

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи

ФЕВРАЛЬСКИХ ЛЮБОВЬ НИКОЛАЕВНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ,
БЛИЗКИХ К СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫМ**

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры Теоретической,
компьютерной и экспериментальной
механики
Новиков Валерий Вячеславович

Нижний Новгород – 2023

Оглавление

Введение	4
1. Обзор литературы	14
2. Математический аппарат шаровых векторов	25
2.1. Сферические функции	25
2.2. Шаровые векторы и их свойства	26
2.3. Действие операторов на разложения по шаровым векторам	27
2.4. Разложения произведений шаровых векторов	28
3. Свободные угловые движения вязкоупругого тела	30
3.1. Постановка задачи о деформировании вязкоупругого квазишара	31
3.2. Упругий изотропный квазишар в свободном угловом движении	33
3.2.1. Абсолютно твердый квазишар	35
3.2.2. Упругий изотропный шар	37
3.2.3. Упругий квазишар	39
3.2.4. Упругий квазишар с кубической симметрией и шаровым тензором инерции	41
3.2.5. Упругий квазишар с кубической симметрией и квазишаровым тензором инерции	43
3.3. Анизотропно-упругий шар в свободном угловом движении	47
3.3.1. Упругий изотропный шар	49
3.3.2. Шар с малой анизотропией упругих свойств	52
3.3.3. Трансверсально-изотропный упругий шар с шаровым тензором инерции	54
3.3.4. Трансверсально-изотропный упругий шар с начальной эллипсоидальностью	56
3.4. Затухание прецессии вязкоупругого и термоупругого шара	60
3.4.1. Малое внутреннее трение	60
3.4.2. Макроскопическая термодиффузия	61
3.4.3. О затухании свободной прецессии астероидов	63
3.5. Угловые движения квазишара, определяемые в равной степени его упругими и вязкими свойствами	69
3.5.1. Постановка задачи	69
3.5.2. О возможности нутации полюса с периодом Чандлера	71

3.6. Изотропный упругий шар с внутренним гравитационным взаимодействием	73
3.6.1. Постановка задачи.....	74
3.6.2. Решение задачи о деформировании упругого шара	76
3.6.3. Радиальные напряжения внутри шара	77
4. Динамика проводящей вязкой сплошной среды в области, ограниченной телами с квазисферической симметрией	79
4.1. Динамика вязкой среды в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями	80
4.1.1. Течение среды между неконцентрическими сферами	83
4.1.2. Движение среды в пространстве между сферой и эллипсоидом	94
4.2. Возбуждение магнитного поля течением между вращающимися квазисферическими поверхностями	102
Заключение.....	110
Список литературы.....	111

Введение

Актуальность работы.

Многие реальные объекты в природе и технике являются системами с распределенными параметрами. Для описания их движения используются модели сплошных сред: модели упругих и вязкоупругих деформируемых тел, модели жидкостей. Динамика распределенных систем значительно отличается от систем, моделируемых конечным числом абсолютно твердых тел или одним твердым телом. Во многих случаях учет малых факторов, таких как упругие деформации, вязкие свойства, несовершенство формы ограничивающей поверхности, приводит к качественному изменению поведения системы. Построение новых моделей распределенных систем позволяет обнаружить некоторые эффекты динамики деформируемых тел и сплошных сред, требующие пересмотра применяемых подходов к моделированию подобного класса объектов.

Системы с распределенными параметрами являются системами с бесконечным числом степеней свободы. Движение этих систем описывается уравнениями в частных производных, интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями. В настоящее время известно очень мало частных случаев точной интегрируемости уравнений движения сплошных сред. Во многих случаях уравнения не поддаются точному аналитическому решению. Поэтому актуальной остается проблема поиска математического аппарата, с помощью которого удалось бы выявить общие закономерности динамики деформируемых тел и сплошных сред.

Особое значение в динамике систем с распределенными параметрами имеют приближенные методы решения задач, позволяющие выделить основные свойства точных решений. Применение асимптотических методов на начальном этапе исследования модели способно значительно упростить численное решение задачи.

Существует класс задач, обладающих сферической симметрией формы тел или свойств среды. Они встречаются в теории гироскопов, геодинимике, при изучении движений небесных тел и искусственных спутников. Существенно упрощает решение задач в сферических областях аппарат шаровых векторов, широко применяемый в квантовой механике. В сочетании с асимптотическими методами использование шаровых векторов позволяет получить приближенное аналитическое решение, способное выявить некоторые особенности динамики системы.

С развитием астрофизики, теории гироскопов, судостроения, авиационной и космической промышленности обнаружилась необходимость учета упругих и вязкоупругих свойств рассматриваемых объектов. Авторы работ в этих областях отмечают, что пренебрежение даже малыми деформациями приводит к качественно неверным результатам, не реализующимся на практике. На учете упругости и внутренней вязкости основаны попытки объяснения данных наблюдений в геофизике.

Множество проблем динамики Земли и других небесных тел до сих пор сохраняют свою актуальность. Теория вращения Земли относительно центра масс представляет значительный интерес в вопросах навигации, астрометрии, геофизики, управлении движением космических аппаратов. На моделях деформируемой Земли основаны попытки объяснить колебания полюса с периодом Чандлера. Многие вопросы об угловых движениях спутников и небесных тел остаются недостаточно изученными. Ведутся споры о возможности глобального перемещения полюсов тела в свободном угловом движении, оценках времени затухания прецессии тел.

Несмотря на успехи фундаментальных исследований и технический прогресс в настоящее время все еще недостаточно данных о внутреннем строении Земли и процессах, происходящих во внешнем ядре. Более того, оценки вязкоупругих свойств внешнего ядра, основанные на анализе сейсмических данных, очень разнятся. По некоторым из них внешнее ядро можно рассматривать как вязкоупругую сплошную среду, схожую по строению с аморфным телом. Аморфные тела и жидкости проявляют как вязкие, так и упругие свойства, и имеют лишь количественные различия, характеризующиеся временем релаксации.

Согласно современным представлениям, конвективные потоки во внешнем ядре Земли генерируют геомагнитное поле. Это вызывает интерес к задаче о движении проводящей вязкой среды в шаровом вращающемся слое.

Построение моделей деформируемых тел, близких по форме к шару, и модели проводящей вязкой среды, заключенной в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями, делают возможным применение аппарата шаровых векторов.

Полученные аналитические решения задач динамики упругих и вязкоупругих тел, близких по форме к шару, задачи о деформировании шара, взаимодействующего с находящимся в его полости твердым эллипсоидальным телом, а также задачи о

движении проводящей вязкой среды, заключенной в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями, позволяют обнаружить возможность глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения, определить изменение периода свободной прецессии при учете вязкоупругих свойств тела, оценить время затухания прецессии, выявить периодическое движение зон наибольших напряжений в теле, объяснить возникновение радиального течения в квазисферическом слое и исследовать возможность генерации магнитного поля.

Полученные качественные результаты, основанные на учете малых деформаций, вязкоупругих свойств, несовершенства формы поверхности, могут быть полезны для объяснения особенностей динамики Земли и других небесных тел.

Степень разработанности темы.

Изучение угловых движений небесных тел берет свое начало с работ Л. Эйлера, разработавшего теорию свободного вращения абсолютно твердой Земли. Несоответствие теории и данных наблюдений за движением полюса привело к построению моделей деформируемой Земли, рассматриваемых в работах Б. Гутенберга, Г. Джеффриса, А. Лява, Г. Макдональда, У. Манка, П. Мельхиора, М.С. Молоденского, С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Ф.А. Слудского, У. Томсона. Рост интереса к освоению космического пространства послужил развитию теории возмущенного движения искусственных спутников относительно центра масс, развитой В.В. Белецким, Ф.Л. Черноушко. Исследованию влияния вязкоупругих свойств тела на его движение относительно центра масс посвящены работы Л.Д. Акуленко, В.Г. Вильке, Г.Г. Денисова, В.В. Новикова, Н.Е. Егармина, Ю.Г. Маркова, Ф.Л. Черноушко. Изучением движения вязкоупругих тел в гравитационном поле занимались Л.Д. Акуленко, В.Г. Вильке, А.П. Маркеев, Ю.Г. Марков, Ф.Л. Черноушко, А.В. Шатина. Задачи динамики твердых тел со сферическими и эллипсоидальными полостями, содержащими вязкую среду, получили большое развитие в работах В.Г. Вильке, Б.Н. Румянцева, О.Б. Иевлевой, Ф.Л. Черноушко. Говоря об асимптотических методах решения задач механики сплошных сред, нужно отметить работы В.Г. Вильке и Ф.Л. Черноушко, в которых получила развитие методика разделения движений и усреднения.

Попытки объяснить природу генерации магнитного поля Земли берут свое начало с трудов Дж. Лармора, В. Эльзассера, Я.И. Френкеля, Е. Булларда,

послуживших зарождению теории кинематического динамо. Сформулированная Т. Каулингом теорема, накладывающая ограничение на геометрию потока для генерации магнитного поля, привела к построению многочисленных моделей динамо. Среди них можно выделить работы С.И. Брагинского, Дж.Э. Бэкаса, Е. Булларда, А. Гайлитиса, А. Герценберга, Г. Геллмана, Р. Гибсона, Я.Б. Зельдовича, Ю.Б. Пономаренко. Численному исследованию генерации магнитных полей во вращающихся слоях жидкости с применением современных вычислительных комплексов посвящены работы Г. Глатцмайера, П. Робертса, А.А. Рuzмайкина, С.В. Старченко, Р.А. Степанова, П.Г. Фрика. Однако из-за отсутствия данных о течениях, происходящих во внешнем ядре Земли, многие из существующих моделей кинематического динамо являются спорными, а расчеты зачастую требуют наложения ограничений на параметры системы.

Применение аппарата шаровых векторов в задачах механики сплошных сред впервые встречается в работах Г.И. Петрашеня по теории упругости. Преимущества использования математического аппарата шаровых векторов и неприводимых тензоров в задачах теории гироскопов и небесной механики продемонстрированы в работах Г.Г. Денисова, Ю.М. Урмана. Г.Г. Денисов, В.В. Новиков использовали шаровые векторы в задачах о деформировании упругого квазишара и движении вязкой среды между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом. Диссертационная работа является продолжением работ Г.Г. Денисова, В.В. Новикова по динамике свободного вязкоупругого тела и вязкой среды во вращающемся квазишаровом слое. Подобные классы задач рассматриваются в небесной механике, геофизике и магнитной гидродинамике при построении модели магнитного геодинамо.

Цель работы состоит в исследовании угловых движений упругих деформируемых тел, обладающих квазисферической симметрией, и выявлении некоторых качественных особенностей их динамики, обусловленных малыми деформациями, анизотропией упругих свойств, вязкими силами, термодиффузией, несовершенством формы.

Рассмотрены следующие **задачи**:

1. Изучение свободных угловых движений вязкоупругого тела, близкого по форме к шару (изотропного упругого квазишара, анизотропно-упругого шара, вязкоупругого шара, термоупругого шара).

2. Изучение процесса деформирования упругого шара, взаимодействующего с находящимся в его полости эллипсоидальным телом, совершающим с шаром дифференциальное вращение.
3. Изучение течения несжимаемой вязкой проводящей сплошной среды, заключенной в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями, и условий возбуждения им магнитного поля (задача кинематического динамо).

Научная новизна.

1. В рамках модели упругого деформируемого тела, близкого по форме к шару, показана возможность глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения.
2. Сделаны оценки времени затухания прецессии астероидов за счет внутреннего трения и теплообмена с окружающей средой, объясняющие данные астрономических наблюдений.
3. Установлена связь дифференциального вращения упругого шара и находящегося в его полости твердого эллипсоида с перемещением зон наибольших напряжений в шаре.
4. Получены приближенное аналитическое решение уравнения динамики вязкой несжимаемой сплошной среды в пространстве между вращающимися неконцентрическими сферами и условие возбуждения магнитного поля.

Теоретическая значимость. Полученные в работе результаты, свидетельствующие о возможности глобального перемещения полюсов упругого деформируемого тела, периодичности миграции зон наибольших напряжений в упругом вращающемся шаре, взаимодействующим с находящимся в его полости твердым эллипсоидом, наличии радиального течения в пространстве между вращающимися неконцентрическими сферами, носят качественный характер и могут представлять ценность для изучения особенностей динамики вязкоупругих тел и вязких сплошных сред.

Практическая значимость. Результаты по изучению угловых движений свободно вращающихся деформируемых тел могут найти применение в теории движения полюса Земли. Сделанные оценки времени затухания прецессии астероидов представляют интерес для прогнозирования их угловых движений. Установленное

периодическое перемещение зон наибольших напряжений в упругом шаре, вызванное опережающим вращением внутреннего эллипсоидального тела, находящегося в его полости, могут быть полезны при изучении миграции очагов сейсмической активности. Исследование возможности генерации магнитного поля течением, полученным в работе, позволяют построить модель динамо, отвечающую современным представлениям о внутреннем строении Земли.

Методология и методы диссертационного исследования основаны на использовании приближенных аналитических методов решения уравнений динамики сплошных сред, математического аппарата шаровых векторов, применении численных алгоритмов при построении траекторий конца вектора кинетического момента и нахождении собственных значений и собственных векторов в задаче об эволюции магнитного поля.

Основные положения, выносимые на защиту

1. На моделях упругого деформируемого тела, близкого по форме к шару, и анизотропно-упругого шара показана возможность глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения (полюса).
2. Проведены оценки времени затухания прецессии астероидов, обусловленного вязкостью и термодиффузией.
3. На модели вязкоупругого шара в свободном угловом движении показано, что вязкие силы определяют прецессию шара, изучена возможность свободной прецессии полюса Земли с периодом Чандлера.
4. Изучен процесс деформирования вращающегося упругого шара, взаимодействующего с находящимся в его полости телом эллипсоидальной формы, совершающим дифференциальное с шаром вращение.
5. Получено приближенное аналитическое решение задачи динамики вязкой проводящей сплошной среды, заключенной в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями, и исследована возможность генерации магнитного поля.

Достоверность результатов диссертационной работы основана на применении строго обоснованного математического аппарата шаровых векторов, методах приближенного аналитического решения, адекватных рассматриваемым моделям, использовании корректных алгоритмов численного решения.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XIX Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (Архангельск, 2013), на VII, VIII, IX Всероссийских конференциях «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2013, 2015, 2017), на XII, XIV, XV Всероссийских молодежных школах-конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2013, 2015, 2016), на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015), на XXI, XXII Нижегородских сессиях молодых ученых «Естественные, математические науки» (Нижний Новгород, 2016, 2017), на Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов (Москва, 2017), на Всероссийской конференции молодых ученых-механиков (Сочи, 2017), на Международной конференции «Марчуковские научные чтения – 2021» (Новосибирск, 2021).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 22 работах [30, 31, 41-44, 80-91, 113, 114, 139, 165]. Из них 7 работ [80, 81, 84, 90, 91, 114, 139] опубликованы в ведущих научных журналах (ВАК), работы [114, 139, 165] – в журналах, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и/или Web of Science.

Личный вклад автора. В работах, выполненных совместно с В.В. Новиковым, соискателю принадлежит построение траекторий конца вектора кинетического момента при изучении угловых движений упругого деформируемого тела, численная оценка времени затухания прецессии астероидов, решение задачи о деформировании упругого шара, взаимодействующего с находящимся в его полости внутренним эллипсоидальным телом, решение задачи динамики вязкой среды, заключенной в пространстве между вращающимися неконцентрическими сферами, исследование возможности генерации магнитного поля рассмотренными в работе течениями. Г.Г. Денисову и В.В. Новикову принадлежит построение моделей упругих и вязкоупругих тел, решение задач о свободных угловых движениях деформируемых тел, решение задачи динамики вязкой среды в полости между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом. В.В. Новикову принадлежит постановка задачи диссертационного исследования, общее руководство работой, формулировка утверждений, участие в обсуждении, редактировании и оформлении результатов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из **190** наименований. Общий объем диссертации составляет **124** страницы машинописного текста, включая **30** рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи исследования, показана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, описана методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности результатов и апробация работы, отмечены публикации, личный вклад соискателя, структура и объем работы.

В первой главе выполнен обзор литературы, посвященной проблеме диссертационного исследования. Рассмотрены основные работы по изучению движения упругих и вязкоупругих тел применительно к проблемам небесной механики и геофизики. Описаны результаты авторов, занимающихся вопросами возбуждения магнитного поля течениями проводящей среды.

Во второй главе представлены основные сведения об аппарате шаровых векторов, необходимые для дальнейшего изложения результатов диссертационного исследования.

В третьей главе рассмотрена динамика упругого деформируемого тела, совершающего свободные угловые движения.

В п. 3.1. дана общая постановка задачи о вращательном движении вязкоупругого тела, поверхность которого мало отличается от сферы.

В п. 3.2. изучены угловые движения упругого деформируемого тела, близкого по форме к шару, в предположении малости внутреннего трения. Для абсолютно твердого тела показано влияние квазисферичности поверхности тела на качество его динамики. С помощью аппарата шаровых векторов проведено решение квазистатических задач о деформировании упругого шара и упругого квазишара. На примере упругого квазишара с малой кубической симметрией и начальной эллипсоидальностью показана динамика тела при различной скорости вращения. Описан механизм глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения, который может быть реализован в рамках рассмотренной модели.

В п. 3.3. рассмотрен анизотропно-упругий шар в свободном угловом движении при малом внутреннем трении. Методами линейной алгебры проведено решение квазистатических задач о деформировании изотропного упругого шара и шара с малой анизотропией упругих свойств. На примере шара с плоскостью изотропии и начальной эллипсоидальностью показана динамика тела при различной скорости вращения. Аналогично п. 3.1. продемонстрирована возможность глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения.

В п. 3.4. рассмотрены некоторые особенности динамики деформируемых тел, связанные с диссипативными процессами: с внутренним трением и макроскопической термодиффузией. На основе заключений о характере угловых движений тела, полученных из моделей вязкоупругого и термоупругого шара, изучена длительность процесса затухания свободной прецессии астероидов.

В п. 3.5. предложен один из возможных механизмов нутации полюса Земли с периодом Чандлера, основанный на решении задачи об угловых движениях вязкоупругого квазишара в предположении равнозначного влияния упругих и вязких сил на угловые движения.

В п. 3.6. рассмотрена задача о деформировании упругого изотропного шара, взаимодействующего с находящимся в его полости твердым эллипсоидальным телом, моделируемым гантелью. Построены распределения напряжений сферического слоя внутри шара. Показано, что учет опережающего вращения эллипсоида относительно шара приводит к перемещению в шаре зон наибольших напряжений в направлении относительного вращения. Полученные результаты могут быть полезны для объяснения долгопериодической миграции очагов сейсмической активности Земли.

В четвертой главе рассмотрена динамика проводящей вязкой сплошной среды, близкой по внутреннему строению к аморфному телу. При высоких температурах уравнения, описывающие динамику такой среды, сводятся к уравнениям классической гидродинамики. Рассмотрено движение проводящей вязкой среды, заключенной в пространстве между вращающимися сферической и квазисферической поверхностями, и связанные с ним вопросы о возможности генерации магнитного поля. Под квазисферичностью в данном случае понимается наличие малого сдвига внутренней поверхности относительно внешней и малой эллипсоидальности внутренней

поверхности. Для поиска решения уравнений магнитной гидродинамики использован аппарат шаровых векторов.

В п. 4.1. приведено решение задачи о движении вязкой среды между вращающимися неконцентрическими сферами и задачи о течении между соосно вращающимися сферической и эллипсоидальной поверхностями. Показано, что асимметрия потока в данной постановке приводит к возникновению радиального течения, необходимого для возбуждения магнитного поля.

В п. 4.2. изучена возможность генерации магнитного поля течениями, полученными в п. 4.1. Данная задача сведена к поиску собственных значений с положительной действительной частью, обеспечивающих возбуждение магнитных мод.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Работа поддерживалась грантами РФФИ (проекты 12-01-00314, 15-01-08326); Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект №1727); Минобрнауки РФ (соглашение FSWR-2023-0034).

1. Обзор литературы

Часто при решении задач, имеющих сферическую симметрию относительно некоторой точки, используются разложения скалярных функций в ряды по сферическим функциям. В случае векторных и тензорных полей более предпочтительным является математический аппарат, позволяющий работать с функциями не покомпонентно, а в целом.

Удобным аппаратом для описания симметрии тел служит теория групп. Применение теории групп в квантовой механике началось с работ Г. Бете, Г. Вейля, Е. Вигнера, Дж. Неймана, В.А. Фока [115, 163, 185, 186] и др.

Для нахождения волновых функций фотона В.Б. Берестецким [11] был разработан математический аппарат шаровых векторов и спиноров, построение которых проводилось путем использования свойств представлений группы вращений.

Применение аппарата шаровых векторов в теории упругости началось с работ Г.И. Петрашеня [94-98]. С помощью введенной системы векторных функций им были разработаны общие методы решения векторных задач математической физики для сферических областей, дано решение предельных задач теории упругости в случае изотропной сферы. В [95, 98] изучены собственные и вынужденные колебания упругого шара, вопросы, связанные с резонансом в шаровой области, в [96] исследовано распространение возмущений в сфере, в частности нестационарной волны Релея.

Развитый Г.И. Петрашенем аппарат шаровых векторов и контурных интегралов нашел применение в работах В.С. Булдырева и З.А. Янсона [14, 15] по теории распространения интерференционных волн. В [14] получено точное решение задачи о нестационарном распространении в упругом сферическом слое волн SH, порожденных вращательным воздействием внешней поверхности слоя. Решение имеет вид ряда по шаровым векторам, коэффициенты которого являются контурными интегралами, зависящими от радиальной координаты и времени.

Использование аппарата шаровых векторов встречается в работах Г.Г. Денисова и В.В. Новикова [33, 40]. При изучении свободных угловых движений деформируемого тела, близкого по форме к шару, ими было получено приближенное решение уравнений теории упругости в виде разложения по шаровым векторам [33]. В [40] найдено

решение нестационарной задачи о движении вязкой среды между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом.

Многие задачи динамики сплошных сред, в постановке которых имеется сферическая симметрия формы тел или свойств среды, возникли с развитием астрофизики, геодинамики, космонавтики, теории гироскопов. Вопросы, связанные с движением небесных тел, ориентацией и стабилизацией искусственных спутников и космических аппаратов, поведением гироскопов с неконтактными подвесами, послужили развитию теории вращательного движения твердого тела.

Становление теории движения твердого тела с одной неподвижной точкой берет свое начало с работ Л. Эйлера [142-144]. В [143] получены уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки (полюса) в системе главных осей, жестко связанных с телом. В [144] показано, что всякое смещение твердого тела может быть описано смещением полюса и тремя углами: прецессии, нутации и собственного вращения, определяющими поворот тела относительно начальной ориентации.

Л. Эйлером, Ж.Л. Лагранжем, С.В. Ковалевской найдены три случая точной разрешимости уравнений вращательного движения тела с одной неподвижной точкой. Известны также несколько случаев частной интегрируемости уравнений движения [28], полученных В. Гессом, Д.Н. Горячевым, Д. Гриоли, Г.В. Колосовым, В.А. Стекловым, С.А. Чаплыгиным и др.

Для изучения особенностей динамики тела с одной неподвижной точкой важную роль играет кинематическое истолкование движения тела. Геометрическую интерпретацию движения тела в случае Л. Эйлера дал Л. Пуансо [168]. Он ввел понятие эллипсоида инерции и показал, что движение тела можно рассматривать как качение без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной плоскости. Л. Пуансо принадлежит исследование устойчивости вращения вокруг главных осей инерции тела. Большой вклад в исследование свойств вращательного движения твердого тела внес П.В. Харламов. Специальная введенная система координат и кинематические уравнения, полученные П.В. Харламовым [118], позволили дать кинематическое толкование движения во многих случаях интегрируемости уравнений динамики тела. Его идеи получили дальнейшее развитие в работах И.Н. Гашененко [27], Г.В. Горра [28], А.М. Ковалева [60], В.П. Харламовой [119] и др.

Необходимость изучения угловых движений твердых тел, поверхность которых мало отличается от сферической, возникает в технических приложениях, в частности теории гироскопических приборов, при разработке систем ориентации космических аппаратов. Большое распространение получили гироскопы с неконтактным подвесом. Отклонение фигуры ротора неконтактного гироскопа от шара приводит к возникновению нежелательных внешних моментов, обусловленных действием сил со стороны подвеса на несферический ротор. Вычислению момента сил, приложенных к ротору, посвящен ряд работ. В работе [104] В.М. Соруна рассмотрен эллипсоидальный ротор в электромагнитном поле. В [71] Ю.Г. Мартыненко получил момент, действующий на ротор электростатического гироскопа, поверхность которого мало отличается от сферической. В [108] Ю.М. Урман определил возмущающие моменты, приложенные к квазисферическому ротору, в осесимметричном магнитном поле, в [109] рассмотрел случай криогенного подвеса.

Большой вклад в развитие асимптотических методов решения задач динамики твердого тела внесли В.В. Белецкий, Ф.Л. Черноушко. При решении задач вращательного движения динамически симметричных спутников [8, 10] В.В. Белецкий успешно применил метод оскулирующих элементов и метод усреднения. В работе [9] отражены возможности использования оскулирующих элементов, введенных В.В. Белецким, при разделении быстрых и медленных движений, которые находят применение не только в задачах небесной механики, но и в теории гироскопов с неконтактными подвесами. Эти методы получили дальнейшее развитие в работах Ф.Л. Черноушко, в частности при исследовании движения твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции [120]. С помощью метода усреднения в работе [58] Д.М. Климова, Г.Н. Космодемьянской, Ф.Л. Черноушко исследовано быстрое движение под действием силы тяжести несбалансированного ротора гироскопа с неконтактным подвесом вокруг неподвижной точки. Метод усреднения нашел применение в трудах Ю.Г. Мартыненко [72] по изучению движений различных видов неконтактных гироскопов.

Преимущества использования математического аппарата неприводимых тензоров в задачах динамики твердого тела впервые продемонстрированы в работах Г.Г. Денисова, Ю.М. Урмана [48, 110-112]. Работа [48] посвящена анализу прецессионных движений гироскопа под действием моментов, имеющих силовую

функцию. Применение аппарата неприводимых тензоров позволило записать представление силовой функции взаимодействия с полем, не решая сложную граничную задачу математической физики. Этот подход оказался весьма эффективным в задачах небесной механики, рассмотренных в [110, 111]. Результаты по изучению возмущенного движения спутника в гравитационном поле позволили дополнить и обобщить результаты работ [8, 120].

В настоящее время значительно развиты теория и методы исследования движения абсолютно твердого тела. Эта модель широко применяется в случаях, когда деформации тела малы. Однако малость деформаций не всегда означает, что ими можно пренебречь. В некоторых случаях учет упругости приводит к качественному изменению динамики тела.

Задача о движении упругого тела, близкого по форме к шару, относительно неподвижной точки возникла в связи с попыткой объяснить расхождение между теоретическими результатами и данными наблюдений за движением полюса Земли. Основываясь на теории вращательного движения абсолютно твердой Земли, Л. Эйлер в [143] получил период нутации, равный 306 суткам. Повышение точности наблюдений во второй половине XIX века позволили С. Чандлеру обнаружить изменения наблюдаемых значений широт с периодами в 365 суток и 410-440 суток [135, 136], которые были интерпретированы как следствие свободного движения полюса Земли. Вариаций с периодом 306 суток установлено не было. В [164] С. Ньюком объяснил этот результат, отказавшись от предположения, что Земля является абсолютно твердым телом. По его мнению, учет жидких масс океана и упругости Земли приводит к замедлению движения полюсов, что дает период Чандлера.

Модели деформируемой Земли рассматривались в работах [1-3, 32, 49, 65, 75, 76, 159, 182, 184]. Простейшая модель идеально упругой Земли была разработана У. Томсоном, П. Тэйтом в [182]. С помощью системы сферических функций ими было получено точное решение задачи о деформировании шара при наличии поверхностных сил, удовлетворяющих условиям равновесия шара как абсолютно твердого тела. А. Ляв [159] рассмотрел несжимаемое упругое тело в приближении малых деформаций вращающегося шара, находящегося в гравитационном поле. Для описания упругих деформаций Земли он ввел безразмерные параметры (числа Лява), связанные с модулями упругости. Создание первой скоростной модели Земли на основе данных о

пробегах сейсмических волн принадлежит Б. Гутенбергу [32] и Г. Джеффрису [49]. Наличие резких переходов скорости продольных волн между слоями привели к построению слоистых моделей Земли.

Вопросу о влиянии внешнего ядра на свободное вращение Земли посвящены работы Ф.А. Слудского [74], А. Пуанкаре [167], С. Хэфа [155]. Ими рассмотрена задача о вращении твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной однородной идеальной несжимаемой жидкостью. Обнаружено, что наличие жидкого эллипсоидального ядра помимо Чандлеровской нутации приводит к возникновению суточных колебаний оси вращения в теле Земли. Модели упругого деформируемого тела с эллипсоидальным жидким ядром изучены в работах Г. Джеффриса [49], У. Манка, Г. Макдональда [65]. В [49] показано существенное влияние упругости мантии на период Чандлеровского движения и амплитуду вынужденных колебаний полюса. М.С. Молоденский [75, 76] рассмотрел модель, состоящую из сферического слоя упругой мантии, жидкого внешнего и упругого внутреннего ядра. Расчет напряжений выполнялся с учетом деформаций упругого слоя для случая начального гидростатического напряженного состояния. При этом учитывалось изменение плотности и упругих свойств слоев в соответствии с данными сейсмологических наблюдений. Работа [184] Дж. Вара позволила обобщить результаты [75] на случай упругой эллипсоидальной Земли. В [184] вычислена серия гармоник нутационного движения полюса, хорошо согласующаяся с данными наблюдений.

В работах Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшева, Ю.Г. Маркова, Л.В. Рыхловой [1-3] на основе модели поступательно-вращательного движения Земли, деформируемой под действием центробежных сил инерции и гравитационного поля Луны и Солнца, изучена возможность движения полюса с периодом Чандлера. При этом Земля представлена как двухслойное тело, состоящее из абсолютно твердого шарового ядра и вязкоупругой мантии.

Большую значимость в динамике вязкоупругих тел имеют методы, позволяющие выявить качественные особенности движения тела. Многие задачи поддаются анализу, когда тело достаточно жестко. Исследованию движения тел, близких к твердым, относительно неподвижной точки посвящены работы [19, 21, 24, 33-38, 52, 66, 67, 69, 70, 73, 79, 122-124].

Большое развитие асимптотических методов решения задач динамики систем, содержащих сплошную среду, связано с именами Ф.Л. Черноушко, В.Г. Вильке, разработавших метод разделения движений и усреднения. В предположении быстрого затухания упругих колебаний за время, много меньшее характерного времени движения тела как целого, Ф.Л. Черноушко [122-124] предложил подход, позволяющий свести задачу к квазистатической. Показано, что в данной постановке уравнения движения вязкоупругой среды аналогичны уравнениям динамики твердого тела с возмущающими моментами, обусловленными внутренней упругостью и диссипацией. Для достаточно жестких систем В.Г. Вильке [20] разработал методику сведения задач с бесконечным числом степеней свободы к решению конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенные методы разделения движений и усреднения нашли применение в работах В.Г. Вильке, Ю.Г. Маркова, А.П. Маркеева, Ф.Л. Черноушко, А.В. Шатиной по изучению эволюции движения вязкоупругих тел в гравитационных полях [19, 21, 24, 66, 67, 69].

В [70] Ю.Г. Марковым, И.С. Миняевым рассмотрено движение неоднородного вязкоупругого шара вокруг центра масс в предположении малости диссипации. Показано, что диссипация приводит к затуханию угловых движений тела и переходу оси вращения в положение оси наибольшего момента инерции. В [73] Ю.Г. Мартыненко, В.В. Подалковым получены оценки затухания нутационных движений вязкоупругого шара и переходу оси вращения в устойчивое положение.

В [52] Н.Е. Егармин рассмотрел свободное движение линейно упругого деформируемого тела около центра масс. Получены выражения для поправок к тензору инерции тела, обусловленных упругими свойствами. Показано, что угловые движения тела описываются уравнением, схожим по форме записи с уравнением Эйлера, в котором внутренняя упругость сведена к эквивалентному моменту, являющемуся многочленом четвертой степени от компонент угловой скорости.

Изучению влияния вязких и упругих свойств на динамику твердого тела в свободном угловом движении посвящены работы [33-38, 79] Г.Г. Денисова, В.В. Новикова. Ими получено аналитическое решение задач об угловых движениях и деформировании анизотропно-упругого шара в случае малой анизотропии [79], изотропных упругих квазишара [33] и эллипсоида при произвольном соотношении полуосей [34]. Рассмотрены вопросы устойчивости стационарных вращений и

возможность перехода оси вращения к новому устойчивому положению. В [36] исследована динамика вязкоупругого квазишара в предположении равнозначного влияния вязких и упругих свойств на его угловые движения. Установлена возможность движения оси вращения с малым затуханием, период которого определяется эллипсоидом инерции в недеформированном состоянии и вязкими свойствами тела.

Интерес к теоретическим исследованиям движения тел с полостями, заполненными идеальной или вязкой жидкостью, возрос с развитием авиационной и ракетно-космической промышленности. Многие работы, в которых рассматривается движение тел с жидким наполнением, посвящены вопросам устойчивости движения. Первые результаты, полученные в этой области, принадлежат Н.Е. Жуковскому, Н.Н. Колесникову, Г.К. Пожарицкому, Н.Г. Четаеву и др. Устойчивость тел с эллипсоидальными полостями, содержащими идеальную жидкость, исследована в работах А.Ю. Ишлинского, М.Е. Темченко [56], В.В. Румянцева [100], С.Л. Соболева [103]. Используя второй метод Ляпунова, в [101] В.В. Румянцев впервые получил достаточные условия устойчивости движения тяжелого твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса.

В работах [54, 55] О.Б. Иевлевой рассмотрены малые колебания твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью в случае произвольного числа Рейнольдса. Решение линеаризованных уравнений гидродинамики получено с помощью обобщенных сферических функций.

Большой вклад в развитие качественных методов исследования динамики тел, содержащих вязкую жидкость, внесли Ф.Л. Черноушко, В.Г. Вильке. В работе Ф.Л. Черноушко [121] изложены результаты исследования движения несжимаемой вязкой жидкости в полости твердого тела в предположении малости числа Рейнольдса. Он разработал метод сведения гидродинамической задачи к решению стационарных краевых задач. В частности, рассмотрены сферическая и эллипсоидальная формы полости. Получена система дифференциальных уравнений, описывающих движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. С помощью асимптотических методов изучены некоторые вопросы колебаний и устойчивости вращения тела, содержащего вязкую жидкость. В работе В.Г. Вильке [22] с помощью разработанных им в [20] асимптотических методов разделения движения и усреднения исследована эволюция движения осесимметричного тела со сферической полостью, заполненной

вязкой жидкостью. В работе Е.Ю. Барановой, В.Г. Вильке [6] в предположении малости Числа Рейнольдса рассмотрено движение твердого тела с несжимаемой вязкой жидкостью, заполняющей сферическую и эллипсоидальную полость.

Движение жидкости различной степени вязкости во вращающемся сферическом слое представляет интерес для изучения атмосферной и океанической циркуляции, процессов, происходящих во внешнем ядре Земли. Многие исследования течений в полостях вращающихся тел основаны на применении метода пограничного слоя. Течения вблизи поверхности быстро вращающихся сфер в безграничной покоящейся жидкости были изучены У. Бэнксом [128], Дж. Фоксом [145], Л. Хоуартом [156]. В [181] К. Стюардсон и П. Робертс исследовали движение жидкости в сферическом прецессирующем резервуаре. В [180] рассмотрен вопрос о структуре тонкого пограничного слоя применительно к задаче о движении вязкой жидкости во вращающемся сферическом слое. В линейной постановке эта задача изучена Дж. Праудменом [169]. В [166] Г. Пирсоном решена нестационарная задача об осесимметричном течении вязкой жидкости между концентрическими дифференциально вращающимися сферами.

В [40] Г.Г. Денисовым, В.В. Новиковым рассмотрено течение несжимаемой вязкой среды в пространстве между соосно вращающимися сферической и эллипсоидальной поверхностями. Изучены условия возникновения радиального течения. Установлены сходства полученного в [40] течения и некоторых особенностей поведения магнитного поля на поверхности Земли.

Одной из проблем современной магнитной гидродинамики остается вопрос о генерации космических магнитных полей. В [146] К. Ф. Гаусс высказал идею, согласно которой магнитное поле преимущественно формируется внутри Земли, и лишь небольшая часть обусловлена воздействием внешней среды. Он получил выражение магнитного потенциала на поверхности земного шара в виде ряда по сферическим функциям. В работе [158] Дж. Лармор заложил основы теории магнитного динамо, предположив, что магнитное поле создается электрическими токами, протекающими в проводящей среде или газовой плазме. Дальнейшее развитие теория динамо получила в работах Я.И. Френкеля [116] и В. Эльзассера [141], считавших, что генерация магнитного поля осуществляется медленными движениями проводящего жидкого ядра, находящегося в изначально слабом внешнем магнитном поле, которое

усиливается вследствие действия силы Лоренца и кориолисовых сил. По их мнению, определяющую роль в процессе генерации магнитного поля играют конвективные токи во внешнем ядре. В [116] Я.И. Френкель изучил изменение средней величины напряженности магнитного поля в зависимости от числа конвективных ячеек. На основе методов, разработанных В. Эльзассером, по определению взаимодействия между составляющими движения и магнитного поля Е. Буллард [132] предположил, что во внешнем ядре Земли имеются параллельные экватору течения с запада на восток, обусловленные вращением Земли, а также конвективные радиальные течения от центра твердого ядра к поверхности и обратно при остывании жидкости.

