеличения входного потока φ_{in}, что приводит к возбуждению вышележащих состояний. При этом система перестает быть локализованной в начальном состоянии, что наглядно показано на рис. 3.8 при эволюции функции Вигнера в фазовом пространстве. Видно, что система эволюционирует адиабатически из основного состояния до достижения $\varphi_{in} = 2\pi$, когда образуется двухъямность в потенциальном профиле (3.6), при этом скорость изменения потенциала превышает скорость локализации состояний и за счет эффекта туннелирования происходит перераспределение волновой функции из левого в правый локальные минимумы потенциального профиля (см. рис. 3.3). На рис. 3.8(б-г) хорошо видно, что функция Вигнера имеет отрицательные значения из-за образования состояния суперпозиции в процессе эволюции (см. также вставки на рис. 3.7 для коэффициентов заселения $|c_0(0)|^2$ и $|c_1(0)|^2$ базисных уровней). По этой причине функция активации на рис. 3.7 демонстрирует осцилляции, связанные с интерференцией волновых функций. Эти осцилляции более нерегулярны, чем на рис. 3.4 (см. зеленую кривую). Это связано с возникновением интерференционных фазовых эффектов большего числа состояний, участвующих в суперпозиции, что соответствует нарушению условия адиабатичности (3.27).

Следует заметить, что если скорость изменения потенциала меньше, чем скорость движения локализованного состояния системы, а условие адиабатичности (3.27) выполнено, то существует режим формирования сигмоидальной активационной характеристики и в случае прохождения области двухъямного потенциального профиля (рис. 3.9). При этом наблюдается хорошее совпадение прямого "$\uparrow$" и обратного хода "$\downarrow$" для S_Q-нейрона.

3.4.3 Плоскость параметров адиабатического квантового нейрона

Для работы с квантовым нейроном, реализующего требуемую сигмоидальную характеристику, необходимо определить параметры внешнего поля $\varphi_{in}(t)$, чтобы выполнялось условие адиабатичности (3.27) при заданных значениях индуктивностей в схеме нейрона. В связи с этим нами определены оптимальные параметры функционирования нейрона в адиабатическом режиме с реализацией передаточной характеристики, форма которой максимально близка к математической сигмоиде:

$$\sigma(\varphi_{in}) = \frac{p_1}{1 + e^{-p_2\varphi_{in}+p_3}} + p_4, \tag{3.18}$$

где p_i – параметры, по которым проводится численная аппроксимация для сравнения идеальной активационной функции $\sigma(\varphi_{in})$ и численно найденной величиной $i_{out}(\varphi_{in})$ согласно величине квадрата стандартного отклонения SD:

$$SD = Dis[(\sigma(\varphi_{in}) - i_{out}(\varphi_{in}))^2], \tag{3.19}$$

где $Dis[(...)]$ обозначает дисперсию. Из анализа рис. 3.7 и 3.9 ясно, что па-

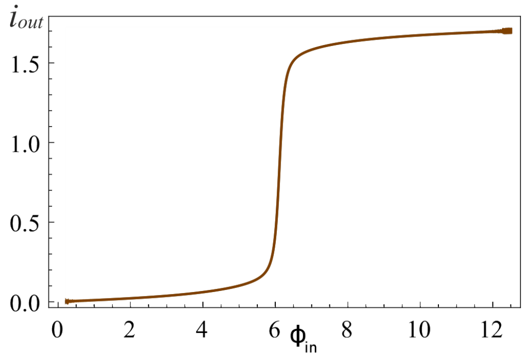

Рисунок 3.9 — Активационная функция нейрона для $l = 2.5$ при инициализации в основном состоянии для $D = 0.0002$, $A = 4\pi$, $t_1 = 10000$, $t_2 = 3t_1$.

раметрами влияющими на режим образования сигмоидальной характеристики в первую очередь является скорость нарастания/спада сигнала D (в формуле (3.2)) и параметр индуктивности l, определяющий вид потенциального профиля. В связи с этим на рис. 3.10 приводится плоскость параметров $SD(l, D)$, где цветом указано значение среднеквадратичного отклонения от “идеальной сигмоиды”. При этом считаем, что для $SD < 0.001$ формируется требуемая сигмоидная активационная функция.

Из анализа рис. 3.10 можно сделать вывод, что чем выше значение параметра индуктивности l, тем медленнее происходит процесс адиабатического переключения квантового нейрона. Проводя оценки времени переключения для типичных параметров сверхпроводниковой цепи $I_c = 0.35$ мкА, $C = 10$ фФ, $\omega_p \sim 10^{11}$ с$^{-1}$ нами произведена оценка времени адиабатического переключения нейрона, которое составило ~ 5 нс для $l = 0.1$ и ~ 100 нс для $l = 2.5$.

В процессе нарастания и спадания внешнего поля мгновенные уровни энергии сближаются. Для основного и первого возбужденного уровней моменты сближений уровней соответствуют $t = \tau_{1,2}$, и существует не нулевая вероятность туннелирования Ландау-Зинера между этими состояниями при определенных параметрах внешнего поля. В силу того, что утечка в вышележащие состояния (для $N > 2$) при таких переходах менее 4%, то можно использовать двухуровневое приближение ($N = 2$) для аналитической оценки вероятностей переходов

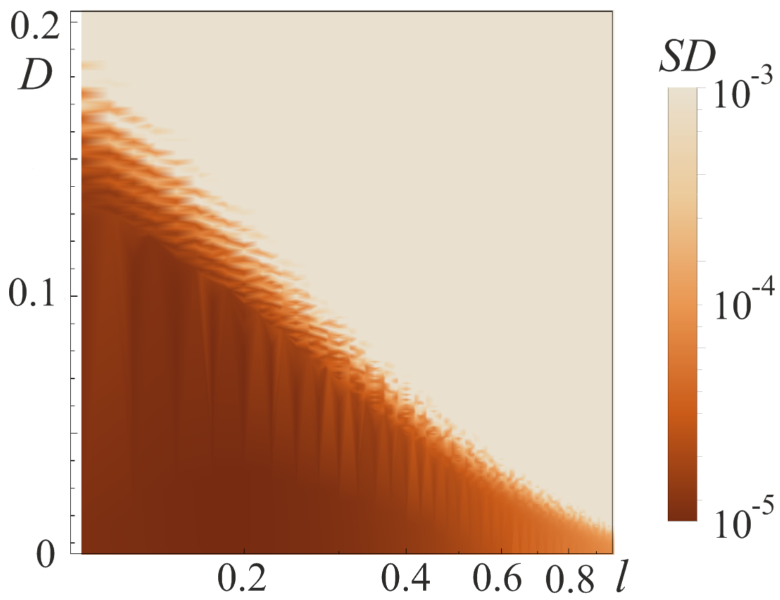

Рисунок 3.10 — Значение среднеквадратичного отклонения SD от математической сигмоиды при различных параметрах индуктивности l и величинах D – темпов нарастания/спада сигнала $\varphi_{in}(t)$. В начальный момент времени система инициализирована в основном состоянии, $A = 4\pi$, $l_a = l + 1$, $l_{out} = 0.1$.

Ландау-Зинера. В рамках данного приближения систему, вблизи моментов сближения уровней, можно аппроксимировать следующим гамильтонианом:

$$H(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon(t) & \delta \\ \delta & -\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

где $\delta = \min\limits_t(E_1(t) - E_0(t))$ определяет расстояние между уровнями в момент максимального сближения, а $\varepsilon(t)$ определяет вид антикроссинга уровней. При этом мгновенные уровни основного и возбужденного состояния можно записать как:

$$E_{0,1}(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2(t)}. \tag{3.21}$$

Оценим вероятности перехода Ландау-Зинера в момент первого сближения уровней, что соответствует времени $t = \tau_1$. Как наглядно видно из моделирования (рис.3.7), переходы происходят на малых масштабах по времени, что позволяет нам ограничиться линейным разложением по времени $\varepsilon(\tau_1 + \tau) \approx \varepsilon'(\tau_1)\ \tau$ и записать гамильтониан системы как:

$$H(\tau_1 + \tau) \approx H(\tau_1) + V(\tau), \tag{3.22}$$

где $V(\tau) = -\frac{1}{2}ADb\varphi\tau$ мало на масштабах времени перехода Ландау-Зинера и это позволяет использовать теорию возмущений для оценки значения $\varepsilon'(\tau_1)$. В

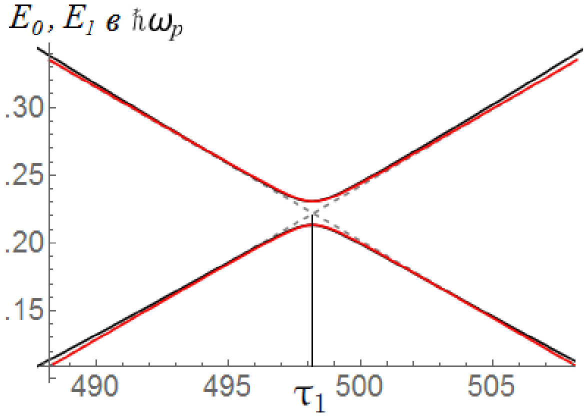

Рисунок 3.11 — Сближение двух мгновенных уровней с наименьшей энергией в момент нарастания внешнего потока. Черная линия соответствует численному решению 3.8, красная демонстрирует теоретическую оценку поведения таких уровней 3.21, а пунктирами показаны их асимптотики. Используемые параметры системы: $l_a = 1 + l$, $l_{out} = 0.1$, $E_J = 2E_c$, $t_1 = 3t_2$.

