ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи

Китаев Александр Евгеньевич

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ И СХЕМ НА ИХ ОСНОВЕ

2.2.2. Электронная компонентная база микро- и наноэлектроники,
квантовых устройств

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Оболенский Сергей Владимирович

Нижний Новгород – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования:

Сейчас, в первой половине двадцатых годов XXI века, так же, как и в предшествующие десятилетия, большая часть используемых в промышленности активных радиотехнических элементов - это твердотельные приборы, главным образом полупроводниковые. Для успешной разработки электронных схем, использующих любые элементы (не только активные), необходимо иметь информацию об их свойствах, в частности – о функциональных зависимостях одних параметров от других. Помимо часто используемого графического способа представления такой информации, удобным и достаточно универсальным является формульный способ - в виде математического выражения. Известны относительно простые теоретические модели, позволяющие записать аналитические выражения для характеристик некоторых твердотельных приборов. Примеры таких выражений: формула Шокли для полупроводникового диода и формулы Эберса-Молла, описывающие характеристики биполярного транзистора. Недостатком этих моделей является то, что в расчет не принимается внутреннее сопротивление электронных приборов. Существуют и более сложные модели, например, модель Гуммеля-Пуна для биполярного транзистора, учитывающая дополнительные параметры (в число которых входят внутренние сопротивления). Модель Гуммеля-Пуна (как и один из вариантов модели Эберса-Молла – передаточная модель) обычно используется для численных расчетов, в том числе в программах компьютерного моделирования. Однако представляет интерес не только проведение точных численных расчетов, но и аналитическое решение уравнений, следующих из модели, для описания поведения хотя бы наиболее простых схем, в состав которых входят изучаемые элементы. Эти схемы при дальнейшем развитии теории могут рассматриваться как «подсистемы» в более сложных устройствах. Для аналитического решения уравнений необходимо наличие подходящих функций, изученных и протабулированных. К сожалению, математика не всегда может их предоставить.

Конечно, учесть все значимые параметры при таком решении задачи трудно. Но возможность описать физический процесс или работу устройства посредством аналитических формул является важным достоинством теории, даже если при этом берутся в расчет лишь наиболее существенные черты физического явления. Такое описание позволяет более удобно и наглядно исследовать зависимость явления от параметров и подобрать подходящие режимы работы.

Кроме полупроводникового диода и биполярного транзистора (которые известны уже несколько десятков лет) разрабатываются и новые твердотельные приборы. В 2008 году был получен и исследован первый экспериментальный образец мемристора – нового дискретного радиотехнического элемента (он был теоретически предсказан раньше - в семидесятых годах XX века). Многообещающие применения мемристивных устройств и их интеграция с комплементарными структурами «металл-окисел-полупроводник» (КМОП) делают весьма актуальным изучение электрических цепей, в состав которых мемристоры входят наряду с обычными дискретными элементами. При математическом моделировании работы этих приборов, обладающих свойством гистерезиса, приходится использовать численные расчеты, но подходы, примененные для описания диодных и транзисторных схем, также оказываются полезными и при описании схем с мемристорами (применение пороговых функций, а также функции Ламберта).

Цели и задачи диссертационной работы:

Целью работы является изучение характеристик твердотельных приборов и применение полученных выражений к моделированию радиотехнических схем, в состав которых входят эти приборы.

Для достижения цели диссертации поставлены следующие задачи:

1) Вывести аналитическое выражение для тока через полупроводниковый диод, учитывающее наличие его внутреннего сопротивления и разработать алгоритм для оценки параметров, входящих в данное выражение.

2) Используя тот факт, что биполярный транзистор является комбинацией двух *p-n* переходов, получить аналитические выражения для его характеристик (учитывающие наличие внутренних сопротивлений этих переходов).

3) Получить выражения для токов в основных разновидностях усилительных схем, использующих биполярные транзисторы. Сравнить результаты расчета по этим выражениям с экспериментом, а также с результатами моделирования в компьютерной системе «OrCAD».

4) Провести расчет нелинейных генераторных устройств, в состав которых входят данные усилительные схемы.

5) Исследовать и математически описать последовательное соединение нового радиотехнического элемента мемристора с традиционными дискретными элементами - резистором, полупроводниковым диодом, конденсатором и катушкой индуктивности.

Объектом исследования являются твердотельные приборы: полупроводниковые диоды, биполярные транзисторы и мемристоры, а также схемы, использующие биполярные транзисторы и мемристоры.

Предметом исследования являются зависимости токов в этих полупроводниковых приборах от напряжений (характеристики диодов и транзисторов, а также мемристоров и участков цепей, в которых мемристоры соединены последовательно с каким-то из традиционных дискретных элементов).

Метод исследования. Для решения поставленных задач использовалась математическая теория одной из специальных функций (функции Ламберта), пакет символьной математики (Wolfram Mathematica), а также система компьютерного моделирования OrCAD Lite.

Научная новизна работы.

1. Представлены аналитические формулы для коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (описывающие и режим отсечки, и усилительный режим, и режим насыщения). В этих формулах используется специальная функция Ламберта. Также представлены формулы для характеристик биполярного транзистора (при учете внутреннего сопротивления *p-n* переходов), использующие эту же функцию. Это дает возможность составить математическую модель (с использованием аналитических формул) и для самого усилителя, и для устройств, куда усилитель входит в качестве подсистемы с целью более глубокого понимания работы схем и оптимизации их параметров.

2. Предложена процедура оценки параметров диода, опирающаяся на метод наименьших квадратов. Обычно этот метод применяется при подборе параметров линейных функций. Здесь же подобный метод использован для случая логарифмической зависимости. Упоминания в литературе о таком варианте метода наименьших квадратов автору неизвестны. Применение этой методики дает возможность оценки внутренних параметров диода на основе наборов экспериментальных данных.

3. Составлены и исследованы дифференциальные уравнения для транзисторного симметричного триггера и для мультивибратора. В известной автору научной литературе подобных уравнений нет. Такой способ описания устройств дает возможность привлечь к исследованиям хорошо разработанный математический аппарат теории дифференциальных уравнений.

4. Также с использованием полученной автором характеристики для усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (при наличии эмиттерной стабилизации) составлено дифференциальное уравнение для транзисторного аналога генератора Ван-дер-Поля (являющееся нелинейным уравнением второго порядка). Получены численные решения, соответствующие гармоническому режиму, режиму с сильными нелинейными искажениями и квазихаотическому режиму.

Исследованы другие усилительные устройства, в состав которых в качестве подсистемы входит усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером (в том числе двухтактные усилители). Новизна одного из рассмотренных устройств подтверждена патентом на полезную модель (N 192244).

5. Составлены системы дифференциальных и конечных уравнений, описывающие последовательное соединение нового радиотехнического элемента мемристора (который считается прибором, управляемым напряжением) с другими дискретными элементами - резистором, полупроводниковым диодом, конденсатором и катушкой индуктивности. Получены численные решения этих уравнений (при этом для моделирования мемристора использовались пороговые функции, делающие численный расчет более удобным и быстрым).

6. В систему уравнений, описывающую последовательное соединение мемристора и полупроводникового диода, добавлено уравнение, описывающее возможный механизм формовки мемристора.

Теоретическая и практическая значимость полученных в работе результатов заключается в следующем:

-полученные формулы могут быть полезны для расчетов исследованных устройств в разных режимах (при этом учитывается нелинейность приборов). Важно иметь в виду: разница между током через полупроводниковый диод, вычисленным с помощью стандартной формулы Шокли, и током, вычисленным при учете внутреннего сопротивления диода, резко растет при увеличении приложенного напряжения (это хорошо видно на рисунке 2.1 во второй главе). Поэтому уже при небольшом превышении прямого напряжения над величиной, примерно равной 0.6 В для кремниевых диодов, эти токи (вычисленные с помощью разных формул) отличаются в разы и десятки раз (для графика на рисунке 2.1 отношение токов при напряжении 0.6 В составляет 1.2, при 0.7 В – 2.5, при 0.8 В – 9.7). Естественно, заход в область больших прямых напряжений, где отношение токов стремится к бесконечности, ограничен применимостью этих моделей – диод может просто разрушиться. То же самое касается коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером: ток, вычисленный с учетом явления насыщения в разы меньше, чем ток, экспоненциально зависящий от напряжения база-эмиттер (без учета внутреннего сопротивления переходов транзистора и сопротивления резисторов, входящих в состав усилителя).

-рассмотренные примеры устройств, для которых проводились расчеты, после доработки сами по себе могут оказаться полезными в качестве узлов радиоэлектронной аппаратуры.

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с экспериментальными данными и с результатами компьютерного моделирования в системе «OrCAD».

Положения, выносимые на защиту:

1) Формула для коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером в случае отсутствия эмиттерной стабилизации (а также ее обобщения при учете сопротивлений в цепи эмиттера и базы).

2) Приближенные выражения для напряжения входного сигнала усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером, соответствующие границам усилительного режима.

3) Алгоритм для нахождения параметров, входящих в формулу вольт-амперной характеристики полупроводникового диода при учете омического сопротивления его внутренней области.

4) Дифференциальные уравнения для симметричного триггера и мультивибратора, их исследование и численное решение (для мультивибратора). Трансцендентное уравнение общего вида для нахождения состояний равновесия триггера.

5) Системы дифференциальных и конечных уравнений, описывающих последовательное соединение мемристора, управляемого напряжением, с другими дискретными элементами: резистором, полупроводниковым диодом, катушкой индуктивности и конденсатором.

Апробация результатов. Основные положения диссертационной работы обсуждались на конференциях в Нижегородском университете им. Н.И.Лобачевского (XX, XXV и XXVII Научные конференции по радиофизике) и в МИРЭА (конференции «Интерматик» в 2016 и 2018 годах). Доклады на конференции «Интерматик» были отмечены дипломами.

Исследования, на основе которых написана (в соавторстве) статья [А9], выполнены в рамках научной программы Национального центра физики и математики (направление № 9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах»).

Публикации. По тематике диссертации опубликованы статьи в журналах, входящих в перечень ВАК:

А1. *Китаев А.Е.* Аналитическое представление характеристик биполярных транзисторов //Радиотехника 2017 N10 С.189-194.

А2. *Китаев А.Е.* Использование метода наименьших квадратов для подбора параметров вольт-амперной характеристики диода //Труды НГТУ им. Р.Е.Алексеева 2018 N2 C.30-34.

А3. *Китаев А.Е.* Математическое моделирование процессов в транзисторных усилителях и генераторах //Нелинейный мир 2018 N4 C.41-44.

А4. *Китаев А.Е.* Приложение функции Ламберта к расчету некоторых транзисторных схем //Нелинейный мир 2018 N5 C.16-22.

А5. *Китаев А.Е.* Патент на полезную модель (N 192244)

А6. *Китаев А.Е.* Сравнение различных подходов к моделированию транзисторных усилителей //Радиотехника 2020 N1 C.74-80.

А7. *Китаев А.Е.* Вычисление границ усилительного режима и некоторые сопутствующие вопросы теории усилителя с общим эмиттером //Радиотехника 2020 N10 C.70-77.