Для описания реальных процессов, происходящих во внешнем ядре, необходимо рассмотреть уравнения магнитной гидродинамики совместно с уравнением тепломассопереноса. Эта задача представляет большие вычислительные трудности. Попытки установить причину возбуждения магнитного поля привели к созданию теории кинематического динамо, которая рассматривает поведение магнитного поля при заданном законе движения жидкости.

Т. Каулинг [57] доказал теорему о невозможности генерации осесимметричного магнитного поля стационарным аксиально симметричным течением. Строго обоснованы теоремы антидинамо для чисто тороидального движения [133] и плоскопараллельного течения [53]. Это накладывает ряд ограничений на геометрическую конфигурацию движения жидкости, указывающих на необходимость изучения трехмерных течений со слабой симметрией.

Построению моделей кинематического динамо посвящено множество работ [12, 16, 26, 62, 93, 126, 127, 133, 149, 148, 154, 172, 173]. Одна из первых попыток создания модели ламинарного динамо предпринята в работе [133] Е. Булларда, Г. Геллмана, в которой получил развитие метод разложения тороидальных и полоидальных полей по сферическим гармоникам. Однако Р. Гибсон, П. Робертс [149] показали отсутствие сходимости численного метода, используемого в [133] при поиске неограниченно растущих магнитных режимов. В [154] А. Герценберг рассмотрел конфигурацию поля скорости, состоящую из двух сферических роторов, вращающихся вокруг непараллельных осей в сферическом объеме проводящей жидкости. Р. Гибсон [148] распространил результаты [154] на случай трех сферических роторов. В [26] А. Гайлитис показал, что осесимметричное поле скорости, имеющее круговые линии

тока, заключенные внутри двух тороидальных колец, при определенных условиях может поддерживать неосесимметричное магнитное поле. В [127] Дж. Э. Бэкас в рамках построенной им нестационарной модели течения строго обосновал отбрасывание высоких гармоник за счет временного ослабления. В работе [12] С.И. Брагинского рассмотрено уравнение индукции с малыми добавочными членами, нарушающими цилиндрическую симметрию, но в то же время приводящими к зависимости решения от добавок.

Многие примеры генерации магнитных полей трехмерными течениями являются моделями медленного динамо, работающими в средах со слабой проводимостью. В случае высокой проводимости необходимо построение модели генерации магнитного поля, скорость роста которого не стремится к нулю. Первые наглядные механизмы быстрого динамо предложены Х. Альвенем [126], Я.Б. Зельдовичем [16]. Модели быстрого динамо, порождаемого стохастическими турбулентными течениями, рассмотрены Г. Бэтчелором [129], Г. Моффатом [78], Ю. Паркером [93], П. Саффманом [172], М. Штейнбеком, Ф. Краузе, К. Х. Рэдлером [62], А. Шлютером, Л. Бирманом [173] и др.

Большой интерес для теории динамо представляют численные эксперименты, моделирующие генерацию магнитных полей. Наиболее значимые результаты представлены в работе Г. Глатзмайера и П. Робертса [150]. Для вращающегося сферического слоя проводящей жидкости ими впервые было получено совместное решение уравнений теплопереноса, Навье-Стокса и Максвелла. Результаты согласуются с реальными изменениями геомагнитного поля и могут дать представление об инверсии магнитных полюсов. Однако решение задачи при больших числах Рейнольдса потребовало искусственного завышения вязкости для больших волновых чисел. Известны другие работы [137, 174, 179], в которых решение уравнений получено в более строгой постановке.

Особое значение имеют работы, сочетающие применение асимптотических методов решения задач магнитного динамо и численных алгоритмов. В [171] А.А. Рузмайкин, С.В. Старченко разработали асимптотический подход максимально эффективной генерации MEGA, позволяющий построить аналитическое решение уравнений магнитной гидродинамики в узкой пространственной области. С помощью метода Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна-Джеффриса в [170, 178] А. Совардом

аналитически исследованы течения в узком зазоре между концентрическими вращающимися сферами и некоторые режимы генерации крупномасштабных магнитных полей. Множество работ в этом направлении посвящено проблеме генерации солнечных магнитных полей.

В настоящий момент известны результаты экспериментальных исследований возбуждения магнитных полей проводящей жидкостью во вращающихся полостях различной формы [147, 162, 183]. В [104] Д.Д. Соколовым, Р.А. Степановым, П.Г. Фриком представлен краткий обзор лабораторных экспериментов и соответствующих результатов, полученных численным решением задач. В работах [106, 107] Р.А. Степанова, П.Г. Фрика, А.В. Чупина проведен численный эксперимент генерации поля винтовым потоком проводящей жидкости в тороидальной и цилиндрической области.

Данный обзор не претендует на полноту описания проблем и методов решения задач динамики вязкоупругих сред и магнитной гидродинамики. Рассмотрены лишь основные работы, близкие к тематике диссертационного исследования.

2. Математический аппарат шаровых векторов

При решении задач математической физики в случае сферической симметрии удобно использовать аппарат шаровых векторов. Этот аппарат получил развитие в связи с изучением квантовомеханических свойств фотона [11]. Применение шаровых векторов в задачах динамики сплошных сред позволяет свести векторную задачу к задачам для скалярных радиальных функций.

В данной главе приведены основные сведения об аппарате шаровых векторов, необходимые для дальнейшего изложения результатов диссертационного исследования.

2.1. Сферические функции

Сферическими функциями принято называть собственные функции угловой части оператора Лапласа в сферической системе координат, удовлетворяющие со всеми своими производными условию однозначности, непрерывности и ограниченности по модулю. Система сферических функций имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \\ Y_{l,-m}(\theta, \varphi) &= (-1)^m e^{-im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \\ 0 &\leq m \leq l. \end{aligned} \quad (2.1)$$

где P_l^m – присоединенные функции Лежандра:

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta),$$

а P_l – полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l.$$

Из полноты системы дискретных комплексных экспоненциальных функций $e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \dots$ и системы присоединенных функций Лежандра P_l^m следует полнота системы сферических функций на единичной сфере.

Система функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ вида (2.1) ортогональна на единичной сфере:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = 0, \quad l \neq l', \quad m \neq m'.$$

В силу полноты системы (2.1) любую дважды непрерывно дифференцируемую на компакте $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ функцию $Y(\theta, \varphi)$, удовлетворяющую условию

периодичности по переменной φ , можно представить в виде ряда по сферическим функциям:

$$Y(\theta, \varphi) = \sum_{l,m, |m| \leq l} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где коэффициенты разложения C_{lm} определяются по формуле:

$$C_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta.$$

2.2. Шаровые векторы и их свойства

Пусть $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – ненормированные сферические функции, дающиеся выражениями (2.1). Шаровыми векторами на единичной сфере называют систему линейно независимых вектор-функций [94]:

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) &= (l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)\vec{e}_r - \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ \vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) &= lY_{lm}(\theta, \varphi)\vec{e}_r + \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 1, 2, \dots, \\ \vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) &= [\vec{e}_r, \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi)], \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Шаровые векторы (2.2) обладают свойством ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\vec{Y}_{lm}^v, \vec{Y}_{l'm'}^{v'*}) \sin \theta d\theta = 0, \quad l \neq l', \quad m \neq m', \quad v \neq v'.$$

Система векторов (2.2) не является ортонормированной:

$$s_l^v \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\vec{Y}_{lm}^v, \vec{Y}_{lm}^{v'*}) \sin \theta d\theta = 1.$$

Нормировочные множители s_l^v имеют вид:

$$s_l^+ = \frac{1}{(2l+1)(l+1)}, \quad s_l^- = \frac{1}{(2l+1)l}, \quad s_l^0 = \frac{1}{(l+1)l}.$$

Всякий вектор, зависящий от углов θ, φ $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\vec{F}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta < \infty$$

можно разложить в ряд по шаровым векторам:

$$\vec{F}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m,v} f_{lm}^v(r) \vec{Y}_{lm}^v(\theta, \varphi),$$

причем коэффициенты разложения ищутся в виде:

$$f_{lm}^v(r) = \sqrt{s_l^v} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\vec{F}, \vec{Y}_{lm}^{v*}) \sin \theta d\theta.$$

2.3. Действие операторов на разложения по шаровым векторам

Пусть векторное поле $\vec{U}(r, \theta, \varphi)$ представлено в виде разложения по шаровым векторам:

$$\vec{U}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l, |m| \leq l} \left(P_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) + K_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) \right).$$

Результат действия векторных дифференциальных операторов на поле $\vec{U}(r, \theta, \varphi)$ можно также представить в виде ряда, в котором коэффициенты разложения при \vec{Y}_{lm}^v зависят от радиальных функций P_{lm}, M_{lm}, K_{lm} , имеющих те же значения параметров l и m [40, 98]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{U} &= \sum_{l, |m| \leq l} \left[\frac{l}{2l+1} \left(K'_{lm} - \frac{l}{r} K_{lm} \right) \vec{Y}_{lm}^+ - \frac{l+1}{2l+1} \left(K'_{lm} + \frac{l+1}{r} K_{lm} \right) \vec{Y}_{lm}^- + \right. \\ &\quad \left. + \left(M'_{lm} - \frac{l-1}{r} M_{lm} - P'_{lm} - \frac{l+2}{r} P_{lm} \right) \vec{Y}_{lm}^0 \right], \\ \Delta \vec{U} &= \sum_{l, |m| \leq l} \left[\left(P''_{lm} + \frac{2}{r} P'_{lm} - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} P_{lm} \right) \vec{Y}_{lm}^+ + \right. \\ &\quad \left. \left(M''_{lm} + \frac{2}{r} M'_{lm} - \frac{(l-1)l}{r^2} M_{lm} \right) \vec{Y}_{lm}^- + \left(K''_{lm} + \frac{2}{r} K'_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} K_{lm} \right) \vec{Y}_{lm}^0 \right], \\ \operatorname{div} \vec{U} &= \sum_{l, |m| \leq l} \left[(l+1) \left(P'_{lm} + \frac{l+2}{r} P_{lm} \right) + l \left(M'_{lm} - \frac{l-1}{r} M_{lm} \right) \right] e^{im\varphi} P_l^m(\cos \varphi). \end{aligned}$$

2.4. Разложения произведений шаровых векторов

Приведем известные разложения Клебша-Гордана [17] для скалярного и векторного произведения шаровых векторов:

$$\begin{aligned}
 (\vec{Y}_{l_1 m_1}^{v_1}, \vec{Y}_{l_2 m_2}^{v_2}) &= \frac{1}{b_{l_1}^{v_1} b_{l_2}^{v_2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} (2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2(l_1 + v_1) + 1)(2(l_2 + v_2) + 1)} \times \\
 &\times \sum_{l, v, m} \frac{(-1)^{l_2 + l_1 + v_1 + l + v}}{\sqrt{2(l + v) + 1}} \begin{Bmatrix} l_1 + v_1 & l_2 + v_2 & l + v \\ l_2 & l_1 & 1 \end{Bmatrix} C_{l_1 + v_1, 0, l_2 + v_2, 0}^{l + v, 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l + v, m} Y_{l + v, m}(\theta, \varphi), \\
 [\vec{Y}_{l_1 m_1}^{v_1}, \vec{Y}_{l_2 m_2}^{v_2}] &= \frac{i}{b_{l_1}^{v_1} b_{l_2}^{v_2}} \sqrt{\frac{3}{2\pi} (2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2(l_1 + v_1) + 1)(2(l_2 + v_2) + 1)} \times \\
 &\times \sum_{l, v, m} b_l^v \begin{Bmatrix} l_1 & l_1 + v_1 & 1 \\ l_2 & l_2 + v_2 & 1 \\ l & l + v & 1 \end{Bmatrix} C_{l_1 + v_1, 0, l_2 + v_2, 0}^{l + v, 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{lm} \vec{Y}_{lm}^v,
 \end{aligned}$$

где b_l^v – коэффициенты, зависящие от нормировочных множителей s_l^v :

$$b_l^+ = -\frac{1}{\sqrt{s_l^+}}, \quad b_l^- = -\frac{i}{\sqrt{s_l^-}}, \quad b_l^0 = \frac{1}{\sqrt{s_l^0}},$$

$C_{aabb}^{c\gamma}$ – коэффициенты Клебша-Гордана, $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$ – $6j$ -символы Вигнера,

$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}$ – $9j$ -символы Вигнера или коэффициенты Фано.

Коэффициенты Клебша-Гордана могут быть представлены в виде алгебраической суммы [17]:

$$\begin{aligned}
 C_{aabb}^{c\gamma} &= \delta_{\gamma, \alpha + \beta} \Delta(abc) \sqrt{(a + \alpha)! (a - \alpha)! (b + \beta)! (b - \beta)! (c + \gamma)! (c - \gamma)! (2c + 1)} \times \\
 &\times \sum_z \frac{(-1)^z}{z! (a + b - c - z)! (a - \alpha - z)! (b + \beta - z)! (c - b + \alpha + z)! (c - a - \beta + z)!}
 \end{aligned}$$

в которой суммирование проводится по всем целочисленным неотрицательным значениям z , при которых под знаком факториала стоят неотрицательные числа, а Δ -символ вычисляется по формуле:

$$\Delta(abc) = \sqrt{\frac{(a + b - c)! (a - b + c)! (-a + b + c)!}{(a + b + c + 1)!}}.$$

Для $6j$ - и $9j$ -символов Вигнера справедливо представление [17]:

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_n \left[\frac{(-1)^n}{(n-a-b-c)!(n-c-d-e)!(n-a-e-f)!(n-b-d-f)!} \times \right. \\
& \quad \left. \times \frac{(n+1)!}{(a+b+d+e-n)!(a+c+d+f-n)!(b+c+e+f-n)!} \right] \\
& \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right\} = \frac{\Delta(abc)\Delta(def)\Delta(ghj)}{\Delta(adg)\Delta(cfj)(a+d+g+1)!} \times \\
& \times \frac{(a+d-g)!(c+f-j)!(g+h+j+1)!}{(a-b+c)!(-a+b+c)!(d-e+f)!(-d+e+f)!(b-e+h)!(-b+e+h)!} \times \\
& \quad \times \sum_{x,y,z,t} \left[(-1)^{a-c+e-g+j+x+y+z+t} \frac{(2a-x)!(2b-y)!(2d-z)!(2e-t)!}{x!y!z!t!} \times \right. \\
& \quad \times \frac{(-a+b+c+x)!(-b+e+h+y)!(-d+e+f+z)!}{(a+b-c-x)!(b+e-h-y)!(d+e-f-z)!(b+e-g+j-t)!} \times \\
& \quad \times \frac{(b-e+g-j+t)!}{(a+d-g-x-z)!(e-b+h+y-t)!} \times \\
& \quad \times \frac{(-a-e+f+g+x+t)!}{(-d+e+f+z-t)!(b-e+g-j-y+t)!} \times \\
& \quad \left. \times \frac{(c-d+e+j+z-t)!}{(-a+c-e+g-j+x+t)!(-a+c-d+f+g+j+1+x+z)!} \right].
\end{aligned}$$

Суммирование производится по всем целочисленным неотрицательным значениям n, x, y, z, t , при которых под знаком факториала стоят неотрицательные числа.

3. Свободные угловые движения вязкоупругого тела

В данной главе рассматривается динамика вязкоупругого тела, близкого по форме к шару, совершающего свободные угловые движения. Предполагается, что тело достаточно жестко, т.е. период упругих колебаний много меньше характерного времени движения тела как целого.

Приводятся решения квазистатических задач о деформировании изотропного упругого квазишара и анизотропно-упругого шара. При этом вязкость тела считается малой и учитывается лишь как причина затухания угловых движений. На примере квазишара с кубической симметрией и трансверсально-изотропного шара, обладающих в недеформированном состоянии квазишаровым тензором инерции, показана динамика тела при различной скорости собственного вращения. В рамках этих моделей предлагается возможный механизм глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения.

Рассматривается влияние диссипативных процессов на угловые движения упругого квазишара. Рассматривается два механизма диссипации энергии: за счет внутреннего трения, обусловленного вязкоупругими свойствами, и макроскопической термодиффузии. В рамках моделей вязкоупругого и термоупругого тела проводятся численные оценки времени затухания прецессии астероидов. Исследуется вклад в этот процесс каждого из рассматриваемых механизмов диссипации.

Рассматривается вязкоупругий шар в предположении равнозначного влияния вязких и упругих свойств шара на его динамику. При сделанном предположении изучается затухание угловых движений шара. На примере простой модели показана возможность свободной прецессии полюса Земли с периодом Чандлера.

Изучается динамика изотропного упругого шара, взаимодействующего с вращающимся в его полости твердым телом в форме эллипсоида. Эллипсоид в гравитационном взаимодействии шара с твердым телом моделируется гантелью. Исследуется распределение напряжений сферического слоя внутри шара в зависимости от положения гантели. На примере этой модели предлагается концепция возникновения волны напряжений в шаре, распространяющейся в направлении опережающего вращения внутреннего тела, которая может быть полезна при объяснении долгопериодических перемещений очагов сейсмической активности.

3.1. Постановка задачи о деформировании вязкоупругого квазишара

Рассмотрим однородное вязкоупругое тело объема V , ограниченное поверхностью S , мало отличающейся от сферы. Разложим уравнение поверхности тела S в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и ограничимся N членами разложения:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \delta \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right), \quad \delta \ll 1, \quad (3.1)$$

где α_{lm} – в общем случае комплексные числа:

$$\alpha_{lm} = a_{lm} + ib_{lm}, \quad \alpha_{lm} = (-1)^m \alpha_{l,-m}^*$$

Свяжем с телом систему координат $Ox_1x_2x_3$, вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}(t)$. Смещение элемента объема относительно $Ox_1x_2x_3$ будем характеризовать вектором $\vec{u}(\vec{r}, t)$ (рис. 1).

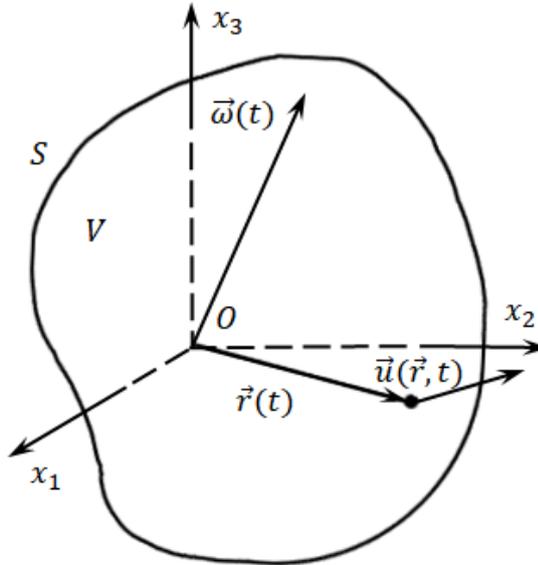


Рис. 1.

Вязкоупругий квазишар в свободном вращении

В отличие от абсолютно твердого тела, движение которого однозначно определяется движением изначально выбранной связанной системы координат, для деформируемого тела выбор связанной системы $Ox_1x_2x_3$ должен осуществляться в каждый момент времени в соответствии с условиями отсутствия в ней поступательных перемещений и поворотов тела как жесткого целого [33]:

$$\int_V \vec{u} dV = 0, \quad \int_V [\vec{r}, \dot{\vec{u}}] dV = 0. \quad (3.2)$$

Запишем уравнения движения элемента объема V и условия отсутствия напряжений на поверхности S в связанной системе:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_i \text{ в } V, \quad i = 1,2,3, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1,2,3, \quad (3.4)$$

где $\vec{f} = f_i \vec{e}_i = \ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r} + \vec{u}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r} + \vec{u}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}]$, $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ – вектор нормали к поверхности S , ρ – плотность тела.

В случае изотропного тела тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \xi \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ll} \delta_{ij} + 2 \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij}, \quad (3.5)$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) -$$

тензор малых деформаций, λ, μ – упругие постоянные Ламе, ξ, η – параметры вязкости.

Сформулируем задачу о деформировании вязкоупругого тела:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda + \mu + (\xi + \eta) \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{grad div } \vec{u} + \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \vec{u} = \\ & = \rho \left(\ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r} + \vec{u}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r} + \vec{u}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}] \right) \text{ в } V, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\left(\left(\lambda + \xi \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ll} \delta_{ij} + 2 \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij} \right) n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1,2,3. \quad (3.7)$$

Перейдем в уравнениях движения и условиях на поверхности к безразмерным переменным и параметрам. В качестве масштабных множителей выберем M – массу тела, R_0 – характерный размер тела, t_* – характерное время движения тела как целого, и введем следующие обозначения:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \zeta = \frac{\xi}{\eta}, \quad s = \frac{\eta}{\rho \mu}, \quad \varepsilon = \frac{\rho R_0^2}{\mu t_*^2}. \quad (3.8)$$

Параметр ε характеризует упругие свойства тела и связан с периодом его упругих колебаний, параметр s отвечает вязкоупругим свойствам и определяет характерный масштаб процессов, обусловленных вязкостью.

Запишем уравнение (3.6) и условие на границе (3.7) в безразмерном виде:

$$\left[\kappa + 1 + \sqrt{\varepsilon} s (\zeta + 1) \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{grad div } \vec{u} + \left(1 + \sqrt{\varepsilon} s \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \vec{u} = \quad (3.9)$$

$$= \varepsilon(\ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r} + \vec{u}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r} + \vec{u}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}]) \text{ в } V,$$

$$\left[\left(\kappa + \sqrt{\varepsilon s} \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ll} \delta_{ij} + 2 \left(1 + \sqrt{\varepsilon s} \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij} \right] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Векторное умножение уравнения (3.9) на $\vec{r} + \vec{u}$ и последующее его интегрирование с учетом выражений (3.2) и условий на поверхности (3.10) приводит к уравнению, похожему по форме записи на уравнение Эйлера для абсолютно твердого тела:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}] = 0, \quad (3.11)$$

в котором компоненты вектора кинетического момента и тензор инерции имеют вид:

$$K_{ij} = I_{ij} \omega_j,$$

$$I_{ij} = \int_V [(x_i^2 + 2x_i u_i) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} \ll 1,$$

где I_{ij}^0 - тензор инерции недеформированного тела, Δ_{ij} - поправки, обусловленные вязкоупругими свойствами и несферичностью формы тела.

Совместное решение уравнений (3.9), (3.10), (3.11) позволяет определить вектор перемещения \vec{u} и угловую скорость $\vec{\omega}$.

3.2. Упругий изотропный квазишар в свободном угловом движении

Будем рассматривать случай, при котором тело достаточно жестко. Диссипация энергии обеспечивает быстрое затухание упругих колебаний за время, много меньшее периода вращательных движений тела как целого относительно центра инерции. В этом случае выполняется условие [123]:

$$\varepsilon \ll s \ll 1. \quad (3.12)$$

Это позволяет искать вектор перемещений в виде ряда по малым параметрам ε, s :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon [\vec{u}'(\vec{r}, t) + \sqrt{\varepsilon s} \vec{u}''(\vec{r}, t)]. \quad (3.13)$$

Подстановка (3.13) в уравнение (3.9) и условие на границе (3.10) приводит к следующей задаче для вектора $\vec{u}'(\vec{r}, t)$:

$$\Delta \vec{u}' + (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}' = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \text{ в } V,$$

$$[\kappa u_{ll} \delta_{ij} + 2u_{ij}] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

Будем считать, что параметры ε и δ , характеризующие упругие свойства и малое отклонение поверхности тела от сферы, связаны неравенством:

$$\varepsilon \ll \delta \ll 1.$$

Это позволяет в задаче (3.14) представить вектор перемещений в виде ряда по малому параметру δ . Ограничимся первыми членами разложения:

$$\vec{u}'(\vec{r}, t) = \vec{u}_0(\vec{r}, t) + \delta \vec{u}_1(\vec{r}, t).$$

В рассматриваемом приближении решение задачи (3.14) о деформировании квазишара сводится к решению двух квазистатических задач:

1) задачи о деформировании шара радиуса R_0 :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u}_0 + (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}_0 &= [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \text{ в } V_0, \\ [\lambda u_{ii}^0 \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}^0] n_j &= 0 \text{ на } S_0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{n} = \vec{e}_r \end{aligned} \quad (3.15)$$

2) задачи о деформировании квазишара при известном решении \vec{u}_0 :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u}_1 + (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}_1 &= [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \text{ в } V \\ [\lambda u_{ii}^1 \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}^1] n_j &= 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для нахождения перемещения \vec{u}' воспользуемся аппаратом шаровых векторов, представив его в следующем виде:

$$\vec{u}'(\vec{r}, t) = \sum_{l,m,v} \left({}^v f_{lm}^0(r) + \delta {}^v f_{lm}^1(r) \right) \vec{Y}_{lm}^v(\theta, \varphi),$$

где шаровые векторы \vec{Y}_{lm}^v даются выражениями (2.2).

Решение задач (3.15), (3.16) приведено в [5]. Тензор инерции упругого квазишара в рассматриваемом приближении имеет вид:

$$I_{ij} = \int_V [(x_k^2 + 2x_k u_k) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \varepsilon (I'_{ij} + \delta I''_{ij}).$$

где I_{ij}^0 отвечает абсолютно твердому телу, I'_{ij}, I''_{ij} – поправки, обусловленные упругими свойствами, и являются, как следует из уравнений (3.15), (3.16), квадратичными функциями компонент угловой скорости.

Тензор I''_{ij} зависит от параметров формы тела α_{lm} с индексами $l \leq 4$. Более высокие гармоники сказываются на компонентах тензора инерции при учете членов более высокого порядка малости.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ определяется в результате решения уравнения для кинетического момента \vec{K} (3.11), где в рассматриваемом приближении

$$K_i = [I_{ij}^0 + \varepsilon (I'_{ij} + \delta I''_{ij})] \omega_j.$$

3.2.1. Абсолютно твердый квазишар

Рассмотрим, какой вклад в тензор инерции абсолютно твердого тела, близкого к шару, вносит его форма. Запишем уравнение поверхности тела (3.1) в безразмерном виде:

$$R(\theta, \varphi) = 1 + \delta \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \delta \ll 1,$$

$$\alpha_{lm} = a_{lm} + ib_{lm}, \quad \alpha_{lm} = (-1)^m \alpha_{l,-m}^*$$

В общем случае гармоника Y_{00} отвечает объемному расширению тела, а $Y_{1,\pm 1}$ — смещению тела как целого. Поэтому в разложении поверхности они отсутствуют.

Вычислим компоненты тензора инерции тела:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int_V (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV = \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R(\theta, \varphi)} r^2 (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \Big|_{\substack{x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 = r \cos \theta}} dr. \end{aligned}$$

Будем интересоваться линейными по δ членами. Тогда тензор инерции можно представить в виде:

$$I_{ij}^0 = I_0 \delta_{ij} + \delta I_{ij}^{0'}, \quad I_0 = \frac{2}{5},$$

где $I_{ij}^{0'}$ — поправки к тензору инерции, связанные с малым отклонением формы поверхности от сферической.

В рассматриваемом приближении в тензор инерции вносит вклад только вторая гармоника формы. В случае если тензор инерции записывается в главных осях инерции тела, поправки принимают вид:

$$\begin{aligned} I_{11}^{0'} &= \frac{1}{10} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (a_{20} - \sqrt{6} a_{22}), & I_{22}^{0'} &= \frac{1}{10} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (a_{20} + \sqrt{6} a_{22}), & I_{33}^{0'} &= -\frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{\pi}} a_{20}, \\ I_{12}^{0'} &= I_{23}^{0'} = I_{13}^{0'} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение Эйлера в проекциях на оси связанной системы:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \delta \omega_2 \omega_3 \left(a_{20} + \sqrt{\frac{2}{3}} a_{22} \right), \quad (3.17)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \delta \omega_3 \omega_1 \left(a_{20} - \sqrt{\frac{2}{3}} a_{22} \right),$$

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \delta \omega_1 \omega_2 a_{22}.$$

Предположим, что главные моменты инерции находятся в заданном соотношении:

$$I_{22}^0 < I_{33}^0 < I_{11}^0.$$

О перемещении в теле оси устойчивого стационарного вращения можно судить, исходя из геометрических соображений. Изобразим годограф вектора кинетического момента \vec{K} , являющийся пересечением сферической поверхности $K^2 = const$ и семейства эллипсоидальных поверхностей

$$E = \frac{I_{ij} \omega_i \omega_j}{2}$$

при различных значениях энергии E . Совместим оси связанной системы $Ox_1x_2x_3$ с осями K_1, K_2, K_3 .

В консервативном случае вращению вокруг осей Ox_1, Ox_2 отвечает особая точка типа центр. Вращение вокруг оси Ox_3 неустойчиво. Ему отвечает седловая точка (рис. 2).

При учете малой внутренней диссипации энергии вращение вокруг оси Ox_2 наименьшего момента инерции становится неустойчивым, вращение вокруг оси Ox_1 наибольшего момента асимптотически устойчивым.

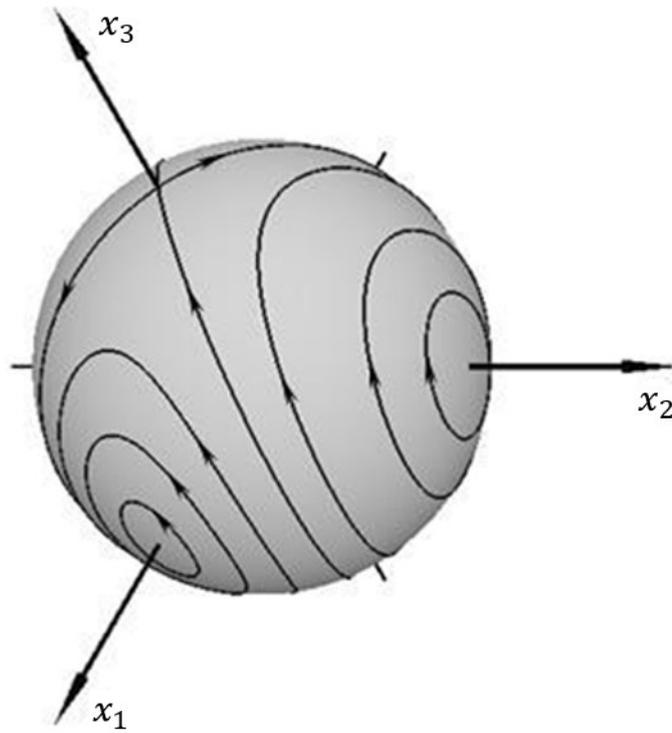


Рис. 2.

Годограф вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ для абсолютно твердого квазишара

3.2.2. Упругий изотропный шар

Рассмотрим задачу о деформировании упругого шара (3.15):

$$\Delta \vec{u}_0 + (\kappa + 1) grad div \vec{u}_0 = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \text{ в } V_0, \quad (3.18)$$

$$[\lambda u_{ii}^0 \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}^0] n_j = 0 \text{ на } S_0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{n} = \vec{e}_r \quad (3.19)$$

Решение этой задачи с использованием аппарата шаровых векторов приведено в [33].

Изложим суть метода и основные этапы решения.

Представим центробежную силу инерции $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$ в виде разложения по шаровым векторам:

$$\begin{aligned} [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = & -\frac{4}{3} \sqrt{\pi} r (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \vec{Y}_{00}^+ + \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{3} r \left[-\sqrt{2} \beta_{20} \vec{Y}_{20}^-(\theta) + 2\sqrt{3} \left(\beta_{21} \vec{Y}_{21}^-(\theta, \varphi) - \beta_{21}^* \vec{Y}_{2,-1}^-(\theta, \varphi) \right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{3} \left(\beta_{22} \vec{Y}_{22}^-(\theta, \varphi) + \beta_{22}^* \vec{Y}_{2,-2}^-(\theta, \varphi) \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\beta_{20} = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_3^2, \quad \beta_{21} = -\omega_1\omega_3 + i\omega_2\omega_3, \quad \beta_{22} = \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2i\omega_1\omega_2.$$

Преобразуем уравнение (3.18) к виду:

$$(\kappa + 2)\Delta\vec{u}_0 + (\kappa + 1)\text{rot}(\text{rot } \vec{u}_0) = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]], \quad (3.20)$$

и будем искать вектор перемещений \vec{u}_0 в виде ряда по шаровым векторам:

$$\vec{u}_0 = \sum_{l=0, |m|\leq l} \left(K_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + P_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r)\vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) \right). \quad (3.21)$$

Подставляя разложение (3.21) в уравнение (3.20) с учетом известных соотношений (п. 2.3) и группируя коэффициенты при шаровых векторах с одинаковыми индексами, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных радиальных функций P_{lm}, M_{lm}, K_{lm} .

Условия на границе (3.19) в эквивалентной записи:

$$\sigma_{rr}^0 = \sigma_{r\theta}^0 = \sigma_{r\varphi}^0 = 0,$$

при подстановке в них деформаций, вычисленных по компонентам вектора \vec{u}_0 позволяет определить произвольные постоянные, входящие в P_{lm}, M_{lm}, K_{lm} .

Решение задачи о деформировании изотропного шара имеет вид [33]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= r(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(B_1 + r^2 B_2)\vec{Y}_{00}^+ + r(B_3 + r^2 B_4)\vec{F}_2^- + r^3 B_5 \vec{F}_2^+, \\ \vec{F}_2^{+,-} &= \frac{1}{3}\beta_{20}\vec{Y}_{20}^{+,-} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\beta_{21}\vec{Y}_{21}^{+,-} - \beta_{21}^*\vec{Y}_{2,-1}^{+,-}) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\beta_{22}\vec{Y}_{22}^{+,-} - \beta_{22}^*\vec{Y}_{2,-2}^{+,-}), \\ B_1 &= \frac{2\sqrt{\pi}(5\kappa + 6)}{15(3\kappa + 2)(\kappa + 2)}, \quad B_2 = -\frac{2\sqrt{\pi}}{15(\kappa + 2)}, \quad B_3 = \sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{4\kappa + 3}{19\kappa + 14}, \\ B_4 &= -\frac{1}{10}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{21\kappa + 16}{19\kappa + 14}, \quad B_5 = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\kappa + 1}{19\kappa + 14}. \end{aligned}$$

По вектору перемещений определяются компоненты тензора инерции в рассматриваемом приближении:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= I_0\delta_{ij} + \varepsilon I'_{ij}, \\ I'_{ij} &= \frac{2}{35}\left[\omega^2\left(-\frac{1}{3} + \frac{\xi_1}{3} + 4\xi_2 + 28\xi_3\right)\delta_{ij} + (1 - \xi_1)\omega_i\omega_j\right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

Запишем компоненты вектора кинетического момента:

$$K_i = I_0\omega_i + \frac{2}{35}\varepsilon\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3\right](\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)\omega_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поправки к компонентам K_i , обусловленные упругостью отличаются лишь множителем ω_i . Поэтому в уравнения движения упругого шара поправки, обусловленные упругостью, не входят:

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0.$$

Таким образом, динамика изотропного упругого шара ничем не отличается от динамики абсолютно твердого. Любое положение в нем оси вращения является устойчивым. При отклонении оси вращения от первоначального положения упругий шар не прецессирует. Он сжимается вдоль полюсов, но деформации на его угловом движении никак не сказываются.

3.2.3. Упругий квазишар

Рассмотрим задачу о деформировании упругого изотропного квазишара (3.16):

$$\Delta \vec{u}_1 + (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}_1 = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] \text{ в } V \quad (3.23)$$

$$[\lambda u_{ii}^1 \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}^1] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.24)$$

Решение этой задачи подробно изложено в [33]. Приведем основные этапы нахождения решения.

С учетом того, что вектор нормали к поверхности S с точностью до членов порядка δ имеет более сложную запись:

$$\vec{n} = \vec{e}_r - \delta \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} \left[\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right],$$

условия отсутствия напряжений на границе принимают вид:

$$\begin{aligned} {}^1\sigma_{rr}^0 + \sigma_{rr}^1 &= 0, \\ {}^1\sigma_{r\theta}^0 + \sigma_{r\theta}^1 - \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} \left(\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta}^0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \sigma_{\theta\varphi}^0 \right) &= 0, \\ {}^1\sigma_{r\varphi}^0 + \sigma_{r\varphi}^1 - \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} \left(\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \sigma_{\theta\varphi}^0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \sigma_{\varphi\varphi}^0 \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где ${}^1\sigma_{rj}^0$ – пропорциональные δ части величин σ_{rj}^0 после подстановки в них $r = R(\theta, \varphi)$.