моменты сближения мгновенные энергии E_0 и E_1 достигают экстремума, в связи с этим для аналитической оценки величины сближения уровней необходимо учитывать второй порядок теории возмущений:

$$E_{1,0}(\tau_1 + \tau) \approx \pm\frac{\Delta}{2} \pm \frac{|V_{01}(\tau)|^2}{\Delta}, \tag{3.23}$$

где $V_{01}(\tau) \equiv \langle\psi_0(\tau_1)|V(\tau)|\psi_1(\tau_1)\rangle$. И тогда расстояние между уровнями может быть найдено как:

$$E_1(\tau_1 + \tau) - E_0(\tau_1 + \tau) \approx \Delta + \frac{2|V_{01}(\tau)|^2}{\Delta}, \tag{3.24}$$

С другой стороны, раскладывая в ряд до второго порядка можно получить разницу между уровнями:

$$E_1(\tau_1 + \tau) - E_0(\tau_1 + \tau) \approx \Delta + \frac{\varepsilon'^2(\tau_1)}{2\Delta}\tau^2, \tag{3.25}$$

тогда из (3.24) и (3.25) находим:

$$\varepsilon'(\tau_1) = AD \cdot b|\langle\psi_0(\tau_1)|\varphi|\psi_1(\tau_1)\rangle|. \tag{3.26}$$

На основе полученного выражения линейного коэффициента (3.26) используем известную формулу для расчета вероятности перехода Ландау-Зинера при однократном сближении уровней:

$$P_{LZ} = e^{-2\pi\Gamma}, \quad \Gamma \equiv -\frac{\pi\Delta^2}{2\hbar AD \cdot b|\langle\psi_0(\tau_1)|\varphi|\psi_1(\tau_1)\rangle|}. \tag{3.27}$$

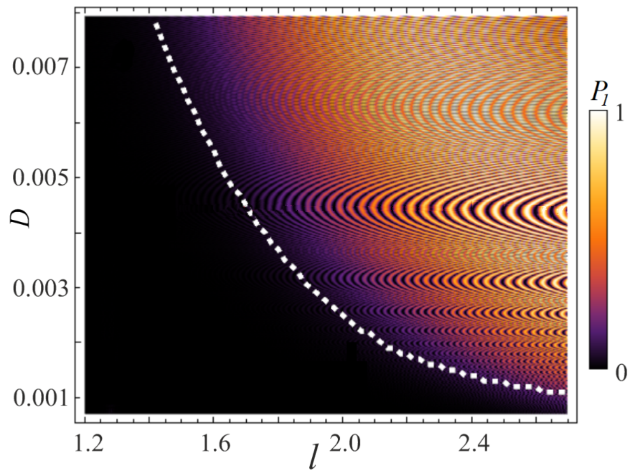

Рисунок 3.12 — Вероятность нахождение нейрона в первом возбужденном состоянии после окончания действия внешнего поля. В начальный момент времени система находилось в основном состоянии. Белая кривая соответствует теоретической оценки возникновения переходов Ландау-Зинера с вероятностью $P_{LZ} = 0{,}01$. Используемые параметры системы: $l_a = 1 + l$, $l_{out} = 0.1$, $E_J = 2E_c$, $t_1 = 3t_2$.

Используя полученную формулу (3.27), можно оценить оценим границу возникновения переходов Ландау-Зинера для различных параметров управляющего поля и индуктивностей в цепи. На рис. 3.12 продемонстрирована вероятность нахождение системы в первом возбужденном состоянии после окончания действия внешнего поля при различных параметрах индуктивности l и скорости измерения внешнего потока D при изначальной инициализации на основном уровне. Белая пунктирная линия согласно выражениям (3.27) обозначает предел вероятности перехода из основного состояния в возбужденное $P_{LZ} < 0{,}01$.

3.5 Влияние диссипации на динамику квантового нейрона

Для корректного описания эволюции квантового нейрона необходимо учитывать диссипативные процессы, которые могут привести к разрушению когерентности в системе и повлиять на функционирование схемы в экспериментах. В качестве простейшей диссипативной, аналогично главам 1-2, воспользуемся линейной моделью взаимодействия квантового нейрона и термостата:

$$H_{int} = k\varphi \sum_i (b_i{}^\dagger + b_i), \tag{3.28}$$

где $b_i^\dagger$ и b_i — операторы рождения и уничтожения i-й бозонной моды, k — константа связи. При адиабатическом изменении входного потока состояние нейрона можно описать через мгновенный собственный базис $\psi_n(\varphi, t)$, уравнение (3.9), используя матрицу плотности:

$$\rho(t) = \sum_{m,n} \rho_{mn}(\varphi, t) \left|\psi_m(\varphi, t)\right\rangle \left\langle\psi_n(\varphi, t)\right| . \tag{3.29}$$

Мы будем использовать только приближение Борна-Маркова и пренебрегать лэмбовским сдвигом. Тогда обобщенное основное кинетическое уравнение [140] для матрицы плотности в терминах мгновенного собственного базиса в представлении Шредингера может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{mn} = i\frac{E_n(t) - E_m(t)}{\hbar}\rho_{mn} - \sum_{a,b} \rho_{bn} W_{bama} - \sum_{c,d} \rho_{md} W_{dccn} + \\ + \sum_{e,f} (\rho_{ef} W_{emfn} + \rho_{fe} W_{enmf}),\end{aligned} \tag{3.30}$$

где W_{abcd} определены как

$$W_{abcd} = \frac{\lambda}{2} \left\langle\psi_a\right|\varphi\left|\psi_b\right\rangle \left\langle\psi_c\right|\varphi\left|\psi_d\right\rangle [\theta(\omega_{ab})(\bar{n}(\omega_{ab}) + 1) + \theta(\omega_{ba})\bar{n}(\omega_{ba})] . \tag{3.31}$$

Здесь $\lambda = \frac{2\pi g k^2}{\hbar^2}$ — перенормированная константа связи, θ — функция Хевисайда, $\bar{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ — распределение Планка, а g — плотность бозонных мод, которая предполагается постоянной. Отметим, что обобщенное основное кинетическое уравнение в мгновенном базисе справедливо при выполнении стандартного адиабатического условия $h/\delta^2 \ll 1$, где $\delta = \min_t(E_1(t) - E_0(t))$ и $h = \max_{t,n,m} |\left\langle\psi_n(t)\right|\partial_t H\left|\psi_m(t)\right\rangle|$. Отношение $h/\delta^2 \approx 0.08$ для характерных параметров $l = 2$, $D = 0.001$.

Обобщенное основное кинетическое уравнение с секулярным приближением легко получается из (3.30) путем умножения четвертого члена на символ Кронекера δ_{mn} и наложения дополнительных условий на индексы суммирования $b = m$, $d = n$ и $e = f$. Далее, сохраняя только диагональные члены матрицы плотности, можно получить основное кинетическое уравнение или уравнение Паули. При всех рассмотренных нами параметрах секулярное приближение оказывает пренебрежимо малое влияние на численное решение обобщенного основного кинетического уравнения.

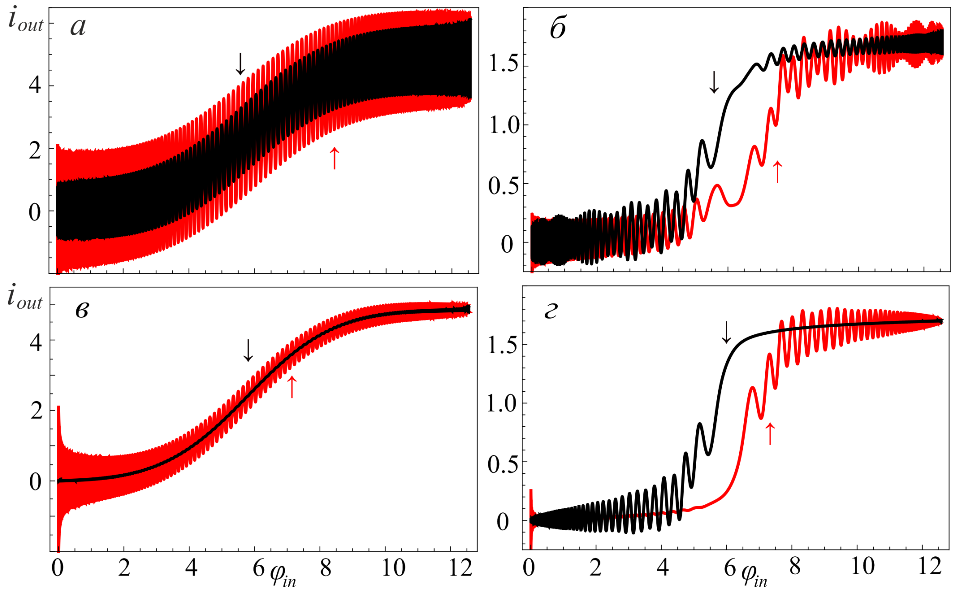

Рисунок 3.13 — Функции активации нейрона при $l = 0{,}1$ (а, в) и $l = 2{,}5$ (б, г) для различных перенормированных констант связи: $\lambda = 0{,}005$ (а, б) и $\lambda = 0{,}035$ (в, г). Параметры внешнего потока: $D = 0{,}008$, $A = 4\pi$, $t_1 = 500$; температура бозонного термостата $T = 50$ мК; нейрон инициализируется в суперпозиции двух основных состояний.