А8. *Китаев А.Е.* Дифференциальные уравнения для триггера и мультивибратора //Радиотехника и электроника 2021 T66 N5 C. 483-489.

А9. *Китаев А.Е., Белов А.И., Гусейнов Д.В., Михайлов А.Н.* Последовательное соединение мемристора с другими дискретными элементами: резистором, полупроводниковым диодом, катушкой индуктивности и емкостью //Радиотехника и электроника 2023 T68 N3 C.295-304.

Содержание разделов диссертации.

Объем диссертации составляет 159 страниц, включая 77 рисунков. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка.

Глава 1: Дан краткий обзор развития теоретических моделей биполярного транзистора (начиная с уравнений Эберса-Молла).

Глава 2: Представлено выражение, уточняющее формулу Шокли для вольт-амперной характеристики полупроводникового диода (при этом используется специальная функция Ламберта). Предложены аналитические выражения для характеристик биполярного транзистора (с использованием этой же функции). Показано, что с помощью данных соотношений можно произвести расчет усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером в ключевом и усилительном режиме, а также в режиме насыщения. Получены аналитические формулы для зависимостей тока коллектора и напряжения коллектор-эмиттер от входного напряжения (при этом учитывалось стабилизирующее сопротивление в цепи эмиттера). Замечание: усилитель на основе включения транзистора по схеме с общим эмиттером в тексте диссертации иногда называется «усилителем ТОЭ». То же самое относится к усилителю на основе включения транзистора по схеме с общей базой («усилителю ТОБ»).

Метод наименьших квадратов применен для подбора параметров нелинейной модели полупроводникового диода: тока насыщения, температурного потенциала и внутреннего сопротивления диода (омического сопротивления области с меньшей концентрацией примесей). Последний параметр применяется в уравнении, уточняющем экспоненциальную формулу Шокли в области больших прямых токов, но рассмотренный метод применим и в случае равенства этого параметра нулю (когда уточненное выражение переходит в формулу Шокли).

Проведено сравнение полученных аналитических выражений для коллекторного тока различных вариантов транзисторного усилителя с экспериментальными данными и с результатами компьютерного моделирования в системе OrCAD.

В заключительных параграфах второй главы «диодная» функция, на основе которой записаны уравнения характеристик, представлена в форме, более удобной для расчета границ рабочего квазилинейного режима, а также для учета ряда дополнительных параметров, например сопротивления в цепи базы.

Глава 3: Рассмотрено применение приведенных в главе 2 формул к расчету ряда транзисторных схем. В том числе рассмотрены решения для схем, обладающих симметрией – двухтактного усилителя на комплементарной паре транзисторов и симметричного триггера. Описана новая модель двухтактного усилителя мощности.

В качестве иллюстрации использования полученных выражений для усилительных схем составлено дифференциальное уравнение для транзисторного аналога генератора Ван-дер-Поля и произведено его численное решение.

Глава 4: В заключительной главе диссертации рассматриваются новые дискретные радиотехнические элементы – мемристоры (резисторы с памятью). Сделан переход от часто используемых кусочно-заданных функций модели мемристора с переключением порогового типа к функциям, описываемым единой формулой (при этом использованы пороговые функции, чье поведение похоже на поведение «усилительных» функций, введенных в предыдущих главах). Получены и численно решены системы уравнений для участков цепи, в которых мемристор включен последовательно с другими дискретными элементами – обычным резистором, диодом, катушкой индуктивности и конденсатором. Для случая последовательного соединения мемристора и резистора проведено сравнение расчетных данных с экспериментом. Подробно исследован случай последовательного соединения мемристора и полупроводникового диода (с использованием диодной характеристики, которая рассмотрена в главе 2). Изложены предположения, касающиеся математического описания и физической интерпретации влияния процесса формовки на мемристивную систему.

В заключении подведены итоги работы: результаты расчетов близки к результатам экспериментов, предложенные формулы достаточно точны и адекватно описывают работу целого ряда радиотехнических схем.

ГЛАВА 1

Биполярный транзистор: обзор исторического развития и современного состояния теоретических моделей.

1.1 Уравнения Эберса-Молла

В 1947 году был изобретен биполярный транзистор. В последующие годы появились статьи с математическими моделями, описывающими его работу, в том числе и в режиме большого сигнала (именно на этот режим здесь будет обращено основное внимание). В 1954 г. были опубликованы формулы Эберса-Молла [1]. Изложим коротко данную теорию. Рассмотрим вначале уравнения так называемой «инжекционной модели». Они могут быть получены из следующей эквивалентной схемы, заменяющей реальный биполярный транзистор (см. рис.1.1). В схеме использованы два полупроводниковых диода и два источника тока. Диоды соединены своими «положительными» концами (для случая *n-p-n* транзистора). Отметим: если бы мы соединили так два обычных полупроводниковых диода, мы не получили бы «транзисторный эффект», ведь обычные диоды независимы друг от друга. Но «внутритранзисторные» диоды не являются независимыми, они связаны. Эта связь моделируется источниками тока (в правой части рисунка 1.1). Источник тока на «коллекторной» стороне схемы описывает ток, который появился в коллекторе за счет инжекции (впрыскивания) носителей заряда из эмиттера. А источник тока на «эмиттерной» стороне – ток за счет зарядов, впрыскиваемых из коллектора.

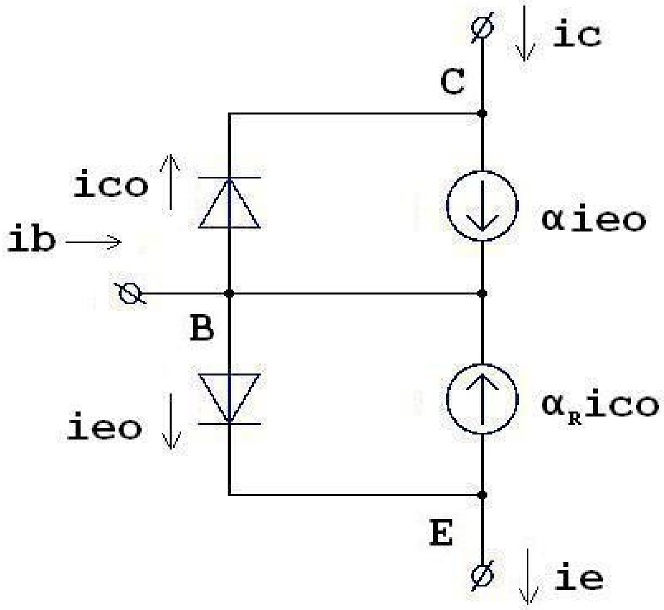


Рис. 1.1 Эквивалентная схема для инжекционной модели Эберса-Молла.

Уравнения для схемы, изображенной на рис. 1.1 можно записать, используя законы Кирхгофа. Из условия для токов в узле *E* следует:

$$i_e = i_{e0} - \alpha_R i_{c0}. \qquad (1.1)$$

Из аналогичного условия для узла *C* следует:

$$i_c = -i_{c0} + \alpha i_{e0}. \qquad (1.2)$$

Здесь α и α_R – коэффициенты передачи эмиттерного и коллекторного тока.

Если весь транзистор считать одним «большим» узлом, мы получим соотношение, связывающее «внешние» токи:

$$i_b + i_c = i_e. \qquad (1.3)$$

Подставляя в (1.3) выражения (1.1) и (1.2), получим:

$$i_b = i_{e0}(1-\alpha) + i_{c0}(1-\alpha_R). \qquad (1.4)$$

Выразим токи i_{e0} и i_{c0} в соотношениях (1.1) и (1.2) через формулу Шокли для идеального *p-n* перехода:

$$\begin{aligned} i_{e0} &= I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1), \\ i_{c0} &= I_{c0}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь V_t – температурный потенциал *p-n* перехода, равный произведению постоянной Больцмана k на абсолютную температуру T и на величину, обратную заряду электрона ($V_t=kT/e$), I_{eo} и I_{co} – токи насыщения для эмиттерного и коллекторного перехода. U_{be} и U_{bc} – напряжения база-эмиттер и база-коллектор.

Подставив эти соотношения в выражения (1.1) и (1.2), мы получим уравнения инжекционной модели Эберса-Молла:

$$\begin{aligned} i_c &= \alpha I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - I_{c0}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1), \\ i_e &= -\alpha_R I_{c0}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1) + I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тут можно отметить, что если направление эмиттерного тока i_e на рис. 1.1 сменить на противоположное, то уравнения (1.6) будут выглядеть несколько более симметрично (именно в таком виде их приводят в ряде источников).

Данные уравнения можно записать и в следующей форме, явно выделив слагаемые αi_{e0} и αi_{c0} (это токи, которые появляются в результате инжекции):

$$
\begin{aligned}
&i_c = \alpha i_{e0} - I_{c0}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1),\\
&i_e = -\alpha_R i_{c0} + I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1),\\
&i_{e0} = I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1),\\
&i_{c0} = I_{c0}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1).
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Помимо инжекционной модели часто используется передаточная (или переходная) модель Эберса-Молла (Transient model). Для того, чтоб перейти к ней, подчиним коэффициенты передачи и токи насыщения соотношению обратимости (см. [2]):

$$\alpha_R I_{c0} = \alpha I_{e0}.$$

Обозначим это произведение следующим образом:

$$\alpha_R I_{c0} = \alpha I_{e0} = I_{S0}.$$

Тогда уравнения инжекционной модели (1.6) запишутся так:

$$
\begin{aligned}
&i_c = I_{S0}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - \frac{I_{S0}}{\alpha_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1),\\
&i_e = -I_{S0}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1) + \frac{I_{S0}}{\alpha}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1).
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Введем параметр β (коэффициент усиления для прямого включения транзистора):

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta + 1}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{1 - \alpha}. \tag{1.9}$$

Точно также введем параметр β_R (коэффициент усиления для обратного включения):

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\beta_R + 1}{\beta_R}, \quad \beta_R = \frac{1}{1-\alpha_R}. \tag{1.10}$$

Используя эти параметры, выражения (1.8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} i_c &= I_{S0}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} - \frac{I_{S0}}{\beta_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1), \\ i_e &= I_{S0}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} + \frac{I_{S0}}{\beta}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Это – уравнения передаточной модели Эберса-Молла. В выражения для обоих токов входит слагаемое, равное произведению тока насыщения на фигурную скобку с разностью «экспоненциальных множителей Шокли». Его можно интерпретировать как ток, соответствующий единому для обоих переходов источнику тока. Назовем его «полным током» i_n (тут нужно отметить, что, в [2] «полным током» названа величина, противоположная по знаку только что определенной). Уравнениям передаточной модели соответствует эквивалентная схема, изображенная на рисунке 1.2.