Согласно [98], решение задачи (3.23), (3.24) нужно искать в виде:

$$\vec{u}_1 = \sum_{p=0, |q| \leq p}^N \{ T_{pq} r^p \vec{Y}_{pq}^0 + M_{pq} r^{p+1} \vec{Y}_{pq}^+ +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[Q_{pq} r^{p-1} - \frac{(p+1)(2p+3)(\kappa+1)}{2(1+p(\kappa+3))} M_{pq} r^{p+1} \right] \bar{Y}_{pq}^- \Big\} + \\
& + \frac{1}{10\delta} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} r^3 \left((\dot{\omega}_1 - i\dot{\omega}_2) \bar{Y}_{11}^0 + (\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) \bar{Y}_{1-1}^0 - \sqrt{2} \dot{\omega}_3 \bar{Y}_{10}^0 \right),
\end{aligned}$$

где M_{pq}, Q_{pq}, T_{pq} – постоянные коэффициенты, причем $Q_{00} = Q_{1q} = T_{1q} = 0$.

Для нахождения неизвестных параметров M_{pq}, Q_{pq}, T_{pq} используются условия на границе (3.25). Вычислив ${}^1\sigma_{ij}^0, \sigma_{ij}^1$ по компонентам векторов \vec{u}_0, \vec{u}_1 , условия (3.25) преобразуются в векторное выражение. Приравнивая коэффициенты при шаровых векторах с одинаковыми индексами, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных M_{pq}, Q_{pq}, T_{pq} . При этом коэффициенты, содержащие компоненты вектора $\vec{\omega}$ обращаются в нуль автоматически в силу уравнений (3.17), отвечающих движению абсолютно твердого квазишара.

В результате решения задач (3.18), (3.19) и (3.23), (3.24) определяется выражение вектора перемещений \vec{u} через компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

Тензор инерции упругого квазишара в рассматриваемом приближении имеет вид:

$$I_{ij} = \int_V [(x_k^2 + 2x_k u_k) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \varepsilon (I'_{ij} + \delta I''_{ij}).$$

Поправки $I'_{ij} + \delta I''_{ij}$ образованы комбинацией интегралов:

$$\begin{aligned}
\int_V x_i u_j dV &= \sum_{l,m,\nu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 [{}^\nu f_{lm}^0(r) + \delta {}^\nu f_{lm}^1(r)] (\bar{Y}_{lm}^\nu, \bar{Y}_{1j}^-) Y_{1i} dr + \\
&+ \sum_{l,m,\nu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^{R(\theta,\varphi)} r^3 {}^\nu f_{lm}^0(r) (\bar{Y}_{lm}^\nu, \bar{Y}_{1j}^-) Y_{1i} dr,
\end{aligned}$$

последний из которых зависит от параметров несферичности α_{lm} с индексами $l = 2, 4$.

Поэтому при нахождении вектора \vec{u}_1 достаточно ограничиться лишь некоторым числом неизвестных параметров: $M_{00}, M_{2q}, Q_{2q}, |q| \leq 2$.

3.2.4. Упругий квазишар с кубической симметрией и шаровым тензором инерции

В качестве примера рассмотрим однородное упругое тело, обладающее кубической симметрией формы поверхности. В этом случае в уравнении поверхности тела будет присутствовать четвертая гармоника:

$$R(\theta, \varphi) = 1 + \delta(\alpha_{40}Y_{40}(\theta, \varphi) + \alpha_{44}[Y_{44}(\theta, \varphi) + Y_{4,-4}(\theta, \varphi)]).$$

Пусть в отсутствие деформаций тензор инерции является шаровым:

$$I_{ij}^0 = I_0\delta_{ij}, \quad I_0 = \frac{2}{5}.$$

Вычисленные по решению задачи (3.18), (3.19) поправки к тензору инерции, отвечающие деформированию шара, имеют вид:

$$I'_{ij} = \frac{2}{35} \left[\left(-\frac{1}{3}(1 - \xi_1) + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)\delta_{ij} + (1 - \xi_1)\omega_i\omega_j \right],$$

$$\xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

Четвертая гармоника формы вносит вклад в тензор инерции в виде поправок:

$$I''_{11} = Q_2[(3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2 + (\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_2^2 - 4\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{22} = Q_2[(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2 + (3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_2^2 - 4\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{33} = Q_2[-4\alpha_{40}\omega_1^2 - 4\alpha_{40}\omega_2^2 + 8\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{12} = Q_2(2\alpha_{40} - 2\sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1\omega_2,$$

$$I''_{13} = -8Q_2\alpha_{40}\omega_1\omega_3, \quad I''_{23} = -8Q_2\alpha_{40}\omega_2\omega_3,$$

$$Q_2 = \frac{(\kappa + 1)(35\kappa + 26)}{35\sqrt{\pi}(19\kappa + 14)^2}.$$

С учетом того, что I'_{ij}, I''_{ij} являются квадратичными функциями компонент угловой скорости, составляющие вектора кинетического момента \vec{K} и энергии E имеют вид:

$$K_p = I_{pq}^0\omega_q^2 + \varepsilon K_{pqtm}\omega_q\omega_l\omega_m,$$

$$E = \frac{1}{2}I_{pq}^0\omega_p\omega_q + \frac{3}{4}\varepsilon K_{pqtm}\omega_p\omega_q\omega_l\omega_m,$$

$$K_{pqtm}\omega_p\omega_q\omega_l\omega_m = Q_1(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 +$$

$$+ \delta Q_2[(3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})(\omega_1^4 + \omega_2^4) + 8\alpha_{40}\omega_3^4 + 6(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2\omega_2^2 -$$

$$- 24\alpha_{40}(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3^2],$$

$$Q_1 = \frac{4}{35} \left[\frac{1}{3}(1 - \xi_1) + 2\xi_2 + 14\xi_3 \right].$$

Годограф вектора кинетического момента \vec{K} может быть получен из пересечения центрально симметричной поверхности $E = const$ с семейством поверхностей $4/3 E - \vec{K}^2/2I_0$ при различных значениях \vec{K}^2 , представляющим в данном случае концентрические сферы. Совместим оси связанной системы $Ox_1x_2x_3$ с осями K_1, K_2, K_3 .

Рассмотрим частный случай. Пусть оси системы $Ox_1x_2x_3$ направлены на центры граней «куба». В этом случае $\alpha_{40} = -1$, $\alpha_{44} = -\sqrt{5/14}$. Уравнение поверхности тела примет вид:

$$R(\theta, \varphi) = 1 - \delta \frac{3}{16\sqrt{\pi}} (3 + 35 \cos^4 \theta + 30 \cos^2 \theta + 5 \sin^4 \theta \cos 4\varphi).$$

Вращению вокруг осей, проходящих через вершины «куба» и центры граней, на сфере $\vec{K}^2 = const$ отвечают особые точки типа центр. Вращение вокруг осей, направленных на середины ребер, неустойчиво. Ему отвечают седловые точки (рис. 3).

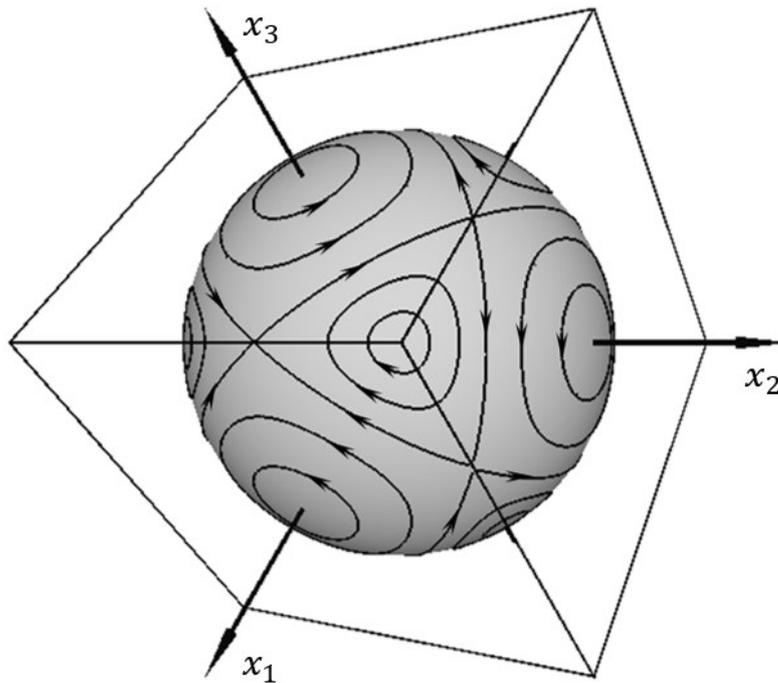


Рис. 3.

Годограф вектора \vec{K}^2 на сфере $\vec{K}^2 = const$ для упругого квазишара с кубической симметрией

Запишем поправку к выражению для энергии тела:

$$K_{pqlm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m = Q_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + \\ + \delta Q_2 [-(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4) + 3(\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2)].$$

Отсюда следует, что энергия тела при фиксированном кинетическом моменте имеет максимум при вращении тела вокруг осей, направленных на центры граней. Минимум энергии отвечает ориентации вектора $\vec{\omega}$ на вершины «куба».

Принимая во внимание малую диссипацию энергии, можно сделать вывод, что вращение вокруг осей, проходящих через противоположные вершины «куба» асимптотически устойчиво, а вращение относительно направления на центры противоположных граней «куба» неустойчиво (соответственно устойчивые и неустойчивые фокусы на поверхности $\vec{K}^2 = const$).

3.2.5. Упругий квазишар с кубической симметрией и квазишаровым тензором инерции

Эффект глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения продемонстрируем на примере тела, отклонение поверхности которого от сферы характеризуется эллипсоидальностью и указанными гармониками с $l = 4$. При этом предполагаем параметры α_{2i} настолько меньшими, чем α_{4i} , что при вращении тела основной вклад в его деформации связан с четвертой гармоникой формы.

Отметим, что при отсутствии в $R(\theta, \varphi)$ составляющих с $l = 2$ квазишар представляет собой в динамике шаровой волчок. Любое положение в нем оси устойчивого стационарного вращения остается неизменным со временем.

Ориентируем эллипсоид инерции недеформированного тела согласно рис. 4. Выберем систему главных осей $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ось Ox_3 проходила через главную диагональ «куба». В системе $Ox_1x_2x_3$ тензор инерции недеформированного квазишара примет вид:

$$I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}, \quad \Delta_i \ll I_0.$$

Будем считать, что Ox_3 — ось среднего по величине момента инерции:

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

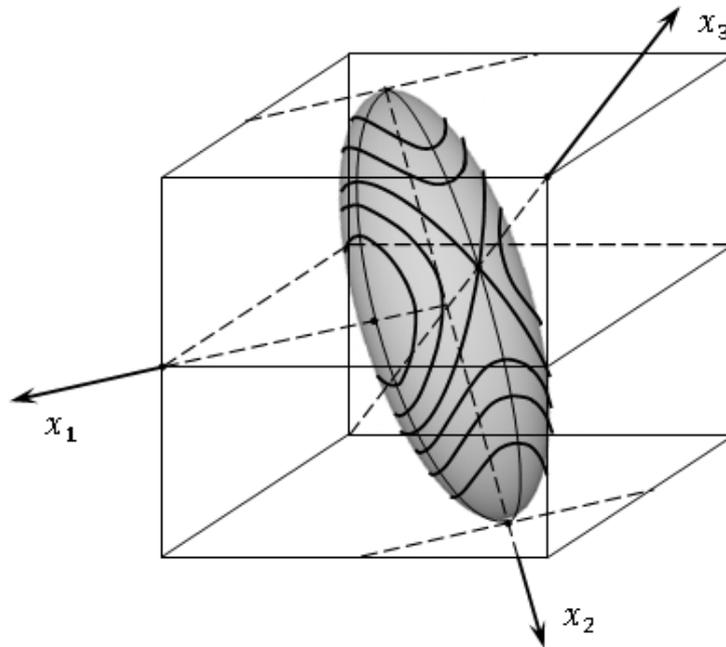


Рис. 4.

Ориентация эллипсоида инерции недеформированного тела относительно «куба»

Приведем тело в быстрое вращение вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + (\Omega + \omega_3) \vec{e}_3$ и будем рассматривать малые возмущения этого движения $\omega_i \ll \Omega$, $i = 1, 2, 3$.

Перемещение в теле оси устойчивого стационарного вращения будем описывать геометрически, изображая годограф вектора кинетического момента \vec{K} на сфере постоянного по величине кинетического момента $\vec{K}^2 = const$.

При большой скорости вращения качество динамики тела определяется четвертой гармоникой формы (рис. 5). С уменьшением угловой скорости Ω до некоторого значения Ω_1 область притяжения устойчивого вращения уменьшается (рис. 6). Примыкающая к ней ячейка, ограничивающая неустойчивый фокус, сближается в сторону положения устойчивого вращения. Также ведет себя седловая точка, изначально находившаяся на границе области притяжения. Положение устойчивого вращения вместе с седловой точкой со временем «поворачиваются» в плоскости Ox_2x_3 , иллюстрируя тем самым перераспределение влияния на динамику тела «кубичности» и эллипсоидальности его формы.

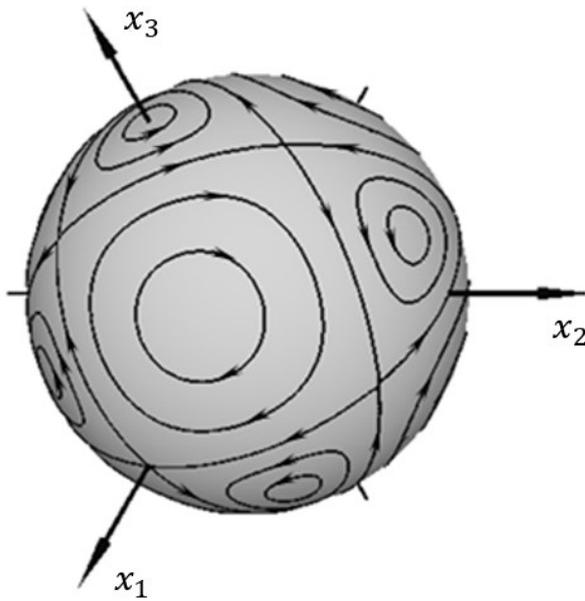


Рис. 5. Годограф вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ для упругого квазишара с начальной эллипсоидальностью при $\Omega \gg \Omega_1$

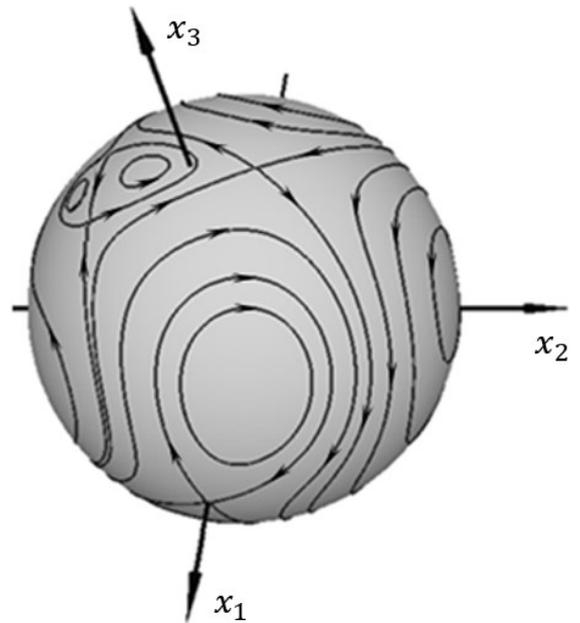


Рис. 6. Годограф вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ для упругого квазишара с начальной эллипсоидальностью при $\Omega > \Omega_1$

При некотором критическом значении угловой скорости Ω_1 примыкающая к области притяжения ячейка исчезает. Ее граница «схлопывается» в отрезок, являющийся частью траектории, окружающей ось наименьшего момента инерции Ox_2 . Место области притяжения заполняют траектории, охватывающие Ox_2 (рис. 7). При дальнейшем замедлении вращения седло будет двигаться к положению оси Ox_3 . Уменьшение угловой скорости до некоторого значения Ω_2 приводит к исчезновению неустойчивых фокусов, заключенных в петлях сепаратрис седловой точки в положении оси наибольшего момента инерции Ox_1 , и рождению в окрестности этой оси устойчивого фокуса. С этого момента эллипсоид инерции тела в недеформированном состоянии полностью определяет качество его динамики (рис. 8).

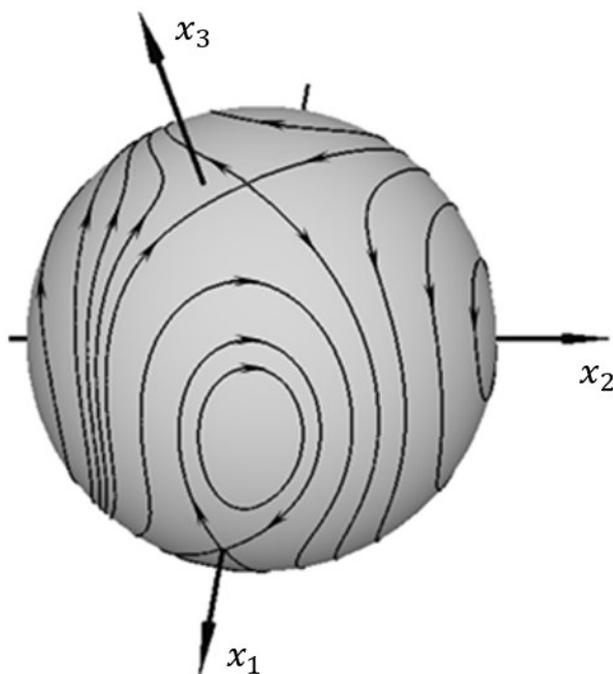


Рис. 7. Годограф вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ для упругого квазишара с начальной эллипсоидальностью при $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$

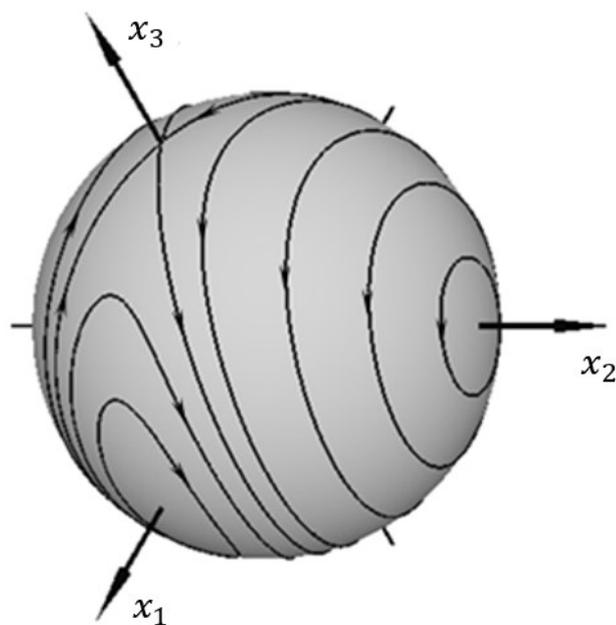


Рис. 8. Годограф вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ для упругого квазишара с начальной эллипсоидальностью при $\Omega < \Omega_2$

Введем в рассмотрение малое внутреннее трение. Пусть тело совершает угловые движения вблизи некоторого направления устойчивого стационарного вращения (в нашем случае – вокруг Ox_3). Со временем внутренняя диссипация уменьшает кинетическую энергию (угловую скорость) тела. Однако качественно его динамика не изменится. Одновременно с уменьшением угловой скорости Ω затухает прецессия тела, следовательно, прекращается какое-либо движение в теле, а вместе с ним внутреннее рассеяние энергии. Тело возвращается к исходному стационарному вращению, сокращается лишь область его притяжения.

Иначе обстоит дело, когда наряду с внутренней диссипацией энергии присутствует и малое внешнее сопротивление движению тела. Кинетический момент не сохраняется, но его изменение в виду малости можно не принимать в расчет. Внешнее сопротивление уменьшает угловую скорость тела и в отсутствие прецессии, а, следовательно, со временем изменяет соотношение между факторами, определяющими динамику тела. В результате при $\Omega = \Omega_*$ ось устойчивого стационарного вращения смещается в теле в новое положение. В рассмотренных задачах минимум кинетической энергии «перемещается» от Ox_3 к направлению Ox_1 .

Предложенный механизм можно применить для объяснения явления глобального перемещения полюсов Земли, предположительно наблюдавшегося в ее истории. Неоднородность слоев Земли приводит к отклонению тензора инерции в недеформированном состоянии от его значения для шара. Малое отличие поверхности Земли от сферы также имеет основание. В качестве внешнего воздействия, замедляющего ее вращение, можно принять приливное трение, обусловленное гравитационным взаимодействием Земли с Луной и Солнцем.

3.3. Анизотропно-упругий шар в свободном угловом движении

Общая постановка задачи о деформировании вязкоупругого тела дана в п. 3.1. В данной части работы учтем малую анизотропию упругих свойств тела.

Запишем компоненты тензора напряжений в виде суммы двух составляющих:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1,$$

где σ_{ij}^0 дается выражением (3.5) и отвечает упругим деформациям изотропного шара, σ_{ij}^1 – деформациям анизотропно-упругого шара.

Согласно закону Гука для изотропной среды:

$$\sigma_{ij}^0 = \left(\lambda + \xi \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ll} \delta_{ij} + 2 \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij},$$

где u_{ij} – тензор малых деформаций, λ, μ – постоянные Ламе.

В случае малой анизотропии упругих свойств, согласно обобщенному закону Гука:

$$\sigma_{ij}^1 = c_{ijkl} u_{kl}.$$

Параметры c_{ijkl} характеризуют анизотропные свойства тела. Они удовлетворяют условиям симметрии по перестановке индексов:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij},$$

и содержат в общем случае 21 независимую компоненту [5].

При переходе в уравнения движения (3.9) и условиях на границе (3.10) к безразмерным переменным и параметрам сохраним введенные обозначения (3.8). Параметры анизотропии упругих свойств представим в виде:

$$c_{ijkl} = \mu \delta a_{ijkl},$$

где δ - отношение наибольшей из постоянных c_{ijkl} к μ .

Аналогично п. 3.2 ограничимся рассмотрением движений тела, близких к Эйлеровым, считая, что тело достаточно жестко:

$$\varepsilon \ll s \ll 1.$$

Это позволяет представить вектор перемещений в задаче (3.9), (3.10) в виде ряда по малым параметрам ε, s :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon [\vec{u}'(\vec{r}, t) + \sqrt{\varepsilon s} \vec{u}''(\vec{r}, t)].$$

Подстановка (3.13) в уравнение (3.9) и условие на границе (3.10) приводит к задаче (3.14) для вектора $\vec{u}'(\vec{r}, t)$. Запишем ее через деформации:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial u'_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \text{ в } V, \\ \kappa u'_{ll} \delta_{ij} + 2u'_{ij} &= 0 \text{ на } S, \end{aligned}$$

где

$$\vec{f} = f_i \vec{e}_i = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

Будем полагать параметры анизотропии таковыми, что величины ε и δ связаны неравенством:

$$\varepsilon \ll \delta \ll 1.$$

При сделанных предположениях вектор \vec{u}' можно представить в виде ряда по малому параметру δ . Ограничимся первыми членами разложения:

$$\vec{u}'(\vec{r}, t) = \vec{u}_0(\vec{r}, t) + \delta \vec{u}_1(\vec{r}, t).$$

Составляющая $\vec{u}_0(\vec{r}, t)$ вектора смещения отвечает деформированию однородного изотропного шара, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, и определяется в результате решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial u^0_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u^0_{ij}}{\partial x_j} &= f_i, i = 1, 2, 3 \text{ в } V, \\ [\kappa u^0_{ll} \delta_{ij} + 2u^0_{ij}] n_j &= 0, i = 1, 2, 3 \text{ на } S, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где $\vec{f} = f_i \vec{e}_i = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$, $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ – вектор нормали к поверхности S .

Вектор $\vec{u}_1(\vec{r}, t)$ характеризует вклад анизотропных свойств тела. Он вычисляется по известному $\vec{u}_0(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial u^1_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u^1_{ij}}{\partial x_j} &= -a_{ijkl} \frac{\partial u^0_{kl}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3 \text{ в } V, \\ [\kappa u^1_{ll} \delta_{ij} + 2u^1_{ij}] n_j &= -a_{ijkl} u^0_{kl} n_j, i = 1, 2, 3 \text{ на } S. \end{aligned} \tag{3.27}$$

По компонентам вектора перемещений определяется тензор инерции в рассматриваемом приближении:

$$I_{ij} = \int_V [(x_i^2 + 2x_i u_i) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \varepsilon(I'_{ij} + \delta I''_{ij}).$$

Тензор инерции I_{ij}^0 отвечает недеформированному телу. Обусловленные упругими свойствами тела величины I'_{ij}, I''_{ij} как и входящие в них деформации $\vec{u}_0(\vec{r}, t)$, $\vec{u}_1(\vec{r}, t)$ в соответствии с (3.26), (3.27) являются квадратичными функциями компонент угловой скорости.

Вектор кинетического момента в связанной системе:

$$K_i = (I_{ij}^0 + \varepsilon(I'_{ij} + \delta I''_{ij})) \omega_j.$$

содержит линейные и кубические члены по компонентам угловой скорости. Угловая скорость $\vec{\omega}(t)$ определяется в результате решения уравнения:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}] = 0.$$

3.3.1. Упругий изотропный шар

Решение задачи о деформировании изотропного упругого шара с помощью аппарата шаровых векторов изложено в п. 3.2.2. В данном разделе приведено решение этой задачи с помощью методов линейной алгебры, полученное в работе [79].

Представим в уравнении (3.26) силу инерции в покомпонентной записи:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial u_{ll}^0}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u_{ij}^0}{\partial x_j} &= b_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3 \text{ в } V, \\ [\kappa u_{ll}^0 \delta_{ij} + 2u_{ij}^0] x_j &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ на } S, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} -(\omega_2^2 + \omega_3^2) & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & -(\omega_1^2 + \omega_3^2) & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{pmatrix} = -\delta_{ij} \omega_k \omega_k + \omega_i \omega_j.$$

В силу линейности правой части уравнения (3.28) будем искать решение в виде полинома третьей степени от компонент радиус-вектора:

$$u_m^0 = \sum_{i,j,k} A_{mijk} x_i x_j x_k + \sum_i B_{mi} x_i, \quad (3.29)$$

где коэффициенты A_{mijk} удовлетворяют условию симметрии по перестановке индексов:

$$A_{mijk} = A_{mikj} = A_{mjik} = A_{mjki} = A_{mkij} = A_{mkji}.$$

Необходимо определить 39 величин A_{mijk}, B_{mi} . Подставим (3.29) в уравнение (3.28) и приравняем нулю выражения при x_1, x_2, x_3 . В результате получим 9 уравнений. После подстановки (3.29) в краевые условия (3.28) приходим к уравнениям вида:

$$\sum_{i=1}^3 x_i (D_{i0}^j + x_1^2 D_{i1}^j + x_2^2 D_{i2}^j + x_3^2 D_{i3}^j) + x_1 x_2 x_3 D^j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.30)$$

где величины D_{ik}^j, D^j содержат неизвестные коэффициенты A_{mijk}, B_{mi} .

Учтем выполнение условий (3.30) на сфере единичного радиуса. Для этого потребуем, чтобы в выражениях (3.30), заключенных в скобки, выделялось уравнение поверхности $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$:

$$D_{i1}^j = D_{i2}^j = D_{i3}^j = -D_{i0}^j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

а выражения при $x_1 x_2 x_3$ обращались в нуль:

$$D^j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

В результате получим еще 30 алгебраических уравнений.

Система 39 уравнений для определения величин A_{mijk}, B_{mi} разбивается на четыре независимые группы уравнений.

Первая группа состоит из 12 уравнений, образованных из четырех основных циклической перестановкой $\{i, j, k\}$ индексов $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \kappa(3A_{iii} + A_{jij} + A_{kik}) + 6A_{iii} &= -\kappa(B_{ii} + B_{jj} + B_{kk}) - 2B_{ii}, \\ \kappa(A_{ijji} + 3A_{jjjj} + A_{kjjk}) + 4A_{ijji} + 2A_{jij} &= -\kappa(B_{ii} + B_{jj} + B_{kk}) - 2B_{ii}, \\ \kappa(A_{ikki} + A_{jkkj} + 3A_{kkkk}) + 4A_{ikki} + 2A_{kik} &= -\kappa(B_{ii} + B_{jj} + B_{kk}) - 2B_{ii}, \\ 2(\kappa + 1)(3A_{iii} + A_{jij} + A_{kik}) + 2(3A_{iii} + A_{ijji} + A_{ikki}) &= -(\omega_j^2 + \omega_k^2), \end{aligned} \quad (3.31)$$

Каждая из трех других групп включает 9 уравнений вида:

$$\begin{aligned} \kappa(2A_{iiij} + 2A_{jjji} + A_{kijk}) + 5A_{iiij} + 3A_{jiii} &= -(B_{ij} + B_{ji}), \\ \kappa(2A_{iiij} + 2A_{jjji} + A_{kijk}) + 5A_{jjji} + 3A_{ijjj} &= -(B_{ij} + B_{ji}), \\ \kappa(2A_{iiij} + 2A_{jjji} + A_{kijk}) + 4A_{kijk} + 2A_{ikkj} + 2A_{jkki} &= 0, \\ (\kappa + 1)(2A_{iiij} + 2A_{jjji} + A_{kijk}) + 6A_{ijjj} + 2A_{iiij} + 2A_{ikkj} &= \omega_i \omega_j, \\ (\kappa + 1)(2A_{iiij} + 2A_{jjji} + A_{kijk}) + 6A_{jiii} + 2A_{jjji} + 2A_{jkki} &= \omega_i \omega_j, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$3A_{ijjj} + A_{jjji} = -(B_{ij} + B_{ji}),$$

$$3A_{jiii} + A_{iiij} = -(B_{ij} + B_{ji}),$$

$$3A_{ikkj} + A_{jkki} + A_{kijk} = -(B_{ij} + B_{ji}),$$

$$3A_{jkki} + A_{ikkj} + A_{kijk} = -(B_{ij} + B_{ji}),$$

где $\{i, j, k\}$ – циклические перестановки индексов $\{1, 2, 3\}$.

Будем полагать:

$$B_{ij} = B_{ji}.$$

Тогда решение систем (3.31)-(3.32) запишется в виде:

$$\begin{aligned} A_{iiii} &= -\left(\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2\right)\omega^2 + \xi_1\omega_i^2, \\ A_{ijji} &= -\left(\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2\right)\omega^2 - \frac{1}{4}(6\xi_1 - 1)\omega_i^2 + \frac{1}{4}(10\xi_1 - 1)\omega_j^2, \\ A_{jii} &= -\left(\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2\right)\omega^2 - \frac{1}{4}(6\xi_1 - 1)\omega_j^2 + \frac{1}{4}(10\xi_1 - 1)\omega_i^2, \\ B_{ii} &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\xi_1 + \xi_2 + \xi_3\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\omega_i^2, \\ B_{ij} &= B_{ji} = \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\omega_i\omega_j, \\ A_{jiii} &= A_{ijjj} = A_{ikkj} = A_{jkki} = -\frac{1}{2}\left(3\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\omega_i\omega_j, \\ A_{iiij} &= A_{jjji} = \frac{1}{2}\left(7\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\omega_i\omega_j, \quad A_{kijk} = \left(5\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\omega_i\omega_j, \\ \xi_1 &= \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}. \end{aligned}$$

Компоненты вектора перемещения элемента упругого шара имеют вид:

$$\begin{aligned} u_i^0 &= x_i \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \omega_i^2 \right] - \\ &- \omega_i (x_j \omega_j + x_k \omega_k) \left[-\frac{1}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(3\xi_1 - \frac{1}{2} \right) (x_j^2 + x_k^2 - x_i^2) - 2\xi_1 x_i^2 \right] + \\ &+ x_i x_j x_k \omega_j \omega_k \left(5\xi_1 - \frac{1}{2} \right) - x_i (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) \omega^2 \left(\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2 \right) + \\ &+ x_i \omega_i^2 \left[\xi_1 x_i^2 - \frac{1}{4} (6\xi_1 - 1) (x_j^2 + x_k^2) \right] + \frac{1}{4} x_i (x_j^2 \omega_j^2 + x_k^2 \omega_k^2) (10\xi_1 - 1), \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Поправки к тензору инерции в недеформированном состоянии, обусловленные упругими свойствами шара, даются выражениями (3.22), приведенными в п. 3.2.2.

3.3.2. Шар с малой анизотропией упругих свойств

Пользуясь решением (3.33), перейдем к решению задачи (3.27) о деформировании анизотропно-упругого шара [79]. Выражение (3.33) содержит линейные и кубические члены компонент x_j радиус-вектора. С учетом этого перепишем задачу (3.27) в виде:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial u_{il}^1}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u_{ij}^1}{\partial x_j} &= b_{ij} x_j \text{ в } V, \\ [ku_{il}^1 \delta_{ij} + 2u_{ij}^1] x_j &= d_{ij} x_j + d_{iklm} x_1^k x_2^l x_3^m \text{ на } S, \\ i &= 1, 2, 3, \quad k + l + m = 3, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где b_{ij}, d_{ij}, d_{iklm} зависят от компонент вектора угловой скорости ω_i , $i = 1, 2, 3$, параметров анизотропии упругих свойств a_{iklm} и величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 . В виду громоздкости выражения для b_{ij}, d_{ij}, d_{iklm} не приводятся.