На рис. 3.13(а-г) представлены функции активации, полученные путем решения обобщенного основного кинетического уравнения для различных значений индуктивности l и перенормированной константы связи λ. Начальные условия представляют собой суперпозицию состояний: $(\psi_0(\varphi, 0)+\psi_1(\varphi, 0))/\sqrt{2}$. Как и следовало ожидать, осцилляции возникают из-за интерференции между уровнями, которые уменьшаются с ростом константы связи.

3.6 Влияние температуры на выходные характеристики

В предыдущем разделе было изучено влияние диссипации на активационную функцию для квантового нейрона и продемонстрирована простая зависимость, что при увеличении коэффициента связи с резервуаром происходит подавление осцилляций. Однако ещё одним (помимо релаксации) важным неисследованным фактором, влияющим на эволюцию наблюдаемых величин, оказываются термические флуктуации. Известно, что рабочая температура, T, квантовых цепей с джозефсоновскими переходами выбирается много меньше

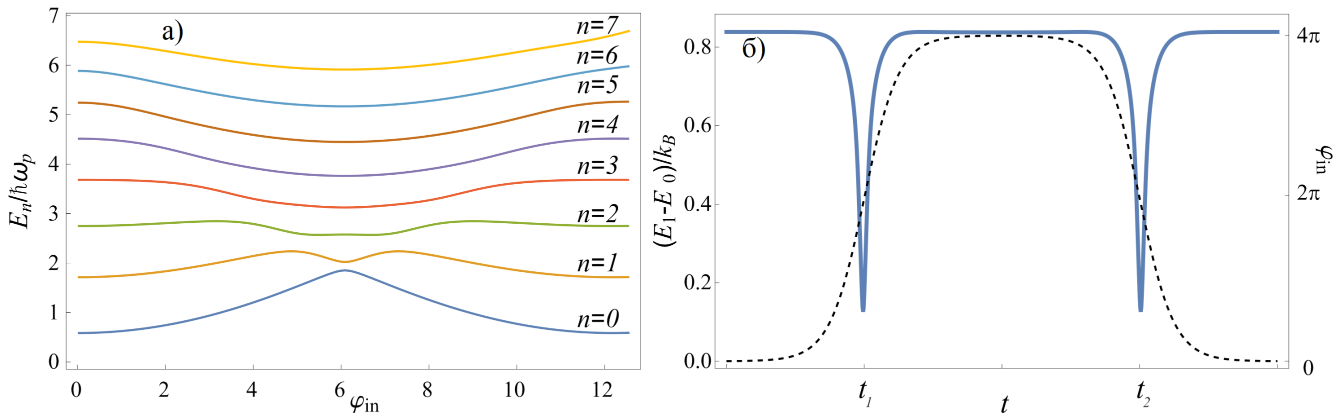

Рисунок 3.14 — (а) Мгновенный спектр гамильтониана (3.7) в зависимости от значения внешнего потока $\varphi_{in}(t)$. (б) (Синяя сплошная линия) Временная зависимость расстояния между основным состоянием, $E_0(t)$, и первым возбужденным, $E_1(t)$. (Черная пунктирная линия) Зависимость внешнего потока φ_{in} от времени. Для численного расчета были использованы параметры: $l = 2$, $D = 0.001$, $A = 4\pi$, $l_a = 1 + l$, $l_{out} = 0.1$, $E_J = 2E_c$, $t_1 = 4000$, $t_1 = 3t_2$.

характерного температурного масштаба, задаваемого расстоянием между их основным и первым возбужденным энергетическими уровнями $(E_1 - E_0)/k_B$:

$$T \ll \frac{E_1 - E_0}{k_B}. \tag{3.32}$$

При этом вероятность заброса на высоколежащие уровни энергии пропорциональна $e^{-\frac{E_1(t)-E_0(t)}{k_B T}}$, а расстояние между мгновенными энергетическими уровнями зависит от приложенного внешнего управляющего поля $\varphi_{in}(t)$, см. рис. 3.14(а). Так например, для параметров $l = 2$, $D = 0.001$, энергетическая щель между состояниями $(E_1(t) - E_0(t))/k_B \sim 0.15K$ в моменты нарастания и спадания внешнего потока показана на рис. 3.14(б). В эти отрезки времени может нарушаться условие (3.32) и происходить заброс на вышележащее уровни. Следовательно, требуется провести анализ поведения квантового нейрона в зависимости от рабочей температуры и найти режимы работы, когда вероятность данных термических забросов минимальна. Как видно из рис. 3.15(а), температура влияет на крутизну сигмоидальной зависимости активационной функции, и даже на проявление гистерезисного характера ток-потоковых преобразований $(i_{out}(\varphi_{in})$ при нарастании внешнего сигнала $\varphi_{in} = 0 \Rightarrow \varphi_{in} = A$, сплошные линии на рис. 3.15(а), не совпадают с поведением средних при спадании магнитного сигнала $\varphi_{in} = A \Rightarrow \varphi_{in} = 0$ (штриховые линии на рис. 3.15(а)).

На рис. 3.15(б) представлена температурная карта, которая отражает цветом максимально температуру, при которой передаточная характеристи-

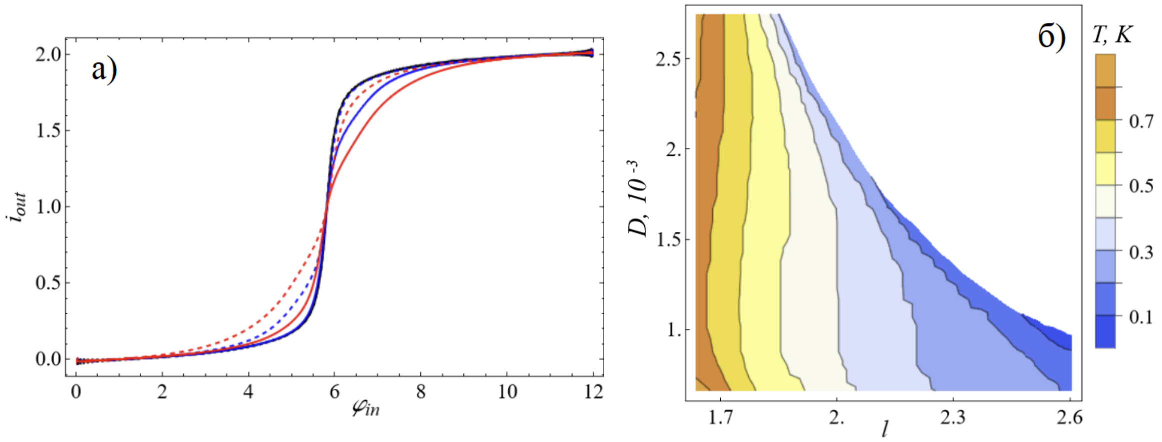

Рисунок 3.15 — (а) Влияние температуры на передаточную характеристику квантового нейрона: сплошными линиями указан отрезок нарастания внешнего потока ($\varphi_{in} = 0 \Rightarrow \varphi_{in} = A$) и пунктирными линиями указан отрезок спадания внешнего потока ($\varphi_{in} = A \Rightarrow \varphi_{in} = 0$).Черный цвет соответствует нулевой температуре, а синий и красный цвета соответствуют температуре в 0.5 K и 1 K. (б)Область параметров с обозначением максимально допустимой температуры, при которой передаточная характеристика близка к сигмоидальному виду (стандартное отклонение от него $SD < 10^{-4}$). Белая область на рисунке означает, что значение стандартного отклонения $SD = 10^{-4}$ не достигается даже при нулевой температуре. Были использованы параметры системы: $A = 4\pi$, $\lambda = 0.0025$, $l_a = 1 + l$, $l_{out} = 0.1$, $E_J = 2E_c$, и $t_1 = 3t_2$.

ка параметрона достаточно близка к сигмоидальной форме. При построении данной карты достаточно близкими мы считали кривые, для которых среднеквадратичное отклонение, SD, от математической сигмоиды не превышало 10^{-4}. По горизонтальной и вертикальной осям отложены скорости нарастания/спадания воздействующего на параметрон потока и его нормированную индуктивность. Расчеты показали, что с ростом индуктивности интерферометра l и быстродействия предлагаемой ячейки возрастают требования к контролю температуры системы, требуются всё более и более низкие рабочие температуры. Например, темно-синяя область на рис.3.15(б) годится лишь при $T \sim 0.1K$.