Ток, порождаемый источником в правой части рисунка 1.2, определяется следующей формулой:

$$I_{S0}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} = i_n.$$

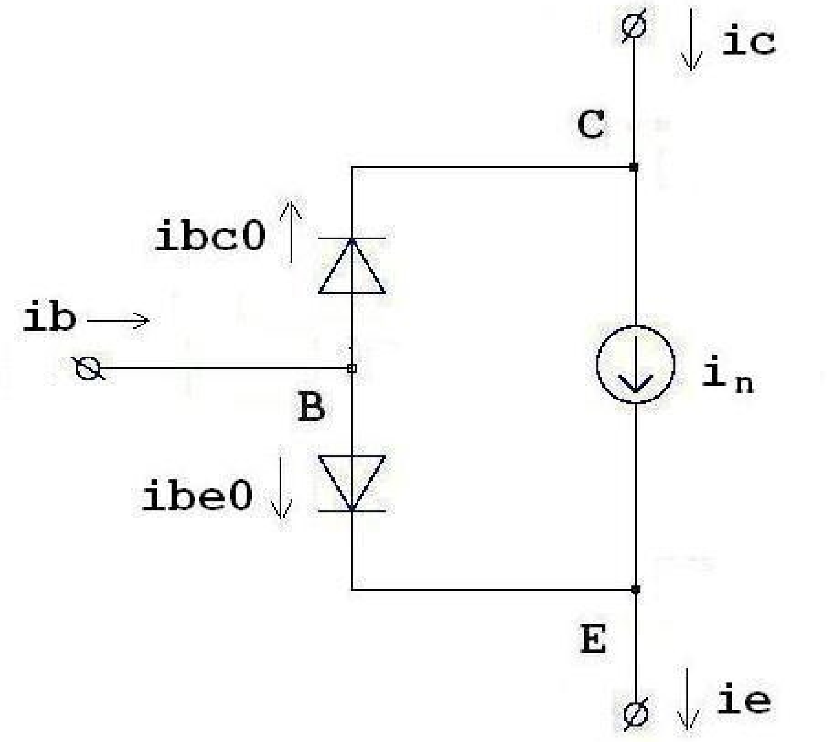


Рис. 1.2 Эквивалентная схема для передаточной модели Эберса-Молла.

Запишем токи через *p-n* переходы в левой части рисунка:

$$i_{bc0} = \frac{I_{S0}}{\beta_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1),$$

$$i_{be0} = \frac{I_{S0}}{\beta}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1). \qquad (1.12)$$

Базовый ток в передаточной модели выражается через токи коллектора и эмиттера (1.11) следующим образом:

$$i_b = i_e - i_c = \frac{I_{S0}}{\beta}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) + \frac{I_{S0}}{\beta_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1). \qquad (1.13)$$

1.2 Уравнение Шокли для идеального *p-n* перехода

Приведенные выше уравнения для токов в биполярном транзисторе ((1.6), (1.11) и (1.12)) используют формулу Шокли для идеального *p-n* перехода. Остановимся на получении этой формулы. При этом можно следовать методу, изложенному в книге [3], где используется тот факт, что через переход протекают токи нескольких сортов с разной зависимостью от напряжения (это не единственно возможный способ рассуждений). Пусть I_{nr} – ток электронов, рекомбинирующих в области перехода, а I_{ng} – ток электронов, появляющихся за счет тепловой генерации (то есть за счет переброса электронов из валентной зоны в зону проводимости под действием тепловых факторов). Первый ток зависит от приложенного к переходу напряжения U:

$$I_{nr} = I_{nr}(0)e^{\frac{eU}{kT}} = I_{nr}(0)e^{\frac{U}{V_t}}.$$

Здесь $I_{nr}(0)$ – это ток рекомбинации при нулевом напряжении. Таким же образом (нулевым параметром в скобках) мы будем помечать и другие виды токов при нулевом напряжении.

Второй ток (ток генерации) от напряжения не зависит:

$$I_{ng} = I_{ng}(0).$$

Сложим эти два электронных тока:

$$I_n(U) = I_{nr}(0)e^{\frac{eU}{kT}} + I_{ng}(0).$$

При нулевом напряжении мы имеем равновесную ситуацию (взаимную компенсацию потоков частиц). Поэтому

$$I_{nr}(0) = -I_{ng}(0).$$

Вследствие этого выражение для электронного тока записывается следующим образом:

$$I_n(U) = I_{nr}(0)(e^{\frac{eU}{kT}} - 1).$$

Все эти рассуждения можно повторить для дырочного тока, также состоящего из двух частей: I_{pr} – ток дырок, рекомбинирующих в области перехода, и I_{pg} – ток дырок, появляющихся за счет тепловой генерации. Их сумма записывается следующим образом:

$$I_p(U) = I_{pr}(0)(e^{\frac{eU}{kT}} - 1).$$

Суммируя электронный и дырочный токи (каждый из которых состоит из двух компонент), мы получим выражение для общего тока:

$$I(U) = [I_{nr}(0) + I_{pr}(0)](e^{\frac{eU}{kT}} - 1).$$

Это есть формула Шокли. Величину в квадратных скобках обычно называют током насыщения и обозначают как I_s:

$$I(U) = I_S(e^{\frac{eU}{kT}} - 1). \qquad (1.14)$$

Аналогичную формулу можно получить и для перехода полупроводник-металл [4]. Различные приближения (диффузионное и диодное) приводят к одинаковой зависимости от напряжения.

В реальных условиях в знаменателе показателя экспоненты за счет геометрических факторов (см. [4]) возможно появление «коэффициента неидеальности» n:

$$I(U) = I_S(e^{\frac{eU}{nkT}} - 1). \qquad (1.15)$$

Замечание: коэффициент неидеальности (в качестве множителя при температурном потенциале) может быть учтен и в уравнениях, описывающих работу биполярных транзисторов (уравнения (1.6) и (1.11)).

1.3 Обобщения модели биполярного транзистора

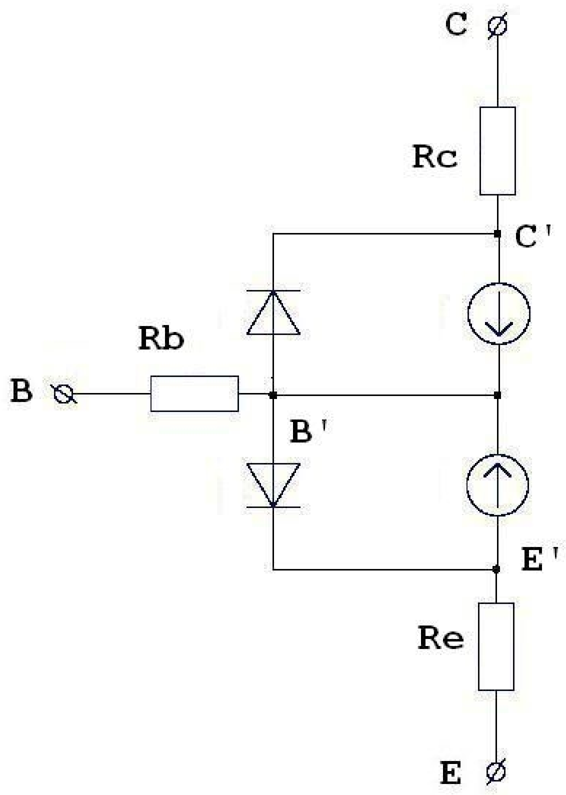


Рис. 1.3 Учет внутренних сопротивлений в инжекционной модели Эберса-Молла.

Модель идеального *p-n* перехода (идеального диода) может быть обобщена посредством учета внутреннего сопротивления диода (на эквивалентной схеме это был бы резистор, включенный последовательно с «идеальным полупроводниковым диодом»). Аналогично могут быть учтены внутренние сопротивления двух *p-n* переходов, входящих в состав биполярного транзистора, а также внутреннее сопротивление базы. На рисунке 1.3 показана обобщенная таким образом инжекционная модель Эберса-Молла, а на рисунке 1.4 – передаточная модель Эберса-Молла. Напомню, что в формулы Эберса-Молла, приведенные выше (см. (1.6) и (1.11)), эти сопротивления не входят.

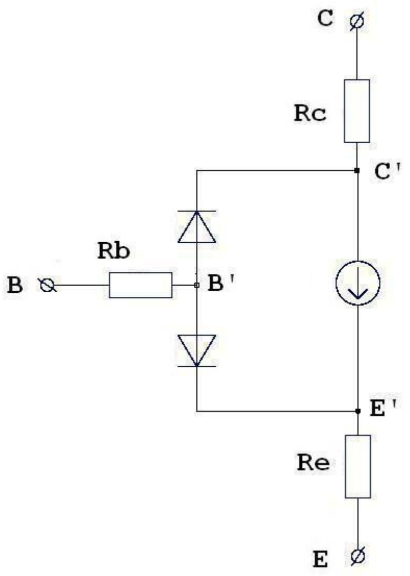


Рис. 1.4 Учет внутренних сопротивлений в передаточной модели Эберса-Молла.

Следующий этап обобщения приведенных выше моделей – это учет динамических свойств биполярного транзистора. Также можно начать с полупроводникового диода и учесть его емкость. На эквивалентной схеме это привело бы к появлению конденсатора, включенного параллельно с идеальным *p-n* переходом. Эту дополнительную емкость принято разделять на две части (см., например, [5]): барьерную емкость перехода (зависящую от напряжения) и диффузионную емкость (зависящую от тока). Так что, если бы мы привели здесь эквивалентную схему диода с дополнительным конденсатором, этот конденсатор состоял бы из двух параллельно включенных частей, емкость которых определялась бы разными формулами.

Для барьерной емкости в [4] и [5] используются выражения, которые после небольших преобразований (акцентируя внимание на зависимости от напряжения) можно записать в виде следующей формулы:

$$C_B = C_0 \frac{1}{(1+\dfrac{u}{\varphi})^{\gamma}}. \qquad (1.16)$$

Здесь C_0 – емкость перехода при нулевом напряжении, φ – величина потенциального барьера (считается положительным числом), γ равно ½ (для резких переходов). В случае плавного перехода показатель степени другой: γ=1/3. Напряжение *u* нужно считать положительным, если его «минус» подсоединен к «дырочной» стороне перехода, а «плюс» - к «электронной» ([4]). При этом полярность приложенного напряжения совпадает с полярностью потенциального барьера. Такое напряжение обычно называют «обратным». Данную формулу можно записать и в следующем виде (используя коэффициент $\eta_0 = C_0 \varphi^{\gamma}$):

$$C_B = \eta_0 \frac{1}{(\varphi + u)^{\gamma}}. \tag{1.17}$$

Так как «плюс» барьерного напряжения находится на «электронной» стороне перехода, положительное «обратное» напряжение фактически суммируется с барьерным (которое считается положительным). При подаче же «прямого» напряжения величина *u* отрицательна, и возможен случай, когда знаменатель обратится в ноль. При этом емкость, определяемая формулами (1.16) и (1.17), становится бесконечной. Если γ равно ½ , то при дальнейшем продвижении в область отрицательных напряжений знаменатель становится мнимым (или же отрицательным, если γ равно 1/3) . Ясно, что допущения, которые были приняты при выводе соответствующих формул для барьерной емкости, в какой-то области напряжений перестают быть справедливыми. Кроме того, при подключении прямого напряжения более существенную роль играет диффузионная емкость (см. [5]). Таким образом, начиная с некоторого отрицательного значения параметра u (ему, напомню, соответствует «прямое» напряжение), барьерную емкость перехода можно не учитывать (например, считая ее константой, причем меньшей, чем диффузионная емкость). В версии SPICE, которая интегрирована в приложение OrCAD (модуль PSPICE A/D – см.