Повторяя описанный в п. 2.2 метод решения краевых задач с полиномиальной правой частью и подставляя полученные выражения компонент u_j^1 в интеграл:

$$I''_{ij} = \frac{3}{4\pi} \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (x_k u_k^1 \delta_{ij} - x_i u_j^1) \Big|_{\substack{x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 = r \cos \theta}} d\varphi,$$

приходим к выражениям для поправок I''_{ij} , обусловленных малой анизотропией упругих свойств:

Поправки к главным моментам инерции:

$$\begin{aligned} I''_{ii} &= \frac{2}{35} \eta_{kl}^{ii} \omega_k \omega_l, \\ \eta_{11}^{ii} &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a_{iiii} + (\varepsilon_4 + \varepsilon_5) (a_{iijj} + a_{iikk}) + (\varepsilon_9 + \varepsilon_{10}) (a_{ijij} + a_{ikik}) + \\ &\quad + (\varepsilon_{14} + \varepsilon_{15}) (a_{jjjj} + a_{kkkk}) + (2\varepsilon_{15} + \varepsilon_{17}) a_{jjkk} + \varepsilon_{19} a_{jkjk}, \\ \eta_{22}^{ii} &= \varepsilon_1 a_{iiii} + (\varepsilon_4 + \varepsilon_6) a_{iijj} + (\varepsilon_4 + \varepsilon_7) a_{iikk} + (\varepsilon_9 + \varepsilon_{10}) a_{ijij} + \varepsilon_9 a_{ikik} + \\ &\quad + (\varepsilon_{14} + \varepsilon_{16}) a_{jjjj} + (\varepsilon_{17} + \varepsilon_{18}) a_{jjkk} + \left(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{15} + \frac{1}{2} \varepsilon_{29} \right) a_{kkkk} + \\ &\quad + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{19} + \varepsilon_{28}) a_{jkjk}, \\ \eta_{33}^{ii} &= \varepsilon_1 a_{iiii} + (\varepsilon_4 + \varepsilon_7) a_{iijj} + (\varepsilon_4 + \varepsilon_6) a_{iikk} + \varepsilon_9 a_{ijij} + (\varepsilon_9 + \varepsilon_{10}) a_{ikik} + \\ &\quad + \left(\varepsilon_{14} + \varepsilon_{15} + \frac{1}{2} \varepsilon_{29} \right) a_{jjjj} + (\varepsilon_{17} + \varepsilon_{18}) a_{jjkk} + (\varepsilon_{14} + \varepsilon_{16}) a_{kkkk} + \\ &\quad + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{19} + \varepsilon_{28}) a_{jkjk}, \end{aligned}$$

$$\eta_{12}^{ii} = \varepsilon_3 a_{iii} + \varepsilon_{11} a_{ijjj} + \varepsilon_{12} a_{ijkk} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{ikjk},$$

$$\eta_{13}^{ii} = \varepsilon_3 a_{iik} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{ijjk} + \varepsilon_{12} a_{ikjj} + \varepsilon_{11} a_{ikkk},$$

$$\eta_{23}^{ii} = \varepsilon_8 a_{iij} + 2\varepsilon_{10} a_{ijik} + \varepsilon_{13} (a_{jjjk} + a_{jkkk}),$$

поправки к центробежным моментам инерции:

$$I_{ij}'' = -\frac{1}{35} \eta_{kl}^{ij} \omega_k \omega_l,$$

$$\eta_{11}^{ij} = \left(-\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \varepsilon_{25}\right) a_{iij} - \varepsilon_{11} a_{ijjj} + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{26} - \varepsilon_{28}) a_{ijkk} - (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{ikjk},$$

$$\eta_{22}^{ij} = -\varepsilon_{11} a_{iij} + \left(-\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \varepsilon_{25}\right) a_{ijjj} + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{26} - \varepsilon_{28}) a_{ijkk} - (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{ikjk},$$

$$\eta_{33}^{ij} = (-\varepsilon_{11} - \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})(a_{iij} + a_{ijjj}) + (\varepsilon_{26} + \varepsilon_{27}) a_{ijkk} - (2\varepsilon_{10} - \varepsilon_{28}) a_{ikjk},$$

$$\eta_{12}^{ij} = \varepsilon_{20} (a_{iii} + 2a_{iij} + a_{jjj}) + \varepsilon_{24} (a_{iikk} + a_{jjkk}) + \varepsilon_{25} a_{ijj} + \\ + \varepsilon_{28} (a_{ikik} + a_{jkjk}) + \varepsilon_{29} a_{kkkk},$$

$$\eta_{13}^{ij} = \varepsilon_{23} a_{iij} + (\varepsilon_{25} - \varepsilon_{28}) a_{ijik} + (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{28}) (a_{jjjk} + a_{jkkk}),$$

$$\eta_{23}^{ij} = \varepsilon_{23} a_{ikjj} + (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{28}) (a_{iik} + a_{ikkk}) + (\varepsilon_{25} - \varepsilon_{28}) a_{ijjk},$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{11}{72} - \frac{3}{2} \xi_1 + \frac{7}{3} \xi_3 + \frac{61}{6} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 - 12\xi_2^2 - 140\xi_3^2,$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{11}{24} + \frac{9}{2} \xi_1 + 7\xi_3 - \frac{61}{2} \xi_1^2 + 12\xi_1 \xi_2, \quad \varepsilon_3 = -\frac{2}{3} + 2\xi_1 + 42\xi_3 - 12\xi_1^2 + 24\xi_1 \xi_2,$$

$$\varepsilon_4 = \frac{91}{36} - \frac{91}{4} \xi_1 + 49\xi_3 + \frac{4}{9} \xi_1^2 + \frac{28}{3} \xi_1 \xi_2 - 56\xi_2^2 - 280\xi_3^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{43}{24} + \frac{107}{4} \xi_1 + 14\xi_3 - \frac{86}{3} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2,$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{49}{24} + \frac{83}{4} \xi_1 + 14\xi_3 + \frac{52}{3} \xi_1^2 + 4\xi_1 \xi_2,$$

$$\varepsilon_7 = -\frac{41}{24} + \frac{83}{4} \xi_1 + 7\xi_3 + 10\xi_1^2, \quad \varepsilon_8 = -\frac{2}{3} + 14\xi_3 + \frac{44}{3} \xi_1^2 + 8\xi_1 \xi_2,$$

$$\varepsilon_9 = 8 \left(\frac{1}{9} \xi_1^2 - \frac{1}{3} \xi_1 \xi_2 - 2\xi_2^2 \right), \quad \varepsilon_{10} = 4\xi_1 \left(2\xi_2 - \frac{1}{3} \xi_1 \right),$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{3} + 14\xi_1 - 6\xi_1^2 + 24\xi_1 \xi_2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{3} + 28\xi_1 - 14\xi_3 - \frac{22}{3} \xi_1^2 + 8\xi_1 \xi_2,$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{3} - 2\xi_1 + 14\xi_3 + 18\xi_1^2 + 24\xi_1 \xi_2,$$

$$\varepsilon_{14} = \frac{35}{6} - \frac{455}{18} \xi_1 - \frac{49}{6} \xi_3 - \frac{4}{3} \xi_1^2 - 8\xi_1 \xi_2 - 12\xi_2^2,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{15} &= -\frac{11}{12} + \frac{25}{2}\xi_1 + \frac{7}{2}\xi_3 - 10\xi_1^2, & \varepsilon_{16} &= -\frac{5}{8} + 9\xi_1 + \frac{21}{2}\xi_3 + \frac{23}{2}\xi_1^2 + 12\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{17} &= \frac{77}{36} - \frac{511}{18}\xi_1 - \frac{49}{3}\xi_3 - \frac{8}{9}\xi_1^2 - 8\xi_2^2 - 560\xi_3^2 - \frac{16}{3}\xi_1\xi_2 - 140\xi_2\xi_3, \\
\varepsilon_{18} &= -\frac{17}{12} + 19\xi_1 + 14\xi_3 + \frac{34}{3}\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{19} &= -\frac{16}{9}(\xi_1 + 3\xi_2)^2, & \varepsilon_{20} &= \frac{1}{4}(1 - 14\xi_1)^2, & \varepsilon_{21} &= \frac{1}{4} - \frac{7}{2}\xi_1 + 14\xi_1^2, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{4} - \frac{7}{6}\xi_1 - 18\xi_1^2, & \varepsilon_{23} &= 2\xi_1(14\xi_1 - 1), & \varepsilon_{24} &= \frac{1}{2} - 12\xi_1 + 70\xi_1^2, \\
\varepsilon_{25} &= 2(1 - 2\xi_1 + 6\xi_1^2), & \varepsilon_{26} &= -\frac{7}{12} + \frac{7}{2}\xi_1 - 14\xi_3 - \frac{8}{3}\xi_1^2 - 8\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{27} &= -\frac{9}{4} - \frac{7}{2}\xi_1 + 142\xi_1^2, & \varepsilon_{28} &= 4\xi_1^2, & \varepsilon_{29} &= \frac{1}{4} - 5\xi_1 + 25\xi_1^2,
\end{aligned}$$

а $\{i, j, k\}$ – циклические перестановки индексов $\{1, 2, 3\}$. При этом следует учитывать условие симметрии по перестановке индексов тензора a_{ijkl} .

3.3.3. Трансверсально-изотропный упругий шар с шаровым тензором инерции

Рассмотрим динамику шара, упругие свойства которого изотропны в каждой плоскости, перпендикулярной оси Ox_3 . Такое тело является трансверсально-изотропным [5]. В этом случае матрица упругости имеет, вообще говоря, пять независимых постоянных. Для простоты изложения будем полагать только одну постоянную a_{3333} отличной от нуля.

Пусть тело приведено в быстрое вращение вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью Ω . При малых возмущениях этого движения вектор угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + (\Omega + \omega_3) \vec{e}_3,$$

где

$$\omega_i \ll \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

В данном приближении поправки к тензору инерции, связанные с учетом упругих свойств тела, имеют вид

$$\begin{aligned}
I'_{11} &= I'_{22} = \frac{2}{35} \left[-\frac{1}{3} + \frac{\xi_1}{3} + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right] \Omega^2, \\
I'_{33} &= \frac{2}{35} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right] \Omega^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{12} &= 0, & I'_{13} &= \frac{2}{35}(1 - \xi_1)\Omega\omega_1, & I'_{23} &= \frac{2}{35}(1 - \xi_1)\Omega\omega_2. \\
I''_{11} &= I''_{22} = g_1 a_{3333}\Omega^2, & I''_{33} &= g_2 a_{3333}\Omega^2, \\
I''_{13} &= g_3 a_{3333}\Omega\omega_1, & I''_{23} &= g_3 a_{3333}\Omega\omega_2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{2}{35} \left(\frac{125}{24} - \frac{293}{18}\xi_1 + \frac{7}{3}\xi_3 + \frac{61}{6}\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - 12\xi_2^2 \right), \\
g_2 &= \frac{2}{35} \left(-\frac{11}{36} + 3\xi_1 + \frac{28}{3}\xi_3 - \frac{61}{3}\xi_1^2 + 16\xi_1\xi_2 - 12\xi_2^2 - 140\xi_3^2 \right), \\
g_3 &= -\frac{1}{140}(1 - 28\xi_1 + 196\xi_1^2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда тензор I_{ij}^0 является шаровым. Уравнение Эйлера в проекциях на оси $Ox_1x_2x_3$ принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}\dot{\omega}_1 - \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_2 = 0, \\ \frac{2}{5}\dot{\omega}_2 + \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_1 = 0, \\ \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

где

$$g = g_1 + g_3 - g_2 = \frac{1}{35} \left(\frac{97}{9} - \frac{284}{9}\xi_1 - 14\xi_3 + 12\xi_1^2 - 24\xi_1\xi_2 + 280\xi_3^2 \right).$$

Отметим, что $g > 0$ при любых значениях параметра $\kappa \in (0, \infty)$, в чем можно непосредственно убедиться.

Выражение для кинетической энергии тела при постоянном кинетическом моменте имеет вид:

$$T = T_0 - \frac{1}{2} \varepsilon\delta g \Omega^2 a_{3333} (\omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (3.36)$$

Интерес представляет случай, когда параметр, характеризующий анизотропию упругих свойств, $a_{3333} < 0$. В соответствии с (3.35) вращение вокруг Ox_3 консервативно устойчиво вне зависимости от знака a_{3333} . На рис. 9 показаны траектории конца вектора \vec{K} на сфере постоянного кинетического момента при различных значениях кинетической энергии тела. Вращению вокруг Ox_3 отвечает особая точка типа центр. При $a_{3333} < 0$ учет малых внутренних потерь энергии приводит к трансформации центра в устойчивый фокус, т.к. в этом случае вращению

тела вокруг Ox_3 отвечает минимум кинетической энергии при постоянном кинетическом моменте (3.36).

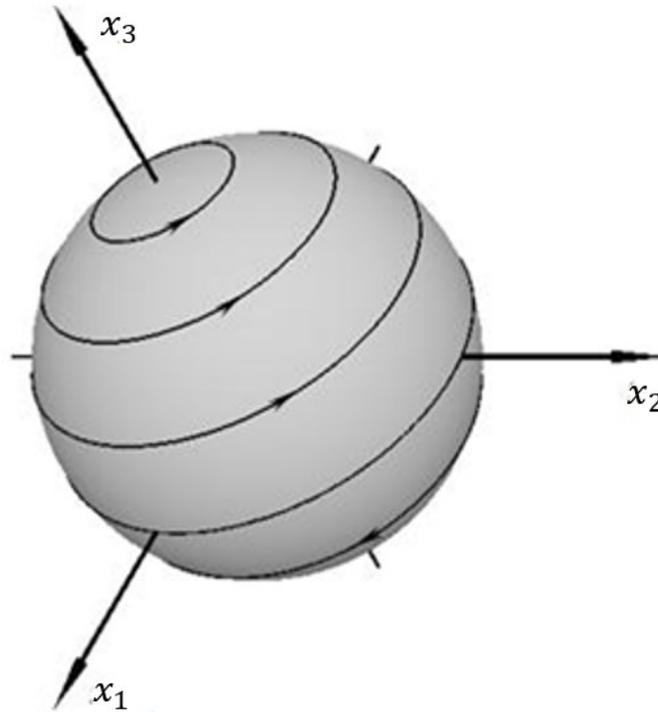


Рис. 9.

Траектории конца вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ при $a_{3333} < 0$ и шаровом тензоре инерции

3.3.4. Трансверсально-изотропный упругий шар с начальной эллипсоидальностью

Интересный качественный эффект обнаруживается в случае, когда анизотропия упругих свойств и малое отличие тензора инерции недеформированного тела от I_0 наблюдается одновременно.

Рассмотрим трансверсально-изотропный шар с малой начальной эллипсоидальностью. Также как и в п. 3.3.3 будем считать, что упругие свойства шара изотропны в каждой плоскости, перпендикулярной оси Ox_3 . Для простоты изложения будем полагать только одну постоянную a_{3333} отличной от нуля.

Пусть тело приведено в быстрое вращение вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью Ω . При малых возмущениях этого движения вектор угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + (\Omega + \omega_3) \vec{e}_3,$$

где

$$\omega_i \ll \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Предположим, что шар содержит точечные включения (неоднородности), которые приводят к малой начальной эллипсоидальности, т.е. малым отклонениям тензора инерции недеформированного тела I_{ij}^0 от его значения для шара, которые не влияют на деформации. Оси системы $Ox_1x_2x_3$ являются главными осями инерции недеформированного тела:

$$I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}, \quad I_0 = \frac{2}{5}, \quad \Delta_i \ll I_0.$$

Пусть Ox_3 является осью среднего момента инерции, т.е.

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

Уравнение Эйлера в проекциях на оси $Ox_1x_2x_3$ принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}\dot{\omega}_1 + (\Delta_3 - \Delta_2)\Omega\omega_2 - \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_2 = 0, \\ \frac{2}{5}\dot{\omega}_2 + (\Delta_1 - \Delta_3)\Omega\omega_1 + \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_1 = 0, \\ \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

где $g > 0$ при любых значениях параметра $\kappa \in (0, \infty)$.

Выражение для кинетической энергии тела при постоянном кинетическом моменте имеет вид:

$$T = T_0 + \frac{1}{2} [(\Delta_3 - \Delta_1 - \varepsilon\delta g\Omega^2 a_{3333})\omega_1^2 + (\Delta_3 - \Delta_2 - \varepsilon\delta g\Omega^2 a_{3333})\omega_2^2]. \quad (3.38)$$

В уравнениях движения (3.37) анизотропия упругих свойств и малая начальная эллипсоидальность оказывают различное влияние в зависимости от угловой скорости вращения Ω . Пусть параметры Δ_i ($i = 1, 2, 3$), a_{3333} и угловая скорость Ω таковы, что анизотропия определяет качество динамики тела (рис. 10). Стационарное вращение относительно оси Ox_3 , консервативно устойчиво при достаточно больших значениях Ω . С уменьшением угловой скорости Ω область притяжения устойчивого вращения относительно Ox_3 уменьшается, сепаратрисы, показанные на рис. 10, сближаются. Наконец, при некотором критическом значении угловой скорости $\Omega = \Omega_*$ траектории конца вектора кинетического момента на сфере $\vec{K}^2 = const$ принимают вид, показанный на рис. 11.

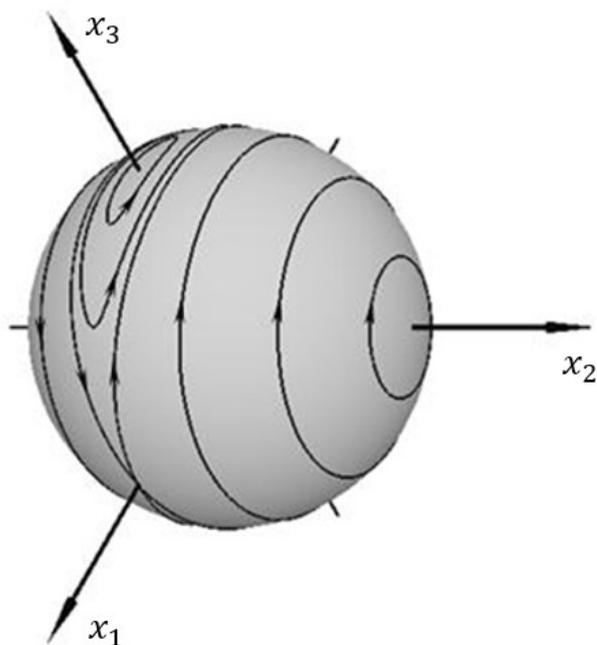


Рис. 10. Траектории конца вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} < 0$ и $\Omega > \Omega_*$

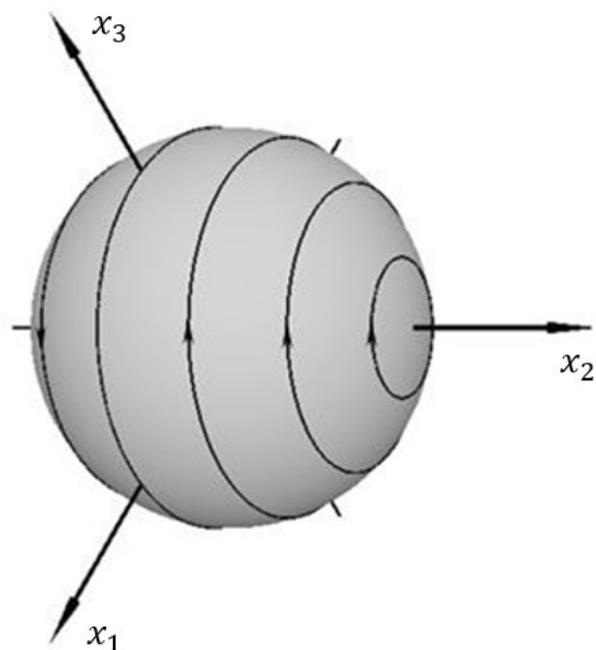


Рис. 11. Траектории конца вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} < 0$ и $\Omega = \Omega_*$

При $\Omega < \Omega_*$ динамику тела определяет главным образом его тензор инерции в недеформированном состоянии (т.е. величины Δ_i , $i = 1,2,3$): стационарное вращение вокруг Ox_3 неустойчиво, а вращение относительно двух других осей консервативно устойчиво (рис. 12).

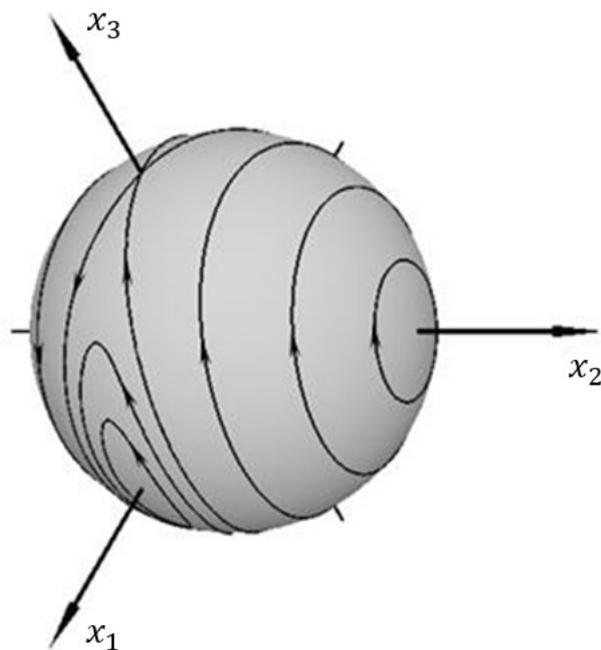


Рис. 12.

Траектории конца вектора \vec{K} на сфере $\vec{K}^2 = const$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} < 0$, $\Omega < \Omega_*$

Значение критической скорости можно оценить выражением:

$$\Omega_*^2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_3}{\varepsilon \delta g |a_{3333}|}$$

Аналогично случаю упругого квазишара с кубической симметрией и квазишаровым тензором инерции, рассмотренным в п. 3.2.5, в рамках модели анизотропно-упругого тела возможно глобальное перемещение оси устойчивого стационарного вращения в теле.

Предположим, что тело совершает угловые движения вблизи положения оси Ox_3 . Со временем диссипация уменьшает кинетическую энергию тела. Уменьшается угловая скорость Ω , а, следовательно, изменяется соотношение между факторами, определяющими его динамику. В результате при $\Omega = \Omega_*$ ось устойчивого стационарного вращения принимает в теле новое положение. В рассмотренной задаче минимум кинетической энергии «перемещается» от Ox_3 к направлению Ox_1 , т.е. ось вращения за короткое время повернется в теле на угол $\pi/2$. В инерциальном пространстве явление глобального перемещения полюсов представляет собой поворот тела.

3.4. Затухание прецессии вязкоупругого и термоупругого шара

В данном разделе рассматриваются некоторые особенности динамики деформируемых тел, связанные с диссипативными процессами, в частности внутренним трением и изменением поля температуры тела. На основе заключений о характере угловых движений тела, полученных из конкретных моделей, можно изучить длительность процесса затухания прецессии тел, оценить период движения в теле оси вращения. Рассматриваемые модели находят применение при оценке времени затухания свободной прецессии астероидов, изучении Чандлеровской нутации полюса Земли.

Решение задач о деформировании тел, приведенных в данном разделе, можно найти в [36, 39]. Далее в изложении ограничимся постановкой задач и результатами, полученными в рамках рассмотренных моделей.

3.4.1. Малое внутреннее трение

Рассмотрим случай, при котором диссипация энергии происходит за счет внутреннего трения, обусловленного вязкоупругими свойствами тела. Общая постановка задачи описана в п. 3.1. Пользуясь введенными обозначениями (3.8), запишем уравнение движения элемента объема в связанной системе и условие отсутствия напряжений на поверхности (3.9), (3.10):

$$\begin{aligned} & \left[\kappa + 1 + \sqrt{\varepsilon} s (\zeta + 1) \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{grad div } \vec{u} + \left(1 + \sqrt{\varepsilon} s \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \vec{u} = \\ & = \varepsilon (\ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r} + \vec{u}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r} + \vec{u}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}]) \text{ в } V, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\left[\left(\kappa + \sqrt{\varepsilon} s \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ll} \delta_{ij} + 2 \left(1 + \sqrt{\varepsilon} s \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij} \right] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.40)$$

Будем рассматривать случай, при котором тело достаточно жестко. Диссипация энергии обеспечивает быстрое затухание упругих колебаний за время, много меньшее периода вращательных движений тела как целого относительно центра инерции:

$$\varepsilon \ll s \ll 1.$$

Это позволяет искать вектор перемещений в виде ряда по малым параметрам ε, s :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon [\vec{u}_0(\vec{r}, t) + \sqrt{\varepsilon} s \vec{u}_1(\vec{r}, t)].$$

Левая часть уравнения движения элемента тела (3.39) содержит вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. Поэтому решение задачи (3.39), (3.40) будет зависеть от ее компонент.

По компонентам вектора перемещений определяется тензор инерции в рассматриваемом приближении:

$$I_{ij} = \int_V [(x_i^2 + 2x_i u_i) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \varepsilon I'_{ij} + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} s I''_{ij},$$

где I_{ij}^0 - тензор инерции недеформированного тела, I'_{ij} - поправка, обусловленная упругими свойствами, I''_{ij} - поправка, связанная с вязкоупругими свойствами тела. Поправки I'_{ij}, I''_{ij} зависят от деформаций тела и являются квадратичными функциями компонент угловой скорости.

Пусть оси связанной системы координат являются главными осями инерции недеформированного тела, а эллипсоид инерции в недеформированном состоянии является эллипсоидом вращения: $I_{11}^0 = I_{22}^0 = A, I_{33}^0 = C$.

Приведем тело во вращение с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_3$ вокруг оси Ox_3 наибольшего момента инерции в недеформированном состоянии и будем рассматривать малые возмущения этого вращения $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_0$.

Уравнение угловых движений в проекциях на оси связанной системы:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{C-A}{A} \omega_0 \omega_2 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} s k \omega_0^4 \omega_1 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 - \frac{C-A}{A} \omega_0 \omega_1 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} s k \omega_0^4 \omega_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где параметр $k \sim \left(\frac{C-A}{A}\right)^2$ может быть получен в результате последовательного решения краевых задач для векторов $\vec{u}_0(\vec{r}, t), \vec{u}_1(\vec{r}, t)$ [39].

3.4.2. Макроскопическая термодиффузия

Рассмотрим механизм диссипации энергии, возникающей вследствие разницы температур. Пусть θ - относительное отклонение температуры тела T от температуры окружающей среды T_0 .

При построении модели упругого деформируемого тела необходимо учесть, что вклад в деформации вносит изменение градиента температуры θ . Уравнение движения запишется в виде [39]:

$$\begin{aligned} \varepsilon (\ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r} + \vec{u}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r} + \vec{u}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}]) = \\ = (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u} + \Delta \vec{u} - \alpha_1 \text{grad } \theta \text{ в } V, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\alpha_1 = \frac{2}{3}\alpha T_0(\kappa + 1)$, α - коэффициент линейного расширения.

Для определения вектора перемещений \vec{u} и поля температуры θ уравнение (3.42) следует рассматривать совместно с уравнением теплопроводности:

$$\tau \Delta \theta = c_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} \text{ в } V, \quad (3.43)$$

в котором безразмерные параметры имеют вид:

$$\tau = \frac{T_0 \chi t_*}{\mu R_0^2}, \quad c_1 = \frac{c T_0}{\mu}, \quad \nu = \frac{\alpha_1 \varepsilon^2}{\tau},$$

где χ - коэффициент теплопроводности, c - удельная объемная теплоемкость в отсутствие деформаций.

Будем считать, что на поверхности тела поддерживается температура окружающей среды:

$$\theta = 0 \text{ на } S. \quad (3.44)$$

Тогда условие отсутствия напряжений на поверхности:

$$[k u_{i|l} \delta_{ij} + 2u_{ij}] n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.45)$$

Аналогично случаю диссипации за счет вязкоупругих свойств тела предположим, что выполняются условия:

$$\varepsilon \ll \nu \alpha_1 \ll 1.$$

Это позволяет искать решение задачи (3.42)-(3.45) в виде:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon [\vec{u}_0(\vec{r}, t) + \nu \alpha_1 \vec{u}_1(\vec{r}, t)],$$

$$\theta = \nu \theta_0.$$

В рассматриваемом приближении тензор инерции также содержит две поправки, возникающие при деформировании тела:

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + \varepsilon I'_{ij} + \varepsilon \nu \alpha_1 I''_{ij}.$$

В отличие от случая внутреннего трения, здесь I''_{ij} - поправка, обусловленная деформациями при изменении поля температур.

Выберем оси связанной системы координат в направлении главных осей инерции недеформированного тела. Пусть тензор инерции в недеформированном состоянии имеет вид: $I_{11}^0 = I_{22}^0 = A$, $I_{33}^0 = C$.

Приведем тело во вращение с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_3$ вокруг оси Ox_3 наибольшего момента инерции и будем рассматривать малые возмущения этого вращения $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_0$.

Уравнение угловых движений в проекциях на оси связанной системы:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 + \frac{C-A}{A}\omega_0\omega_2 + \varepsilon\nu\alpha_1 k\omega_0^4\omega_1 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 - \frac{C-A}{A}\omega_0\omega_1 + \varepsilon\nu\alpha_1 k\omega_0^4\omega_2 &= 0,\end{aligned}\tag{3.46}$$

где параметр $k \sim \left(\frac{C-A}{A}\right)^2$ определяется в результате последовательного решения краевых задач (3.42)-(3.45) [39].

3.4.3. О затухании свободной прецессии астероидов

Основываясь на результатах решения задач п. 3.4.1 и 3.4.2 можно изучить длительность затухания прецессии астероидов. Будем моделировать астероиды вязкоупругими телами, обладающими в недеформированном состоянии различными осевым и экваториальным моментами инерции. Рассматривая малые угловые движения тела в окрестности оси устойчивого вращения, можно оценить коэффициент затухания свободной прецессии для каждого из представленных механизмов диссипации.

Коэффициент затухания угловых движений за счет внутреннего трения определяется из системы (3.41):

$$\delta_B = k\varepsilon\sqrt{\varepsilon S}\omega_0^4 = k\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{\eta}{\mu^2 t_*^3}}l^3\omega_0^4 \sim kf_B\frac{l^3}{t^7},\tag{3.47}$$

где t - период собственного вращения астероида, l – характерный размер тела, f_B - множитель, зависящий от вязкоупругих свойств материала.

Вещество, из которого состоят астероиды, для большинства объектов обладает схожими характеристиками (плотность, параметры упругих и вязких свойств). Тогда время затухания угловых движений в теле определяется скоростью вращения и характерным размером тела. Согласно приведенной оценке (3.47), чем больше период собственного вращения астероида и меньше его линейный размер, тем медленнее происходит затухание прецессии.

Аналогично из (3.46) можно оценить коэффициент затухания свободной прецессии для механизма макроскопической термодиффузии:

$$\delta_T = k\varepsilon\nu\alpha_1\omega_0^4 = k\frac{\rho^2\alpha_1^2}{\mu T_0\chi t_*^5}l^6\omega_0^4 \sim kf_T\frac{l^6}{t^9},\tag{3.48}$$

где f_T - множитель, зависящий от термоупругих свойств материала.

Сравнивая полученное выражение с (3.47), можно заметить, что в случае макроскопической термодиффузии линейный размер тела и период его собственного вращения сказываются на времени затухания прецессии сильнее, чем в случае внутреннего трения.

Полученные выражения коэффициентов затухания прецессии в случае внутреннего трения (3.47) и макроскопической термодиффузии (3.48) позволяют оценить продолжительность этого процесса для некоторых астероидов. Для группы из 1120 астероидов с известными характеристиками [189] сделаны оценки времени затухания прецессии с учетом каждого из рассмотренных механизмов диссипации в отдельности. Для случая вязкого трения представлена зависимость времени затухания свободной прецессии астероидов от среднего диаметра (рис. 13) и периода собственного вращения (рис. 14). При диссипации, обусловленной термодиффузией, зависимость времени затухания от среднего диаметра и периода собственного вращения показана на рис. 15, 16 соответственно. Из рис. 13-16 видно, что для больших (> 50 км) быстро вращающихся астероидов движения оси вращения в теле быстро затухают. Напротив, чем меньше размер астероида и больше период его собственного вращения, тем дольше будет продолжаться свободная прецессия.

Интерес представляет сравнение времени затухания прецессии со средним периодом между двумя последовательными столкновениями астероидов, приводящими к отклонению оси вращения от устойчивого положения. Время между столкновениями некоторого тела с другими небесными объектами можно оценить, используя вероятностные модели [160, 188]. На рис. 13, 15 изображена кривая, соответствующая зависимости времени между столкновениями астероида от его линейного размера. Точки над кривой отвечают астероидам, ось вращения которых не успеет прийти в устойчивое положение до следующего внешнего воздействия. При наблюдении за этими телами с высокой степенью вероятности можно отметить прецессионное движение. Данную группу астероидов преимущественно составляют тела малого размера (< 50 км). Из представленной выборки процентное соотношение астероидов с продолжительным временем затухания прецессии равно 11,1% при рассеянии энергии за счет внутреннего трения (рис. 13) и 9,8% при макроскопической термодиффузии (рис. 15). Для астероидов, соответствующих точкам под кривой,

характерно относительно быстрое возвращение оси вращения в устойчивое положение. Наблюдения за этими объектами может выявить как свободную прецессию, так и вращение вокруг оси наибольшего момента инерции.

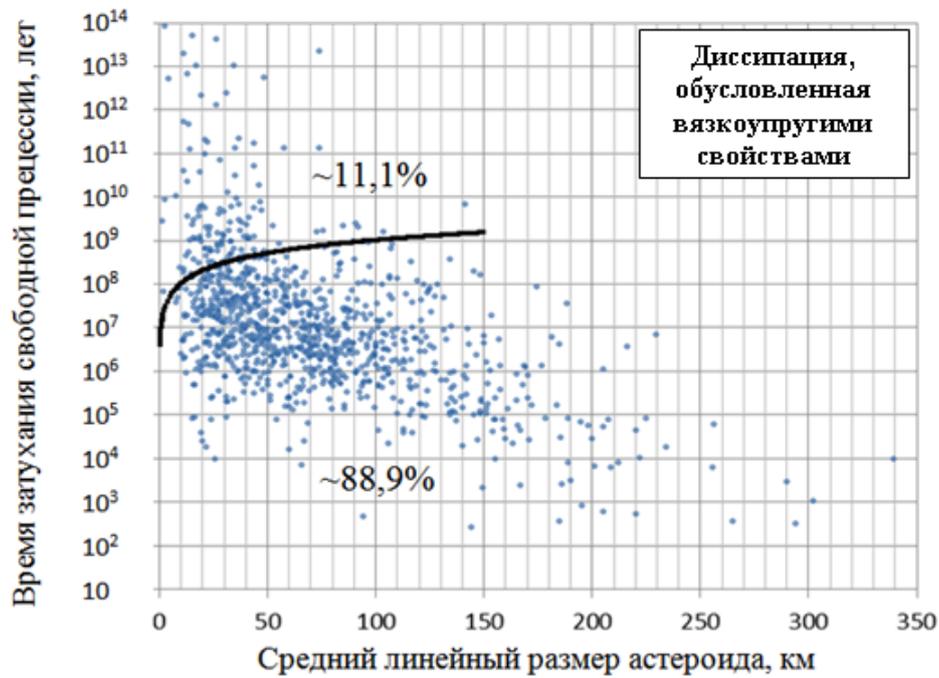


Рис. 13. Зависимость времени затухания прецессии астероидов от среднего линейного размера для механизма внутреннего трения

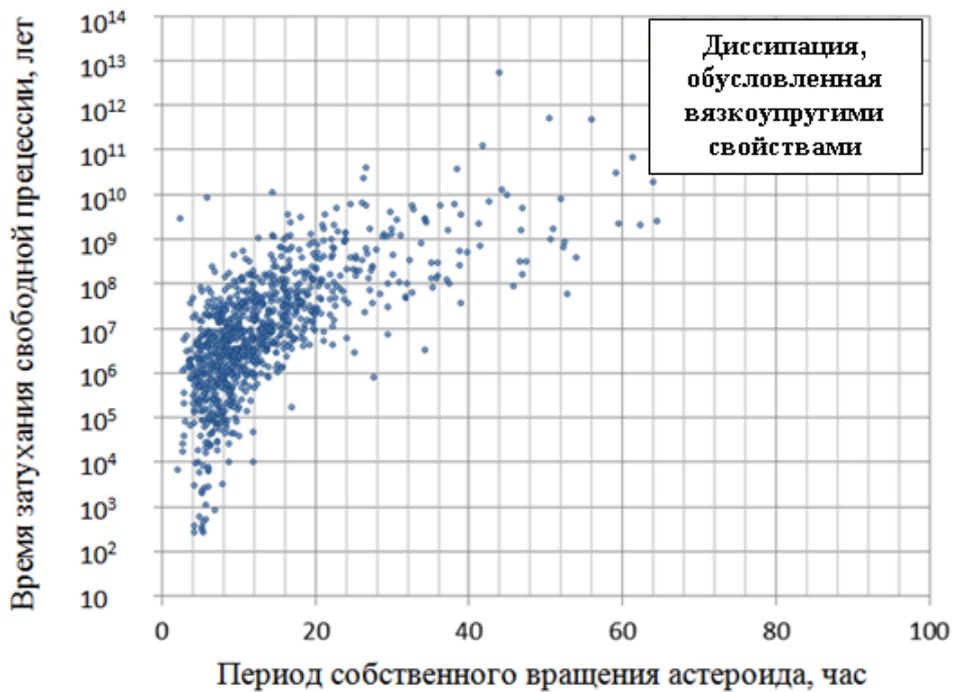


Рис. 14. Зависимость времени затухания прецессии астероидов от периода собственного вращения для механизма внутреннего трения



Рис. 15. Зависимость времени затухания прецессии астероидов от среднего линейного размера для механизма макроскопической термодиффузии

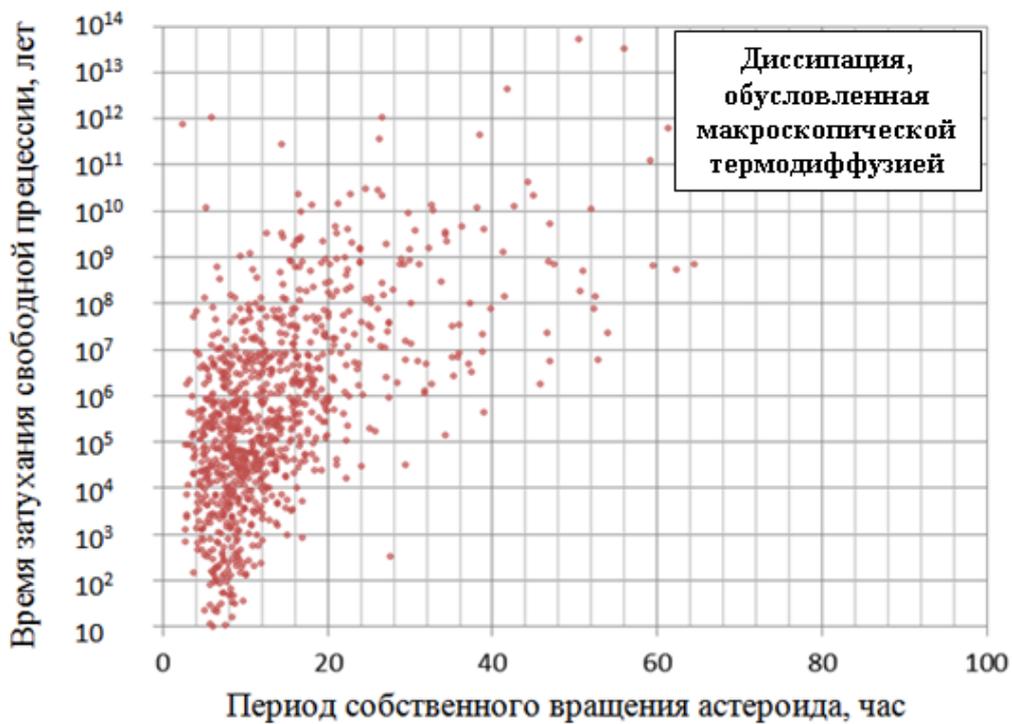


Рис. 16. Зависимость времени затухания прецессии астероидов от периода собственного вращения для механизма макроскопической термодиффузии

Проводя сравнение двух механизмов диссипации энергии, нужно отметить существенное влияние термоупругих свойств материала на время затухания угловых движений оси вращения в теле. В отличие от внутреннего трения для некоторых астероидов термодиффузия приводит к уменьшению времени затухания прецессии, достаточно, чтобы наблюдать их вращение вокруг оси наибольшего момента инерции.

На рис. 17 представлена диаграмма распределения астероидов по порядку времени затухания прецессии для каждого из рассмотренных механизмов диссипации. Пик распределения в случае внутреннего трения соответствует времени затухания $10^6 - 10^7$ лет. Этот диапазон значений характерен для 57% астероидов (острый пик). Большинство астероидов (84%) имеют время затухания $10^5 - 10^8$ лет, что согласуется с оценками, приведенными в [134]. В случае термодиффузии диаграмма имеет более закругленный пик. При этом он смещается в сторону уменьшения времени затухания (10^5 лет). Для 70% астероидов характерна продолжительность процесса затухания прецессии порядка $10^3 - 10^7$ лет.