3.7 Выводы к главе 3

В данной главе предложена схема реализации квантового нейрона с возбуждающим внешним потоком типа флаксон, для которого может реализовываться сигмоидальная форма функции активации. При этом сигмоидальное преобразование приложенного магнитного потока в средний выходной ток может быть получено как для одноямной, так и для двухъямной потенциальной энергии ячейки, что не реализуется при классическом режиме работы этой системы. Влияние начального квантового состояния нейрона на вид функции активации особенно заметно для случая суперпозиции базовых состояний, которые интерферируют друг с другом со временем, что отражается в осцилляциях среднего выходящего тока. Было показано, что диссипация подавляет колебания на функции активации подобно тому, как затухание подавляет плазменные колебания в классических джозефсоновских системах. В заключительном разделе построена область параметров с максимально допустимой температурой, при которой активационная функция совпадает с математической сигмоидой с необходимой точностью ($SD < 10^{-4}$). Полученные результаты позволяют классическому персептрону и управляющему квантовому сопроцессору (предназначенному для быстрого поиска синаптических весов персептрона) работать в одном чипе криогенной (мК) ступени охладителя. Для практической реализации таких нейронных сетей нужны синапсы, в основе которых также лежат адиабатические сверхпроводящие логические ячейки с магнитным представлением информации [117; 137; 141]. Стоит отметить, что недавно была экспериментально опробована модель сигма-нейрона, рассмотренного в данной главе [118]. Измеренная активационная функция образца является суммой сигмоидальной и линейной компоненты.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Проведен анализ классической динамики джозефсоновского перехода под действием внешнего тока в присутствии омической диссипации. Показано, что система может быть захвачена в метастабильные состояния динамического равновесия в зависимости от начальных условий. В случае малой диссипации, когда процесс захвата может быть описан статистически, была аналитически получена формула описывающая вероятность захвата в положения равновесия при начальном состоянии осциллятора вне области сепаратрисы.
2. Подробно изучена квантовая бездиссипативная динамика джозефсоновского перехода. В рамках приближения вращающейся волны были найдены квазистационарный спектр и квазистационарные энергетические уровни. Численно обнаружено, что два хорошо локализованных состояния соответствуют классическим положениям динамического равновесия.
3. При изучении квантовой динамики системы, линейно связанной с бозонным термостатом, уравнение для эволюции матрицы плотности в квазистационарном базисе в приближении Борна-Маркова удалось свести к основному кинетическому уравнению. На основе этого уравнения был получен квантовый аналог формулы для вероятностей захвата джозефсоновского осциллятора, зависящий только от интегралов перекрытия сепаратрисных уровней.
4. Предложен оригинальный протокол неразрушающего измерения суперпозиционного состояния кубита, основанный на чувствительности вероятностей захвата к малым возмущениям параметров джозефсоновского перехода. Продемонстрировано, что для характерных экспериментальных параметров измерительного джозефсоновского осциллятора [27] время измерения квантового состояния таким методом составляет порядка 150 нс. Отличительная особенность предлагаемого метода заключается в том, что мы можем работать области параметров, для которых существует бифуркационное поведение для обоих базисных состояний кубита.

5. Проведен анализ влияния измерительного осциллятора на эффективность управления состояниями кубита в рамках микроволновой техники Раби. На основе аналитического и численного анализа сделан вывод, что для управления кубитом измерительный осциллятор должен находиться на уровне, соответствующего состоянию динамического равновесия с наименьшей амплитудой колебания фазы. Также было определено, что наилучшая точность инициализации состояния кубита достигается при частоте Раби равной собственной частоте измерительного осциллятора.
6. В случае, когда управление состоянием кубита происходит за счёт емкостной связи с открытым волноводом было изучено влияние состояния джозефсоновского бифуркационного усилителя на микроволновой транспорт. Используя метод неэрмитового гамильтониана и формализм проекционных операторов в однофотонном приближении была решена обобщенная задача рассеяния и найдены вероятности прохождения, отражения фотона и вероятность возбуждения кубита. Показано, что взаимодействие кубита с измерительным осциллятором приводит к смещению эффективной частоты кубита, что может быть полезно при учете проектирования метаматериалов и селективного управления массивом сверхпроводниковых кубитов в волноводе.
7. Предложена модифицированная схема rf-СКВИДа для реализации нейрона с сигмоидальной активационной функций: зависимость среднего выходящего тока от входного потока. В отличие от известного классического режима работы [135; 138], в диссертации показано, что такая реализация системы в ультраквантовом режиме может функционировать и в случае большого значения индуктивности интерферометра, когда в процессе нарастания и спада внешнего потока реализуется двухъямный потенциал.
8. Изучено влияние диссипативных процессов на вид активационной функции. Найдены оптимальные параметры, при которых она имеет сигмоидальный вид. Проведена оценка по максимально допустимой температуре функционирования квантового нейрона, при которой среднеквадратичное отклонение активационной функции зависимости от математической сигмоиды не превышает 10^{-4}.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ, входящих в международную базу цитирования Scopus и Web of Science

1. Bifurcation Oscillator as an Advanced Sensor for Quantum State Control / D. Pashin [et al.] // Sensors. — 2022. — Vol. 22. — P. 6580.
2. *Pashin, D.* Classical and quantum dissipative dynamics in Josephson junctions: An Arnold problem, bifurcation, and capture into resonance / D. Pashin, A. Satanin, C. Kim // Phys. Rev. E. — 2019. — Vol. 99. — P. 062223.
3. A superconducting adiabatic neuron in a quantum regime / M. V. Bastrakova [et al.] // Beilstein J. Nanotechnol. — 2022. — Vol. 13. — P. 653—665.
4. *Pashin, D.* Bistable Josephson cell as a single microwave photon sensor / D. Pashin, M. Bastrakova // International Journal of Quantum Information. — 2020. — Vol. 17. — P. 1941014.
5. Quantum analog of bifurcation and switching effects in a nonlinear Josephson oscillator / D. Pashin [et al.] // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2241. — P. 020020.
6. *Kim, C.* Quantum dissipative dynamics a particle in a double-well potential / C. Kim, D. Pashin, A. Satanin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38. — P. 931.
7. *Pikunov, P. V.* Numerical Simulation of Quantum Dissipative Dynamics of a Superconducting Neuron / P. V. Pikunov, D. S. Pashin, M. V. Bastrakova // In: Balandin, D., Barkalov, K., Meyerov, I. (eds) Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2022. Communications in Computer and Information Science. — 2022. — Vol. 1750. — P. 293—301.

В сборниках трудов конференций

8. Диссипативные и температурные эффекты в квантовом сверхпроводниковом нейроне / Д. А. Рыбин [и др.] // Нанофизика и Наноэлектроника. Труды XXVII Международного симпозиума. 13–16 марта 2023 г., Нижний Новгород. — С. 95.

9. Bifurcation oscillator as an advanced sensor for quantum state control / D. Pashin [et al.] // Proceedings Of The International School On Quantum Technologies. — 2022.

10. *Pikunov, P.* Quantum dissipative dynamics of a superconducting neuron / P. Pikunov, D. Pashin, M. Bastrakova // Proceedings Of The International School On Quantum Technologies. — 2022.

11. Switching of superconducting logic element due to single flux quantum pulses / D. A. Rybin [et al.] // Proceedings Of The International School On Quantum Technologies. — 2022.

12. Динамические процессы при адиабатическом переключении в сверхпроводниковом параметроне / М. В. Бастракова [и др.] // Нанофизика и Наноэлектроника. Труды XXVI Международного симпозиума. 14–17 марта 2022 г., Нижний Новгород. — С. 40.

13. *Пашин, Д. С.* Влияние бифуркационного осциллятора на осцилляции Раби трансмон кубита / Д. С. Пашин, М. В. Бастракова // Нанофизика и Наноэлектроника. Труды XXVI Международного симпозиума. 14–17 марта 2022 г., Нижний Новгород. — С. 112.

14. *Bastrakova, M. V.* Generation of correlated photons and single photon detection processes in an array of qubits in a microwave transmission line / M. V. Bastrakova, D. S. Pashin // BOOK of ABSTRACTS 9th International School and Conference on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures. Chief Editor: A. E. Zhukov Published by HSE University - St. Petersburg, Soyuza Pechatnikov 16, 190121, St Petersburg, Printed in Russian Federation, 2022. — P. 258.

15. Моделирование адиабатического переключения в сверхпроводниковом квантовом нейроне / М. В. Бастракова [и др.] // Тезисы докладов международной конференции «ФизикаА.СПб». 17–21 октября 2022 г., Санкт-Петербург. — С. 400.

16. *Пашин, Д. С.* Расчет вероятностей возбуждения в массиве кубитов через открытый волновод с учетом связи с нелинейным детектором / Д. С. Пашин, М. В. Бастракова // Сборник трудов XXXIII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления: физика и применения» имени А.П. Сухорукова («Волны-2022»). — С. 30.

17. *Bastrakova, M. V.* Microwave transport in a single-photon detector based on an array of Josephson cells / M. V. Bastrakova, D. S. Pashin // 8th International School and Conference on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures May 25-28, 2021 Saint Petersburg, Russia. Published by HSE University - St. Petersburg, Soyuza Pechatnikov 16, 190121, St Petersburg, Printed in Russian Federation, 2021. — P. 241.

18. Qubit measurement based on a nonlinear quantum Josephson oscillator / D. S. Pashin [et al.] // Proceedings of the International Conference «Micro- And Nanoelectronics – 2021». ICMNE – 2021. Book of Abstracts. October 4–8, 2021 Moscow – Zvenigorod, Russia. — P. 189.

19. *Пашин, Д. С.* Микроволновой транспорт в одномерном волноводе с массивом бистабильных сенсорных ячеек / Д. С. Пашин, М. В. Бастракова // Нанофизика и Наноэлектроника. Труды XXV Международного симпозиума. 9–12 марта 2021 г., Нижний Новгород. — С. 71.

20. Измерение состояний кубита джозефсоновским осциллятором в слабо диссипативном режиме / М. В. Бастракова [и др.] // Нанофизика и Наноэлектроника. Труды XXIV Международного симпозиума. 10–13 марта 2020 г., Нижний Новгород. — С. 34.

21. *Пашин, Д. С.* Взаимодействие однофотонного поля с массивом бистабильных сенсорных ячеек / Д. С. Пашин, М. В. Бастракова // Енисейская Фотоника – 2020. Первая Всероссийская научная конференция с международным участием. Тезисы докладов. 14–19 сентября 2020 года, Красноярск. – Изд-во ИФ СО РАН, 2020. – 198 с.

22. *Bastrakova, M. V.* Non-destructive measurement of superconducting qubit states by Josephson bifurcation oscillator / M. V. Bastrakova, D. S. Pashin, A. M. Satanin // Quantum 2019. From Foundations of Quantum Mechanics to Quantum Information and Quantum Metrology and Sensing. Book of Abstracts. May 26 - June 1, 2019.