[6]) при вычислении барьерной емкости используют «кусочную» формулу (где при приближении к «полюсу» знаменатель заменяют постоянным значением). Ее можно записать так:

$$C_B = \begin{cases} C_0 \dfrac{1}{(1+\dfrac{u}{\varphi})^{\gamma}}, & u > -0.8\varphi, \\ C_0 \dfrac{1}{(0.2)^{\gamma}}, & u \le -0.8\varphi. \end{cases}$$

Диффузионную емкость, зависящую от тока через прибор i, от температурного потенциала V_t и от τ (времени «пролета» электронов через переход), можно выразить следующей формулой [5] (она же используется в модуле PSPICE – см. [6]):

$$C_D = \tau \frac{i(u)}{V_t}. \tag{1.18}$$

В обобщенных моделях транзистора тоже учитывают емкости p-n переходов, входящих в его состав. На рисунках 1.5 и 1.6 эти емкости изображены в виде конденсаторов C_1 и C_2, включенных параллельно с идеальными полупроводниковыми диодами. Каждый из этих конденсаторов имеет барьерную и диффузионную часть, включенные параллельно (для меньшей громоздкости на рисунках они не отображены).

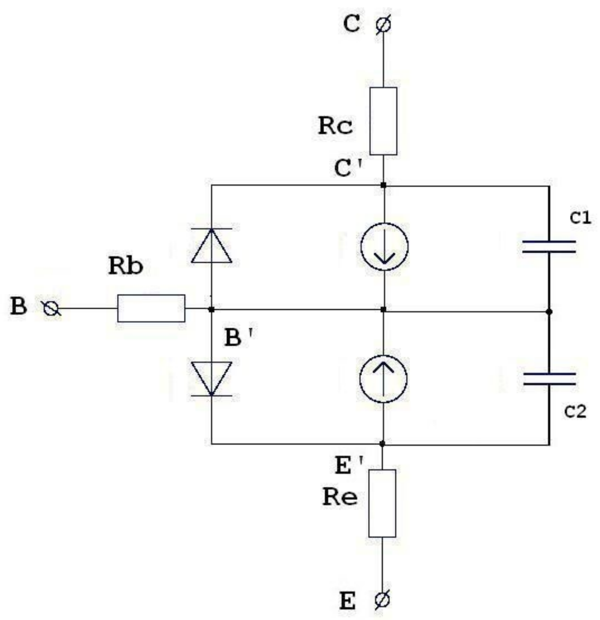


Рис. 1.5 Учет емкостей p-n переходов в инжекционной модели Эберса-Молла.

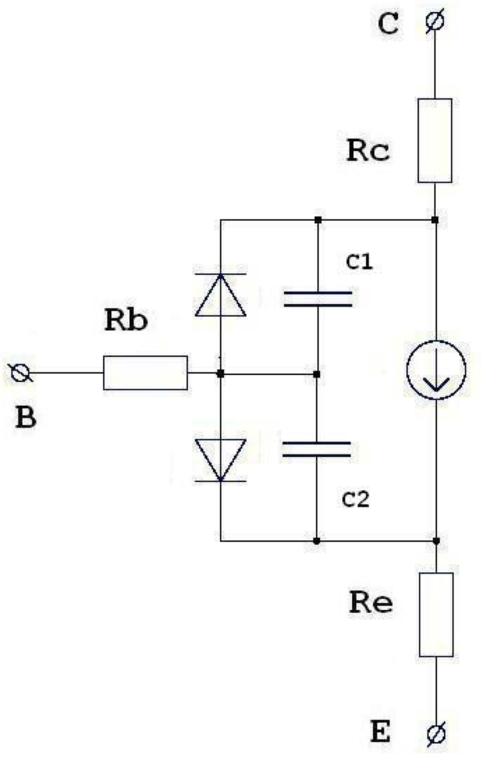


Рис. 1.6 Учет емкостей в передаточной модели Эберса-Молла.

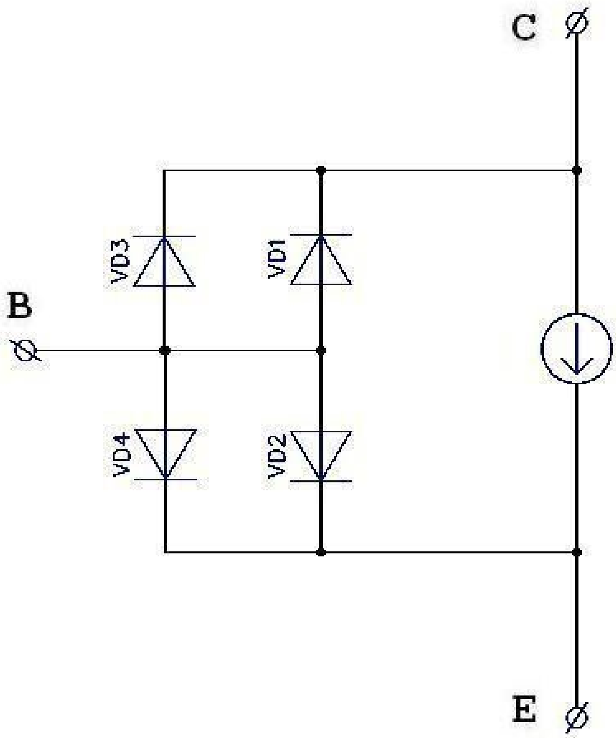


Рис. 1.7 Дополнительные диоды для учета рекомбинации в переходной модели Эберса-Молла.

В 1970 году Гуммель и Пун [7] предложили более сложную модель биполярного транзистора, где учитывались так называемые «эффекты второго порядка». Отправной точкой для этой модели послужила передаточная модель Эберса-Молла. Для того, чтоб учесть ток рекомбинации в области объемного заряда, предлагалось считать базовый ток суммой (суперпозицией) токов пары идеальных и пары неидеальных диодов (в двух последних учитывался коэффициент неидеальности и, кроме того, они имели свои собственные токи насыщения). Вместо (1.13) базовый ток определялся следующей формулой:

$$i_b = \frac{I_{S0}}{\beta}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) + I_1(e^{\frac{U_{be}}{n_e V_t}} - 1) +$$

$$+ \frac{I_{S0}}{\beta_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1) + I_2(e^{\frac{U_{be}}{n_c V_t}} - 1). \qquad (1.19)$$

Здесь использованы дополнительные параметры: коэффициенты неидеальности n_e, n_c и токи насыщения I_1, I_2. Фактически это усложнение соответствует параллельному подключению на схеме рисунка 1.2 двух дополнительных диодов VD_3, VD_4 (см. рис. 1.7). При этом диоды VD_1 и VD_2 соответствуют слагаемым, вошедшим в формулу (1.13).

Формулы для коллекторного и эмиттерного тока при учете двух дополнительных диодов приобретают следующий вид:

$$i_c = I_{S0}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} - \frac{I_{S0}}{\beta_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1) -$$

$$- I_2(e^{\frac{U_{be}}{n_c V_t}} - 1),$$

$$i_e = I_{S0}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} + \frac{I_{S0}}{\beta}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) +$$

$$+ I_1(e^{\frac{U_{be}}{n_e V_t}} - 1).$$

Для учета эффекта Эрли ток I_{s0} в слагаемых, куда входят фигурные скобки (то есть в выражении для «полного тока», взятом с обратным знаком), заменяется следующим выражением:

$$\frac{I_{S0}}{q_B} = \frac{I_{S0}}{\frac{q_1}{2} + \frac{\sqrt{q_1{}^2 + 4q_2}}{2}},$$

$$q_1 = 1 + \frac{U_{be}}{|V_B|} + \frac{U_{bc}}{|V_A|},$$

$$q_2 = \frac{I_{S0}}{I_{KF}}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) + \frac{I_{S0}}{I_{KR}}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1). \tag{1.20}$$

Здесь V_A и V_B – напряжения Эрли, а I_{KF} и I_{KR} – так называемые «токи излома». Эффект Эрли исчезает при бесконечно больших значениях этих параметров.

В итоге уравнения для коллекторного и эмиттерного тока записываются следующим образом:

$$i_c = \frac{I_{S0}}{q_B}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} - \frac{I_{S0}}{\beta_R}(e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1) -$$

$$- I_2(e^{\frac{U_{be}}{n_c V_t}} - 1),$$

$$i_e = \frac{I_{S0}}{q_B}\{(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) - (e^{\frac{U_{bc}}{V_t}} - 1)\} + \frac{I_{S0}}{\beta}(e^{\frac{U_{be}}{V_t}} - 1) +$$

$$+ I_1(e^{\frac{U_{be}}{n_e V_t}} - 1),$$

$$q_B = \frac{q_1}{2} + \frac{\sqrt{q_1{}^2 + 4q_2}}{2}.$$

Параметр q_B называется «нормированным зарядом в базе» (см.[8]).Параметры q_1 и q_2, через которые он выражается, определяются выражениями (1.20).

Надо отметить, что передаточная модель Эберса-Молла (которая считается более удобной для численных расчетов) и обобщающая ее модель Гуммеля-Пуна используются уже упомянутой выше программой SPICE (модификация данной программы, как тоже упоминалось, включена в приложение OrCAD). Здесь рассмотрены лишь основные параметры модели Гуммеля-Пуна. Полное же их количество составляет 65 (см. [8]). Более точные модели VBIC и HICUM содержат еще большее количество параметров (86 и 114, также см. [8]). Все эти модели используются для компьютерных расчетов. В настоящей работе далее будут получены и исследованы аналитические формулы, куда входят лишь наиболее существенные из этих параметров.

ГЛАВА 2

Получение аналитических формул, учитывающих внутреннее сопротивление диода и транзистора.

2.1 Уравнение для диодной характеристики.

Здесь мы займемся выводом выражения для вольт-амперной характеристики реального диода, в котором учитывается внутреннее сопротивление диода. Если взять за основу выражение [5]

$$I = I_s(e^{\frac{U}{V_t}-\frac{IR}{V_t}} - 1), \qquad (2.1)$$

уточняющее формулу Шокли (здесь I – ток через диод, входящий и в левую, и в правую часть данного выражения, U – напряжение на диоде, I_s – ток насыщения, V_t - температурный потенциал, а R – омическое сопротивление области диода с малой концентрацией примесей [9]), можно легко выразить напряжение через ток:

$$U = V_t \ln(\frac{I}{I_s} + 1) + IR. \qquad (2.2)$$

Сразу отметим, что если параметр R в выражении (2.1) равен нулю, это выражение переходит в стандартную формулу Шокли.