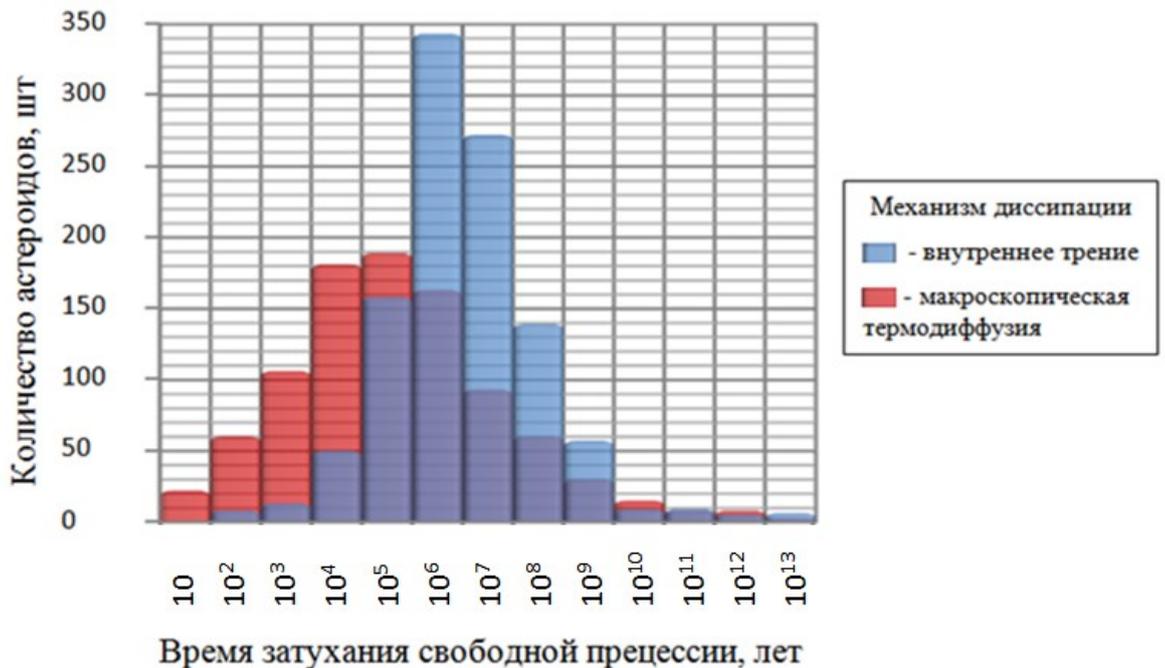


Рис. 17. Распределение астероидов по порядку времени затухания прецессии

Согласно (3.48), рассеяние энергии, происходящее за счет термодиффузии, наиболее сильно сказывается на больших быстро вращающихся астероидах. Для них время затухания прецессии находится в диапазоне $10 - 10^5$ лет (выступающая слева

часть диаграммы). Для медленно вращающихся тел малого размера наибольший вклад в диссипацию вносит внутреннее трение (см. (3.47)). Однако время затухания прецессии таких астероидов, как правило, превышает возраст Вселенной.

Таким образом, проведенная оценка времени затухания свободной прецессии астероидов подтверждает выводы [140, 152, 153] о весьма продолжительном течении этого процесса для небольших медленно вращающихся тел. Показано существенное влияние термоупругих свойств на время затухания прецессии, о чем поднимался вопрос в [140]. Тем не менее, результаты работы не противоречат выводам [134], о наличии большого числа астероидов, оси вращения которых способны вернуться в устойчивое положение до следующего столкновения.

Установлено, что изменение поля температуры является существенным фактором для оценки времени затухания угловых движений больших быстро вращающихся тел. В телах небольшого размера с продолжительным периодом вращения диссипация в основном обусловлена вязкими свойствами астероидов.

Учет суммарных потерь энергии при внутреннем трении и макроскопической термодиффузии позволяют обнаружить, что 9% из рассмотренных астероидов имеют время затухания прецессии большее, чем время между двумя последовательными столкновениями астероидов. Наблюдения за этими телами с высокой степенью вероятности могут выявить свободную прецессию.

В настоящий момент лишь у немногих астероидов изучено угловое движение. Поэтому оценка времени затухания прецессии может дать представление о характере столкновений астероидов, что представляет интерес для изучения их происхождения.

3.5. Угловые движения квазишара, определяемые в равной степени его упругими и вязкими свойствами

В рассмотренных ранее задачах п. 3.1-3.4 вязкость тела считалась весьма малой и учитывалась лишь как причина уменьшения кинетической энергии тела. В данном разделе предполагается, что влияние упругости и вязкости тела на деформированное состояние при свободных угловых движениях равнозначно. Сделанное предположение позволяет на простой модели объяснить свободную прецессию полюса Земли с периодом Чандлера.

3.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим свободные угловые движения однородного вязкоупругого тела, близкого по форме к шару, поверхность которого задана уравнением вида:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \delta \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right), \quad \beta \ll 1,$$

где δ – параметр, характеризующий малые отклонения формы поверхности от сферы.

Запишем уравнение движения элемента объема V и условия отсутствия напряжений на поверхности S в выбранной в соответствии с условиями (3.2) связанной системе координат $Ox_1x_2x_3$, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_0 \vec{e}_3$, $\omega_1, \omega_2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} & \rho(\ddot{\vec{u}} + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}} + \vec{u}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}} + \vec{u}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}]) = \\ & = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + (\xi + \eta) \frac{\partial}{\partial t} \text{grad div } \vec{u} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{u} \text{ в } V, \\ & \left(\left(\lambda + \xi \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ii} \delta_{ij} + 2 \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij} \right) n_j = 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Для безразмерных параметров введем следующие обозначения:

$$\beta = \frac{\rho R_0^2}{\eta t_*}, \quad \gamma = \frac{\mu t_*}{\eta}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \zeta = \frac{\xi}{\eta}, \quad \eta = \nu \rho, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\rho R_0^2}{\mu t_*^2}.$$

Будем полагать, что характерный масштаб процессов, обусловленных вязкостью тела, с одной стороны, много меньше периода вращательных движений, а с другой стороны, имеет такой же порядок как период упругих колебаний тела. В этом случае выполняются условия:

$$\beta \ll 1, \quad \varepsilon \sim \beta.$$

Это позволяет перейти к решению квазистатической задачи о деформировании вязкоупругого квазишара:

$$\beta[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \gamma[(\kappa + 1)grad div \vec{u} + \Delta\vec{u}] + (\zeta + 1) \frac{\partial}{\partial t} grad div \vec{u} + \frac{\partial}{\partial t} \Delta\vec{u} \quad \text{в } V,$$

$$\left(\left(\gamma\kappa + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ii} \delta_{ij} + 2 \left(\gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij} \right) n_j = 0 \quad \text{на } S, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решение этой задачи представим в виде ряда по малым параметрам упругих и вязких свойств β и отклонения поверхности тела от сферы δ и ограничимся первым членом разложения:

$$\vec{u} = \beta\vec{u}_1 + \beta\delta\vec{u}_2 + \dots$$

Основной вклад в вектор смещения \vec{u} вносят деформации \vec{u}_1 . Совместное влияние формы тела и его вязкоупругих свойств \vec{u}_2 имеет следующий порядок малости ($\beta\delta\vec{u}_2 \sim \beta^2\vec{u}_3$) и незначительно сказывается на деформации тела. Это позволяет представить рассматриваемое тело в виде комбинации абсолютно твердого квазишара и вязкоупругого шара.

По решению \vec{u} определяются компоненты тензора инерции в рассматриваемом приближении:

$$I_{ij} = \int_V [(x_i^2 + 2x_i u_i) \delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)] dV = I_{ij}^0 + \beta \left(\frac{1}{\gamma} I'_{ij} + I''_{ij} \right) =$$

$$= I_{ij}^0 + \varepsilon I'_{ij} + \beta I''_{ij},$$

где I_{ij}^0 - тензор инерции недеформированного тела, I'_{ij} - поправки, обусловленные упругими свойствами, I''_{ij} - поправки, связанные с вязкими свойствами.

Будем считать, что оси связанной системы являются главными осями инерции недеформированного тела: $I_{ij}^0 = I_i^0 \delta_{ij}$.

Поправки к тензору инерции имеют вид:

$$I'_{11} = I'_{22} = \frac{I_0}{7} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2,$$

$$I'_{33} = \frac{I_0}{7} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2,$$

$$I''_{13} = I_0 \beta d\omega_0 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_1 e^{\gamma \tau} d\tau, \quad I''_{23} = I_0 \beta d\omega_0 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_2 e^{\gamma \tau} d\tau,$$

где

$$d = 1/7(1 - \xi_1), \quad \xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

Запишем вектор кинетического момента $\vec{K} = K_i \vec{e}_i$ в системе $Ox_1x_2x_3$, где

$$K_1 = I_1^0 \omega_1 + I_0 \left(\frac{\varepsilon}{7} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2 \omega_1 + \beta d \omega_0^2 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_1 e^{\gamma \tau} d\tau \right),$$

$$K_2 = I_2^0 \omega_2 + I_0 \left(\frac{\varepsilon}{7} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2 \omega_2 + \beta d \omega_0^2 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_2 e^{\gamma \tau} d\tau \right),$$

$$K_3 = I_3^0 \omega_3 + I_0 \frac{\varepsilon}{7} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^3.$$

О характере движения оси вращения можно судить, определив возмущения ω_1, ω_2 угловой скорости тела. Запишем уравнение Эйлера в проекциях на оси связанной системы:

$$\begin{aligned} I_1^0 \dot{\omega}_1 + (I_3^0 - I_2^0) \omega_0 \omega_2 + I_0 \varepsilon d \omega_0^3 \omega_2 - I_0 \beta d \omega_0^3 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_2 e^{\gamma \tau} d\tau &= 0, \\ I_2^0 \dot{\omega}_2 - (I_3^0 - I_1^0) \omega_0 \omega_1 - I_0 \varepsilon d \omega_0^3 \omega_1 + I_0 \beta d \omega_0^3 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_1 e^{\gamma \tau} d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.5.2. О возможности нутации полюса с периодом Чандлера

Многие попытки объяснения Чандлеровской нутации полюса Земли построены на учете упругих и вязких свойств вещества планеты. В данном разделе предлагается один из возможных механизмов нутации полюса с периодом Чандлера, основанный на решении задачи об угловых движениях вязкоупругого квазишара (3.49). В рамках этой модели можно оценить среднее значение вязкости Земли.

Рассмотрим, какое влияние оказывает вязкость на характер угловых движений тела, используя результаты п.3.

В случае малой вязкости (п. 3.2.2), упругий шар, приведенный в быстрое вращение вокруг некоторой оси Ox_3 с угловой скоростью ω_0 , принимает форму эллипсоида вращения. При отклонении оси Ox_3 от исходного положения, эллипсоид мгновенно поворачивается таким образом, что ось вращения совпадает с осью его симметрии. Прецессии не возникает.

В результате процессов, происходящих с веществом планеты при длительном вращении, тело приобретает форму квазишара. В рассматриваемом приближении

малое отличие формы тела от шара вносит вклад лишь в тензор инерции недеформированного тела I_{ij}^0 , причем только вторая ее гармоника $Y_{2m}(\theta, \varphi)$ (п. 3.2.1). Она связана с эллипсоидальностью формы тела и приводит к добавлению поправок к главным моментам инерции. Таким образом, квазишар представляет собой сплюснутый вдоль оси вращения эллипсоид с осевым $I_{33}^0 = C_0$ и экваториальными $I_{11}^0 = I_{22}^0 = A_0$ моментами инерции.

Уравнения движения упругого квазишара в случае малой вязкости примут вид:

$$A_0 \dot{\omega}_1 + (C_0 - A_0) \omega_0 \omega_2 = 0,$$

$$A_0 \dot{\omega}_2 - (C_0 - A_0) \omega_0 \omega_1 = 0,$$

т.е. прецессия квазишара в этом приближении будет определяться его моментами инерции A_0, C_0 в жестком представлении.

Наблюдаемая в настоящее время форма планеты определяется ее предисторией (квазишар) и ее деформациями при вращении, которые в рассматриваемом приближении являются деформациями вязкоупругого шара. Тело, имеющее наблюдаемую форму, обладает известными главными моментами инерции A и C . Такое абсолютно твердое тело имело бы свободную прецессию с периодом Эйлера:

$$T = \frac{C - A}{A} = 306 \text{ сут.}$$

Определим главные моменты инерции недеформированной планеты A_0, C_0 . Для этого из наблюдаемых моментов инерции A и C вычтем упругие добавки:

$$A_0 = A - \varepsilon I'_{11}, \quad C_0 = C - \varepsilon I'_{33}.$$

Расчеты показывают, что для Земли период прецессии:

$$T_0 = \frac{C_0 - A_0}{A_0} = 375 \text{ сут,}$$

т.е. учет только лишь упругих свойств не объясняет движение полюсов с периодом Чандлера.

Иначе обстоит дело в случае, когда влияние упругих и вязких свойств тела на его деформации является равнозначимым (п. 3.5.1). При вращении вязкоупругий шар принимает форму эллипсоида вращения. На изменение направления оси вращения его деформации откликаются не мгновенно (как в случае малой вязкости), а с некоторым запаздыванием, что и приводит к свободной прецессии вязкоупругого шара. В результате период нутации квазишара увеличивается и при значении параметра вязкости $\nu = 0,4 \cdot 10^{16} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ становится равным периоду Чандлера $T = 428 \text{ сут}$.

3.6. Изотропный упругий шар с внутренним гравитационным взаимодействием

В п. 3.1-3.5 рассматривалось упругое деформируемое тело, ограниченное квазисферической поверхностью. Используя усредненные характеристики Земли, удалось объяснить нутацию Земли с периодом Чандлера. В действительности Земля состоит из слоев, физические свойства которых могут сильно различаться.

Исходя из блокового характера строения геофизической среды и сильно выраженных ее нелинейных свойств, разработано большое количество математических моделей для описания локальных сейсмических эффектов [18, 157, 175, 187]. Вместе с тем, имеются данные о взаимосвязи между землетрясениями и планетарными процессами в атмосфере, мировом океане, вариациями угловой скорости вращения Земли, её нутацией, которые не находят места в локальных моделях очага землетрясения как, впрочем, и взаимодействие между очагами землетрясений. Обстоятельный обзор работ, посвященных сейсмичности и волновому сейсмическому процессу, представлен в монографии [18].

Одной из наблюдаемых особенностей сейсмичности является повторяемость в одном месте через определенный интервал времени наиболее сильных землетрясений [18, 151, 161, 176]. Продолжительность сейсмического цикла составляет порядка 100-200 лет.

Анализ волн, вызванных мощными землетрясениями, и сейсмического отклика на подземные ядерные взрывы позволил сделать вывод об опережающем вращении твердого ядра по отношению к мантии, составляющем один оборот за 170-200 лет [33, 177]. Смысл этого эффекта легко уяснить на простой механической модели двух сферически симметричных твердых тел, моделирующих мантию и твердое ядро [35]. Дальнейшее развитие модели, состоящее в учете гравитационного взаимодействия между телами с трехмерными эллипсоидальными поверхностями, позволило объяснить наблюдаемые долгопериодические колебания длительности суток [45-47]. Эта модель допускает также возможность радиального течения во внешнем ядре, наличие которого определяет существование магнитного поля Земли [40].

В данном разделе показано, что опережающее вращение твердого ядра относительно мантии и гравитационное взаимодействие между ними могут быть связаны с долгопериодическими перемещениями зон сейсмической активности.

В данном разделе мантия Земли моделируется упругим шаром со сферической полостью. Внутреннее ядро, имеющее форму эллипсоида, вращается относительно шара. Гравитационное взаимодействие тел и их дифференциальное вращение создают волну напряжений в шаре. Для иллюстрации данного эффекта рассмотрена упрощенная задача, в которой упругий шар предполагается однородным, а внутреннее тело в гравитационном взаимодействии с шаром представлено в форме гантели.

Для сферического слоя внутри шара построено распределение радиальных напряжений. Показано, что учет дифференциального вращения приводит к миграции зон наибольшего риска с периодом, равным половине периода полного оборота эллипсоида относительно шара.

3.6.1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропный упругий шар радиуса $r = r_2$ с внутренней концентрической сферической полостью радиуса $r = r_1 < r_2$. С центром симметрии шара сопоставим начало координат связанной с ней системы $Oxyz$. В полости $r < r_1$ поместим гантель, представляющую из себя две диаметрально противоположные точечные гравитирующие массы M , расположенные в плоскости Oxy на расстоянии $c \ll r_1$ от центра O (рис. 18). Гантель медленно вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Oz относительно связанной системы. Внутри шара выделим элементарную массу dm .

Запишем гравитационную силу, действующую со стороны гантели на элементарную массу в сферической системе координат с точностью до второго порядка малости по параметру c/r :

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{2GMdm}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \Omega t)) \frac{c^2}{r^2} \right), \\ F_\theta &= \frac{6GMdm}{r^2} \sin \theta \cos \theta \cos^2(\varphi - \Omega t) \frac{c^2}{r^2}, \\ F_\varphi &= -\frac{6GMdm}{r^2} \sin \theta \sin(\varphi - \Omega t) \cos(\varphi - \Omega t) \frac{c^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где G – гравитационная постоянная.

Гравитационное взаимодействие между элементарными массами в расчет принимать не будем.

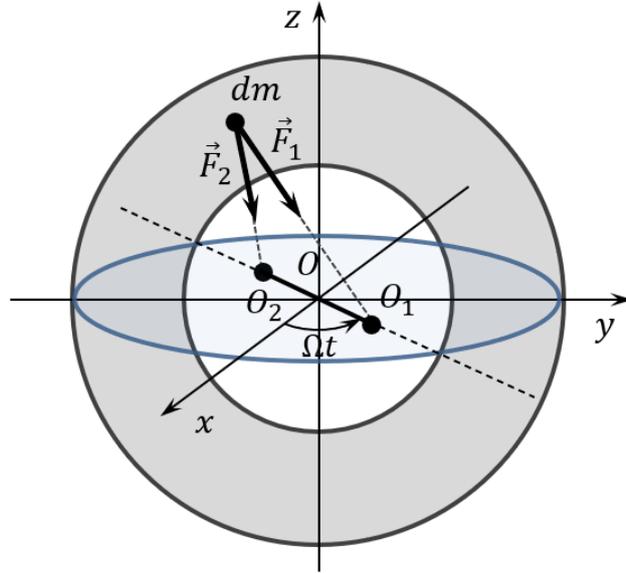


Рис. 18. Упругий шар, взаимодействующий с находящимся в его полости эллипсоидальным телом в форме гантели

Смещение элемента тела в $Oxyz$ при деформировании будем характеризовать вектором $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Выбор связанной системы осуществляется в соответствии с условиями отсутствия в ней малых поступательных перемещений и поворотов тела как жесткого целого [33]:

$$\int_V \vec{u} dV = 0, \quad \int_V [\vec{r}, \dot{\vec{u}}] dV = 0.$$

В качестве масштабов длины и времени выберем R - характерный размер тела и t_* - время полного оборота гантели относительно внешнего тела. Масштаб объемной гравитационной силы:

$$f_* = \frac{\rho GM}{R^2},$$

где ρ - плотность тела.

Для безразмерных параметров введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{\rho R^2}{\mu t_*^2}, \quad \delta = \frac{GM t_*^2}{R^3}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad a = \frac{c}{R}, \quad r' = \frac{r}{R}, \quad r'_1 = \frac{r_1}{R}, \quad r'_2 = \frac{r_2}{R},$$

λ, μ - постоянные Ламе. В дальнейших обозначениях опустим штрихи у безразмерной переменной r' и параметров r'_1, r'_2 .

Уравнение движения элемента шара в связанной системе и условия отсутствия напряжений на внутренней и внешней поверхности имеют вид:

$$\varepsilon(\ddot{\vec{u}} - \delta \vec{f}) = (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u} + \Delta \vec{u}, \quad r_1 < r < r_2, \quad (3.51)$$

$$(ku_{ll}\delta_{ij} + 2u_{ij})n_j = 0, \quad i = 1,2,3, \quad r = r_1, \quad r = r_2, \quad (3.52)$$

где \vec{f} – безразмерная объемная гравитационная сила, u_{ij} – тензор малых деформаций, n_j – компоненты вектора нормали к поверхности, δ_{ij} – символ Кронекера, в u_{ll} предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

3.6.2. Решение задачи о деформировании упругого шара

Будем рассматривать случай, при котором тело достаточно жестко [123]:

$$\varepsilon \ll 1.$$

Это позволяет искать решение системы (2)-(3) в виде ряда по малому параметру ε :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon \vec{u}_0(\vec{r}, t) + \varepsilon^2 \vec{u}_1(\vec{r}, t) + \dots$$

Составляющая $\vec{u}_0(\vec{r}, t)$ вектора смещения определяется в результате решения следующей задачи:

$$(\kappa + 1)grad \operatorname{div} \vec{u}_0 + \Delta \vec{u}_0 = -\delta \vec{f}, \quad r_1 < r < r_2, \quad (3.53)$$

$$(ku_{ll}^0 \delta_{ij} + 2u_{ij}^0)n_j = 0, \quad i = 1,2,3, \quad r = r_1, \quad r = r_2. \quad (3.54)$$

Преобразуем уравнение (4) к виду:

$$(\kappa + 2)\Delta \vec{u}_0 + (\kappa + 1)rot(rot \vec{u}_0) = -\delta \vec{f}. \quad (3.55)$$

Разложим гравитационную силу в ряд по шаровым векторам:

$$\vec{f} = -\frac{4\sqrt{\pi}}{r^2} \vec{Y}_{00}^+ + \sqrt{\pi} \frac{a^2}{r^4} \left(2\sqrt{3} \vec{Y}_{20}^+(\theta) - 3\sqrt{2} \left(\vec{Y}_{22}^+(\theta, \varphi - \Omega t) + \vec{Y}_{2,-2}^+(\theta, \varphi - \Omega t) \right) \right).$$

Будем искать решение задачи (3.54)-(3.55) в виде:

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 = & \delta \left(P_{00}(r) \vec{Y}_{00}^+(\theta, \varphi) + P_{20}(r) \vec{Y}_{20}^+(\theta, \varphi) + M_{20}(r) \vec{Y}_{20}^-(\theta, \varphi) + \right. \\ & + e^{-2i\Omega t} \left[P_{22}(r) \vec{Y}_{22}^+(\theta, \varphi) + M_{22}(r) \vec{Y}_{22}^-(\theta, \varphi) \right] + \\ & \left. + e^{2i\Omega t} \left[P_{2,-2}(r) \vec{Y}_{2,-2}^+(\theta, \varphi) + M_{2,-2}(r) \vec{Y}_{2,-2}^-(\theta, \varphi) \right] \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Подстановка (3.56) в уравнение (3.55), граничные условия (3.54) и последующая группировка выражений, стоящих при шаровых векторах и сферических функциях с одинаковыми индексами, позволяет получить систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных радиальных функций $P_{lm}(r)$, $M_{lm}(r)$ с соответствующими условиями на границах.

По найденному решению (3.56) определяются компоненты тензора деформаций и тензора напряжений в сферической системе координат.

3.6.3. Радиальные напряжения внутри шара

Изобразим распределение абсолютных величин радиальных напряжений для сферического слоя вблизи поверхности шара на плоскости углов (φ, θ) связанной системы. На рис. 19 области максимальных напряжений отмечены красным цветом, области минимальных напряжений – синим.

Зафиксируем момент времени, когда гантель находилась на оси Ox . В этом случае на экваторе возникают две диаметрально противоположных области релаксации, в которых радиальное напряжение минимально (рис. 19). Они находятся на линии, проходящей через гравитирующие массы (ось Ox).

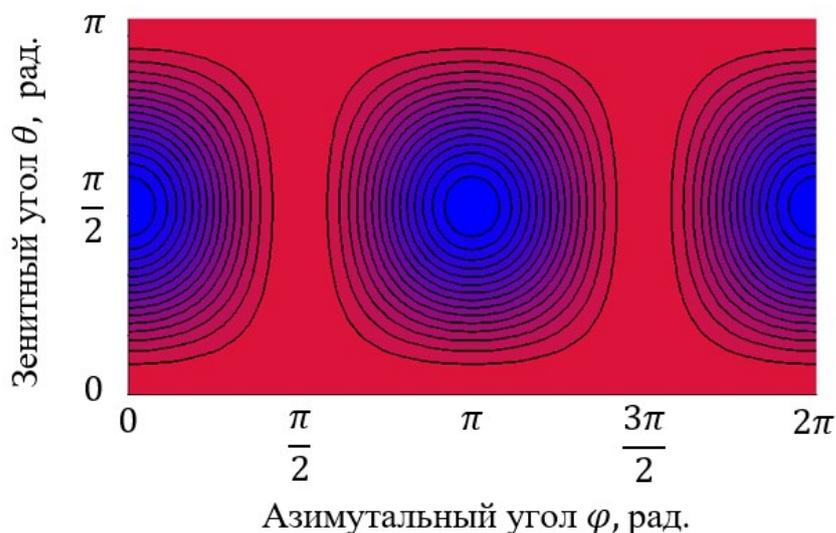


Рис. 19. Распределение радиальных напряжений сферического слоя внутри шара

Учтем вращение гантели относительно шара с постоянной угловой скоростью Ω . С течением времени будет происходить миграция зон наибольших радиальных напряжений, причем направление движения определяется относительным вращением внутреннего тела относительно шара. Опережающему вращению твердого ядра будет соответствовать перемещение зон наибольшего риска с запада на восток (против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса Земли). Периодичность этого процесса характеризуется полупериодом относительного вращения гантели.

Предложенная модель позволяет объяснить периодичность перемещения зон наибольших напряжений при дифференциальном вращении эллипсоидального ядра и мантии. Периодическим движением зон наибольшего риска можно объяснить миграцию сильных землетрясений с периодом 100-200 лет.

Отметим, что внутреннее напряжение является лишь усиливающим фактором при возникновении сейсмической активности в этой зоне. Определяющим фактором в первую очередь является внезапно увеличившееся давление, создаваемое движением литосферных плит в местах их стыка.

4. Динамика проводящей вязкой сплошной среды в области, ограниченной телами с квазисферической симметрией

Рассмотренные в п. 3 модели вязкоупругих деформируемых квазисферических тел позволили объяснить некоторые явления планетарного масштаба такие, как глобальное перемещение полюса Земли, нутацию с периодом Чандлера, оценить время затухания свободной прецессии астероидов. Учет опережающего вращения твердого ядра относительно мантии позволил выявить перемещение зон наибольших напряжений в теле Земли, которое может быть связано с долгопериодической миграцией очагов сейсмической активности.

Представленные в п. 3. модели вязкоупругих тел не учитывают структуру внешнего ядра Земли, оценки вязкоупругих свойств которого по сейсмическим данным очень разнятся. По некоторым из них внешнее ядро можно рассматривать как вязкоупругую сплошную среду схожую по строению с аморфным телом [13]. Аморфные тела и жидкости проявляют как вязкие, так и упругие свойства и имеют лишь количественные различия, характеризующиеся временем релаксации [59, 61, 117]. Актуальность исследования механических, магнитных и других свойств аморфных металлов, обусловленных вязкоупругими процессами, привела к необходимости обобщения [25, 50, 51, 117] уравнений теории упругости аморфных тел, переходящими при высоких температурах к уравнениям классической гидродинамики.

В данном разделе рассматривается задача о движении проводящей вязкой несжимаемой среды в пространстве между вращающимися сферической и квазисферической поверхностями. Под квазисферичностью понимается наличие малого постоянного смещения внутренней поверхности относительно внешней и малой эллипсоидальности внутренней поверхности. Решение задачи гидродинамики проводится в два этапа: отдельно рассмотрено течение между вращающимися неконцентрическими сферами и течение в пространстве между соосно вращающимися эллипсоидальными поверхностями. С помощью аппарата шаровых векторов получены приближенные решения уравнения Навье-Стокса.

В рамках кинематического подхода изучается возможность возбуждения магнитного поля, найденным течением. Используя представление напряженности магнитного поля в виде ряда по шаровым векторам, задача сводится к поиску собственных значений с положительной действительной частью, обеспечивающих

возбуждение магнитных мод. Исследуется зависимость собственного значения с максимальной действительной частью от магнитного числа Рейнольдса.

4.1. Динамика вязкой среды в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями

Рассмотрим движение однородной несжимаемой вязкой среды, заполняющей пространство между двумя вращающимися внешней сферической и внутренней эллипсоидальной поверхностями. Пусть эллипсоид является эллипсоидом вращения с полуосями a, b , ориентированным согласно рис. 20. Эллипсоид вращается вокруг оси O_1z_1 неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной угловой скоростью ω_1 , а внешняя сфера радиуса r_2 – относительно оси O_2z_2 неподвижной системы $O_2x_2y_2z_2$ с постоянной скоростью ω_2 . Считаем, что центр симметрии эллипсоида O_1 сдвинут относительно центра внешней сферы O_2 на малое расстояние

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_z^2}, \quad \delta_x, \delta_z \ll 1$$

таким образом, что центр O_1 в системе $O_2x_2y_2z_2$ имеет координаты $O_1(\delta_x, 0, \delta_z)$.

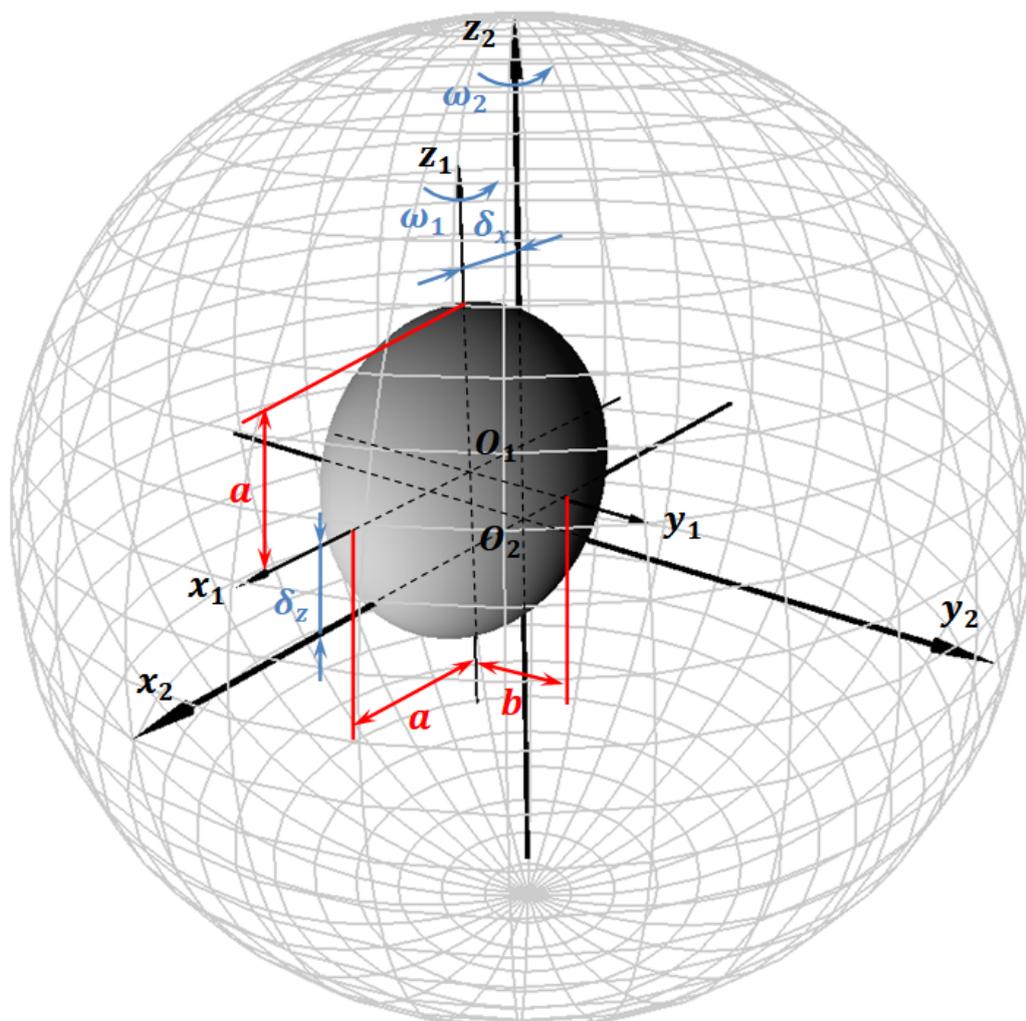


Рис. 20.

Модель течения вязкой среды между вращающимися квазисферическими поверхностями

Для описания движения вязкой среды будем использовать сферическую систему координат, согласованную с системой $O_2x_2y_2z_2$. В отсутствии сдвига оси систем $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ совпадают. Введем в рассмотрение жестко связанную с эллипсоидом вращающуюся систему координат $O_1x'_1y'_1z'_1$. Уравнение эллипсоида в системе $O_1x'_1y'_1z'_1$ имеет вид:

$$\left(\frac{x'_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'_1}{a}\right)^2 = 1.$$

Переход от декартовых координат вращающейся системы в сферическую осуществляется преобразованием:

$$x'_1 = r \sin \theta \cos(\varphi - \omega_1 t),$$

$$y'_1 = r \sin \theta \sin(\varphi - \omega_1 t),$$

$$z'_1 = r \cos \theta.$$

Эллипсоидальность внутренней поверхности характеризуется малым параметром:

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right), \quad \mu \ll 1.$$

Тогда уравнение эллипсоида с точностью до членов первого порядка малости по μ :

$$r = a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)).$$

Учтем постоянный сдвиг внутренней поверхности относительно внешней. Переход от декартовых координат (x_1, y_1, z_1) к сферическим (r, θ, φ) осуществляется преобразованием:

$$x_1 = x_2 - \delta_x = r \sin \theta \cos \varphi - \delta_x,$$

$$y_1 = y_2 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z_1 = z_2 - \delta_z = r \cos \theta - \delta_z.$$

В рассматриваемом приближении уравнение внутренней поверхности в системе $O_2 x_2 y_2 z_2$ имеет вид:

$$(x_2 - \delta_x)^2 + y_2^2 + (z_2 - \delta_z)^2 = a^2(1 + 2\mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)).$$

Запишем уравнение внутренней поверхности в сферической системе координат с точностью до членов первого порядка по параметрам сдвига δ_x, δ_z :

$$r = a + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta + \mu a \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t).$$

Движение однородной несжимаемой вязкой среды описывается уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v},$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

где ρ – плотность среды, p – давление, ν – кинематическая вязкость.

В предположении малости числа Рейнольдса

$$\frac{\omega_1 a^2}{\nu} \ll 1, \quad \frac{\omega_2 r_2^2}{\nu} \ll 1,$$

уравнение Навье-Стокса упрощается. Нелинейную составляющую силы инерции $|(\vec{v}, \nabla) \vec{v}| \ll 1$ можно не принимать в расчет, считая течение ламинарным:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (4.1)$$

Исключим из уравнения движения давление, применив к (4.1) операцию rot . Поле скорости определяется из решения уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} rot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \nu rot \Delta \vec{v}, \\ div \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

совместно с условиями прилипания среды к ограничивающим ее поверхностям.

4.1.1. Течение среды между неконцентрическими сферами

Рассмотрим движение однородной несжимаемой вязкой среды, заполняющей пространство между двумя вращающимися сферическими поверхностями. Внутренняя сфера радиуса r_1 с центром в точке O_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 относительно оси O_1z_1 , а внешняя сфера радиуса r_2 с центром в точке O_2 – с постоянной скоростью ω_2 относительно O_2z_2 . Оси вращения O_1z_1 и O_2z_2 удалены друг от друга на малое расстояние δ_x ($\delta_x \ll 1$), а оси O_1x_1 и O_2x_2 – на малое расстояние δ_z ($\delta_z \ll 1$) таким образом, что центр O_1 в системе $O_2x_2y_2z_2$ имеет координаты $O_1(\delta_x, 0, \delta_z)$ (рис. 21).