23. *Пашин, Д. С.* Квантовая диссипативная динамика джозефсоновского осциллятора в условиях резонансного возбуждения / Д. С. Пашин, А. М. Сатанин, Ч. С. Ким // Нелинейные волны – 2018 XVIII научная школа 26 февраля – 4 марта 2018 года, Нижний Новгород. — С. 134.

24. *Пашин, Д. С.* Диссипативная динамика джозефсоновского осциллятора под действием переменного тока: захват в резонанс и квантовый аналог задачи Арнольда / Д. С. Пашин, А. М. Сатанин, Ч. С. Ким // Нанофизика и Наноэлектроника. Труды XXII Международного симпозиума. 12–15 марта 2018 г., Нижний Новгород. — С. 64.
25. *Ким, Ч. С.* Квантовая диссипативная динамика частицы в двухъямном потенциале / Ч. С. Ким, Д. С. Пашин, А. М. Сатанин // Вычислительные технологии в естественных науках. Методы суперкомпьютерного моделирования. Часть 4. Сборник трудов. — 2017. — С. 43.
26. *Kim, C.* Capture into resonance a quantum particle moving in a double-well potential / C. Kim, D. S. Pashin, A. Satanin // Proceedings of the International Conference "Micro- and Nanoelectronics – 2016". — 2016. — P. 189.
27. Квантовые траектории и томография состояний связанной системы кубит-измерительный осциллятор / В. Гергель [и др.] // Вычислительные технологии в естественных науках. Методы суперкомпьютерного моделирования. Часть 2. Сборник трудов. — 2015. — С. 86—99.
28. Томография состояний кубита, связанного с джозефсоновским осциллятором / Д. Пашин [и др.] // Материалы XX Нижегородской сессии молодых ученых. Естественные, математические науки. Нижний Новгород. — 2015. — С. 50.

Список литературы

1. Superconducting qubits: Current state of play / M. Kjaergaard [et al.] // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. — 2020. — Vol. 11. — P. 369—395.
2. Microwave photonics with superconducting quantum circuits / X. Gu [et al.] // Physics Reports. — 2017. — Vol. 718. — P. 1—102.
3. *Wendin, G.* Quantum information processing with superconducting circuits: a review / G. Wendin // Reports on Progress in Physics. — 2017. — Vol. 80. — P. 106001.

4. Practical Guide for Building Superconducting Quantum Devices / Y. Y. Gao [et al.] // PRX Quantum. — 2021. — Vol. 2. — P. 040202.
5. Waveguide bandgap engineering with an array of superconducting qubits / J. D. Brehm [et al.] // npj Quantum Mater. — 2021. — Vol. 6, no. 10.
6. A Quantum Engineer's Guide to Superconducting Qubits / P. Krantz [et al.] // Appl. Phys. Rev. — 2019. — Vol. 6. — P. 021318.
7. Strong Quantum Computational Advantage Using a Superconducting Quantum Processor / Y. Wu [et al.] // Physical Review Letters. — 2021. — Vol. 127. — P. 180501.
8. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor / F. Arute [et al.] // Nature. — 2019. — Vol. 574. — P. 505—510.
9. An artificial neuron implemented on an actual quantum processor / F. Tacchino [et al.] // npj Quantum Information. — 2019. — Vol. 5, no. 26.
10. *Higham, C. F.* Quantum deep learning by sampling neural nets with a quantum annealer / C. F. Higham, A. Bedford // Scientific Reports. — 2023. — Vol. 13, no. 1. — P. 3939.
11. *Schuld, M.* The quest for a Quantum Neural Network / M. Schuld, I. Sinayskiy, F. Petruccione // Quantum Inf. Process. — 2014. — Vol. 13. — P. 2567—2586.
12. Entanglement-Based Machine Learning on a Quantum Computer / X. D. Cai [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114. — P. 110504.
13. Protecting quantum entanglement from leakage and qubit errors via repetitive parity measurements / C. C. Bultink [et al.] // SCIENCE ADVANCES. — 2020. — Vol. 6, issue 12.
14. Exponential suppression of bit or phase errors with cyclic error correction / Z. Chen [et al.] // Nature. — 2021. — Vol. 595. — P. 383.
15. Quantum machine learning / J. Biamonte [и др.] // Nature. — 2017. — Т. 549, № 7671. — С. 195—202.
16. *Zhang, Y.* Recent advances in quantum machine learning / Y. Zhang, Q. Ni // Quantum Engineering. — 2020. — Vol. 2, no. 1. — e34.

17. *Ivakhnenko, O. V.* Nonadiabatic Landau–Zener–Stückelberg–Majorana transitions, dynamics, and interference / O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, F. Nori // Physics Reports. — 2023. — Vol. 995. — P. 1.

18. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation / A. Blais [et al.] // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 69. — P. 062320.

19. Rapid High-Fidelity Single-Shot Dispersive Readout of Superconducting Qubits / T. Walter [et al.] // Phys. Rev. Applied. — 2017. — Vol. 7. — P. 054020.

20. Transmon qubit readout fidelity at the threshold for quantum error correction without a quantum-limited amplifier / L. Chen [et al.] // arXiv. — 2022. — arXiv:2208.05879.

21. Characterization of a multimode coplanar waveguide parametric amplifier / M. C. Simoen [et al.] // J. Appl. Phys. — 2015. — Vol. 118. — P. 154501.

22. Josephson array-mode parametric amplifier / V. Sivak [et al.] // Phys. Rev. Applied. — 2020. — Vol. 13. — P. 024014.

23. Observation of measurement-induced entanglement and quantum trajectories of remote superconducting qubits / N. Roch [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112. — P. 170501.

24. Tracking photon jumps with repeated quantum non-demolition parity measurements / L. Sun [et al.] // Nature. — 2014. — Vol. 511. — P. 444—448.

25. High-Efficiency Measurement of an Artificial Atom Embedded in a Parametric Amplifier / A. Eddins [et al.] // Phys. Rev. X. — 2019. — Vol. 9. — P. 011004.

26. RF-Driven Josephson Bifurcation Amplifier for Quantum Measurement / I. Siddiqi [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 93. — P. 207002.

27. Dispersive measurements of superconducting qubit coherence with a fast latching readout / I. Siddiqi [et al.] // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73. — P. 054510.

28. Quantum non-demolition measurement of a superconducting two-level system / A. Lupaşcu [et al.] // Nature Phys. — 2007. — Vol. 119. — P. 119—123.

29. Single-shot qubit readout in circuit quantum electrodynamics / F. Mallet [et al.] // Nature Phys. — 2009. — Vol. 5. — P. 791—795.

30. *Vijay*, *R.* Invited review article: The Josephson bifurcation amplifier / R. Vijay, M. Devoret, I. Siddiqi // Rev. Sci. Instrum. — 2009. — Vol. 80. — P. 111101.

31. *Vijay*, *R.* Observation of Quantum Jumps in a Superconducting Artificial Atom / R. Vijay, D. Slichter, I. Siddiqi // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 110502.

32. *Zorin*, *A.* Period-doubling bifurcation readout for a Josephson qubit / A. Zorin, Y. Makhlin // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83. — P. 224506.

33. Multiplexed readout of transmon qubits with Josephson bifurcation amplifiers / V. Schmitt [et al.] // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 90. — P. 062333.

34. Direct Observation of Dynamical Bifurcation between Two Driven Oscillation States of a Josephson Junction / I. Siddiqi [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94. — P. 027005.

35. *Serban*, *I.* Relaxation of a qubit measured by a driven Duffing oscillator / I. Serban, M. I. Dykman, F. K. Wilhelm // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 022305.

36. *Greenberg*, *Y. S.* Nanomechanical resonators / Y. S. Greenberg, Y. A. Pashkin, E. Il'ichev // Phys.-Usp. — 2012. — Vol. 55, issue 4. — P. 382.

37. *Rips*, *S.* Nonlinear nanomechanical resonators for quantum optoelectromechanics / S. Rips, I. Wilson-Rae, M. J. Hartmann // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89. — P. 013854.

38. High-frequency nanotube mechanical resonators / J. Chaste [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2011. — Vol. 99. — P. 213502.

39. A High Quality Factor Carbon Nanotube Mechanical Resonator at 39 GHz / E. A. Laird [et al.] // Nano Lett. — 2012. — Vol. 12, issue 1. — P. 193—197.

40. Quantum machine learning: a classical perspective / C. Ciliberto [и др.] // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2018. – Т. 474, № 2209. – С. 20170551.

41. *Yan, S.* Nonlinear quantum neuron: A fundamental building block for quantum neural networks / S. Yan, H. Qi, W. Cui // Physical Review A. — 2020. — Vol. 102. — P. 052421.

42. Beyond Moore's technologies: operation principles of a superconductor alternative / I. I. Soloviev [et al.] // Beilstein Journal of Nanotechnology. — 2017. — Vol. 8. — P. 2689.

43. The use of artificial neural networks for classification of signal sources in cognitive radio systems / S. S. Adjemov [et al.] // Program. Comput. Soft. — 2016. — Vol. 42. — P. 121.

44. *Crotty, P.* Josephson junction simulation of neurons / P. Crotty, D. Schult, K. Segall // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82. — P. 011914.

45. *Cheng, R.* Superconducting Neuromorphic Computing Using Quantum Phase-Slip Junctions / R. Cheng, U. S. Goteti, M. C. Hamilton // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. — 2019. — Vol. 29, no. 5. — P. 1—5.

46. *Clarke, J.* Superconducting quantum bits / J. Clarke, F. K. Wilhelm // Nature. — 2008. — Vol. 453. — P. 1031.