Явное выражение для тока (которое обращает формулу (2.2)) найти сложнее. Для этой цели можно использовать специальную функцию Ламберта $W(x)$, с 80-х годов применяемую в компьютерных системах символьной математики [10] (в частности, в программном пакете “Mathematica” данная функция обозначается как “ProductLog”). Трансцендентное уравнение

$$e^{-cy} = a_0 y - a_0 r, \qquad (2.3)$$

где y - неизвестная величина, а c, a_0 и r – некоторые параметры, имеет решение, использующее $W(x)$:

$$y = r + \frac{1}{c} W\left(\frac{ce^{-cy}}{a_0}\right).$$

Приводя уравнение (2.2) к форме (2.3) и решая его относительно I, можно получить следующую формулу для тока:

$$I = D(U) = -I_s + \frac{V_t}{R} W\left(e^{\frac{U}{V_t}} I_s \frac{R}{V_t} e^{I_s \frac{R}{V_t}}\right). \qquad (2.4)$$

Символ «D» - это обозначение для функции, которую можно назвать «диодной» или «обратной диодной» (если считать, что «прямая диодная» функция выражает напряжение через ток). В дальнейшем это обозначение будет применяться для того, чтобы запись некоторых формул была более компактной.

График, соответствующий этой кривой, обозначен на рис.2.1 сплошной линией (пунктирная линия соответствует формуле Шокли). Из графика видно, что экспоненциальная кривая Шокли имеет более резкий рост. Кривая (2.4), соответствующая учету ненулевого внутреннего сопротивления R, при больших значениях прямого напряжения асимптотически приближается к следующей прямой линии:

$$I \approx \frac{U}{R} + \frac{V_t}{R} \ln\left(I_s \frac{R}{V_t}\right). \qquad (2.5)$$

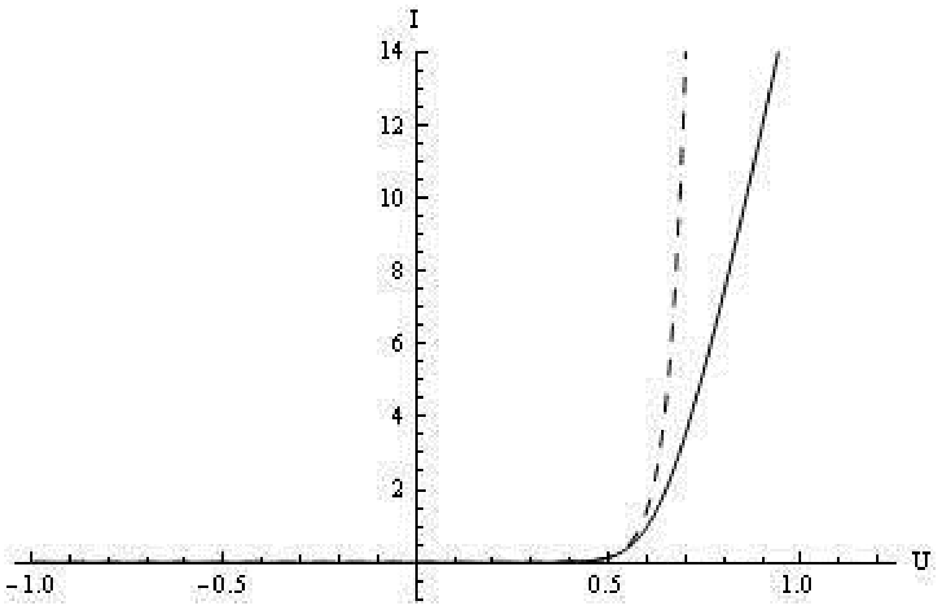


Рис. 2.1 Графики вольт-амперных характеристик диода (сплошная линия – с учетом ненулевого внутреннего сопротивления R, пунктир – без учета R, в соответствии с формулой Шокли).

Ясно, что в формулах этого параграфа может быть учтен коэффициент неидеальности n. Для этого в формулы (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5) вместо величины V_t нужно подставить nV_t. Далее мы эту величину (nV_t) будем обозначать буквой φ и называть «температурным потенциалом с учетом коэффициента неидеальности».

2.2 Последовательное соединение диода и резистора.

Рассмотрим участок цепи, на котором последовательно соединены полупроводниковый диод (обладающий внутренним сопротивлением) и резистор. Для нахождения тока, протекающего через этот участок, воспользуемся выражением (2.4).

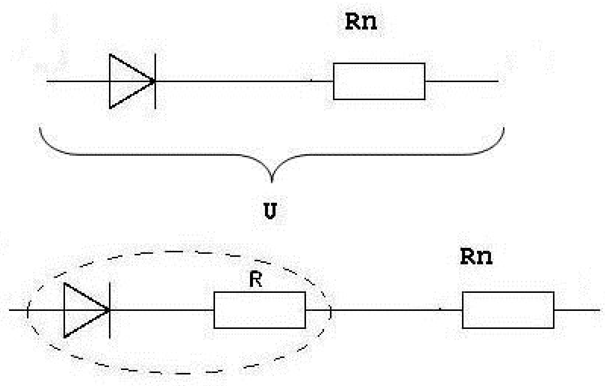


Рис. 2.2 В верхней части – участок цепи с диодом и резистором. В нижней части пунктиром обведена внутренняя часть реального диода – идеальный p-n переход, описываемый формулой Шокли, и внутреннее сопротивление R.

Если учесть, что дополнительное сопротивление R_n и внутреннее сопротивление диода R соединены последовательно (их можно представить как единое сопротивление), ток через данный участок цепи можно получить из формулы (2.4), заменив в ней R на сумму (R+R_n):

$$I = -I_s + \frac{V_t}{R+R_n} W\left(e^{\frac{U}{V_t}} I_s \frac{R+R_n}{V_t} e^{I_s \frac{R+R_n}{V_t}}\right). \qquad (2.6)$$

Последовательное соединение диода, подчиняющегося формуле Шокли, и резистора рассматривалось ранее в [11] и [12]. Была получена формула, сходная с выражением (2.4). В той формуле учитывалось сопротивление «внешнего» резистора, а не внутреннее сопротивление диода, как у нас (мы ставили своей целью получить более точное выражение для тока через реальный диод).

2.3 Подбор параметров для диодной характеристики.

Исходным пунктом для вычислений, приведенных в этом параграфе, будет формула (2.2) для напряжения. Перепишем ее, учитывая коэффициент неидеальности (используя обозначение, которое мы ввели в конце параграфа 2.1):

$$U = \varphi \ln(\frac{I}{I_s} + 1) + IR. \quad (2.7)$$

Здесь φ – температурный потенциал V_t, умноженный на коэффициент неидеальности n.

Для подбора параметров I_s, φ и R будет использован метод наименьших квадратов, адаптированный к данному нелинейному случаю.

Если напрямую применить метод наименьших квадратов к соотношению (2.7), мы получим достаточно сложную систему из трех уравнений относительно трех неизвестных величин (I_s, φ, R). Можно упростить задачу, если использовать тот факт, что при больших прямых токах вольт-амперная характеристика, описываемая формулой (2.7), почти линейна. Ее наклон определяется параметром R. Это позволяет произвести оценку данного параметра, взяв несколько экспериментальных значений тока и напряжения, находящихся на квазилинейном участке характеристики, и применив обычный метод наименьших квадратов [13], предназначенный для поиска параметров R и b кривой $y=xR+b$. Значение R определяется следующей формулой:

$$R = \frac{L\sum_{i=1}^{L} x_i y_i - \sum_{i=1}^{L} y_i \sum_{i=1}^{L} x_i}{L\sum_{i=1}^{L} (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{L} x_i)^2}.$$

Здесь x_i – это набор из L экспериментальных значений тока (приходящихся на квазилинейный участок), а y_i – набор из L соответствующих им экспериментальных значений напряжения ($L<N$, где N – полное число экспериментальных отсчетов, приходящихся не только на квазилинейный, но и на нелинейный участок).

После этого получим формулу для параметров I_s и φ, считая, что третий параметр R нам уже известен. Для этого построим выражение для суммы квадратов разностей экспериментальных значений y и значений, вычисленных по формуле (2.7).

$$S = \sum_{i=1}^{N} (\varphi \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i)^2. \tag{2.8}$$

Здесь берется уже полное число отсчетов тока и напряжения (N).

Найдем частные производные величины S по φ и по I_s.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= 2\sum_{i=1}^{N} (\varphi \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i) \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1), \\ \frac{\partial S}{\partial I_s} &= -2\sum_{i=1}^{N} (\varphi \ln(\frac{x_i}{I_s} + 1) + x_i R - y_i) \frac{x_i}{I_s (x_i + I_s)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Приравнивая эти частные производные нулю, мы получим систему двух уравнений для φ и I_s:

$$
\begin{cases}
\varphi = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i R - y_i)\ln(\dfrac{x_i}{I_s}+1)}{\sum\limits_{k=1}^{N} (\ln(\dfrac{x_k}{I_s}+1))^2}, \\
\sum\limits_{i=1}^{N} (\varphi \ln(\dfrac{x_i}{I_s}+1) + x_i R - y_i)\dfrac{x_i}{I_s(x_i+I_s)} = 0.
\end{cases} \qquad (2.10)
$$

Если φ из первого уравнения (2.10) подставить во второе (переименовав для удобства индексы суммирования), мы получим уравнение, куда входит лишь I_s:

$$
\sum_{i=1}^{N} ([\frac{\sum\limits_{m=1}^{N} (x_m R - y_m)\ln(\dfrac{x_m}{I_s}+1)}{\sum\limits_{k=1}^{N} (\ln(\dfrac{x_k}{I_s}+1))^2}]\ln(\frac{x_i}{I_s}+1) + x_i R - y_i)\frac{x_i}{I_s(x_i+I_s)} = 0.
$$

Это уравнение можно решить численно (например, средствами пакета «Wolfram Mathematica») и найти значение I_s. После этого из первого уравнения системы (2.10) можно найти значение φ. Параметр R здесь, повторюсь, считается уже известным (смотри выше), но его, возможно, придется изменить, чтоб добиться лучшего совпадения данных, вычисленных по формуле (2.7), с экспериментальными значениями. Например, можно провести расчет для нескольких значений R, построить график, отображающий зависимость квадратичного отклонения S в зависимости от R, и после этого подобрать значение R, при котором отклонение S минимально.

Отметим также, что система (2.10) пригодна и для случая формулы Шокли (когда в соотношении (2.7) $R=0$).

Приведем график (см. рис. 2.3), где точками показаны экспериментальные данные, а сплошной линией – значения, вычисленные по формуле (2.7).

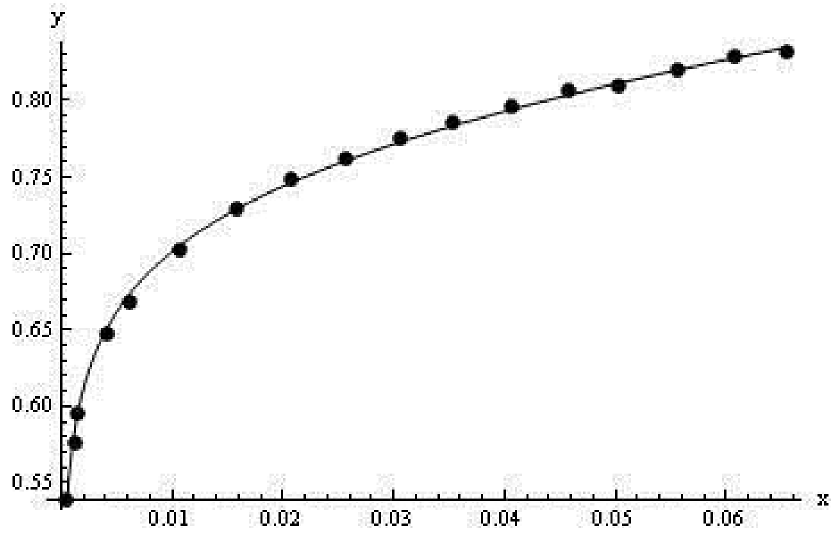


Рис. 2.3 Координата x – это ток (А), y – напряжение (В). R=0.63 Ом.