Запишем уравнение внутренней поверхности в сферической системе координат с точностью до членов первого порядка по δ_x, δ_z :

$$r = r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta.$$

В стационарном случае уравнения (4.2), описывающие движение среды, будут иметь вид:

$$rot \Delta \vec{v} = 0, \quad (4.3)$$

$$div \vec{v} = 0 \quad (4.4)$$

Запишем условия прилипания среды к ограничивающим ее поверхностям:

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{r=r_1+\delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta} &= [\vec{\omega}_1, \vec{r}_1] = [\omega_1 \vec{e}_z, x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y] = \\ &= \omega_1 (x_1 \vec{e}_y - y_1 \vec{e}_x) = \omega_1 ([r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta] \sin \theta \cos \varphi - \delta_x) * \\ &\quad * (\sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) - \\ &\quad - \omega_1 [r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta] \sin \theta \sin \varphi * \\ &\quad * (\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) = \\ &= \omega_1 [-\delta_x \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r - \delta_x \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$+(r_1 \sin \theta - \delta_x \cos^2 \theta \cos \varphi + \delta_z \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\varphi].$$

$$\vec{v}|_{r=r_2} = [\vec{\omega}_2, \vec{r}_2] = [\omega_2 \vec{e}_z, x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y] = \omega_2 r_2 \sin \theta \vec{e}_\varphi.$$

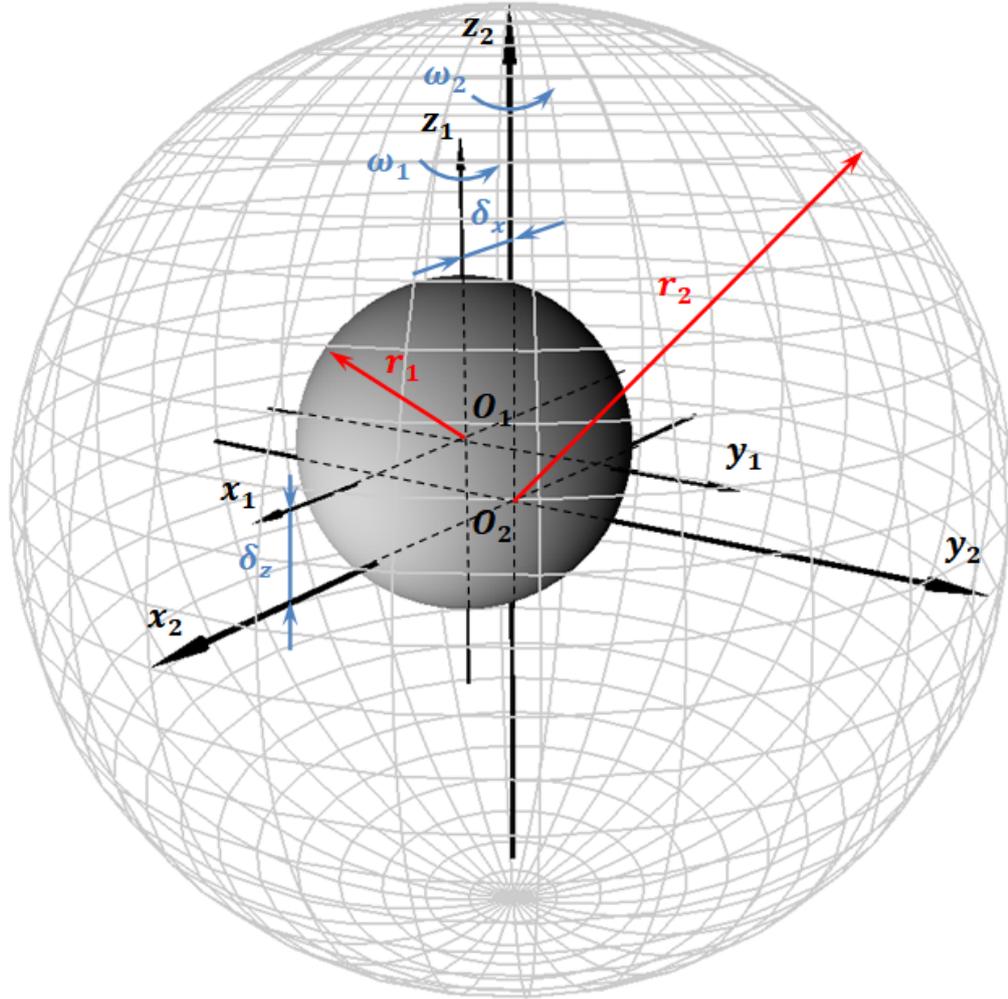


Рис. 21. Течение вязкой среды между вращающимися неконцентрическими сферическими поверхностями

Представим вектор скорости в виде ряда по малым параметрам δ_x, δ_z и ограничимся первым приближением:

$$\vec{v}(r, \theta, \varphi) = \vec{v}_0(r, \theta, \varphi) + \delta_x \vec{v}_{1x}(r, \theta, \varphi) + \delta_z \vec{v}_{1z}(r, \theta, \varphi).$$

Тогда с точностью до членов первого порядка малости граничное условие на внутренней сфере может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} & \vec{v}(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) = \\ & = \vec{v}_0(r_1, \theta, \varphi) + \delta_x (\vec{v}'_{0x}(r_1, \theta, \varphi) + \vec{v}_{1x}(r_1, \theta, \varphi)) + \\ & + \delta_z (\vec{v}'_{0z}(r_1, \theta, \varphi) + \vec{v}_{1z}(r_1, \theta, \varphi)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\vec{v}'_{0x}(r_1, \theta, \varphi), \vec{v}'_{0z}(r_1, \theta, \varphi)$ – выражения при δ_x, δ_z , полученные после подстановки в $\vec{v}_0(r, \theta, \varphi)$ $r = r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta$.

Граничное условие на внешней сфере остается без изменений:

$$\vec{v}(r_2, \theta, \varphi) = \vec{v}_0(r_2, \theta, \varphi) + \delta_x \vec{v}_{1x}(r_2, \theta, \varphi) + \delta_z \vec{v}_{1z}(r_2, \theta, \varphi).$$

Выделим составляющую скорости $\vec{v}_1(r, \theta, \varphi) = \delta_x \vec{v}_{1x}(r, \theta, \varphi) + \delta_z \vec{v}_{1z}(r, \theta, \varphi)$, содержащую члены пропорциональные сдвигам. В силу однородности уравнений (4.3), (4.4) каждый из векторов \vec{v}_0 , \vec{v}_1 также удовлетворяет этим уравнениям.

Соотношение (4.6) позволяет определить вектор скорости $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ в два этапа:

- 1) нахождение начального приближения \vec{v}_0 , отвечающего скорости среды в пространстве между двумя соосно-вращающимися концентрическими сферами.
- 2) вычисление составляющей \vec{v}_1 по известному решению \vec{v}_0 .

При решении задачи (4.3)-(4.4) с соответствующими граничными условиями для \vec{v}_0 , \vec{v}_1 удобно использовать систему шаровых векторов (2.2).

Разложим выражения для скорости среды на границах (4.5) в ряд по шаровым векторам:

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{r=r_1+\delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta} = & -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \omega_1 r_1 \vec{Y}_{10}^0 - \frac{1}{3} i \omega_1 \sqrt{\pi} \delta_x (\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) - \\ & - \frac{2}{3} i \omega_1 \sqrt{2\pi} \delta_x (\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} \omega_1 \delta_x (\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0) - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}} \omega_1 \delta_z \vec{Y}_{20}^0, \\ \vec{v}|_{r=r_2} = & -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \omega_2 r_2 \vec{Y}_{10}^0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Будем искать решение уравнений (4.3), (4.4) в виде ряда:

$$\vec{v}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0, |m| \leq l} \left(K_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + P_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) \right). \quad (4.8)$$

Подставим (4.8) в уравнения (4.3), (4.4). Пользуясь приведенными в п. 2.3 формулами и представлением (4.8), сгруппируем выражения, стоящие в левых частях уравнений (4.3), (4.4) при шаровых векторах с одинаковыми индексами. Для того чтобы решение (4.8) удовлетворяло уравнениям (4.3), (4.4), необходимо чтобы выражения при векторах $\vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi)$, $\vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi)$, $\vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi)$ одновременно обращались в нуль. Таким образом, из уравнения движения получим три группы ОДУ для радиальных функций $K_{lm}(r)$, $P_{lm}(r)$, $M_{lm}(r)$:

$$\begin{aligned}
M_{lm}''' - P_{lm}''' - \frac{l-3}{r} M_{lm}'' - \frac{l+4}{r} P_{lm}'' - \frac{l(l+1)}{r^2} (M_{lm}' - P_{lm}') \\
+ \frac{l(l+1)}{r^3} ((l-1)M_{lm} + (l+2)P_{lm}) = 0, \\
K_{lm}''' - \frac{l-2}{r} K_{lm}'' - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} K_{lm}' + \frac{l(l+1)(l+2)}{r^3} K_{lm} = 0, \\
K_{lm}''' + \frac{l+3}{r} K_{lm}'' - \frac{l(l-1)}{r^2} K_{lm}' - \frac{l(l-1)(l+1)}{r^3} K_{lm} = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение неразрывности дает еще одну группу ОДУ:

$$lM_{lm}' + (l+1)P_{lm}' - \frac{l(l-1)}{r} M_{lm} + \frac{(l+1)(l+2)}{r} P_{lm} = 0.$$

В силу однородности систем ОДУ и вида граничных условий (4.7) решение (4.8) будет представлено только векторами, вошедшими в (4.7).

Для искомых радиальных функций, отличных от нуля, получим две системы ОДУ:

$$\begin{aligned}
M_{1m}''' - P_{1m}''' + \frac{2}{r} M_{1m}'' - \frac{5}{r} P_{1m}'' - \frac{2}{r^2} (M_{1m}' - P_{1m}') + \frac{6}{r^3} P_{1m} = 0, \\
K_{1m}''' + \frac{1}{r} K_{1m}'' - \frac{6}{r^2} K_{1m}' + \frac{6}{r^3} K_{1m} = 0. \\
K_{1m}''' + \frac{4}{r} K_{1m}'' = 0. \\
M_{1m}' + 2P_{1m}' + \frac{6}{r} P_{1m} = 0. \\
M_{2m}''' - P_{2m}''' + \frac{1}{r} M_{2m}'' - \frac{6}{r} P_{2m}'' - \frac{6}{r^2} (M_{2m}' - P_{2m}') + \frac{6}{r^3} (M_{2m} + 4P_{2m}) = 0. \\
K_{2m}''' - \frac{12}{r^2} K_{2m}' + \frac{24}{r^3} K_{2m} = 0. \\
K_{2m}''' + \frac{5}{r} K_{2m}'' - \frac{2}{r^2} K_{2m}' - \frac{6}{r^3} K_{2m} = 0. \\
2M_{2m}' + 3P_{2m}' - \frac{2}{r} M_{2m} + \frac{12}{r} P_{2m} = 0.
\end{aligned}$$

Решения этих систем имеют вид:

$$\begin{aligned}
P_{1m}(r) = -C_2 r^2 + \frac{C_3}{r} + \frac{C_4}{r^3}, \quad M_{1m}(r) = C_1 + 5C_2 r^2 + \frac{4C_3}{r}, \\
K_{1m}(r) = C_5 r + \frac{C_6}{r^2},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$P_{2m}(r) = -\frac{4}{21}D_2r^3 + \frac{D_4}{r^2} + \frac{D_1}{r^4}, \quad M_{2m}(r) = D_2r^3 + D_3r + \frac{D_4}{r^2},$$

$$K_{2m}(r) = D_5r^2 + \frac{D_6}{r^3},$$

$$m = 0, \pm 1.$$

Векторы \vec{v}_0, \vec{v}_1 удовлетворяют уравнениям (4.3), (4.4) и могут быть найдены с использованием представления (4.8), а радиальные функции, входящие в \vec{v}_0, \vec{v}_1 , имеют вид (4.9). Для нахождения произвольных постоянных $C_i, D_i, i = 1, \dots, 6$ требуется записать условия на границах.

Сформируем граничные условия и решим последовательно задачи для векторов \vec{v}_0, \vec{v}_1 .

1. Найдем начальное приближение $\vec{v}_0(r, \theta, \varphi)$, соответствующее скорости среды между двумя соосно-вращающимися концентрическими сферами. В этом случае $\delta_x = \delta_z = 0$, т.е. граничные условия для \vec{v}_0 имеют вид:

$$\vec{v}_0(r_1, \theta, \varphi) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_1r_1\vec{Y}_{10}^0, \quad \vec{v}_0(r_2, \theta, \varphi) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_2r_2\vec{Y}_{10}^0.$$

Отсюда следует, что в \vec{v}_0 войдет лишь составляющая $K_{10}(r)\vec{Y}_{10}^0$. Условия, накладываемые на радиальную функцию $K_{10}(r)$:

$$K_{10}(r_1) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_1r_1, \quad K_{10}(r_2) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_2r_2,$$

позволяют определить произвольные постоянные, входящие в $K_{10}(r)$:

$$C_5 = -\frac{2\sqrt{6\pi}(\omega_2r_2^3 - \omega_1r_1^3)}{3(r_2^3 - r_1^3)}, \quad C_6 = -\frac{2\sqrt{6\pi}r_1^3r_2^3(\omega_1 - \omega_2)}{3(r_2^3 - r_1^3)}.$$

Таким образом, получим выражение для скорости среды, не зависящей от сдвигов δ_x, δ_z :

$$\vec{v}_0 = -\frac{2\sqrt{6\pi}}{3(r_2^3 - r_1^3)} \left((\omega_2r_2^3 - \omega_1r_1^3)r + \frac{r_1^3r_2^3(\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \vec{Y}_{10}^0.$$

2. Определим составляющую скорости $\vec{v}_1(r, \theta, \varphi)$, содержащую члены пропорциональные сдвигам. В записи вектора \vec{v}_0 на внутренней (сдвинутой) сфере выделим выражения $\vec{v}'_{0x}(r_1, \theta, \varphi), \vec{v}'_{0z}(r_1, \theta, \varphi)$ при малых параметрах δ_x, δ_z :

$$\begin{aligned} & \vec{v}_0(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) = \vec{v}_0(r_1, \theta, \varphi) - \\ & - \frac{2\sqrt{6\pi}}{3(r_2^3 - r_1^3)} \left((\omega_2r_2^3 - \omega_1r_1^3) - 2r_2^3(\omega_1 - \omega_2) \right) \vec{Y}_{10}^0 (\delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{v}_0(r_1, \theta, \varphi) - \xi_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_x \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} i(\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) - \frac{1}{3} i(\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) - \frac{1}{\sqrt{10}} (\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0) \right] - \\
&\quad - 2\xi_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \delta_z \vec{Y}_{20}^0 = \vec{v}_0(r_1, \theta, \varphi) + \delta_x \vec{v}'_{0x}(r_1, \theta, \varphi) + \delta_z \vec{v}'_{0z}(r_1, \theta, \varphi),
\end{aligned}$$

где

$$\xi_0 = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} ((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) - 2r_2^3(\omega_1 - \omega_2)).$$

При построении граничных условий для вектора \vec{v}_1 на внутренней сфере нужно учесть, что вклад, пропорциональный сдвигам, в скорость среды также вносит вектор \vec{v}_0 . Приравнивая члены первого порядка малости $\vec{v}_1(r_1, \theta, \varphi) + \delta_x \vec{v}'_{0x}(r_1, \theta, \varphi) + \delta_z \vec{v}'_{0z}(r_1, \theta, \varphi)$ соответствующей части условия (4.7) для внутренней сферы $\vec{v}(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) - \vec{v}_0(r_1, \theta, \varphi)$, получим:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1(r_1, \theta, \varphi) - \xi_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_x \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} i(\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) - \frac{1}{3} i(\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) - \frac{1}{\sqrt{10}} (\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0) \right] - \\
&- 2\xi_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \delta_z \vec{Y}_{20}^0 = \sqrt{\pi} \delta_x \omega_1 \left[-\frac{1}{3} i(\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) - \frac{2\sqrt{2}}{3} i(\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0) \right] - \\
&\quad - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}} \omega_1 \delta_z \vec{Y}_{20}^0.
\end{aligned}$$

Так как скорость среды на внешней сфере не зависит от параметров δ_x, δ_z , то

$$\vec{v}_1(r_2, \theta, \varphi) = 0.$$

В записи составляющей \vec{v}_1 будут присутствовать только те шаровые векторы, которые вошли в условия на границе. Сформируем граничные условия для соответствующих радиальных функций:

$$M_{1,\pm 1}(r_1) = -\frac{1}{3} i(\xi_0 + 2\omega_1) \sqrt{2\pi} \delta_x, \quad P_{1,\pm 1}(r_1) = \frac{1}{3} i(\xi_0 - \omega_1) \sqrt{\pi} \delta_x,$$

$$P_{1,\pm 1}(r_2) = M_{1,\pm 1}(r_2) = 0,$$

$$K_{20}(r_1) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}} (\xi_0 - \omega_1) \delta_z, \quad K_{20}(r_2) = 0,$$

$$K_{2,\pm 1}(r_1) = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} (\xi_0 - \omega_1) \delta_x, \quad K_{2,\pm 1}(r_2) = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\xi_1 = \sqrt{2}(\xi_0 + 2\omega_1), \quad \xi_2 = \xi_0 - \omega_1,$$

$$Q_1 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4(4r_1^2 + 7r_1r_2 + 4r_2^2)}, \quad Q_2 = \frac{r_1^3}{r_2^5 - r_1^5}.$$

Произвольные постоянные, входящие в радиальные функции с индексами l, m :

$$l = 1, \quad m = \pm 1:$$

$$C_1 = \frac{1}{3}iQ_1\sqrt{\pi}\delta_x r_1[4(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2^3 + 9\xi_1r_2^5],$$

$$C_2 = -\frac{1}{3}iQ_1\sqrt{\pi}\delta_x r_1[4\xi_2r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2 + \xi_1r_2^3],$$

$$C_3 = -\frac{1}{3}iQ_1\sqrt{\pi}\delta_x r_1r_2[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2r_1^3r_2^2 + \xi_1r_2^5],$$

$$C_4 = \frac{1}{3}iQ_1\sqrt{\pi}\delta_x r_1^3r_2^3[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^3 - 9\xi_2r_1r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2)r_2^3],$$

$$l = 2, \quad m = 0:$$

$$D_5 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\sqrt{\pi}Q_2\xi_2\delta_z, \quad D_6 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\sqrt{\pi}Q_2\xi_2\delta_zr_2^5.$$

$$l = 2, \quad m = \pm 1:$$

$$D_5 = \pm\sqrt{\frac{\pi}{5}}Q_2\xi_2\delta_x, \quad D_6 = \mp\sqrt{\frac{\pi}{5}}Q_2\xi_2\delta_xr_2^5.$$

Таким образом, скорость среды в рассматриваемом приближении может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \vec{v}(r, \theta, \varphi) &= \vec{v}_0(r, \theta, \varphi) + \vec{v}_1(r, \theta, \varphi) = \\ &= -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2r_2^3 - \omega_1r_1^3)r + \frac{r_1^3r_2^3(\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \vec{Y}_{10}^0 + \\ &+ \frac{1}{3}i\sqrt{\pi}\delta_x Q_1(r_1[4\xi_2r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2 + \xi_1r_2^3]r^2 - \\ &\quad - \frac{r_1r_2[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2r_1^3r_2^2 + \xi_1r_2^5]}{r} + \\ &\quad + \frac{r_1^3r_2^3[4\xi_1r_1^3 - 9\xi_2r_1r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2)r_2^3]}{r^3}) (\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) + \\ &+ \frac{1}{3}i\sqrt{\pi}\delta_x Q_1(r_1[4(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2^3 + 9\xi_1r_2^5] - \\ &\quad - 5r_1[4\xi_2r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2 + \xi_1r_2^3]r^2 - \\ &\quad - \frac{4r_1r_2[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2r_1^3r_2^2 + \xi_1r_2^5]}{r}) (\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) - \end{aligned}$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\sqrt{\pi}\xi_2\delta_z Q_2\left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3}\right)\vec{Y}_{20}^0 + \sqrt{\frac{\pi}{5}}\xi_2\delta_x Q_2\left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3}\right)(\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0).$$

Выделим компоненты вектора скорости в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{6}\delta_x Q_1[\sqrt{2}r_1[4(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2^3 + 9\xi_1r_2^5] + \\ &\quad + (2 - 5\sqrt{2})r_1[4\xi_2r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2 + \xi_1r_2^3]r^2 - \\ &\quad - 2(1 + 2\sqrt{2})\frac{r_1r_2[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2r_1^3r_2^2 + \xi_1r_2^5]}{r} + \\ &\quad + 2\frac{r_1^3r_2^3[4\xi_1r_1^3 - 9\xi_2r_1r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2)r_2^3]}{r^3}] \sin\theta \sin\varphi, \\ v_\theta &= -\frac{1}{6}\delta_x[-Q_1\sqrt{2}r_1[4(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2^3 + 9\xi_1r_2^5] + \\ &\quad + (Q_1(1 + 5\sqrt{2})r_1[4\xi_2r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2 + \xi_1r_2^3] + 3Q_2\xi_2)r^2 + \\ &\quad + (4\sqrt{2} - 1)Q_1\frac{r_1r_2[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2r_1^3r_2^2 + \xi_1r_2^5]}{r} + \\ &\quad + (Q_1r_1^3r_2^3[4\xi_1r_1^3 - 9\xi_2r_1r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2)r_2^3] - 3Q_2\xi_2r_2^5)\frac{1}{r^3}] \cos\theta \sin\varphi, \\ v_\varphi &= \frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\left((\omega_2r_2^3 - \omega_1r_1^3)r + \frac{r_1^3r_2^3(\omega_1 - \omega_2)}{r^2}\right) \sin\theta - \\ &\quad - \frac{1}{6}\delta_x[-Q_1\sqrt{2}r_1[4(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2^3 + 9\xi_1r_2^5] + \\ &\quad + r^2(Q_1(1 + 5\sqrt{2})r_1[4\xi_2r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2r_2 + \xi_1r_2^3] + 3Q_2\xi_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)) + \\ &\quad + Q_1(4\sqrt{2} - 1)\frac{r_1r_2[(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2r_1^3r_2^2 + \xi_1r_2^5]}{r} + \\ &\quad + \frac{1}{r^3}(Q_1r_1^3r_2^3[4\xi_1r_1^3 - 9\xi_2r_1r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2)r_2^3] - 3Q_2\xi_2r_2^5(\cos^2\theta - \sin^2\theta))] \cos\varphi + \\ &\quad + \sqrt{2}\xi_2\delta_z Q_2\left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3}\right) \sin\theta \cos\theta. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. В случае концентрических сфер ($\delta_x = \delta_z = 0$), вращающихся с одинаковой угловой скоростью $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$, среда между ними вращается как твердое тело:

$$\vec{v} = \omega r \sin\theta \vec{e}_\varphi.$$

2. При вращении концентрических сфер вокруг одной оси с различными угловыми скоростями линии тока образуют замкнутые кривые, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi.$$

В частности, при опережающем вращении внутренней поверхности относительно внешней частицы среды будут двигаться быстрее вблизи внутренней сферы и медленнее вблизи внешней.

3. Сдвиг внутренней сферы относительно внешней вдоль общей оси вращения приводит к добавлению в \vec{v}_0 члена:

$$\sqrt{2} \xi_2 \delta_z Q_2 \left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\varphi.$$

Это не приводит к асимметрии потока и качественному изменению траекторий частиц.

4. В случае сдвига внутренней сферы относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения тел, возникает радиальное течение v_r . Ненулевой становится также компонента v_θ ,

На рис. 22 изображены линии тока при $\delta_x > 0, \delta_z = 0$ с учетом опережающего вращения внутренней поверхности ($\omega_1 > \omega_2$). Как и в предыдущих случаях, вблизи внешней сферы линии тока образуют замкнутые кривые, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. При отдалении от внешней сферы линии тока «поворачиваются», образуя с осью $O_2 x_2$ малый угол. Вблизи полюсов внутренней поверхности линии тока «выравниваются», располагаясь параллельно плоскости $O_2 x_2 y_2$. Внутри полости между сферами существуют траектории, отделяющие круговые потоки от линий, берущих свое начало на внутренней сфере и входящих в нее. Причем, из-за близости незамкнутых траекторий к внутренней поверхности, движущиеся вдоль них частицы среды имеют большую скорость, чем у частиц на ближайших замкнутых линиях тока. Кроме того, траектории с концами на внутренней сфере имеют заметные искривления.

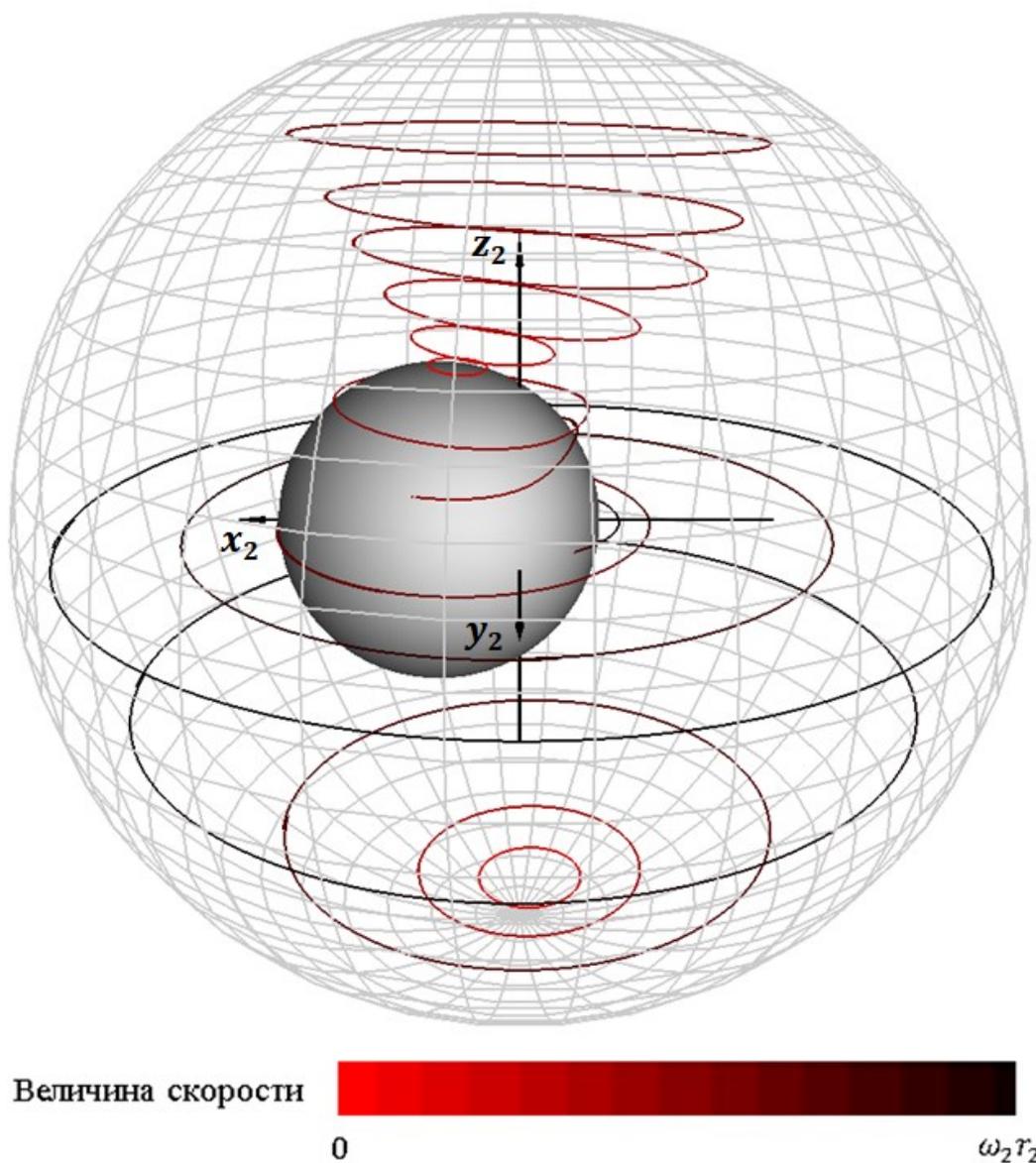


Рис. 22.

Линии тока среды при $\delta_x > 0, \delta_z = 0$ с учетом опережающего вращения внутренней поверхности

Интерес представляет распределение скоростей без компоненты v_0 , отвечающей круговым потокам среды. На рис. 23 представлены линии, образованные полем скоростей $\vec{v} - \vec{v}_0$. Условно их можно разделить на три типа: линии, концы которых лежат на внешней сфере, (зеленый), линии с концами на внутренней сфере (красный) и замкнутые линии, расположенные внутри пространства между сферами (синий). Каждая линия поля $\vec{v} - \vec{v}_0$ лежит в определенной полуплоскости с границей вдоль оси O_2y_2 . Области, содержащие замкнутые линии, уменьшаются при повороте полуплоскости относительно O_2y_2 от $\{\theta = \pi/2, \pi/2 < \varphi < 3\pi/2\}$ к $\{\theta = \pi/2, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$, в которой замкнутые линии отсутствуют.

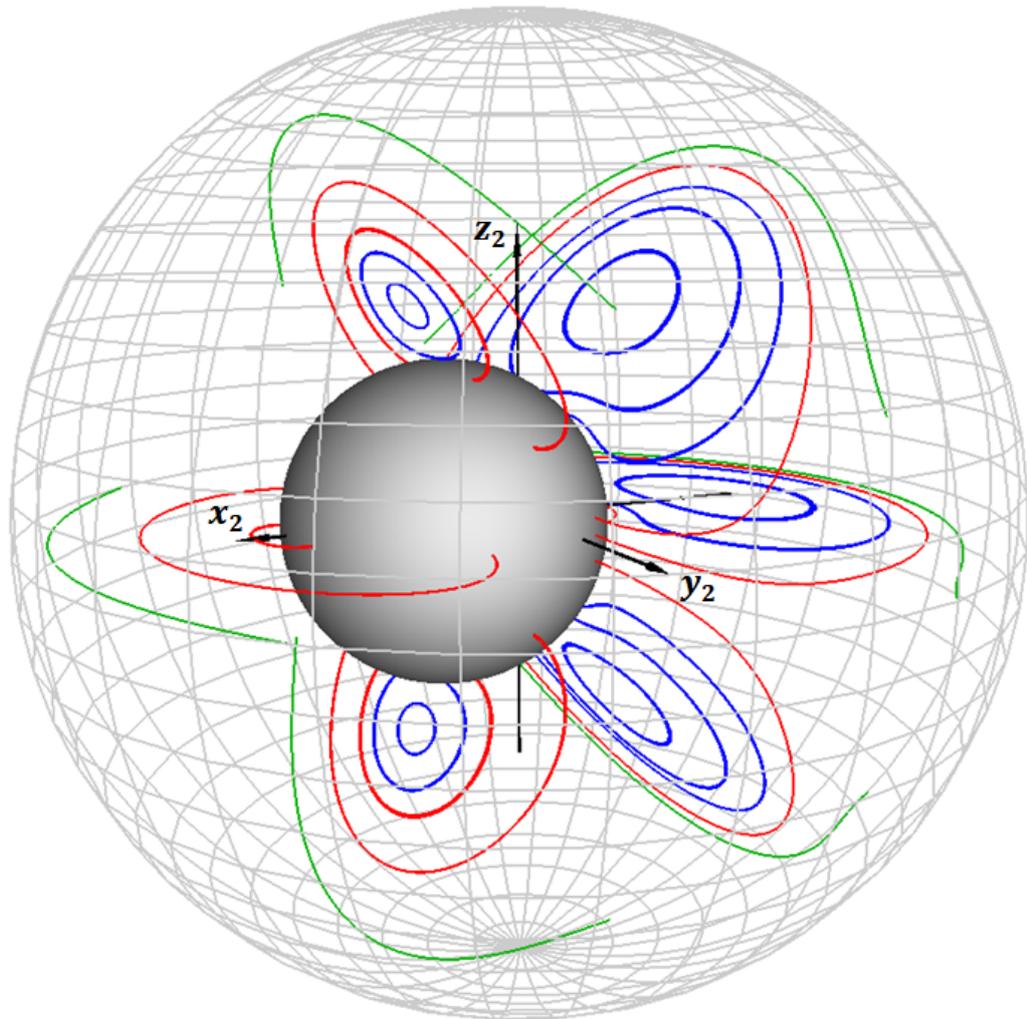


Рис. 23.

Линии векторного поля скорости без осесимметричной составляющей

Возникновение магнитного поля Земли связывают с конвекционными токами во внешнем ядре, которые невозможны без радиальной составляющей скорости. Рассмотренная модель допускает возможность радиального течения в случае смещения внутренней ограничивающей поверхности относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения тел. Наличие замкнутых траекторий векторного поля $\vec{v} - \vec{v}_0$ представляет интерес при изучении конвекционных течений. На рис. 24, 25 изображены линии векторного поля $\vec{v} - \vec{v}_0$ в двух взаимно перпендикулярных сечениях плоскостями $O_2x_2z_2$ и $O_2x_2y_2$ с указанием направлений движения. Видно, что сдвиг внутренней сферы в плоскости, перпендикулярной осям вращения, приводит к появлению в каждом из рассматриваемых сечений двух ячеек. К примеру, в экваториальной плоскости (сечение плоскостью $O_2x_2y_2$) вещество поднимается из центра O_2 к внешней границе вдоль радиуса, затем совершает движение вблизи

поверхности вдоль экватора, стремясь к положению, противоположному направлению подъема вещества. Обогнув полушарие, вещество возвращается к центру O_2 .

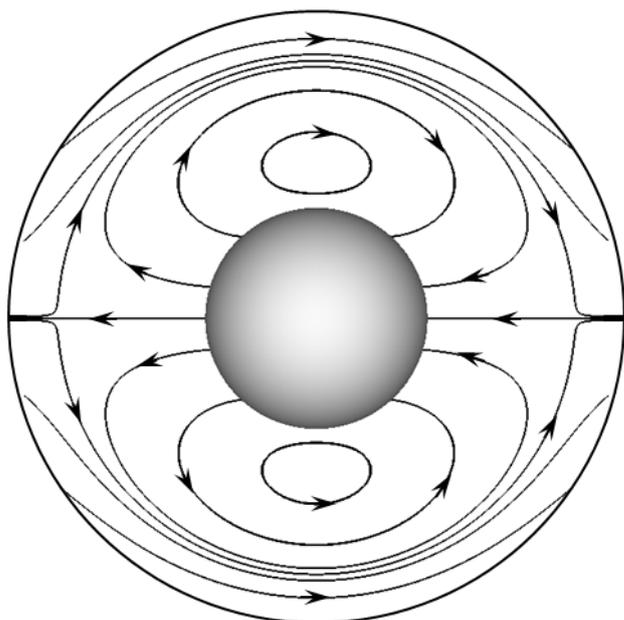


Рис. 24. Линии векторного поля $\vec{v} - \vec{v}_0$ в сечении плоскостью $O_2x_2z_2$

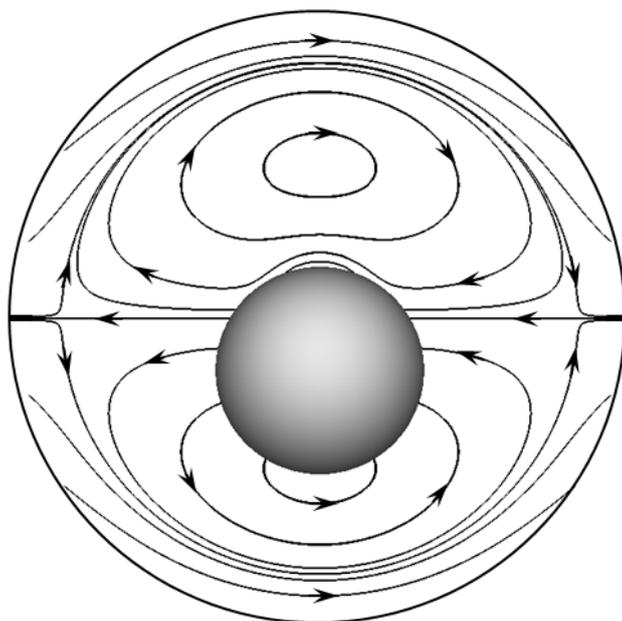


Рис. 25. Линии векторного поля $\vec{v} - \vec{v}_0$ в сечении плоскостью $O_2x_2y_2$

Отметим, что данная задача решена в предположении ламинарного течения среды. Оценка числа Рейнольдса по средней вязкости внешнего ядра и угловой скорости вращения твердого ядра относительно мантии дает $Re \sim 10^3 - 10^4$ [47]. Такое значение числа Рейнольдса характеризует режим движения среды как промежуточный между ламинарным и турбулентным. Тем не менее, это не исключает возможность обнаруженных особенностей течения во внешнем ядре.

Рассматриваемая модель отвечает современным представлениям о внутреннем строении Земли. В работе [7] Ю.В. Баркин показал, что твердое ядро испытывает смещение на расстояние 5-15 км относительно геоцентра вследствие притяжения неоднородностей на границе ядро-мантия.

4.1.2. Движение среды в пространстве между сферой и эллипсоидом

Рассмотрим движение однородной несжимаемой вязкой среды в пространстве между соосно вращающимися внешней сферической и внутренней эллипсоидальной поверхностями (рис. 26). Эллипсоид и сфера вращаются вокруг вертикальной оси Oz_2 с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно.

Запишем уравнение внутренней поверхности в сферической системе координат с точностью до членов первого порядка по малому параметру эллипсоидальности μ :

$$r = a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)).$$

Скорость движения среды определяется из решения нестационарной задачи:

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \zeta \text{rot} \Delta \vec{v}, \quad (4.10)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (4.11)$$

где

$$\zeta = \frac{vt_*}{R^2},$$

t_* – масштаб времени, R – характерный размер поверхностей.