47. D. Vion [et al.] // AIP Conference Proceedings. — 2002. — Vol. 296. — P. 886—889.

48. Low-frequency characterization of quantum tunneling in flux qubits / Y. S. Greenberg [et al.] // Phys. Rev. B. — 2002. — Vol. 66. — P. 214525.

49. Role of relaxation in the quantum measurement of a superconducting qubit using a nonlinear oscillator / T. Picot [et al.] // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78. — P. 132508.

50. Quantum Time Evolution in a Qubit Readout Process with a Josephson Bifurcation Amplifier / H. Nakano [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 257003.

51. Resonators coupled to voltage-biased Josephson junctions: From linear response to strongly driven nonlinear oscillations / S. Meister [et al.] // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 92. — P. 174532.

52. Josephson-Threshold Calorimeter / C. Guarcello [et al.] // Phys. Rev. Applied. — 2019. — Vol. 11. — P. 054074.

53. *Likharev, K. K.* True quantum-mechanical macroscopic effects in weak superconductivity / K. K. Likharev // Sov. Phys. Usp. — 1983. — Vol. 26. — P. 87.

54. *Dykman, M. I.* Theory of fluctuational transitions between stable states of a nonlinear oscillator / M. I. Dykman, M. A. Krivoglaz // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1979. — Vol. 77. — P. 60.

55. *Dmitriev, A. P.* Activated and tunneling transitions between the two forced-oscillation regimes of an anharmonic oscillator / A. P. Dmitriev, M. I. D'yakonov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1986. — Vol. 90. — P. 1430.

56. Experimental analysis of the measurement strength dependence of superconducting qubit readout using a Josephson bifurcation readout method / K. Kakuyanagi [et al.] // New J. Phys. — 2013. — Vol. 15. — P. 043028.

57. *Lifshitz, I. M.* Motion of Charged Quasiparticles in a Varying Inhomogeneous Electromagnetic Field / I. M. Lifshitz, A. A. Slutskin, V. M. Nabutovskii // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1962. — Vol. 41. — P. 939.

58. *Neishtadt, A. I.* Probability phenomena due to separatrix crossing / A. I. Neishtadt // Chaos. — 1991. — Vol. 1. — P. 42.

59. *Arnold, V. I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics / V. I. Arnold, V. V. V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt. — Berlin : Springer-Verlag, 2006.

60. Квазиадиабатическое описание динамики заряженных частиц в космической плазме / Л. М. Зелёный [и др.] // УФН. — 2013. — Т. 183, № 4. — С. 365—415.

61. Phase Retrapping in a Pointlike Josephson Junction: The Butterfly Effect / E. Goldobin [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 111. — P. 057004.

62. Phase retrapping in a Josephson junction: Onset of the butterfly effect / R. Menditto [et al.] // Phys. Rev. B. — 2016. — Vol. 93. — P. 174506.

63. *Nayfeh, A. H.* Nonlinear Oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. — New York : Wiley, 1979.

64. *Dykman, M. I.* Quantum theory of transitions between stable states of a nonlinear oscillator interacting with a medium in a resonant field / M. I. Dykman, V. N. Smelyanskii // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1988. — Vol. 94. — P. 61.

65. *Dykman, M.* Critical exponents in metastable decay via quantum activation / M. Dykman // Phys. Rev. E. — 2007. — Vol. 75. — P. 011101.

66. Emission spectrum of the driven nonlinear oscillator / S. André [et al.] // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — P. 053825.

67. *Sazonov, V. N.* Tunnelling in the energy space as a mechanism of nonlinear oscillator swinging by an external harmonic force / V. N. Sazonov, V. Y. Finkel'stein // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1976. — Vol. 231, issue 1. — P. 78—81.

68. *Wielinga, B.* Quantum tunneling in a Kerr medium with parametric pumping / B. Wielinga, G. J. Milburn // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 48. — P. 2494.

69. *Peano, V.* Macroscopic quantum effects in a strongly driven nanomechanical resonator / V. Peano, M. Thorwart // Phys. Rev. B. — 2004. — Vol. 70. — P. 235401.

70. *Marthaler, M.* Quantum interference in the classically forbidden region: A parametric oscillator / M. Marthaler, M. I. Dykman // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 76. — 010102(R).

71. *Arnold, V.* Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics / V. Arnold // Usp. Mat. Nauk. — 1963. — Vol. 18. — P. 91—192.

72. *Haberman, R.* Logarithmic correction to the probability of capture for dissipatively perturbed Hamiltonian systems / R. Haberman, E. K. Ho // Chaos. — 1995. — Vol. 5. — P. 374.

73. *Ильичев, Е.* Квантовая информатика и квантовые биты на основе свехпроводниковых джозефсоновских структур / Е. Ильичев, Я. Гринберг. — Издательство Новосибирского государственного технического университета, 2013.

74. *Bogoliubov, N.* Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations / N. Bogoliubov, Y. Mitropolsky. — New York : Gordon, Breach, 1961.

75. *Ландау, Л.* Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика(нерелятивистская теория)–4-е изд., испр. / Л. Ландау, Е. Лифшиц. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

76. *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

77. *Скалли, М.* Квантовая оптика / М. Скалли, М. Зубайри. — М.: Физматлит, 2003.

78. *Blum, K.* Density Matrix Theory and Applications / K. Blum. — New York : Plenum, 1981.

79. *Fujii, K.* Introduction to the Rotating Wave Approximation (RWA): Two Coherent Oscillations / K. Fujii // Journal of Modern Physics. — 2017. — Vol. 8. — P. 2042.

80. *Shirley, J. H.* Phase retrapping in a Josephson junction: Onset of the butterfly effect / J. H. Shirley // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 138. — B979.

81. *Zel'dovich, Y. B.* The Quasienergy of a Quantum-mechanical System Subjected to a Periodic Action / Y. B. Zel'dovich // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1967. — Vol. 51. — P. 1492.

82. *Ritus, V. I.* Shift and Splitting of Atomic Energy Levels by the Field of an Electromagnetic Wave / V. I. Ritus // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1966. — Vol. 51. — P. 1544.

83. *Менский, М.* Диссипация и декогеренция квантовых систем / М. Менский // Успехи физических наук. — 2003. — Т. 173. — С. 1199.

84. *Carmichael, H. J.* Statistical Methods in Quantum Optics 1 / H. J. Carmichael. — Berlin : Springer, 2002.

85. Fast Tunable High-Q-Factor Superconducting Microwave Resonators / S. Mahashabde [et al.] // Phys. Rev. Appl. — 2020. — Vol. 14. — P. 044040.

86. *Dewes, A.* Demonstrating Quantum Speed-Up with a Two-Transmon Quantum Processor : PhD thesis / Dewes Andreas. — Université Pierre et Marie Curie, 2012.

87. Electron paramagnetic resonance spectroscopy of Er3+:Y2SiO using a Josephson bifurcation amplifier: Observation of hyperfine and quadrupole structures / R. Budoyo [et al.] // Phys. Rev. Mater. — 2018. — Vol. 2. — P. 011403.

88. Fast Gate-Based Readout of Silicon Quantum Dots Using Josephson Parametric Amplification / S. Schaal [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 124. — P. 067701.

89. Electron spin resonance with up to 20 spin sensitivity measured using a superconducting flux qubit / R. Budoyo [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2020. — Vol. 116. — P. 194001.

90. *Shelly, C.* Hybrid Quantum Interferometer in Bifurcation Mode as a Latching Quantum Readout / C. Shelly, C. Checkley, V. Petrashov // Phys. Rev. Applied. — 2021. — Vol. 15. — P. 034070.

91. Observation of three-photon spontaneous para-metric down-conversion in a superconducting parametric cavity / C. Chang [et al.] // Phys. Rev. X. — 2020. — Vol. 10. — P. 011011.

92. *Gosner, J.* Quantum properties of a strongly driven Josephson junction / J. Gosner, B. Kubala, J. Ankerhold // Phys. Rev. B. — 2019. — Vol. 99. — P. 144524.

93. *Arndt, L.* Period Tripling due to Parametric Down-Conversion in Circuit QED / L. Arndt, F. Hassler // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Vol. 128. — P. 187701.

94. *Dykman, M.* Fluctuating Nonlinear Oscillators: From Nanomechanics to Quantum Superconducting Circuits / M. Dykman. — 1st ed. — Oxford : Oxford University Press, 2012.

95. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics / A. Blais [et al.] // Physical Review A. — 2007. — Vol. 75. — P. 032329.

96. *Makhlin, Y.* Dissipation in Josephson qubits / Y. Makhlin, G. Schön, A. Shnirman // Chem. Phys. — 2004. — Vol. 296. — P. 315—324.

97. Fidelity of single qubit maps / M. Bowdrey [et al.] // Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 294. — P. 258—260.

98. *Ekert, A.* Entangled Quantum-Systems and the Schmidt Decomposition / A. Ekert, P. Knight // Am. J. Phys. — 1995. — Vol. 63. — P. 415.

99. Microwave bifurcation of a Josephson junction: Embedding-circuit requirements / V. Manucharyan [et al.] // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 014524.

100. Spatially resolved single photon detection with a quantum sensor array / A. M. Zagoskin [et al.] // Scientific Reports. — 2013. — Vol. 3. — P. 3464.

101. Tunable Microwave Single-Photon Source Based on Transmon Qubit with High Efficiency / Y. Zhou [et al.] // Physical Review Applied. — 2020. — Vol. 13. — P. 034007.