Если принять *R=0*, кривая, полученная таким способом, дает худшую аппроксимацию (рис. 2.4).

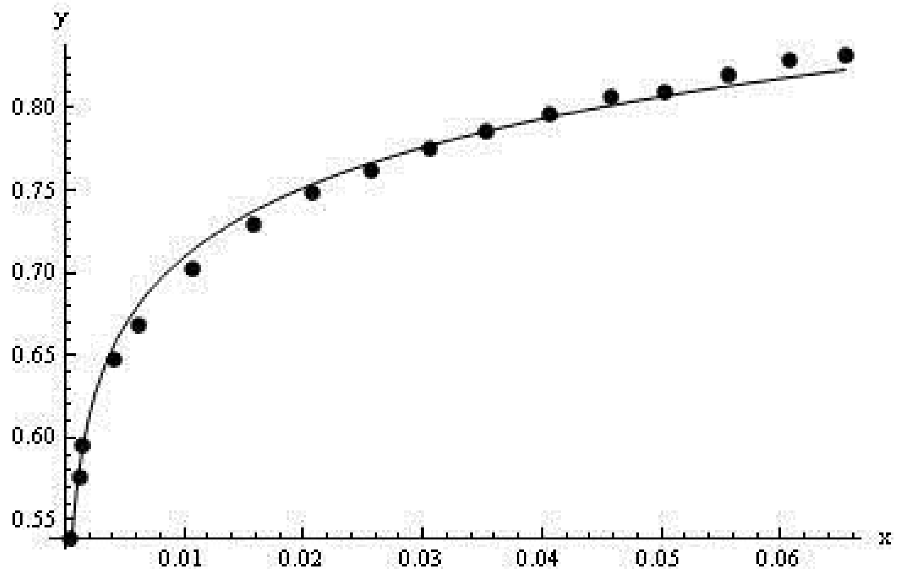


Рис. 2.4 График при R=0.

Приведем алгоритм действий при подборе параметров уточненной вольт-амперной характеристики диода.

1) Отбираются несколько точек, лежащих на квазилинейном участке характеристики, после чего делается оценка внутреннего сопротивления диода R (с помощью метода наименьших квадратов, примененного к поиску параметров прямой линии).

2) Далее используется метод наименьших квадратов, адаптированный для поиска параметров обобщенной кривой, описывающей вольт-амперную характеристику. С его помощью ищутся оставшиеся два параметра φ и I_s (в предположении, что внутреннее сопротивление R задано).

3) Возможно варьирование значения R и повторение действий пункта 2 для лучшей аппроксимации экспериментальных данных теоретической кривой.

Полученная кривая довольно точно приближает массив экспериментальных данных. Приравнивание внутреннего сопротивления диода R нулю приводит к ухудшению соответствия.

2.4 Уравнения для транзисторных характеристик.

Если взглянуть на графики выходных характеристик биполярного транзистора (например, на рисунок 2.5, график взят из книги [14]), возникает мысль о том, что их можно получить с помощью сдвига линии диодной характеристики вдоль некоторой прямой (к которой эта линия приближается при увеличении прямого напряжения). Реализуя эту идею, с помощью выражения (2.4) можно «сконструировать» формулы для характеристик биполярного транзистора:

$$\begin{aligned} i_c &= \alpha D_0(U_{be}) - D_0(\alpha R D_0(U_{be}) - U_{cb}), \\ i_e &= -\alpha D_0(-U_{cb}) + D_0(\alpha R D_0(-U_{cb}) + U_{be}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

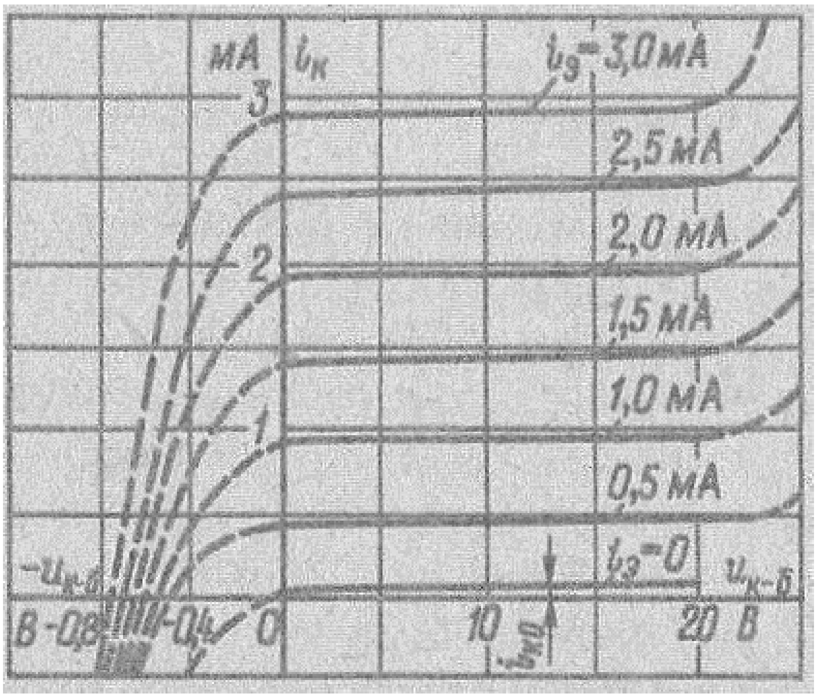


Рис. 2.5 Пример выходных характеристик биполярного транзистора $I_c(U_{cb})$(при включении по схеме с общей базой) [14].

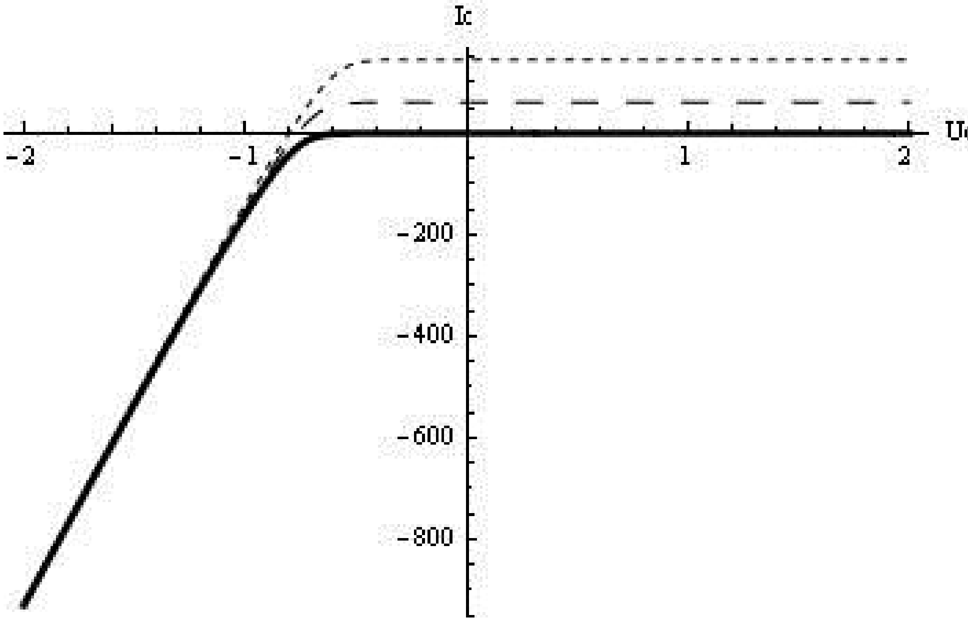


Рис. 2.6 Характеристики биполярного транзистора $i_c(U_{cb})$ (при разных U_{be}) – аппроксимация посредством первой формулы (2.11).

Функция D_0 – та же функция, что уже использована в формуле (2.4), только температурный потенциал V_t в ней заменен на $\varphi=V_t n$ (учтен коэффициент неидеальности). Параметр α – тот же самый, что и в уравнениях Эберса-Молла (его называют коэффициентом передачи эмиттерного тока [5]). Для простоты полагается, что параметры α и R (а также I_s) одинаковы для обоих *p-n* переходов биполярного транзистора. i_c и i_e – это токи через коллектор и эмиттер, а U_{be} и U_{cb} – напряжения база-эмиттер и коллектор-база.

Разберем несколько подробнее процесс получения первого из выражений (2.11). Рассмотрим коллекторный переход биполярного транзистора как полупроводниковый диод. Вначале характеристика $D(U)$ этого диода (см. (2.4)) поворачивается на 180 градусов в плоскости i,U. Далее она сдвигается вдоль своей асимптотики. После этого мы имеем формулу

$$i_c = \alpha i_{e0} - D(-(U_{cb} - \alpha i_{e0} R))$$

(мы считаем ток диода током коллекторного перехода, а напряжение – напряжением между коллектором и базой, сдвиг же происходит на величину αi_{e0} – фактически это есть номинал источника тока на рис. 1.1). После этого, если предположить, что «нулевой» ток эмиттера (соответствующий источнику тока на эквивалентной схеме – см. рис.1.1) определяется лишь напряжением база-эмиттер с помощью формулы, аналогичной формуле (2.4):

$$i_{e0} = D_0(U_{be}) = -I_s + \frac{\varphi}{R} W\left(e^{\frac{U_{be}}{\varphi}} I_s \frac{R}{\varphi} e^{I_s \frac{R}{\varphi}}\right), \qquad (2.12)$$

мы получим первое из уравнений (2.11) (для коллекторного тока). Обратим внимание на то, что аналог этой величины в уравнениях Эберса-Молла другой (он выражается экспоненциальной формулой - см. (1.7)).

Действия при получении второго уравнения (2.11) схожи (отсутствует лишь поворот).