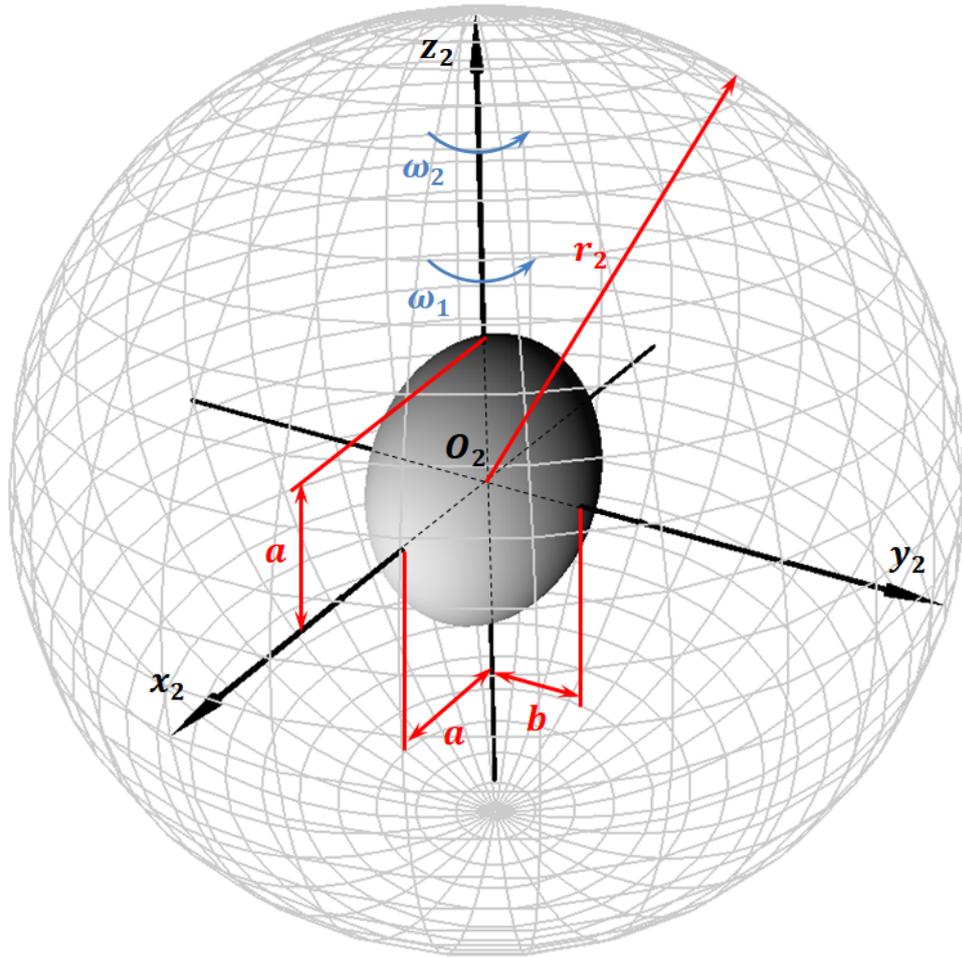


Рис. 26.

Течение вязкой среды между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом

Запишем условия прилипания среды к ограничивающим ее поверхностям:

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{r=a(1-\mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi-\omega_1 t))} &= [\vec{\omega}_1, \vec{r}_1] = \\ &= \omega_1 a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)) \sin \theta \vec{e}_\varphi = \\ &= \omega_1 a \left(1 - \frac{1}{2} \mu \sin^2 \theta (1 - \cos 2(\varphi - \omega_1 t)) \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\vec{v}|_{r=r_2} = [\vec{\omega}_2, \vec{r}_2] = \omega_2 r_2 \sin \theta \vec{e}_\varphi.$$

Аналогично п. 4.1.1 решение будем искать в виде ряда по малому параметру μ :

$$\vec{v}(r, \theta, \varphi, t) = \vec{v}_0(r, \theta, \varphi) + \mu \vec{v}_1(r, \theta, \varphi, t).$$

С точностью до членов первого порядка малости граничные будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \vec{v}(a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)), \theta, \varphi) = \\ & = \vec{v}_0(a, \theta, \varphi) + \mu(\vec{v}'_0(a, \theta, \varphi, t) + \vec{v}_1(a, \theta, \varphi, t)), \\ & \vec{v}(r_2, \theta, \varphi, t) = \vec{v}_0(r_2, \theta, \varphi) + \mu \vec{v}_1(r_2, \theta, \varphi, t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\vec{v}'_0(a, \theta, \varphi, t)$ – выражение при μ , полученное после подстановки в $\vec{v}_0(r, \theta, \varphi)$ $r = a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t))$.

Решение уравнений (4.10), (4.11) сводится к последовательному нахождению векторов \vec{v}_0, \vec{v}_1 .

Разложим выражения, стоящие в правых частях граничных условий (4.12) в ряд по шаровым векторам:

$$\begin{aligned} & \vec{v}|_{r=a(1-\mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi-\omega_1 t))} = \\ & = \sqrt{\pi} \omega_1 a \left[\frac{2}{3} \sqrt{6} \left(\frac{2}{5} \mu - 1 \right) \vec{Y}_{10}^0(\theta, \varphi) + i \frac{2\sqrt{2}}{15} \mu \left(\vec{Y}_{22}^+(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^+(\theta, \varphi_1) \right) - \right. \\ & \quad \left. - i \frac{2\sqrt{3}}{15} \mu \left(\vec{Y}_{22}^-(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^-(\theta, \varphi_1) \right) - \frac{4\sqrt{21}}{105} \mu \vec{Y}_{30}^0(\theta, \varphi) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2\sqrt{70}}{105} \mu \left(\vec{Y}_{32}^0(\theta, \varphi_1) + \vec{Y}_{3,-2}^0(\theta, \varphi_1) \right) \right], \\ & \vec{v}|_{r=r_2} = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \omega_2 r_2 \vec{Y}_{10}^0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\varphi_1 = \varphi - \omega_1 t$.

Будем искать решение уравнений (4.10), (4.11) в виде ряда:

$$\begin{aligned} & \vec{v}(r, \theta, \varphi, t) = \\ & = \sum_{l=0, |m| \leq l} \left(K_{lm}(r, t) \vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + P_{lm}(r, t) \vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r, t) \vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

в котором коэффициенты при шаровых векторах зависят от радиальной координаты и времени.

Подставляя (4.15) в уравнения (4.10), (4.11) и группируя выражения, стоящие при шаровых векторах с одинаковыми индексами, получим систему

дифференциальных уравнений относительно неизвестных радиальных функций $K_{lm}(r, t)$, $P_{lm}(r, t)$, $M_{lm}(r, t)$.

Функции $K_{10}(r)$, $K_{30}(r)$ не зависят от времени и определяются из системы:

$$K_{10}''' + \frac{1}{r}K_{10}'' - \frac{6}{r^2}K_{10}' + \frac{6}{r^3}K_{10} = 0,$$

$$K_{10}''' + \frac{4}{r}K_{10}'' = 0,$$

$$K_{30}''' - \frac{1}{r}K_{30}'' - \frac{20}{r^2}K_{30}' + \frac{60}{r^3}K_{30} = 0,$$

$$K_{30}''' + \frac{6}{r}K_{30}'' - \frac{6}{r^2}K_{30}' - \frac{24}{r^3}K_{30} = 0.$$

Решение системы имеет вид:

$$K_{10}(r) = C_5 r + \frac{C_6}{r^2}, \quad K_{30}(r) = F_1 r^3 + \frac{F_2}{r^4}. \quad (4.16)$$

Остальные функции, отличные от нуля, можно представить в виде:

$$M_{2,\pm 2}(r, t) = e^{\lambda t} m_{2,\pm 2}(r), \quad P_{2,\pm 2}(r, t) = e^{\lambda t} p_{2,\pm 2}(r),$$

$$K_{3,\pm 2}(r, t) = e^{\lambda t} k_{3,\pm 2}(r),$$

где

$$\lambda = -2i\omega_1.$$

Неизвестные функции $m_{2,\pm 2}(r)$, $p_{2,\pm 2}(r)$, $k_{3,\pm 2}(r)$ находятся из системы:

$$\begin{aligned} & \lambda \left(m'_{2,\pm 2} - \frac{1}{r} m_{2,\pm 2} - p'_{2,\pm 2} - \frac{4}{r} p_{2,\pm 2} \right) = \\ & = \zeta \left(m'''_{2,\pm 2} - p'''_{2,\pm 2} + \frac{1}{r} m''_{2,\pm 2} - \frac{6}{r} p''_{2,\pm 2} - \right. \\ & \left. - \frac{6}{r^2} (m'_{2,\pm 2} - p'_{2,\pm 2}) + \frac{6}{r^3} (m_{2,\pm 2} + 4p_{2,\pm 2}) \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$2m'_{2,\pm 2} + 3p'_{2,\pm 2} - \frac{2}{r} m_{2,\pm 2} + \frac{12}{r} p_{2,\pm 2} = 0,$$

$$\frac{3}{7} \lambda \left(k'_{3,\pm 2} - \frac{3}{r} k_{3,\pm 2} \right) = \zeta \left(k'''_{3,\pm 2} - \frac{1}{r} k''_{3,\pm 2} - \frac{20}{r^2} k'_{3,\pm 2} + \frac{60}{r^3} k_{3,\pm 2} \right),$$

$$-\frac{4}{7} \lambda \left(k'_{3,\pm 2} + \frac{4}{r} k_{3,\pm 2} \right) = \zeta \left(k'''_{3,\pm 2} + \frac{6}{r} k''_{3,\pm 2} - \frac{6}{r^2} k'_{3,\pm 2} - \frac{24}{r^3} k_{3,\pm 2} \right).$$

В силу малости числа Рейнольдса:

$$\frac{\lambda}{\zeta} \ll 1$$

решение системы (4.17) можно искать в виде ряда по малому параметру λ/ζ . Решение системы в нулевом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} p_{2,\pm 2}(r) &= -\frac{4}{21}D_2r^3 + \frac{D_4}{r^2} + \frac{D_1}{r^4}, & m_{2,\pm 2}(r) &= D_2r^3 + D_3r + \frac{D_4}{r^2}, \\ k_{3,\pm 2}(r) &= F_3r^3 + \frac{F_4}{r^4}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Решение задачи о нахождении вектора \vec{v}_0 , отвечающего течению среды между двумя соосно вращающимися концентрическими сферами, представлено в п. 4.1.1. В соответствии с введенными обозначениями скорость \vec{v}_0 можно записать в виде:

$$\vec{v}_0 = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - a^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 a^3) r + \frac{a^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \vec{Y}_{10}^0.$$

Определим составляющую скорости $\vec{v}_1(r, \theta, \varphi)$, содержащую члены пропорциональные параметру эллипсоидальности. В записи вектора \vec{v}_0 на внутренней поверхности выделим выражение $\vec{v}_0'(a, \theta, \varphi)$ при малом параметре μ :

$$\begin{aligned} \vec{v}_0'(a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)), \theta, \varphi) &= \vec{v}_0(a, \theta, \varphi) + \\ &+ \frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - a^3} ((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 a^3) a - 2ar_2^3(\omega_1 - \omega_2)) a \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t) \vec{Y}_{10}^0 = \\ &= \vec{v}_0(a, \theta, \varphi) + \eta_0 \sqrt{\pi} a \mu \left[\frac{4}{15} \sqrt{6} \vec{Y}_{10}^0(\theta) + i \frac{2\sqrt{2}}{15} (\vec{Y}_{22}^+(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^+(\theta, \varphi_1)) - \right. \\ &\left. - i \frac{2\sqrt{3}}{15} (\vec{Y}_{22}^-(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^-(\theta, \varphi_1)) - \frac{4\sqrt{21}}{105} \vec{Y}_{30}^0(\theta) - \frac{2\sqrt{70}}{105} (\vec{Y}_{32}^0(\theta, \varphi_1) + \vec{Y}_{3,-2}^0(\theta, \varphi_1)) \right], \\ \eta_0 &= \frac{1}{r_2^3 - a^3} ((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 a^3) - 2r_2^3(\omega_1 - \omega_2)). \end{aligned}$$

Приравнявая члены первого порядка малости $\vec{v}_1(a, \theta, \varphi) + \mu \vec{v}_0'(a, \theta, \varphi)$ соответствующей части условия (4.14) для внутренней поверхности $\vec{v}(a(1 - \mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t)), \theta, \varphi) - \vec{v}_0(a, \theta, \varphi)$, получим:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(a, \theta, \varphi) + \eta_0 \sqrt{\pi} a \mu \left[\frac{4}{15} \sqrt{6} \vec{Y}_{10}^0(\theta) + i \frac{2\sqrt{2}}{15} (\vec{Y}_{22}^+(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^+(\theta, \varphi_1)) - \right. \\ \left. - i \frac{2\sqrt{3}}{15} (\vec{Y}_{22}^-(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^-(\theta, \varphi_1)) - \frac{4\sqrt{21}}{105} \vec{Y}_{30}^0(\theta) - \frac{2\sqrt{70}}{105} (\vec{Y}_{32}^0(\theta, \varphi_1) + \vec{Y}_{3,-2}^0(\theta, \varphi_1)) \right] = \\ = \sqrt{\pi} \omega_1 a \mu \left[\frac{4}{15} \sqrt{6} \vec{Y}_{10}^0(\theta, \varphi) + i \frac{2\sqrt{2}}{15} (\vec{Y}_{22}^+(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^+(\theta, \varphi_1)) - \right. \end{aligned}$$

$$-i \frac{2\sqrt{3}}{15} \left(\vec{Y}_{22}^-(\theta, \varphi_1) - \vec{Y}_{2,-2}^-(\theta, \varphi_1) \right) - \frac{4\sqrt{21}}{105} \vec{Y}_{30}^0(\theta, \varphi) - \frac{2\sqrt{70}}{105} \left(\vec{Y}_{32}^0(\theta, \varphi_1) + \vec{Y}_{3,-2}^0(\theta, \varphi_1) \right) \Big]$$

Так как скорость среды на внешней поверхности не зависит от параметра эллипсоидальности μ , то

$$\vec{v}_1(r_2, \theta, \varphi) = 0.$$

Составим граничные условия для радиальных функций, входящих в \vec{v}_1 ,

$$K_{10}(a) = \frac{4}{15} \sqrt{6\pi} a \mu (\omega_1 - \eta_0), \quad K_{10}(r_2) = 0,$$

$$M_{2,\pm 2}(a) = \mp i \frac{2\sqrt{3\pi}}{15} a \mu (\omega_1 - \eta_0), \quad P_{2,\pm 2}(a) = \pm i \frac{2\sqrt{2\pi}}{15} a \mu (\omega_1 - \eta_0),$$

$$P_{2,\pm 2}(r_2) = M_{2,\pm 2}(r_2) = 0,$$

$$K_{30}(a) = -\frac{4\sqrt{21\pi}}{105} a \mu (\omega_1 - \eta_0), \quad K_{30}(r_2) = 0,$$

$$K_{32}(a) = -\frac{2\sqrt{70\pi}}{105} a \mu (\omega_1 - \eta_0), \quad K_{32}(r_2) = 0,$$

$$\xi_1 = \sqrt{2}(\xi_0 + 2\omega_1), \quad \xi_2 = \xi_0 - \omega_1, \quad \xi_3 = \omega_1 - \eta_0,$$

$$Q_1 = \frac{1}{(r_2 - a)^4 (4a^2 + 7ar_2 + 4r_2^2)}, \quad Q_2 = \frac{a^3}{r_2^5 - a^5}.$$

Произвольные постоянные, входящие в $K_{10}(r), K_{30}(r)$ и $m_{2,\pm 2}(r), p_{2,\pm 2}(r), k_{3,\pm 2}(r)$ имеют вид:

$$C_5 = \frac{4}{15} \sqrt{6\pi} \frac{a^3 \mu \xi_3}{a^3 - r_2^3}, \quad C_6 = \frac{4}{15} \sqrt{6\pi} \frac{a^3 r_2^3 \mu \xi_3}{a^3 - r_2^3},$$

$$F_1 = -\frac{4\sqrt{21\pi}}{105} \frac{a^5 \mu \xi_3}{a^7 - r_2^7}, \quad F_2 = \frac{4\sqrt{21\pi}}{105} \frac{a^5 r_2^7 \mu \xi_3}{a^7 - r_2^7},$$

$$F_3 = -\frac{2\sqrt{70\pi}}{105} \frac{a^5 \mu \xi_3}{a^7 - r_2^7}, \quad F_4 = \frac{2\sqrt{70\pi}}{105} \frac{a^5 r_2^7 \mu \xi_3}{a^7 - r_2^7},$$

$$D_1 = \frac{2}{15} i \sqrt{\pi} \mu \xi_3 \frac{a^5 r_2^5 \left(4(\sqrt{3} + \sqrt{2})(r_2^5 - a^5) - 25\sqrt{2} a^3 (r_2^2 - a^2) \right)}{4r_2^{10} - 25r_2^7 a^3 + 42r_2^5 a^5 - 25r_2^3 a^7 + 4a^{10}},$$

$$D_2 = -\frac{14}{5} i \sqrt{\pi} \mu \xi_3 \frac{a^3 \left(-\sqrt{2}(r_2^5 - a^5) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) r_2^3 (r_2^2 - a^2) \right)}{4r_2^{10} - 25r_2^7 a^3 + 42r_2^5 a^5 - 25r_2^3 a^7 + 4a^{10}}$$

$$D_3 = \frac{2}{15} i\sqrt{\pi}\mu\xi_3 \frac{a^3 \left((4\sqrt{3} - 21\sqrt{2})(r_2^7 - a^7) + 21(\sqrt{3} + \sqrt{2})r_2^5(r_2^2 - a^2) \right)}{4r_2^{10} - 25r_2^7 a^3 + 42r_2^5 a^5 - 25r_2^3 a^7 + 4a^{10}},$$

$$D_4 = -\frac{2}{15} i\sqrt{\pi}\mu\xi_3 \frac{a^3 r_2^3 \left(4\sqrt{3}(r_2^7 - a^7) - 21\sqrt{2}a^5(r_2^2 - a^2) \right)}{4r_2^{10} - 25r_2^7 a^3 + 42r_2^5 a^5 - 25r_2^3 a^7 + 4a^{10}}.$$

Таким образом, скорость среды в пространстве между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом в рассматриваемом приближении дается выражением:

$$\vec{v}(r, \theta, \varphi, t) = \vec{v}_0(r, \theta, \varphi) + \mu \left[K_{10}(r) \vec{Y}_{10}^0 + K_{30}(r) \vec{Y}_{30}^0 \right] +$$

$$+ \mu e^{-2i\omega_1 t} \left[p_{22}(r) (\vec{Y}_{22}^+ - \vec{Y}_{2,-2}^+) + m_{22}(r) (\vec{Y}_{22}^- - \vec{Y}_{2,-2}^-) + k_{32}(r) (\vec{Y}_{32}^0 + \vec{Y}_{3,-2}^0) \right],$$

в котором радиальные функции имеют вид (4.16), (4.18).

На рис. 27 представлены линии тока среды с учетом опережающего вращения внутренней поверхности относительно внешней ($\omega_1 > \omega_2$). Большинство линий являются замкнутыми кривыми с центром симметрии, расположенным на оси вращения сферы и эллипсоида. Вблизи внутренней поверхности на первый взгляд линии тока представляют собой эллипсы, сжатые вдоль оси $O_2 x_2$. Вблизи внешней сферы линии тока образуют окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

На рис. 28 изображено векторное поле скорости без осесимметричной составляющей \vec{v}_0 , отвечающей решению задачи о движении вязкой среды в пространстве между дифференциально вращающимися концентрическими сферами. Внутреннюю поверхность окружают замкнутые линии векторного поля. В верхней и нижней частях полости, разделенных экваториальной плоскостью, линии (красного цвета) представляют собой изогнутые кривые, не лежащие на семействе плоскостей или сферических поверхностей. В экваториальной плоскости имеются центрально симметричные линии (синего цвета), вытянутые вдоль оси $O_2 x_2$, являющиеся суперэллиптическими кривыми (кривыми Ламе). Вблизи внешней поверхности располагаются незамкнутые линии (зеленого цвета), соприкасающиеся со сферой в двух точках.

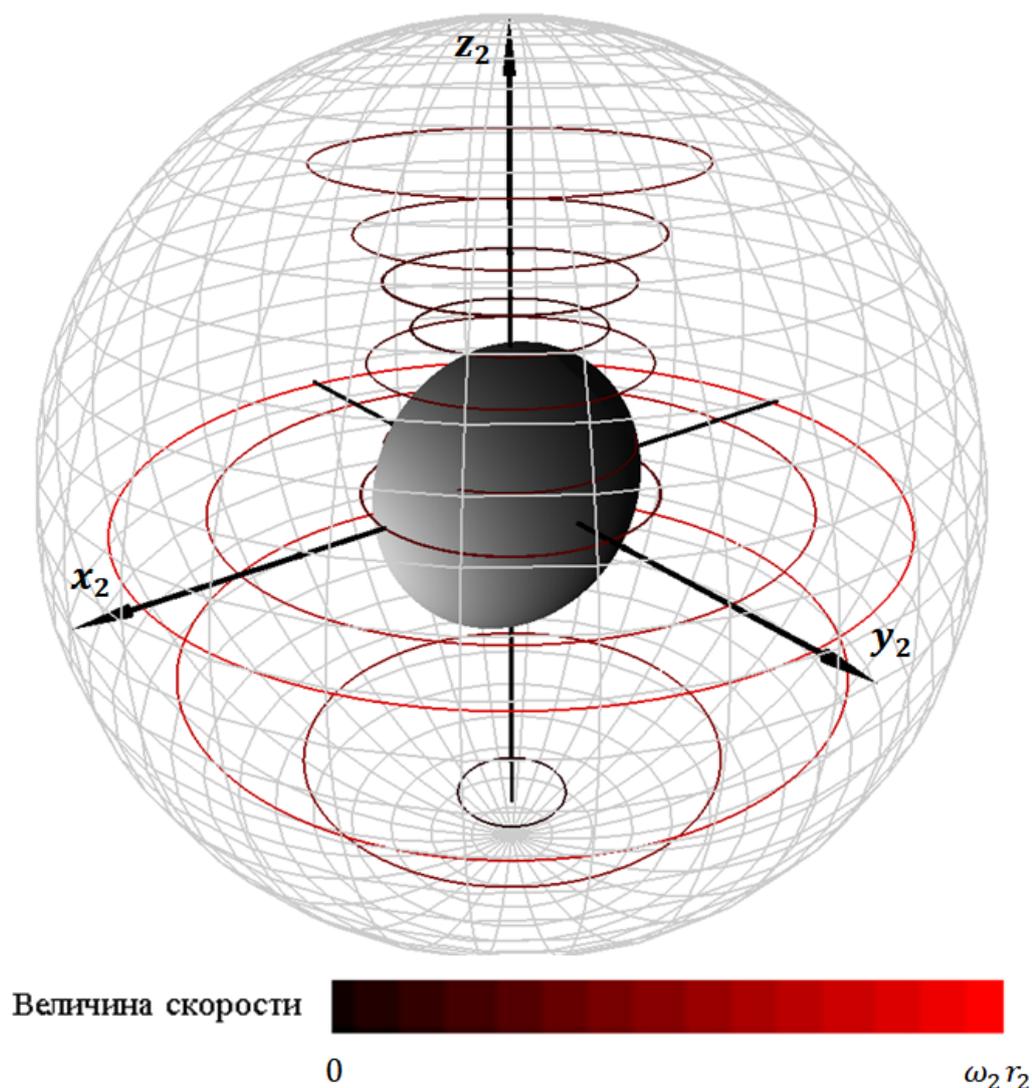


Рис. 27.

Линии тока среды с учетом опережающего вращения эллипсоида

Модели, учитывающие эллипсоидальность внутреннего тела, изучены в работах [40, 47]. В работе [47] рассмотрена модель двух соосно-вращающихся эллипсоидальных тел: мантии с внутренней сферической полостью и твердого ядра, пространство между которыми заполнено вязкой средой. Эта модель учитывает опережающее вращение твердого ядра и объясняет долгопериодические вариации длительности суток. В работе [40] установлено, что данная модель допускает возможность радиального течения. При этом наблюдаются некоторые сходства полученных в [40] течений и поведения магнитного поля Земли.

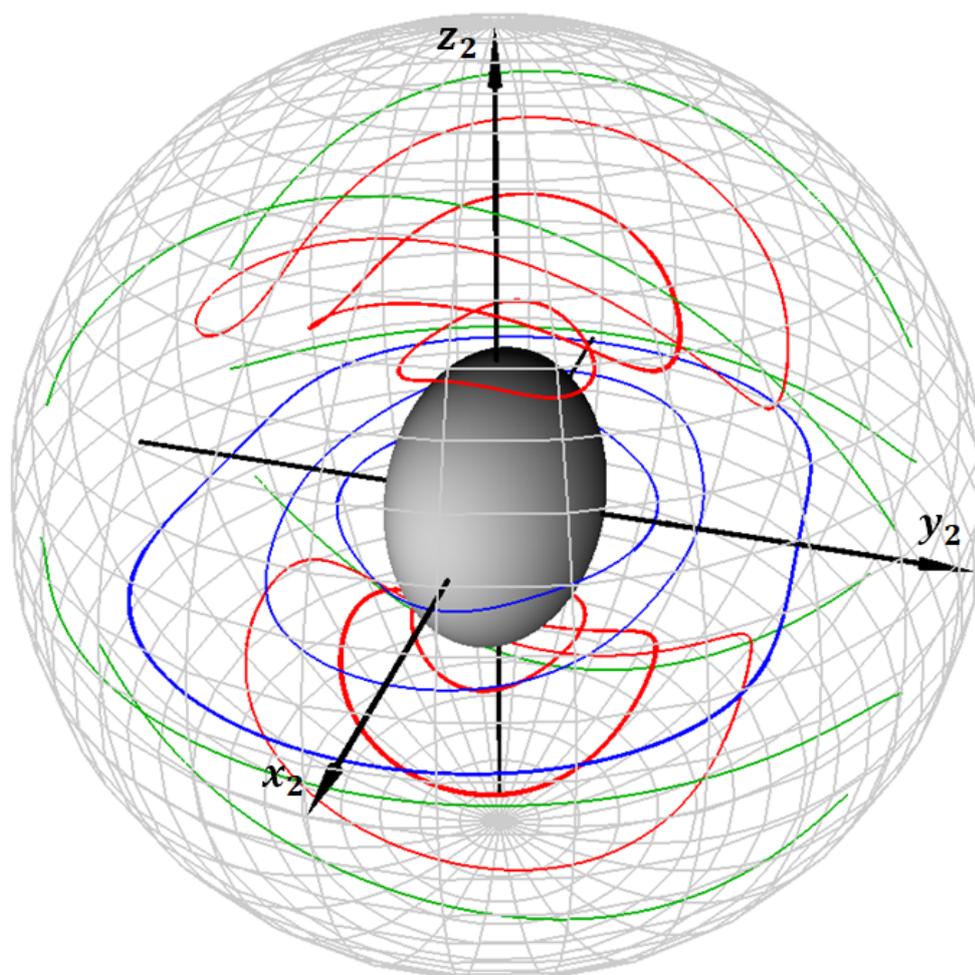


Рис. 28.

Линии векторного поля скорости без осесимметричной составляющей

4.2. Возбуждение магнитного поля течением между вращающимися квазисферическими поверхностями

Согласно теореме Т. Каулинга [57] двумерные или осесимметричные потоки проводящей среды не способны обеспечить поддержание долговременного осесимметричного магнитного поля. Для возникновения динамо геометрическая конфигурация течения должна быть более сложной и содержать радиальную составляющую, которая необходима для образования конвективных потоков. Нахождение стационарного режима генерации магнитного поля должно основываться на совместном решении уравнений магнитной гидродинамики, учитывающих взаимное влияние скорости среды и напряженности магнитного поля. В связи с трудностью решения полной системы уравнений применяют кинематический подход, при котором течение считается заданным, и рассматривают задачу об эволюции напряженности магнитного поля.

Решение гидродинамической задачи о ламинарном движении вязкой среды между вращающимися неконцентрическими сферами получено в п. 4.1.1. Решение задачи о течении между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом приведено в п. 4.1.2 и работе [40]. Показано, что осевая асимметрия потока приводит к возникновению радиального течения, необходимого для создания конвекции. В данном разделе изучается вопрос о возможности генерации магнитного поля полученными в п. 4.1 течениями.

Рассмотрим движение однородной несжимаемой проводящей вязкой среды, заполняющей пространство между двумя равномерно вращающимися сферической и эллипсоидальной поверхностями. В отличие от п. 4.1 будем считать, что сдвиг вдоль внутренней поверхности вдоль вертикальной оси отсутствует. Центр O_1 в системе $O_2x_2y_2z_2$ имеет координаты $O_1(\delta, 0, 0)$, $\delta \ll 1$ (рис. 29).

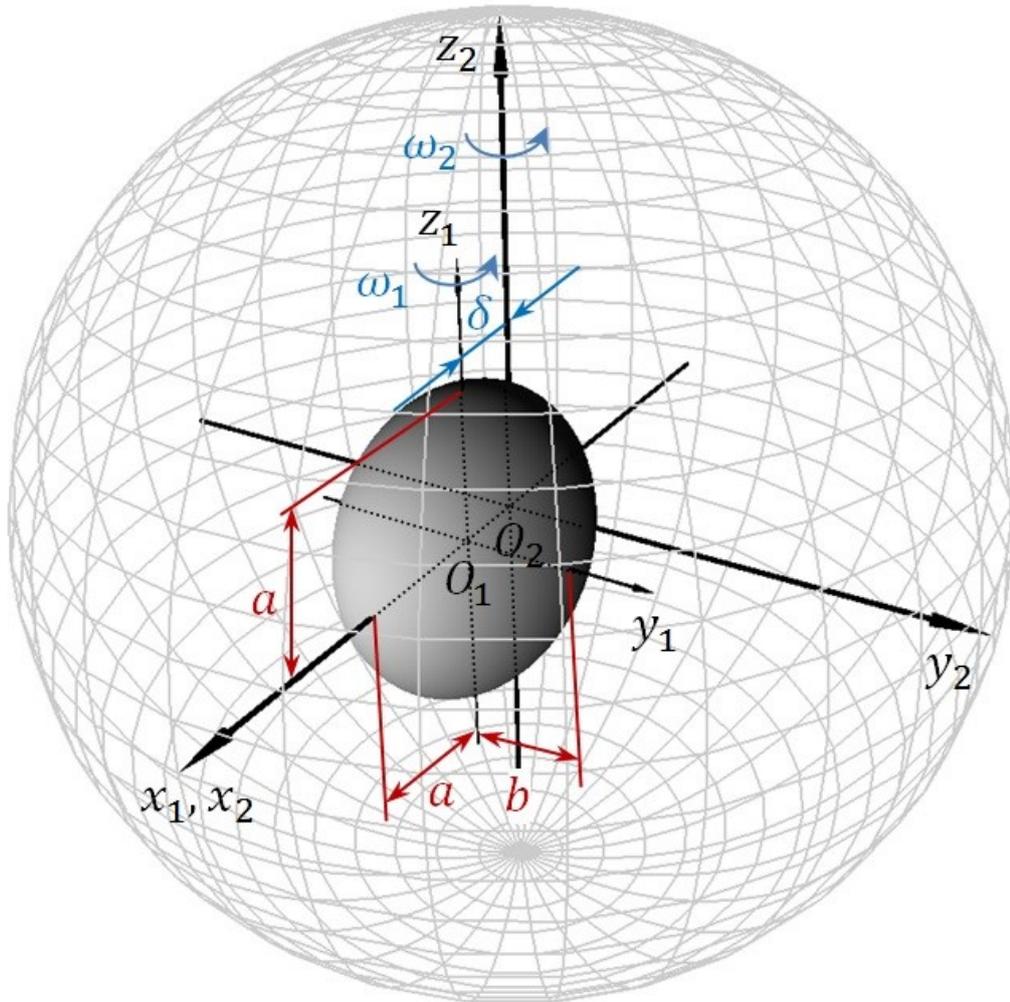


Рис. 29.

Течение вязкой среды между сферой и эллипсоидом

Применим к уравнению Навье-Стокса операцию rot , исключив давление:

$$rot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = \frac{1}{4\pi\rho} rot (\vec{H}, \nabla) \vec{H} + \nu rot \Delta \vec{v}.$$

Эволюция напряженности магнитного поля в движущейся проводящей среде описывается уравнением:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = rot [\vec{v}, \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}.$$

Запишем уравнение неразрывности и условие соленоидальности магнитного поля:

$$div \vec{v} = 0, \quad div \vec{H} = 0.$$

В уравнениях динамики проводящей вязкой среды перейдем к безразмерным переменным и параметрам:

$$t_* = \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}, \quad \varepsilon = \frac{c^2}{4\pi\sigma\nu}, \quad s = \frac{I^2\sigma}{\rho\nu c^2}, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma\nu_* R}{c^2},$$

где R – масштаб длины, t_* – масштаб времени, I – масштаб силы тока, ν_* – характерная скорость потока, R_m – магнитное число Рейнольдса.

Полная система уравнений динамики проводящей вязкой среды в безразмерном виде:

$$\varepsilon rot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = s rot (\vec{H}, \nabla) \vec{H} + rot \Delta \vec{v}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = R_m rot [\vec{v}, \vec{H}] + \Delta \vec{H}, \quad (4.20)$$

$$div \vec{v} = 0, \quad div \vec{H} = 0. \quad (4.21)$$

В предположении ламинарного течения параметр ε , стоящий в уравнении движения при нелинейной составляющей силы инерции, можно считать малым. Малость параметра s достигается путем выбора масштабного множителя I .

Для решения вопроса о возбуждении магнитного поля применяется классический подход, лежащий в основе построения моделей кинематического динамо [78].

Поле скорости определяется из решения стационарной задачи:

$$rot \Delta \vec{v}_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$div \vec{v}_1 = 0 \quad (4.23)$$

рассмотренной в п 4.1 для течения между неконцентрическими вращающимися сферами (стационарная задача) и течения между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом (нестационарная задача). При решении вопроса о возможности генерации магнитного поля для последнего течения берется стационарная составляющая потока.

По найденному полю скорости \vec{v}_1 определяется напряженность магнитного поля \vec{H}_1 , создаваемого этим течением в пространстве между сферой и квазисферической поверхностью $a + \delta \sin \theta \cos \varphi - a\mu \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \omega_1 t) \leq r \leq r_2$:

$$\frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = R_m \operatorname{rot} [\vec{v}_1, \vec{H}_1] + \Delta \vec{H}_1, \quad (4.24)$$

$$\operatorname{div} \vec{H}_1 = 0. \quad (4.25)$$

Будем считать, что внешняя сфера окружена диэлектриком. Тогда при $r \geq r_2$:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = 0.$$

По мере удаления от источника магнитное поле должно затухать:

$$\vec{H}_1(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

С точностью до членов первого порядка малости по параметру сдвига δ и эллипсоидальности μ стационарная часть поля скорости имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(r, \theta, \varphi) = & -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \vec{Y}_{10}^0 + \\ & + \frac{1}{3} i \sqrt{\pi} \delta Q_1 \left[\left(\eta_1 r^2 - \frac{\eta_2}{r} + \frac{\eta_3}{r^3} \right) (\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) + \left(\eta_4 - 5\eta_1 r^2 - \frac{4\eta_2}{r} \right) (\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{5}} \xi_2 \delta Q_2 \left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3} \right) (\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0) - \\ & - \frac{4\sqrt{\pi}}{15} \xi_2 \mu \left[\sqrt{6} Q_3 \left(r - \frac{r_2^3}{r^2} \right) \vec{Y}_{10}^0 - \frac{\sqrt{21}}{7} Q_4 \left(r^3 - \frac{r_2^7}{r^4} \right) \vec{Y}_{30}^0 \right], \end{aligned}$$

где

$$Q_1 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4 (4r_1^2 + 7r_1 r_2 + 4r_2^2)}, \quad Q_2 = \frac{r_1^3}{r_2^5 - r_1^5},$$

$$Q_3 = \frac{r_1^3}{r_1^3 - r_2^3}, \quad Q_4 = \frac{r_1^5}{r_1^7 - r_2^7},$$

$$\eta_1 = r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3],$$

$$\eta_2 = r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5],$$

$$\eta_3 = r_1^3 r_2^3 [(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2) r_2^3],$$

$$\eta_4 = r_1 [4(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2^3 + 9\xi_1 r_2^5],$$

$$\xi_1 = \sqrt{2}(\xi_0 + 2\omega_1), \quad \xi_2 = \xi_0 - \omega_1,$$

$$\xi_0 = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) - 2r_2^3(\omega_1 - \omega_2) \right).$$

Слагаемое, не зависящее от сдвига δ и параметра эллипсоидальности μ , отвечает решению классической задачи о движении вязкой среды между двумя вращающимися концентрическими сферами:

$$\vec{v}_0(r, \theta, \varphi) = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \vec{Y}_{10}^0.$$

Сдвиг внутренней поверхности относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения, приводит к появлению дополнительных гармоник с весом $l = 1, 2$. В этом случае радиальная компонента вектора скорости \vec{v}_1 становится ненулевой. Наличие малой эллипсоидальности приводит к появлению дополнительных осесимметричных членов в решении стационарной задачи.