102. Quantum efficiency, purity and stability of a tunable, narrowband microwave single-photon source / Y. Lu [et al.] // npj Quantum Information. — 2021. — Vol. 7, no. 140.

103. *Feshbach*, *H.* Unified theory of nuclear reactions / H. Feshbach // Annals of Physics. — 1958. — Vol. 5, no. 4. — P. 357—390.

104. *Feshbach*, *H.* A unified theory of nuclear reactions. II / H. Feshbach // Annals of Physics. — 1962. — Vol. 19, no. 2. — P. 287—313.

105. *Sternheim*, *M. M.* Non-Hermitian Hamiltonians, decaying states, and perturbation theory / M. M. Sternheim, J. F. Walker // Physical Review C. — 1972. — Vol. 6, no. 1. — P. 114.

106. *Rotter*, *I.* Dynamics of quantum systems / I. Rotter // Physical Review E. — 2001. — Vol. 64. — P. 036213.

107. Interference of quantum states in electronic waveguides with impurities / C. S. Kim [et al.] // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2002. — Vol. 94. — P. 992—1007.

108. *Goldberger*, *M. L.* Collision theory / M. L. Goldberger, K. M. Watson. — Courier Corporation, 2004.

109. *Karataglidis*, *S.* On the excluded space in applications of Feshbach projection formalism / S. Karataglidis, K. Amos // Physics Letters B. — 2008. — Vol. 660. — P. 428—431.

110. *Auerbach*, *N.* Reports on Progress in Physics Super-radiant dynamics, doorways and resonances in nuclei and other open mesoscopic systems / N. Auerbach, V. Zelevinsky // Rep. Prog. Phys. — 2011. — Vol. 74. — P. 106301.

111. *Greenberg*, *Y. S.* Non-Hermitian Hamiltonian approach to the microwave transmission through a one-dimensional qubit chain / Y. S. Greenberg, A. A. Shtygashev // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 92. — P. 063835.

112. Physics for neuromorphic computing / D. Markovic [et al.] // Nature Reviews Physics. — 2020. — Vol. 2. — P. 499—510.

113. Memristive and CMOS devices for neuromorphic computing / V. Milo [et al.] // Materials. — 2020. — Vol. 13. — P. 166.

114. Photonics for artificial intelligence and neuromorphic computing / B. J. Shastri [et al.] // Nature Photonics. — 2021. — Vol. 15. — P. 102.

115. Neuromorphic spintronics / J. Grollier [et al.] // Nature Electronics. — 2020. — Vol. 3. — P. 360.

116. Supermind: A survey of the potential of superconducting electronics for neuromorphic computing / M. Schneider [et al.] // Superconductor Science and Technology. — 2022. — Vol. 35. — P. 053001.

117. Adiabatic superconducting artificial neural network: Basic cells / I. I. Soloviev [et al.] // Journal of Applied Physics. — 2018. — Vol. 124, no. 15. — P. 152113.

118. Экспериментальное исследование прототипа сигма-нейрона для адиабатических сверхпроводниковых нейронных сетей / А. С. Ионин [и др.] // Готовится к печати в ЖЭТФ. — 2023.

119. Experimental investigation of an eight-qubit unit cell in a superconducting optimization processor / R. Harris [и др.] // Phys. Rev. B. — 2010. — Июль. — Т. 82, вып. 2. — С. 024511.

120. A blueprint for demonstrating quantum supremacy with superconducting qubits / C. Neill [et al.] // Science. — 2018. — Vol. 360, no. 6385. — P. 195—199.

121. Artificial neural network based on SQUIDs: demonstration of network training and operation / F. Chiarello [et al.] // Superconductor Science and Technology. — 2013. — Oct. — Vol. 26, no. 12. — P. 125009.

122. Ultralow power artificial synapses using nanotextured magnetic Josephson junctions / M. L. Schneider [et al.] // Science Advances. — 2018. — Vol. 4, no. 1. — e1701329.

123. *Schneider, M. L.* Fan-out and fan-in properties of superconducting neuromorphic circuits / M. L. Schneider, K. Segall // Journal of Applied Physics. — 2020. — Vol. 128. — P. 214903.

124. Synchronization dynamics on the picosecond time scale in coupled Josephson junction neurons / K. Segall [и др.] // Phys. Rev. E. — 2017. — Март. — Т. 95, вып. 3. — С. 032220.

125. Superconducting Nanowire Spiking Element for Neural Networks / E. Toomey [и др.] // Nano Letters. — 2020. — Т. 20, № 11. — С. 8059—8066. — PMID: 32965119.

126. Circuit designs for superconducting optoelectronic loop neurons / J. M. Shainline [и др.] // Journal of Applied Physics. — 2018. — Т. 124, № 15. — С. 152130.

127. Superconducting optoelectronic loop neurons / J. M. Shainline [и др.] // Journal of Applied Physics. — 2019. — Т. 126, № 4. — С. 044902.

128. Superconductor Computing for Neural Networks / K. Ishida [и др.] // IEEE Micro. — Los Alamitos, CA, USA, 2021. — Май. — Т. 41, № 03. — С. 19—26.

129. Periodic Co/Nb pseudo spin valve for cryogenic memory / N. Klenov [et al.] // Beilstein Journal of Nanotechnology. — 2019. — Vol. 10. — P. 833—839.

130. *Silva*, *A. J. da.* Quantum perceptron over a field and neural network architecture selection in a quantum computer / A. J. da Silva, T. B. Ludermir, W. R. de Oliveira // Neural Networks. — 2016. — Vol. 76. — P. 55—64.

131. *Dattani*, *N.* Pegasus: The second connectivity graph for large-scale quantum annealing hardware / N. Dattani, S. Szalay, N. Chancellor // arXiv preprint arXiv:1901.07636. — 2019.

132. *Vyskocil*, *T.* Embedding equality constraints of optimization problems into a quantum annealer / T. Vyskocil, H. Djidjev // Algorithms. — 2019. — Т. 12, № 4. — С. 77.

133. Next-generation topology of d-wave quantum processors / K. Boothby [et al.] // arXiv preprint arXiv:2003.00133. — 2020.

134. *Boothby*, *K.* Zephyr Topology of D-Wave Quantum Processors / K. Boothby, A. D. King, J. Raymond // D-Wave Technical Report Series. — 2021.

135. Adiabatic superconducting cells for ultra-low-power artificial neural networks / A. E. Schegolev [et al.] // Beilstein Journal of Nanotechnology. — 2016. — Vol. 7, no. 1. — P. 1397—1403.

136. Monte Carlo simulations of the switching processes in the superconducting quantron-based neuron / A. A. Gorchavkina [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Янв. — Т. 1740, № 1. — С. 012063.

137. Learning cell for superconducting neural networks / A. Schegolev [et al.] // Superconductor Science and Technology. — 2021. — Vol. 34, no. 1. — P. 015006.

138. Dynamic Processes in a Superconducting Adiabatic Neuron with Non-Shunted Josephson Contacts / M. Bastrakova [et al.] // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, no. 9. — P. 1735.

139. *Хайкин, С.* Нейронные сети: полный курс 2-е издание / С. Хайкин. — Издательский дом Вильямс, 2008.

140. Quantum adiabatic Markovian master equations / T. Albash [и др.] // New Journal of Physics. — 2012. — Т. 14, № 12. — С. 123016.

141. Josephson magnetic rotary valve / I. I. Soloviev [et al.] // Applied Physics Letters. — 2014. — Vol. 105, no. 24. — P. 242601.

Приложение А

Вывод основного кинетического уравнения

Для вывода основного кинетического уравнения из (1.69) найдем матричные элементы, $\langle\varphi_i|[\hat{x}_I(t),\hat{x}_I(t')\tilde{\rho}(t)]|\varphi_j\rangle$ и $\langle\varphi_i|[\hat{x}_I(t),\tilde{\rho}(t)\hat{x}_I(t')]|\varphi_j\rangle$ и подставим их в уравнение (1.69):

$$\begin{aligned}
-\hbar^2\dot{\tilde{\rho}}_{ij} &= \sum_{l,k} e^{i\omega_{ik}t}\left(e^{i\omega t}\hat{a}^{\dagger}_{il} + e^{-i\omega t}\hat{a}_{il}\right)B_{lk}(t)\tilde{\rho}_{kj}(t) \\
&- \sum_{l,k} e^{i(\omega_{kj}+\omega_{il})t}\left(e^{i\omega t}\hat{a}^{\dagger}_{kj} + e^{-i\omega t}\hat{a}_{kj}\right)B_{il}(t)\tilde{\rho}_{lk}(t) \\
&- \sum_{l,k} e^{i(\omega_{kj}+\omega_{il})t}\left(e^{i\omega t}\hat{a}^{\dagger}_{il} + e^{-i\omega t}\hat{a}_{il}\right)C_{pj}(t)\tilde{\rho}_{lk}(t) \\
&+ \sum_{l,k} e^{i\omega_{lj}t}\left(e^{i\omega t}\hat{a}^{\dagger}_{kj} + e^{-i\omega t}\hat{a}_{kj}\right)C_{lk}(t)\tilde{\rho}_{il}(t),
\end{aligned} \tag{A.1}$$

где были введены обозначения

$$\hat{a}^{+}_{ij} \equiv \langle\varphi_i|\,\hat{a}^{+}\,|\varphi_j\rangle = \hat{a}^{*}_{ji}, \quad \omega_{ij} \equiv (\tilde{E}_i - \tilde{E}_j)/\hbar,$$