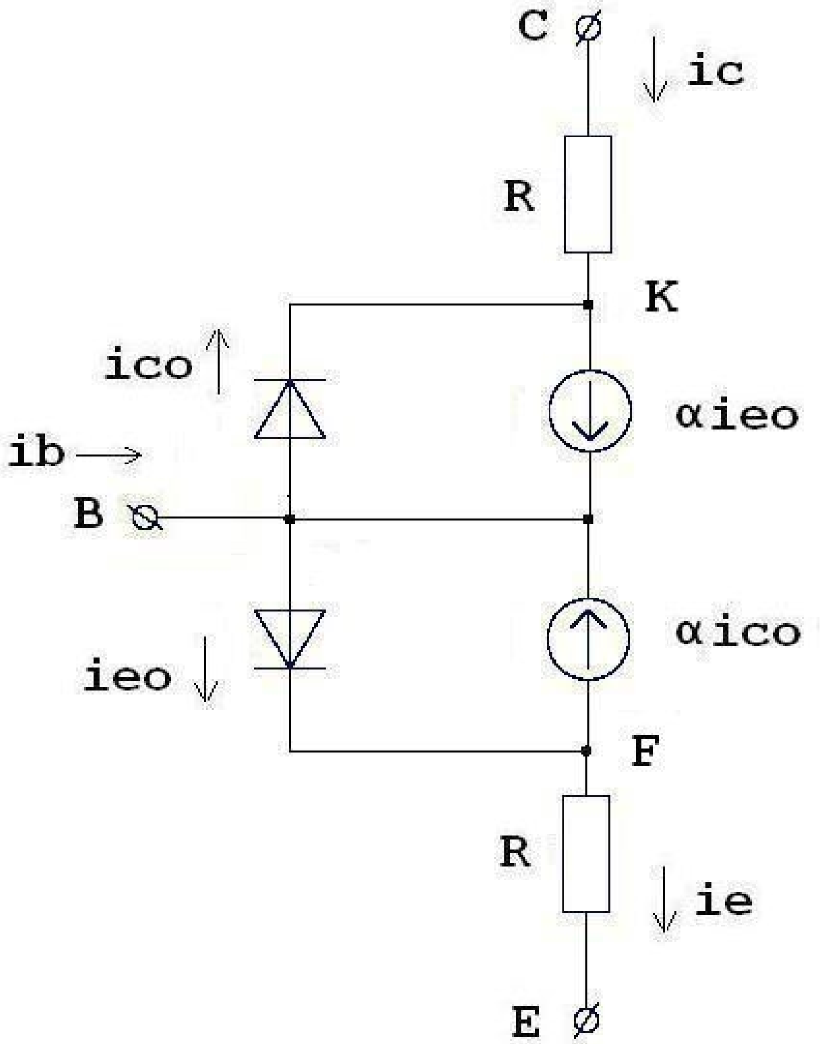


Рис. 2.7 Эквивалентная схема с равными внутренними сопротивлениями и коэффициентами передачи.

Выражения, аналогичные соотношению (2.2) (или соотношению (2.7), где учитывается коэффициент неидеальности), можно записать и для напряжений на контактах биполярного транзистора. Здесь мы будем опираться на приведенные в первой главе схемы замещения. Рассмотрим эквивалентную схему на рисунке 2.7 (она «скомпонована» из схем, изображенных на рисунках 1.1 и 1.3, но коэффициенты передачи для простоты мы считаем равными, также мы пренебрегли сопротивлением базы).

Применяя законы Кирхгофа для напряжений на участках *CB* и *BE*, мы получим следующие выражения:

$$U_{cb} = -\varphi \ln(1 + \frac{\alpha i_{e0}}{I_s} - \frac{i_c}{I_s}) + i_c R,$$

$$U_{be} = \varphi \ln(1 + \frac{i_e}{I_s} + \frac{\alpha i_{c0}}{I_s}) + i_e R. \qquad (2.13)$$

График, соответствующий второму выражению, приведен на рис. 2.8.

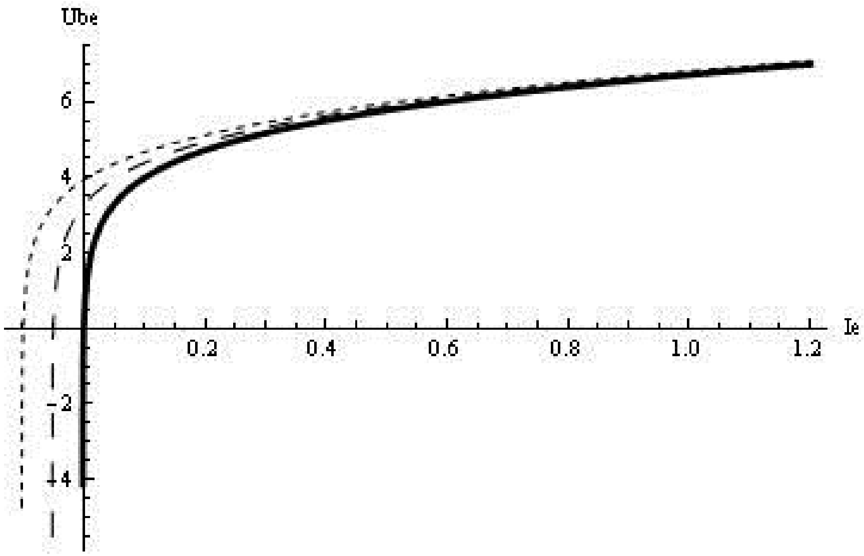


Рис. 2.8 График зависимости U_{be} от i_e для разных значений i_{c0} (в соответствии со второй формулой (2.13)).

Свяжем токи i_{e0} и i_{c0} с напряжениями посредством экспоненциальных формул, входящих в уравнения Эберса-Молла (см. (1.7)):

$$i_{e0} = I_s(e^{\frac{U_{BF}}{\varphi}} - 1) = I_s(e^{\frac{U_{be}}{\varphi} - \frac{i_e R}{\varphi}} - 1),$$

$$i_{c0} = I_s(e^{\frac{U_{BK}}{\varphi}} - 1) = I_s(e^{\frac{i_c R}{\varphi} - \frac{U_{cb}}{\varphi}} - 1). \qquad (2.14)$$

С учетом этого выражения (2.13) записываются так:

$$U_{cb} = -\varphi \ln(1 - \alpha + \alpha e^{\frac{U_{be}}{\varphi} - \frac{i_e R}{\varphi}} - \frac{i_c}{I_s}) + i_c R,$$

$$U_{be} = \varphi \ln(1 - \alpha + \alpha e^{\frac{i_c R}{\varphi} - \frac{U_{cb}}{\varphi}} + \frac{i_e}{I_s}) + i_e R. \qquad (2.15)$$

Если коллекторный переход закрыт, можно пренебречь его влиянием на эмиттерный переход, приближенно считая, что i_{c0}=0, кроме того, в этом случае $i_{e0}=i_e$. Тогда уравнения (2.13), независимо от вида i_{c0} и i_{e0}, записываются так:

$$U_{cb} = -\varphi \ln(1 + \frac{\alpha i_e}{I_s} - \frac{i_c}{I_s}) + i_c R,$$

$$U_{be} = \varphi \ln(1 + \frac{i_e}{I_s}) + i_e R. \qquad (2.16)$$

Нетрудно показать: в этом случае мы должны считать, что $i_c=\alpha i_e$, и в первом уравнении (2.16) пропадает также и логарифмический фактор:

$$U_{cb} = i_c R. \qquad (2.17)$$

Если же, наоборот, эмиттерный переход закрыт (этот режим, вообще говоря, соответствует инверсному включению транзистора), можно пренебречь его влиянием на коллекторный переход (приближенно считая, что i_{e0}=0). Также в этом случае $i_{c0}=-i_c$. Уравнения (2.13) записываются так:

$$U_{cb} = -\varphi \ln(1 - \frac{i_c}{I_s}) + i_c R,$$

$$U_{be} = \varphi \ln(1 + \frac{i_e}{I_s} - \frac{\alpha i_c}{I_s}) + i_e R. \qquad (2.18)$$

От логарифмического фактора во втором уравнении (2.18) также можно избавиться: $i_e=\alpha i_c$, поэтому

$$U_{be} = i_e R. \tag{2.19}$$

Вернемся к выражениям (2.13). Приводя первую формулу (2.13) к виду (2.3), можно получить первое выражение (2.11) для коллекторного тока. При этом нужно считать, что «нулевой» ток эмиттера i_{e0} определяется напряжением база-эмиттер по формуле (2.12) (но не по экспоненциальным формулам, входящим в уравнения Эберса-Молла). Это соответствует предположению, что в процессах связи *p-n* переходов транзистора участвует ток, уже ограниченный внутренним омическим сопротивлением транзистора. Аналогичные действия можно произвести и со второй формулой (2.13).

Формулы ((2.11) и (2.13)) получены для *n-p-n* транзистора. Как они будут выглядеть для *p-n-p* транзисторов? Прежде чем распространить нашу теорию на другой тип биполярных транзисторов, уточним ряд обозначений в формулах. Записывая соотношения (2.11) и (2.13), мы неявно полагали, что обход контуров, в состав которых входят рассматриваемые нами *n-p-n* транзисторы, производится от коллектора через базу к эмиттеру. Именно такому направлению обхода соответствуют обозначения напряжений U_{be} и U_{cb} в этих формулах. Такое же направление обхода (совпадающее с направлением токов) было нами принято в первой части (см. токи через источник тока на рис.1.1).

В случае рассмотрения транзисторов разных типов мы уже не будем обозначать напряжение двумя индексами. Будем использовать «одноиндексные» значки (U_e для перехода база-эмиттер и U_c для перехода база-коллектор). Сами формулы для токов останутся неизменными, но в них войдут уже U_e и U_c:

$$\begin{aligned} i_c &= \alpha D_0(U_e) - D_0(\alpha R D_0(U_e) - U_c), \\ i_e &= -\alpha D_0(-U_c) + D_0(\alpha R D_0(-U_c) + U_e). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Аналогично – для напряжений:

$$U_c = -\varphi \ln(1 + \frac{\alpha i_{e0}}{I_s} - \frac{i_c}{I_s}) + i_c R,$$

$$U_b = \varphi \ln(1 + \frac{i_e}{I_s} + \frac{\alpha i_{c0}}{I_s}) + i_e R. \qquad (2.21)$$

Чтобы все же уточнить, в каком порядке входят потенциалы точек в разность потенциалов, соответствующую величинам U_e и U_c, мы договоримся, что обход контуров, в состав которых входит эмиттерный вывод *p-n-p* или *n-p-n* транзистора, производится вдоль стрелки, обозначающей эмиттер на схемных изображениях. Смена направления обхода контуров влечет за собой и смену направлений i_c, i_e, а также i_{c0} и i_{e0}.

2.5 Усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером. Токовая функция.

Выражения, полученные в предыдущем параграфе, могут быть применены к расчету усилительных схем. В качестве примера рассмотрим выходную цепь усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (куда последовательно включены сопротивление нагрузки R_n и источник напряжения питания E – см. рис. 2.9). Запишем для нее уравнение Кирхгофа:

$$U_{cb} + U_{be} + i_c R_n = E. \qquad (2.22)$$

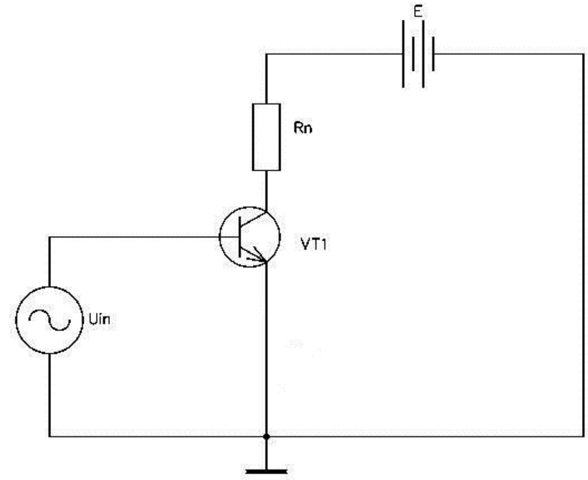


Рис. 2.9 Усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером. В данном случае $U_{be}=U_{in}$.