Перейдем к задаче об определении напряженности магнитного поля, порождаемого течением \vec{v}_1 . Решение нестационарной задачи (4.24)-(4.25) в пространстве между сферами ищется в виде ряда по шаровым векторам:

$$\vec{H}_1(r, \theta, \varphi, t) = e^{\lambda t} \sum_{l=1,2,\dots, |m| \leq l} \left(\Psi_{lm}^+(r) \vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + \Psi_{lm}^0(r) \vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + \Psi_{lm}^-(r) \vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) \right).$$

Для коэффициентов перед шаровыми векторами в поле скорости введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(r, \theta, \varphi) = & \phi_{10}^0(r) \vec{Y}_{10}^0 + \\ & + \delta [\psi_{11}^+(r) (\vec{Y}_{11}^+ + \vec{Y}_{1,-1}^+) + \psi_{11}^-(r) (\vec{Y}_{11}^- + \vec{Y}_{1,-1}^-) + \psi_{21}^0(r) (\vec{Y}_{21}^0 - \vec{Y}_{2,-1}^0)] + \\ & + \mu [\psi_{10}^0(r) \vec{Y}_{10}^0 + \psi_{30}^0(r) \vec{Y}_{30}^0]. \end{aligned}$$

Пользуясь известным выражением поля \vec{v}_1 , представим векторное произведение $[\vec{v}_1, \vec{H}_1]$ в виде разложения:

$$[\vec{v}_1, \vec{H}_1] = e^{\lambda t} \sum_{l=1,2,\dots, |m| \leq l} \left(\Phi_{lm}^0(r) \vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + \Phi_{lm}^{+1}(r) \vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + \Phi_{lm}^{-1}(r) \vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) \right),$$

в котором функции $\Phi_{lm}^v(r)$ являются линейными комбинациями неизвестных радиальных функций $\Psi_{lm}^v(r)$. Пользуясь известными соотношениями п. 2.4, запишем выражения $\Phi_{lm}^v(r)$ в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_{lm}^{\nu}(r) = & \frac{ib_l^{\nu}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{L,M,N} \Psi_{LM}^N(r) \sqrt{(2L+1)(2N+1)} \left[3\sqrt{3}\phi_{10}^0(r) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L & N & 1 \\ l & l+\nu & 1 \end{Bmatrix} C_{10N0}^{l+\nu,0} C_{10LM}^{lm} + \right. \\
& + 3\sqrt{5}\delta \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ L & N & 1 \\ l & l+\nu & 1 \end{Bmatrix} C_{20N0}^{l+\nu,0} \left(C_{11LM}^{lm} \psi_{1,1}^+(r) + C_{1,-1LM}^{lm} \psi_{1,-1}^+(r) \right) + \\
& + 3\delta \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ L & N & 1 \\ l & l+\nu & 1 \end{Bmatrix} C_{00N0}^{l+\nu,0} \left(C_{11LM}^{lm} \psi_{1,1}^-(r) + C_{1,-1LM}^{lm} \psi_{1,-1}^-(r) \right) + \\
& + 5\sqrt{3}\delta \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ L & N & 1 \\ l & l+\nu & 1 \end{Bmatrix} C_{20N0}^{l+\nu,0} \left(C_{2,1LM}^{lm} \psi_{2,1}^0(r) - C_{2,-1LM}^{lm} \psi_{2,-1}^0(r) \right) + \\
& \left. + \mu \left\{ 3\sqrt{3}\psi_{10}^0(r) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L & N & 1 \\ l & l+\nu & 1 \end{Bmatrix} C_{10N0}^{l+\nu,0} C_{10LM}^{lm} + 7\sqrt{3} \begin{Bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ L & N & 1 \\ l & l+\nu & 1 \end{Bmatrix} C_{30N0}^{l+\nu,0} C_{30LM}^{lm} \psi_{30}^0(r) \right\} \right].
\end{aligned}$$

Подставляя разложения \vec{H}_1 и $[\vec{v}_1, \vec{H}_1]$ в уравнение (4.24) и группируя коэффициенты перед шаровыми векторами с одинаковыми индексами, получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных радиальных функций $\Psi_{lm}^{\nu}(r)$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{lm}^{+1''} + \frac{2}{r} \Psi_{lm}^{+1'} - \left(\frac{(l+1)(l+2)}{r^2} + \lambda \right) \Psi_{lm}^{+1} + R_m \frac{l}{2l+1} \left(\Phi_{lm}^0{}' - \frac{l}{r} \Phi_{lm}^0 \right) &= 0, \\
\Psi_{lm}^0{}'' + \frac{2}{r} \Psi_{lm}^0{}' - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \lambda \right) \Psi_{lm}^0 + R_m \left(\Phi_{lm}^{-1'} - \frac{l-1}{r} \Phi_{lm}^{-1} - \Phi_{lm}^{+1'} - \frac{l+2}{r} \Phi_{lm}^{+1} \right) &= 0, \\
\Psi_{lm}^{-1''} + \frac{2}{r} \Psi_{lm}^{-1'} - \left(\frac{(l-1)l}{r^2} + \lambda \right) \Psi_{lm}^{-1} - R_m \frac{l+1}{2l+1} \left(\Phi_{lm}^0{}' + \frac{l+1}{r} \Phi_{lm}^0 \right) &= 0, \\
(l+1) \left(\Psi_{lm}^{+1'} + \frac{l+2}{r} \Psi_{lm}^{+1} \right) + l \left(\Psi_{lm}^{-1'} - \frac{l-1}{r} \Psi_{lm}^{-1} \right) &= 0, \\
l = 1, 2, \dots, \quad |m| \leq l.
\end{aligned}$$

В общем случае система содержит бесконечное число уравнений и неизвестных. Перейдем к решению усеченной системы, ограничившись в разложении вектора \vec{H}_1 конечным числом членов ряда $l = 1, 2, \dots, L$, $|m| \leq l$. Уравнения, не содержащие производных функций, входящих в \vec{H}_1 , отбрасываются. После замены производных разностными аналогами задача сводится к нахождению собственных значений λ_k матрицы усеченной системы. Значения λ_k будут зависеть от величины магнитного числа Рейнольдса R_m , выступающего в качестве параметра в данной модели. Если действительные части всех собственных чисел отрицательны, поле \vec{H}_1 , создаваемое

течением \vec{v}_1 , со временем будет затухать. Если при некотором значении R_m действительная часть хотя бы одного λ_k становится положительной, соответствующее ему магнитное поле начинает экспоненциально нарастать, что означает возникновение динамо. Интерес представляет собственное значение с наибольшей действительной частью $Re \lambda^* = \max Re \lambda_k$.

Для оценки величины $Re \lambda^*$ в расчетах использовались усредненные характеристики Земли и учитывалось опережающее вращение твердого ядра относительно мантии [47]. Определение собственных чисел λ_k производилось QR методом. Для значений $L = 1, 2$, определяющих наивысший порядок гармоник в разложении вектора \vec{H}_1 , построена зависимость $Re \lambda^*$ от магнитного числа Рейнольдса (рис. 30).

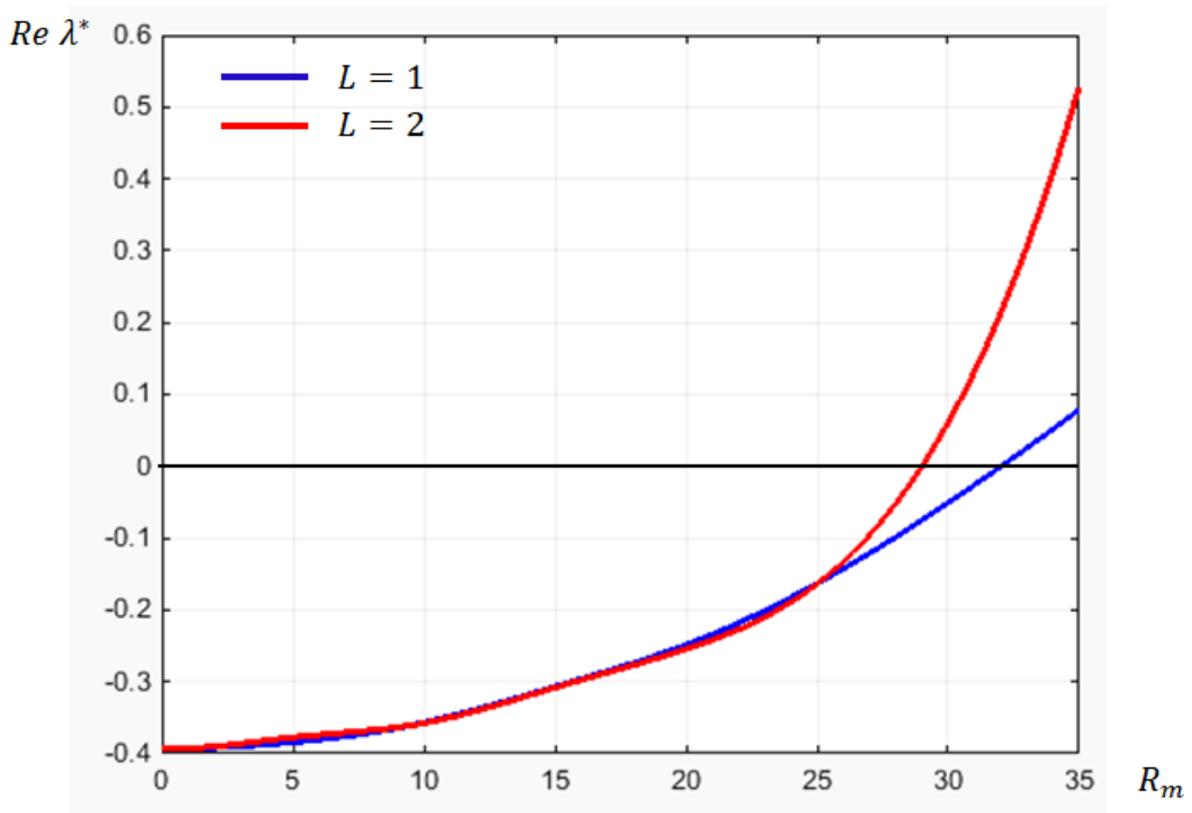


Рис. 30. Зависимость максимальной действительной части собственного значения от магнитного числа Рейнольдса

Из рис. 30 видно, что при некотором критическом значении $R_m^{kp.}(L)$ кривая пересекает горизонтальную ось. При $R_m > R_m^{kp.}(L)$ действительная часть $Re \lambda^*$ становится положительной. При $L = 1$ пороговое значение магнитного числа Рейнольдса равно $R_m^{kp.} \approx 32$, при $L = 2$ значение $R_m^{kp.} \approx 29$.

По сравнению с оценками R_m для внешнего ядра Земли полученное число R_m^{kp} оказывается меньше. Таким образом, в рамках рассмотренной модели возможно возбуждение экспоненциально растущего магнитного поля. Этот результат еще не позволяет сделать вывод о механизме магнитного динамо. Для объяснения самогенерации поля, необходимо решение полной связанной системы уравнений (4.19)-(4.21). Однако на начальном этапе возбуждения магнитного поля в качестве первопричины этого явления можно предположить влияние течения \vec{v}_1 , учитывающего осевую асимметрию потока.

Заключение

Основные результаты, полученные в работе:

1. На моделях упругого деформируемого тела, близкого по форме к шару, и анизотропно-упругого шара продемонстрировано явление глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения.
2. Сделаны оценки времени затухания прецессии астероидов, обусловленного вязкостью и термодиффузией, объясняющие данные астрономических наблюдений.
3. В рамках модели вязкоупругого шара показана возможность свободной прецессии тела, обусловленная его вязкими свойствами, и предложено объяснение прецессии Земли с периодом Чандлера.
4. Установлена связь дифференциального вращения упругого шара и находящегося в его полости твердого эллипсоида с перемещением зон наибольших напряжений в шаре.
5. Получено приближенное аналитическое решение задачи о течении вязкой среды, заключенной в пространстве между вращающимися сферической и квазисферической поверхностями, и исследована возможность генерации магнитного поля.

Используемый в работе подход, основанный на применении приближенных аналитических методов и аппарата шаровых векторов, может быть полезен при решении задач динамики деформируемых тел и сплошных сред, обладающих сферической симметрией.

Полученные в работе результаты позволяют объяснить возможность глобального перемещения полюса планеты (Земли), свободной прецессии полюса Земли с периодом Чандлера, волнового характера движения напряжений в теле планеты. Наличие радиального течения вязкой среды в пространстве между дифференциально вращающимися квазисферическими поверхностями и возможность возбуждения им магнитного поля может представлять интерес как возможный механизм магнитного динамо.

Дальнейшее развитие моделей динамики неоднородного твердого тела позволит интерпретировать и прогнозировать геофизические процессы, рассмотреть задачи динамики деформируемых тел в различных физических силовых полях, в частности задачи левитации, задачи динамики искусственных и естественных космических объектов.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Прогноз движения полюса деформируемой Земли // Астрон. журн. 2002. Т. 79, № 10. С. 952-960.
2. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Возмущенное вращение Земли // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 19-29.
3. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // Изв. РАН. Астрономический журнал. 2005. Т. 82. № 10. С. 950-960.
4. Алешкевич В.А. Электромагнетизм. М.: Физматлит. 2014. — 404 с.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. – 448 с.
6. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2013. №1. С. 44–50.
7. Баркин Ю.В. К динамике твердого ядра Земли // Труды Гос. астрономического ин-та им. П.К. Штернберга. 1996. Т. LXV. С. 136-145.
8. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс - М.: Наука, 1965.- 416 с.
9. Белецкий В.В. Динамика быстрых вращений // Труды ин-та механики МГУ.- 1973.- № 29. - С. 97-118.
10. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд-во МГУ. 1975.- 308 с.
11. Берестецкий В.Б. Электромагнитные поля мультиполей // ЖЭТФ, 1947. Т. 17. С. 12-18.
12. Брагинский С.И. О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1084-1098.
13. Бражкин В.В., Ляпин А.Г. Универсальный рост вязкости металлических расплавов в мегабарном диапазоне давлений: стеклообразное состояние внутреннего ядра Земли // УФН. 2000. Т. 170. № 5. С. 535-551
14. Булдырев В.С., Янсон З.А. Распространение интерференционных волн SH в упругом сферическом слое I // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962. №12. С. 1764-1771.

15. Булдырев В.С., Янсон З.А. Распространение интерференционных волн SH в упругом сферическом слое II // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963. №1. С. 76-89.
16. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б. // О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо»). Т. 106. 1972. С. 431-457.
17. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
18. Викулин А.В. Физика волнового сейсмического процесса. Петропавловск-Камчатский: изд. КГПУ, 2003. 151 с.
19. Вильке В. Г. Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика, 1980, том 44, № 3, стр. 395.
20. Вильке В.Г. Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестник МГУ, сер.1, математика-механика, 1983. №5. С. 54-59.
21. Вильке В. Г., Копылов С. А., Марков Ю.Г. Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика, 1985, том 49, № 1, стр. 25.
22. Вильке В.Г. Эволюция движения симметричного твердого тела со сферической полостью, содержащей вязкую жидкость // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. №1. С. 71–76.
23. Вильке В.Г., Шатина А.В. Эволюция вращения спутника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью // Космич. исслед. 1993. Т.31. №6. С. 22-30.
24. Вильке В.Г., Шатина А.В. О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника // Космические исследования, 2004. Т. 42. №1. С. 95-106.
25. Вильковский С.С. Обобщение уравнений классической гидродинамики и теории упругости и описание с их помощью кинетики стеклования жидкости // ПМТФ. 1989. Т. 10. №4. С. 131-138.
26. Гайлитис А. Самовозбуждения магнитного поля парой кольцевых вихрей // Магнитная гидродинамика. Т. 6. 1970. С. 14-17.
27. Гашененко И.Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // МТТ. – 2010. – Вып. 40. – С. 12-20.

28. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова А.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 1978. 294 с.
29. Горр Г.В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // МТТ. – 2012. – Вып. 42. – С. 26-36.
30. Григорьева Л.Н., Новиков В.В. К проблеме глобального перемещения полюсов свободно вращающегося тела // Седьмая Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике». – Москва: 2013. – С. 77-80.
31. Григорьева Л.Н. Об одном механизме глобального перемещения полюсов Земли // Девятнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых. – Архангельск: 2013. – С. 349-350.
32. Гутенберг Б. Физика земных недр. М.: Из-во Иностранной литературы, 1963. 263 с.
33. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Известия АН СССР. Механика твердого тела. №3. – 1983. – С. 43-50.
34. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях упругого эллипсоида // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 69-74.
35. Денисов Г.Г., Новиков В.В. Об оценке вязкости жидкого ядра Земли. Докл. РАН. 1998. Т. 362. №4. С. 484-485.
36. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободном движении вязкоупругого квазишара // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1999. №1. С. 26-32.
37. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О близких к эйлеровым движениях деформируемых тел // Механика гироскопических систем. Респ. межвуз. научно-техн. сб. Киев: Вища школа. 1983. Вып. 2. С. 23-29.
38. Денисов Г.Г., Новиков В.В. К задаче об устойчивости стационарных вращений деформируемого твердого тела // В кн. Устойчивость движения. Под ред. Матросова В.М., Иртегова В.Д. Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1985. С. 115-119.
39. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О затухании угловых движений свободного деформируемого тела // Механика. 2003. №5. Вып.1. С. 5–11.
40. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О течении жидкости между вращающимися поверхностями // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. №1. С. 40–46.

41. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Февральских Л.Н. К вопросу о чандлеровской нутации Земли // Восьмая Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике» / Москва: 2015. С. 156–159.
42. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Февральских Л.Н. Об угловых движениях свободного вязкоупругого тела // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики / Казань: 2015. С. 1168-1170.
43. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Февральских Л.Н. Свободные угловые движения вязкоупругого твердого тела: Учебное пособие / Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. Электронное издание, 2015. – 60 с. Рег. ном. 985.15.06.
44. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Февральских Л.Н. О затухании свободной прецессии астероидов // XXI Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки: материалы докладов. Княгинино: НГИЭУ, 2016. С. 104-105.
45. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. О долгопериодических вариациях угловой скорости вращения Земли. Докл. РАН. 2005. Т. 400. №5. С. 625-629.
46. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. Гравитационное взаимодействие твердого ядра и мантии Земли и вариации длительности суток. Астрономический журнал. 2008. Т. 85. №12. С. 1143-1150.
47. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. Как твердое ядро Земли сутки изменяет// Природа. 2013. № 5. С. 3-10.
48. Денисов Г.Г., Урман Ю.М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 5-14.
49. Джеффрис Г. Земля. Из-во Иностранной литературы, Москва: 1960.
50. Дорофеева Е.А. О микроструктуре металлического стекла // ФММ. – 1987. – Т. 63, №2.
51. Дорофеева Е.А., Прокошин А.Ф. Магнитная анизотропия аморфных металлических сплавов на основе железа // ФММ. – 1984. – Т. 57, №3.
52. Егармин Н.Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изв. АН СССР, МТТ. 1980. № 6. С. 43-48.
53. Зельдович Я.Б. Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении // ЖЭТФ, 1956. Т. 31. Вып. 1. С. 154-155.

54. Иевлева О.Б. Малые колебания маятника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью // ПММ. Т. 28. Вып. 6. 1964. С. 1132–1134.
55. Иевлева О.Б. О колебаниях тела, наполненного вязкой жидкостью // ПМТФ. Т. 7. Вып. 6. 1966. С. 27–34.
56. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Журнал прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 65-75.
57. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. Пер. с англ. В. Г. Петрова. – М.: Атомиздат, 1978. – 144 с.
58. Климов Д.М., Космодемьянская Г.Н., Черноусько Ф.Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ.- 1972.- № 2.- С. 3-8.
59. Кобеко П.П. Аморфные вещества. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
60. Ковалев А.М. О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 12-27.
61. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей. – М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1951.
62. Краузе Ф., Рэдлер К. Х. Магнитогиродинамика средних полей и теория динамо. — М.: Мир, 1984. — 314 с.
63. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 621 с.
64. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостеориздат. 1950. 300 с.
65. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли: Пер. с англ. / Под ред. Успенского Я.Я. – М.: Мир, 1964. – 384 с.
66. Маркеев А.П. К динамике упругого тела в гравитационном поле. Космические исследования, 1989, том 27, № 2, стр. 163.
67. Марков Ю.Г. Пространственное движение деформируемого тела в центральном поле сил // Космические исследования, 1988, том 26, № 2, стр. 236.
68. Марков Ю.Г. О вращении вязкоупругого шара на условно-периодической орбите в плоской круговой ограниченной задаче трех тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1989, № 6, стр. 23.

69. Марков Ю.Г., Миняев И. С. Эволюция вращения осесимметричного вязкоупругого тела на эллиптической орбите // Космические исследования, 1990, том 28, № 4, стр. 483.
70. Марков Ю.Г., Миняев И.С. О динамических эффектах в механических системах со слабой диссипацией // Изв. РАН. МТТ. 1993. Т. 1. С.11-16.
71. Мартыненко Ю.Г. Уходы электростатического гироскопа, вызываемые несферичностью ротора // Изв. АН СССР. МТТ.- 1970.- № 1.- С. 10-18.
72. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
73. Мартыненко Ю.Г., Подалков В.В. О нутациях твердого тела в неконтактном подвесе // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. №2. С.26-31.
74. Мельхиор П. Физика и динамика планет. М.: Мир. Т. 1. 1975. 575 с.; Т. 2. 1976. 483 с.
75. Молоденский М.С. Земные приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли // Труды геофизического ин-та Акад. наук СССР. № 19. 1953. С. 1-146.
76. Молоденский М.С. Общая теория упругих колебаний. М.: Недра, 1989. 79 с.
77. Монин А.С., Вращение Земли и климат. Гидрометеорологическое изд-во, Ленинград, 1972.
78. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980. — 342 с.
79. Новиков В.В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении // Прикл. математика и механика. Т.51. Вып. 5. — 1987. — С. 767-774.
80. Новиков В.В., Григорьева Л.Н. Об одном механизме глобального перемещения полюсов тела в свободном угловом движении // Вестник Нижегородского государственного ун-та им. Н.И. Лобачевского / Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. С. 169-172.
81. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К задаче о свободных угловых движениях деформируемого твердого тела, близкого по форме к шару // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. Т. 156. Книга 1. 2014. С. 109–116.
82. Новиков В.В., Февральских Л.Н. О движении жидкости между неконцентрическими дифференциально-вращающимися сферическими

- поверхностями // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики / Казань: 2015. С. 2796-2798.
83. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Течение жидкости между дифференциально-вращающимися неконцентрическими сферическими поверхностями // Четырнадцатая Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения» / Казань: 2015. С. 113-116.
84. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Течение жидкости между неконцентрическими сферами, совершающими дифференциальное вращение // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. Т. 158. Книга 1. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2016. С. 129-140.
85. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К задаче о ламинарном динамо // Пятнадцатая Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения» / Казань: 2016. С. 120-122.
86. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К задаче о генерации магнитного поля жидкостью между вращающимися неконцентрическими сферическими поверхностями // Труды Девятой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» / Москва: 2017. С. 111–114.
87. Новиков В.В., Февральских Л.Н. О возможности генерации магнитного поля жидкостью между неконцентрическими вращающимися сферами // Сборник трудов XXVIII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2016) / Москва: Изд-во ИМАШ РАН, 2017. С. 152-154.
88. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Об эволюции магнитного поля жидкости в пространстве между вращающимися сферической и эллипсоидальной поверхностями // XXII Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки: материалы докладов. Княгинино: НГИЭУ, 2017. С. 203-204.
89. Новиков В.В., Февральских Л.Н. О генерации магнитного поля жидкостью между вращающимися сферической и квазисферической поверхностями // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков. Изд-во Московского государственного университета / Москва: 2017. С. 116.

90. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К вопросу о затухании свободной прецессии астероидов // Проблемы прочности и пластичности / Нижний Новгород: 2018. Т. 80, №2. С. 227-237.
91. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Применение аппарата шаровых векторов в задачах механики // Проблемы прочности и пластичности. / Нижний Новгород: 2020. № 2. Т. 82. С. 5-15.
92. Овчинников В.М., Адушкин В.А., Ан В.А. О скорости относительного вращения ядра Земли. Доклады Академии наук. 1998. Т. 362. №5. С. 683-686.
93. Паркер Ю. Космические магнитные поля. В двух томах. М.: Мир, 1982.
94. Петрашень Г.И. Решения векторных предельных задач математической физики в случае шара // ДАН СССР. Т. 46. №7 – 1945. – С. 291–294.
95. Петрашень Г.И. Колебания изотропного упругого шара // ДАН СССР. Т. 47. №3 – 1945. – С. 177–181.
96. Петрашень Г.И. Задача Рэлея для поверхностной волны в случае сферы // ДАН СССР. Т. 52. № 9. – 1946. – С. 763-768.
97. Петрашень Г.И. Симметрия вращения и шаровые векторы // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук. Механика. Вып. 17. – 1949. – С. 3–27.
98. Петрашень Г.И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук. Механика. Вып. 21. – 1950. – С. 24–70.
99. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел: Пер. с англ. В 2-х томах. Т. 2. / Под ред. Архангельского Ю.А. и Демина В.Г. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 544 с.
100. Румянцев В.В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // ПММ. Т. 21. Вып. 6. 1957. С. 740-748.
101. Румянцев В.В. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью // ПММ. Т. 28. Вып. 6. 1964. С.
102. Сидоренко В.В. О движении твердого тела с гибкими стержнями, допускающего группу симметрии // Изв. РАН. МТТ. 1995. №1. С. 3-11.
103. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1960. №3. С. 20-55.

104. Соколов Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // УФН. 2014. Т. 184. С. 313–335.
105. Сорин В.М. Моменты, действующие на несферичное тело в электромагнитном подвесе // Инж. журнал. МТТ.- 1968.- № 2.- С. 31-39.
106. Степанов Р.А., Фрик П.Г. Винтовое МГД-динамо в реальных потоках в трубах // Сб. научных трудов: Гидродинамика. 1999, № 12. С. 240-251.
107. Степанов Р.А., Фрик П.Г., Чупин А.В. Винтовое динамо в торе // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – № 1. – С. 109–117.
108. Урман Ю.М. Уводящие моменты, вызываемые несферичностью ротора, в подвесе с аксиально-симметричным полем // Изв. АН СССР. МТТ.- 1973.- № 1.- С. 24-31.
109. Урман Ю.М. Момент сил, вызываемый несферичностью ротора, в криогенном подвесе // Изв. вузов. Приборостроение.- 1974- № 11.-С. 87-92.
110. Урман Ю.М. Применение метода неприводимых тензоров в задачах небесной механики // Астрономический журнал. — 1995. — Т. 72, № 4. — С. 596–603.
111. Урман Ю.М. Применение метода неприводимых тензоров в задачах об эволюционных движениях твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 4. — С. 10–20.
112. Урман Ю.М. Неприводимые тензоры и их применение в задачах динамики твердого тела // Известия РАН. МТТ. 2007. №6. С. 52-68.
113. Февральских Л.Н. Об одном механизме глобального перемещения полюсов свободно вращающегося деформируемого тела, близкого к шару // Двенадцатая Всероссийская молодежная школа- конференция «Лобачевские чтения» / Казань: 2013. С. 181-184.
114. Февральских Л.Н. О волне напряжений в теле Земли, обусловленной дифференциальным вращением мантии и ядра // Проблемы прочности и пластичности. Т. 85. №2. 2023. С. 267-274.
115. Фок В.А. Начала квантовой механики. – Ленинград: Кубуч, 1932. – 251 с.
116. Френкель Я.И. Земной магнетизм. В кн.: «Собрание избранных трудов. Научные статьи». Том II. М.-Л.: АН СССР, 1958. С. 572 – 583.
117. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. – Л.: Наука, 1975.

118. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. Т. 28. Вып. 3. – 1964. – С. 158–159.
119. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. Киев.: Наук. думка, 1986. – 296 с.
120. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. - 1963. - Т. 27, № 3. - С. 474-483.
121. Черноусько Ф.Л. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. — М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. — 232 с.
122. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Прикладная математика и механика. Т. 42. Вып. 1. – 1978. – С. 34-42.
123. Черноусько Ф.Л. Влияние собственной упругости и диссипации на движение твердого тела относительно центра масс // Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 41. С. 118-122.
124. Черноусько Ф.Л. О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, вып. 1. – 1980. – С. 22-26.
125. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. — М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. — 308 с.
126. Alfven H. Discussion of the Origin of the Terrestrial and Solar Magnetic Fields // Tellus. V. 2. P. 74-82.
127. Backus G.E. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos // Ann. Phys. V. 4. 1958. P. 372-447.
128. Banks W.H.H. The boundary layer on a rotating sphere // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1965. Vol. 18. P. 443—454.
129. Batchelor G.K. On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. V. 201. P. 405-416.
130. Binzel R. P., Farinella P., Zappala V., Zellino A. Asteroid Rotation Rates: Distribution and Statistics // Asteroids II. / Eds. R. P. Binzel, T. Gehrels, M. S. Matthews. Univ. of Ariz. 1989. P. 416–441.
131. Binzel R. P., Sauter L. M. Trojan, Hilda, and Cybele Asteroids: New Lightcurve Observations and Analysis // Icarus. 1992. V. 95. P. 222–238.

132. Bullard E.C. The magnetic field within the earth // Proc. Roy. Soc. (London). 1949. Ser. A, 197. P. 433-453.
133. Bullard E.C., Gellman H. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1954. Vol. A247. P. 213-278.
134. Burns J.A., Safronov V.S. Asteroid nutation angles // MNRAS. 1973. V. 165. P. 403-411.
135. Chandler S.C. On the variation of latitude I-IV // Astron. J. V. 11. 1891. P 59–61, 65–70, 75–79, 83–86.
136. Chandler S.C. On the variation of latitude V-VII // Astron. J. V. 12. 1892. P 17–22, 57–72, 97–101.
137. Christensen, U., Aubert, J. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields // Geophys. J. Int. 2006. V. 166. P. 97–114.
138. Denisov G.G., Novikov V.V. The nontraditional problems of stability of elastic distributed system // Dynamics of System. 1993. №1. P. 1-20.
139. Denisov G.G., Novikov V.V., Fevralskikh L.N. The Earth's viscoelastic property like reason of Chandler's nutation // Materials Physics and Mechanics. Institute of Problems of Mechanical Engineering (RAS) / St. Peterburg: 2016. Vol. 28. P. 48-52.
140. Efroimsky, M., Lazarian, A. Inelastic dissipation in wobbling asteroids and comets // MNRAS. 2000. 311. P. 269-278.
141. Elsasser W.M. Electric Quadrupole of the Earth // Phys. Rev. 70. 1946. P. 202-212.
142. Euler L. Scientia Navalis seu Tractatus de Construendis ac Dirigendis Navibus, vols. 1 and 2, Petersburg: Acad. sci. 1749. (Reprinted in Euler's Opera Omnia, Series II, vols. 18 and 19, 1967 and 1972.)
143. Euler L. Theoria motus corporum solidorum sen rigidorum // Rostock: Röse. 1765. (Reprinted in Euler's Opera Omnia, Series II, vol. 3.)
144. Euler L. Formulae generalis pro translatione quacunqu corporum rididorum // N. Comm. 1776. T. 20. P. 189–207. (Reprinted in Euler's Opera Omnia, Series II, vol. 9.)
145. Fox J. Boundary layers on rotating spheres and other axisymmetric shapes // NASA, TND-2491, 1964.
146. Gauss C.F. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus // Werke. Leipzig. 1839. Vol. 5. P. 119-193.

147. Gailitis, A., Lielausis, Dement'ev, S., Platacis, E., Cifersons, A., Gerbeth, G., Gundrum, Th., Stefani, F., Christen, M., Hänel, H., Will, G. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility // *Phys. Rev. Lett.* V. 84. 2000. P. 4365-4368.
148. Gibson R.D. The Herzenberg dynamo I, II // *Q. J. Mech. Appl. Math.* V. 21. 1968 P. 243–255, 257-287.
149. Gibson R.D., Roberts P.H. Some comments on the theory of homogeneous dynamos. In *Magnetism and the Cosmos* Edited by: Hindmarsh et al. 1967. P. 108–120.
150. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1995. V. 91. P. 63–75.
151. Hagen, M. and Azevedo, A. Sun-Moon-Earth Interactions with Larger Earthquakes Worldwide Connections. *Open Journal of Earthquake Research.* 2019. V.8. P. 267-298. DOI: 10.4236/ojer.2019.84016.
152. Harris A.W. Tumbling Asteroids // *Icarus.* 1994. V. 107. Issue 1. P. 209-211.
153. Harris A. W., Lupishko D. F. Photometric Lightcurve Observations and Reduction Techniques // *Asteroids II* / Eds. R.P Binzel, T. Gehrels, M. S. Matthews. Univ. of Ariz. 1989. P. 39–53.
154. Herzenberg A. Geomagnetic dynamos // *Philos. Trans. R. Soc. London.* 1958. Ser. A, 250: 543-585
155. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal containing fluid. // *Phil. Trans. Royal Soc. London,* 1895. Vol. 186. P. 469-506.
156. Howarth L. Note on the boundary layer on a rotating sphere // *Phil. Mag.,* 1951. Vol. 42. P. 1308—1315.
157. Jackson E.D., Shaw H.R., Bargar K.E. Calculated geochronology and stress field orientations along the Hawaiian chain. *Earth Planet Sci.Lett.* 1975. V.26. P.145–155.
158. Larmor, J. How Could a Rotating Body Such as the Sun Become a Magnet? // *Reports of the British Association.* 87. 1919. P. 159-160.
159. Love A. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: At the University Press. Vol. 1, 1892. 354 p.
160. Marzari F., Davis D.R., Vanzani V. Collisional evolution of asteroid families // *Icarus.* 1995. V. 113. P. 168–187.

161. Mogi K. Migration of Seismic Activity. Bulletin of the Earthquake Research Institute. 1968. V. 46. P. 53-74.
162. Müller U., Stieglitz R., Horanyi S. The Karlsruhe Dynamo Experiment. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe. 2002. 59 p.
163. Neumann. J., Wigner E. Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. Zeitschrift für Physik, 1928. V. 47. P. 203-220.
164. Newcomb S. On the Dynamics of the Earth's Rotation, with respect to the Periodic Variations of Latitude. - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. 52, 1892. – P. 336-341
165. Novikov V.V., Fevralskikh L.N. On a certain laminar dynamo model // Journal of Physics: Conference Series 918 (2017) 012025.
166. Pearson G.E. Numerical solutions for the time dependent viscous flow between two rotating concentric spheres // J. Fluid. Mech., 1967. Vol. 28. P. 323—336.
167. Poincare H. Sur la precession des corps deformables. Bulletin astronomique, 1910. Vol. 27. P. 321-356.
168. Poinso L. Théorie nouvelle de la rotation des corps. Bachelier, Paris. 1834.
169. Proudman J. The almost rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres // J. Fluid Mech., 1956. Vol. 1. P. 505—516.
170. Roberts P.H., Soward A.M. Dynamo Theory // Annual Review of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 24. P. 459-512.
171. Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D., Starchenko S.V. Maximally-Efficient-Generation Approach in the dynamo theory // Geophys. Astro. Fluid Dynamics. 1990. V. 52. P. 125–139.
172. Saffman P.G. On the fine-scale structure of vector fields convected by a turbulent fluid // Journal of Fluid Mechanics. 1963. Vol. 16. P.545-572.
173. Schlüter A., Biermann L. Interstellar Magnetfelder // Zeitschrift Naturforschung. 1950. Teil A. Vol. 5. P. 237-251.
174. Schrunner M., Schmitt, D., Cameron, R., Hoyng, P. Saturation and time dependence of geodynamo models // Geophys. J. Int. 2010. V. 182. P. 675–681.
175. Sherman S.I. Deformation waves as a trigger mechanism of seismic activity in seismic zones of the continental lithosphere. Geodynamics&Tectonophysics. 2013. V. 4. №2. P. 83–117. DOI: 10.5800/GT-2013-4-2-0093.

176. Shimazaki K., Nakata T. Time-predictable recurrence model for large earthquakes. *Geophys. Res. Lett.* 1980. № 4. P. 279-282.
177. Song X., Richards R.G. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core. *Nature.* 1996. V. 382. N 6588. P. 221-224. DOI: 10.1038/382221a0.
178. Soward, A.M., Jones C.A. The linear stability of the flow in the narrow gap between two concentric rotating spheres // *Q. J. Mech. appl. Math.* 1983. V. 36. P. 19-42.
179. Spence E. J., Reuter K., Forest C. B. A spherical plasma dynamo experiment // *The Astrophysical Journal.* 2009. V. 700. P. 470–478.
180. Stewartson K. On almost rigid rotations. Part 2 // *J. Fluid Mech.*, 1966. Vol. 26. P. 131-144.
181. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *Journal of fluid mechanics*, 1963, vol.17, part 1, p. 1-20.
182. Thomson W., Tait P.G. *Treatise on Natural Philosophy. Part II.* Oxford. 2nd edition, 1883. 527 p.
183. Verhille G., Plihon N., Bourgoin M., Odier P., Pinton J. F. Laboratory Dynamo Experiments // *Space Sci. Rev.* 2010. V. 152. P. 543–564.
184. Wahr J.M. The forced nutation of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth // *Geophys. J.R. Astr.Soc.* 1981. V.64. P.705-727.
185. Weyl H. *Gruppentheorie und Quantenmechanik.* Leipzig, 1931.
186. Wigner E. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspectren.* Vieweg, Braunschweig, 1931.
187. Wu Z., Chen Q., Barosh P., Peng H. and Hu D. Stress rise precursor to earthquakes in the Tibetan Plateau. *Natural Science.* 2013. V. 5. P. 46-55. DOI: 10.4236/ns.2013.58A1006.
188. Zappala V., Cellino A., Dell’Oro A. Physical and Dynamical Properties of Asteroid Families // *Asteroids III.* Univ. of Arizona, Tucson. 2002. P. 619 – 631.
189. <http://ssd.jpl.nasa.gov> (дата обращения 6.02.2017).
190. Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра / Под ред. Б.М. Шустова, Л.В. Рыхловой. - М.: Физматлит, 2010. 384 с.