и вспомогательные матричные элементы были определены как

$$\begin{aligned}
B_{lk}(t) &\equiv \int_0^t d\tau A(\tau)e^{-i\omega_{lk}\tau}\left(e^{i\omega(t-\tau)}\hat{a}^{\dagger}_{lk} + e^{-i\omega(t-\tau)}\hat{a}_{lk}\right), \\
C_{lk}(t) &\equiv \int_0^t d\tau A(-\tau)e^{-i\omega_{lk}\tau}\left(e^{i\omega(t-\tau)}\hat{a}^{\dagger}_{lk} + e^{-i\omega(t-\tau)}\hat{a}_{lk}\right).
\end{aligned}$$

Не трудно убедиться, что при любой степенной зависимости выражения $g(\Omega)\kappa(\Omega)^2$ от частоты Ω, интеграл $A(\tau)$, который определен выражением (1.68), очень быстро стремится к нулю со временем [84]. Соответственно, с высокой степенью точности мы можем расширить предел интегрирования конечного времени t в предыдущих функциях до бесконечности:

$$\int_0^t d\tau A(\tau)\{\cdots\} \approx \int_0^{\infty} d\tau A(\tau)\{\cdots\}.$$

Подробнее рассмотрим уравнения для диагональных элементов (A.1):

$$
\begin{aligned}
-\hbar^2\dot{\tilde{\rho}}_{jj} &= \sum_{l,k}\tilde{\rho}_{jm}\Big\{(e^{i(\omega_{jk}+2\omega)t}\hat{a}^\dagger_{jl}\hat{a}^\dagger_{lk}+e^{i\omega_{jk}t}\hat{a}_{jl}\hat{a}^\dagger_{lk})D_>(\omega_{lk}+\omega)\\
&\quad+(e^{i\omega_{jk}t}\hat{a}^\dagger_{jl}\hat{a}_{lk}+e^{i(\omega_{jk}-2\omega)t}\hat{a}_{jl}\hat{a}_{lk})D_>(\omega_{lk}-\omega)\Big\}\\
&- \sum_{l,k}\tilde{\rho}_{lk}\Big\{(e^{i(\omega_{kl}+2\omega)t}\hat{a}^\dagger_{kj}\hat{a}^\dagger_{jl}+e^{i\omega_{kl}t}\hat{a}_{kj}\hat{a}^\dagger_{jl})D_>(\omega_{jl}+\omega)\\
&\quad+(e^{i\omega_{kl}t}\hat{a}^\dagger_{kj}\hat{a}_{jl}+e^{i(\omega_{kl}-2\omega)t}\hat{a}_{kj}\hat{a}_{jl})D_>(\omega_{jl}-\omega)\Big\}\\
&- \sum_{l,k}\tilde{\rho}_{lk}\Big\{(e^{i(\omega_{kl}+2\omega)t}\hat{a}^\dagger_{jl}\hat{a}^\dagger_{kj}+e^{i\omega_{kl}t}\hat{a}_{jl}\hat{a}^\dagger_{kj})D_<(\omega_{kj}+\omega)\\
&\quad+(e^{i\omega_{kl}t}\hat{a}^\dagger_{jl}\hat{a}_{kj}+e^{i(\omega_{kl}-2\omega)t}\hat{a}_{jl}\hat{a}_{kj})D_<(\omega_{kj}-\omega)\Big\}\\
&+ \sum_{l,k}\tilde{\rho}_{jl}\Big\{(e^{i(\omega_{lj}+2\omega)t}\hat{a}^\dagger_{kj}\hat{a}^\dagger_{lk}+e^{i\omega_{lj}t}\hat{a}_{kj}\hat{a}^\dagger_{lk})D_<(\omega_{lk}+\omega)\\
&\quad+(e^{i\omega_{lj}t}\hat{a}^\dagger_{kj}\hat{a}_{lk}+e^{i(\omega_{lj}-2\omega)t}\hat{a}_{kj}\hat{a}_{lk})D_<(\omega_{lk}-\omega)\Big\},
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

где введены вспомогательные функции:

$$
\begin{aligned}
D_>(\omega_{lk}\pm\omega;t) &\equiv \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_{lk}\pm\omega)\tau}A(\tau),\\
D_<(\omega_{lk}\pm\omega;t) &\equiv \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_{lk}\pm\omega)\tau}A(-\tau).
\end{aligned}
$$

Слагаемыми с коэффициентами типа $e^{i(\omega_{jk}\pm 2\omega)t}\hat{a}^\dagger_{jl}\hat{a}^\dagger_{lk}$ в уравнении (A.2) при $|\omega_{jk}|\approx 2\omega$ можно пренебречь вследствие малости $\hat{a}^\dagger_{jl}\hat{a}^\dagger_{lk}$ для всех l. Для тех членов, у которых $|\omega_{jk}|$ не близко к 2ω, будем использовать секулярное приближение, оставляя только члены с $l=k$ среди таких слагаемых как $e^{i\omega_{lk}t}a^\dagger_{kj}\hat{a}^\dagger_{jl}$. Такое приближение означает, что крупнозернистая производная берется по большому интервалу Δt по сравнению с периодом свободного движения системы $1/\omega_{lk}$ [78]. Следовательно, получим уравнение для матрицы плотности, в которое входят лишь диагональные элементы:

$$
\begin{aligned}
-\hbar^2\dot{\tilde{\rho}}_{jj} = \quad & \Bigg\{\sum_l \tilde{\rho}_{jj}\left(|a_{jl}|^2 D_>(\omega_{lj}+\omega) + |a_{lj}|^2 D_>(\omega_{lj}-\omega)\right) \\
& -\sum_l \tilde{\rho}_{ll}\left(|a_{lj}|^2 D_>(\omega_{jl}+\omega) + |a_{jl}|^2 D_>(\omega_{jl}-\omega)\right) \\
& -\sum_l \tilde{\rho}_{ll}\left(|a_{jl}|^2 D_<(\omega_{lj}+\omega) + |a_{lj}|^2 D_<(\omega_{lj}-\omega)\right) \\
& +\sum_l \tilde{\rho}_{jj}\left(|a_{lj}|^2 D_<(\omega_{jl}+\omega) + |a_{jl}|^2 D_<(\omega_{jl}-\omega)\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

После переобозначения индексов суммирования получаем:

$$
\begin{aligned}
-\hbar^2\dot{\tilde{\rho}}_{jj} = \quad & \Bigg\{\sum_l \tilde{\rho}_{jj}\Big(|a_{jl}|^2(D_>(\omega_{lj}+\omega) + D_<(\omega_{jl}-\omega)) \\
& \qquad +|a_{lj}|^2(D_>(\omega_{lj}-\omega) + D_<(\omega_{jl}+\omega))\Big) \\
& -\sum_l \tilde{\rho}_{ll}\Big(|a_{jl}|^2(D_>(\omega_{jl}-\omega) + D_<(\omega_{lj}+\omega)) \\
& \qquad +|a_{lj}|^2(D_>(\omega_{jl}+\omega) + D_<(\omega_{lj}-\omega))\Big)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

В уравнении (A.3) можно отдельно просуммировать выражения содержащие $D_>$ и $D_<$. При условии, что коэффициент связи κ не зависит от номера моды, получим:

$$
\begin{aligned}
& D_>(\omega_{lj}+\omega) + D_<(\omega_{jl}-\omega) \\
= \; & \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_{lj}+\omega)\tau}A(\tau) + \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_{jl}-\omega)\tau}A(-\tau) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i(\omega_{lj}+\omega)\tau}A(\tau)d\tau \\
= \; & \int_0^{\Omega_D} d\Omega\kappa^2 g(\Omega)\left\{(\bar{n}(\Omega)+1)\int_{-\infty}^\infty e^{-i(\omega_{lj}+\omega+\Omega)\tau}d\tau + \bar{n}(\Omega)\int_{-\infty}^\infty e^{-i(\omega_{lj}+\omega-\Omega)\tau}d\tau\right\} \\
= \; & 2\pi\int_0^{\Omega_D} d\Omega\kappa^2 g(\Omega)\Big\{(\bar{n}(\Omega)+1)\delta(\omega_{lj}+\omega+\Omega) + \bar{n}(\Omega)\delta(\omega_{lj}+\omega-\Omega)\Big\} \\
= \; & 2\pi\kappa^2\Big\{g(-\omega_{lj}-\omega)(\bar{n}(-\omega_{lj}-\omega)+1) + g(\omega_{lj}+\omega)\bar{n}(\omega_{lj}+\omega)\Big\},
\end{aligned}
$$

где дельта-функции $\delta(\omega_{lj}+\omega\pm\Omega)$ определяют необходимое соотношение между энергиями разрешенных переходов

$$
\tilde{E}_j - \tilde{E}_l = \hbar\omega \pm \hbar\Omega.
$$

Аналогично получаем выражение для другой комбинации

$$
\begin{aligned}
& D_{>}(\omega_{lj} - \omega) + D_{<}(\omega_{jl} + \omega) \\
= \;& 2\pi\kappa^2 \Big\{ g(-\omega_{lj} + \omega)(\bar{n}(-\omega_{lj} + \omega) + 1) + g(\omega_{lj} - \omega)\bar{n}(\omega_{lj} - \omega) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Наконец, подставляя упрощенные выражения для $D_{>}(\omega_{lj} \pm \omega) + D_{<}(\omega_{jl} \mp \omega)$ в уравнение (A.3), мы получаем основное кинетическое уравнение для диссипативной динамики системы:

$$
\dot{\tilde{\rho}}_{jj} = \sum_{l \neq j} (W_{jl}\tilde{\rho}_{ll} - W_{lj}\tilde{\rho}_{jj}). \tag{A.4}
$$