Напряжение коллектор-база выразим через ток коллектора и «нулевой» ток эмиттера с помощью 1-го уравнения (2.13):

$$(U_{be}-E)-\varphi\ln(1+\frac{\alpha i_{e0}}{I_s}-\frac{i_c}{I_s})+i_cR+i_cR_n=0. \qquad (2.23)$$

Если считать U_{be} независимым параметром, можно найти точное решение этого уравнения (относительно тока коллектора i_c). Оно также (как и (2.11)) выражается через функцию Ламберта.

$$i_c=\alpha i_{e0}-\{-I_s+$$

$$+\frac{\varphi}{R+R_n}W(e^{\frac{\alpha i_{e0}(R+R_n)-E+U_{be}}{\varphi}}I_s\frac{R+R_n}{\varphi}e^{I_s\frac{R+R_n}{\varphi}})\}.$$

Теперь нам нужно уточнить выражение для i_{e0}. Если считать, что оно такое же, как и в уравнениях Эберса-Молла (1.7) (с точностью до учета коэффициента неидеальности - замены V_t на φ), мы получим следующее выражение:

$$i_c = \alpha I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{\varphi}} - 1) - \{-I_s +$$

$$+ \frac{\varphi}{R+R_n} W(e^{\frac{\alpha I_{e0}(e^{\frac{U_{be}}{\varphi}}-1)(R+R_n)-E+U_{be}}{\varphi}} I_s \frac{R+R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R+R_n}{\varphi}})\}. \quad (2.24)$$

График $i_c(U_{be})$ имеет вид резкого перепада между двумя «квазипостоянными» значениями: почти нулевым в режиме отсечки и приближенно равным отношению напряжения питания и сопротивления нагрузки в режиме насыщения. Но фактически при таком подходе не учитывается омическое сопротивление в эмиттерном переходе, мы же, напомню, предполагаем, что транзистор симметричен. Поэтому будем считать, что i_{e0} зависит от напряжения U_{be} в соответствии с формулой (2.12). Тогда коллекторный ток можно записать следующим образом (используя модификации введенных выше функций D):

$$\begin{aligned} i_c &= \alpha D_0(U_{be}) - \\ &- D_1(\alpha D_0(U_{be})(R+R_n) - (E-U_{be})). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь

$$D_0(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R} W(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R}{\varphi} e^{I_s \frac{R}{\varphi}}), \quad (2.26)$$

т.е. первая функция D_0 – та же, что в формуле (2.12), вторая же функция имеет следующий вид:

$$D_1(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R+R_n} W(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R+R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R+R_n}{\varphi}}). \quad (2.27)$$

Зависимость тока от входного напряжения мы будем называть «токовой» функцией.

С помощью уравнения (2.25) можно выразить напряжение коллектор-эмиттер U_{ce}:

$$U_{ce} = E - R_n(\alpha D_0(U_{be}) - \\ - D_1(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n) - (E - U_{be}))). \qquad (2.28)$$

Эту зависимость U_{ce} от входного напряжения будем называть «усилительной» функцией.

Графики тока i_c и напряжения U_{ce} («токовая» и «усилительная» функции) изображены на рисунке 2.10.

Недостатком формул (2.25) и (2.28) является поведение описываемых ими величин после перехода в режим насыщения, при достаточно больших прямых входных напряжениях. Достигнув минимума, выходное напряжение U_{ce} далее начинает возрастать, ток при этом несколько снижается. Но мы ожидаем, что ток коллектора при больших входных напряжениях (прямых) будет стремиться к константе, а напряжение коллектор-эмиттер при этом будет очень малым (так как сопротивление транзистора в этом режиме близко к нулю). Чтобы получить подобное поведение решения после перехода в режим насыщения, применим следующий прием (этот прием не вытекает из рассмотрения выражений (2.11) и (2.13)): заменим уравнение (2.25) на уравнение

$$i_c = \alpha D_0(U_{be}) - \\ - D_2(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n) - (E - U_{be})). \qquad (2.29)$$

Здесь функция D_2 немного отличается от использованной в (2.25) функции D_1 (D_0 – такая же). Изменение свелось к умножению R на множитель (1+1/α).

$$D_2(x) = -I_s + \\ + \frac{\varphi}{R(1+\frac{1}{\alpha}) + R_n} W\left(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R(1+\frac{1}{\alpha}) + R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R(1+\frac{1}{\alpha}) + R_n}{\varphi}}\right). \qquad (2.30)$$

Эти выражения дают ожидаемое поведение тока после выхода в режим насыщения. Напряжение коллектор-эмиттер U_{ce} при этом выражается следующей формулой (где функция D_1 также заменена на D_2):

$$U_{ce} = E - R_n(\alpha D_0(U_{be}) - \\ - D_2(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n) - (E - U_{be}))). \qquad (2.31)$$

Графики выходного тока и напряжения, вычисленные по формулам (2.29) и (2.31), изображены на рисунке 2.11 (сплошные линии).

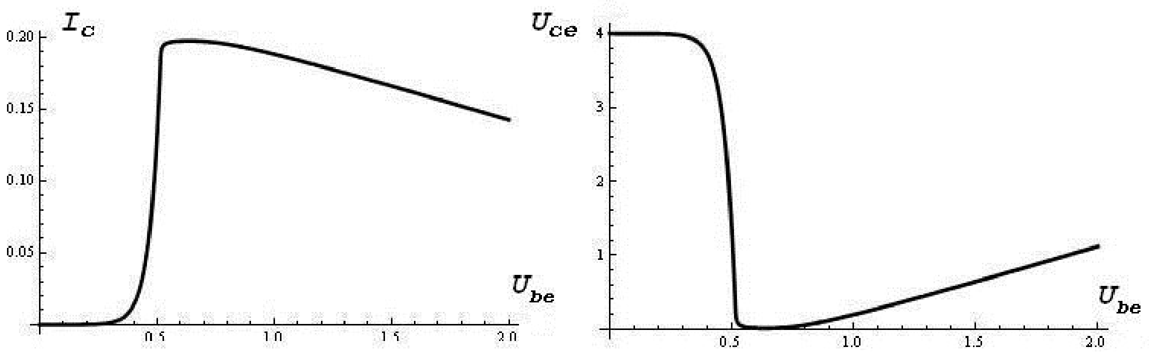


Рис. 2.10 Слева – зависимость коллекторного тока усилителя от напряжения база-эмиттер (входного напряжения), справа - зависимость напряжения коллектор-эмиттер от напряжения база-эмиттер.

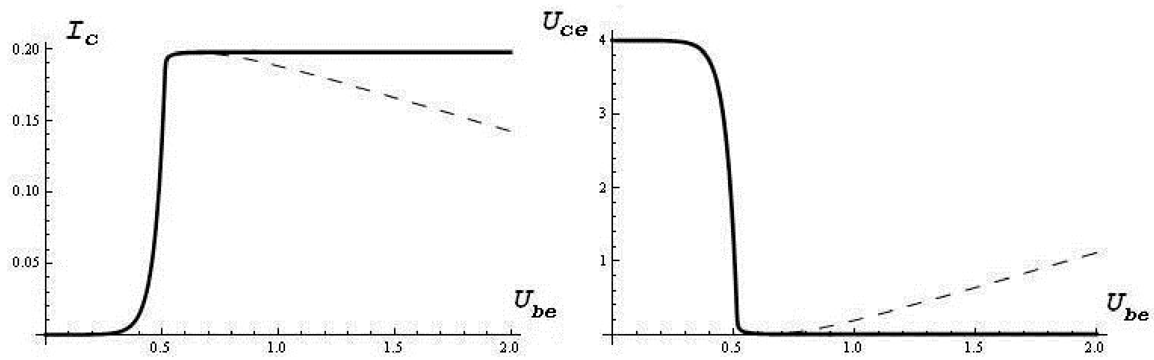


Рис. 2.11 Слева – зависимость коллекторного тока усилителя от напряжения база-эмиттер (входного напряжения), справа - зависимость напряжения коллектор-эмиттер от напряжения база-эмиттер (по формулам (2.29) и (2.31)). Пунктир соответствует графикам, уже приведенным на рисунке 2.10.

2.6 Учет стабилизирующего сопротивления.

Здесь мы рассмотрим схему усилителя, которая отличается от схемы, изображенной на рис. 2.9 наличием резистора в эмиттерной цепи. Это есть R_{ne} на рис. 2.12.

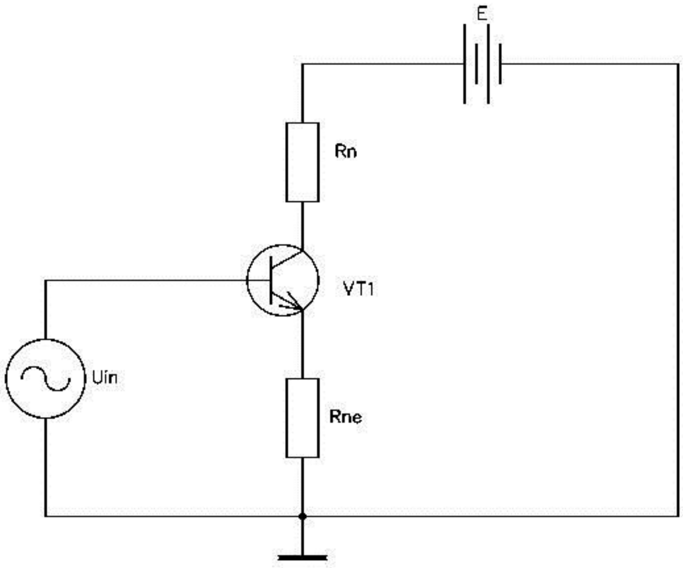


Рис. 2.12 Усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером, дополненный стабилизирующим сопротивлением R_{ne}.

После применения несложных рассуждений с переобозначениями последовательно соединенных резисторов (сходное рассуждение проведено в параграфе 2.2 «Последовательное соединение диода и резистора») можно прийти к следующему выражению, определяющему коллекторный ток:

$$i_c = \alpha D_{01}(U_{in}) - \\ - D_{21}(\alpha D_{01}(U_{in})(R + R_n) - (E - U_{in})). \tag{2.32}$$

Здесь

$$D_{01}(x) = -I_s +$$

$$+\frac{\varphi}{R+R_{ne}} W\left(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R+R_{ne}}{\varphi} e^{I_s \frac{R+R_{ne}}{\varphi}}\right). \tag{2.33}$$

Вторая функция определяется следующей формулой:

$$D_{21}(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R+R_n+\frac{R+R_{ne}}{\alpha}} \cdot$$

$$\cdot W\left(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R+R_n+\frac{R+R_{ne}}{\alpha}}{\varphi} e^{I_s \frac{R+R_n+\frac{R+R_{ne}}{\alpha}}{\varphi}}\right). \tag{2.34}$$

При получении токовых характеристик мы предполагали, что ток i_{e0} зависит лишь от напряжения база-эмиттер. Но будет ли это предположение верным после перехода в режим насыщения, когда открываются оба транзисторных перехода? Есть основания опасаться, что мы можем не получить не только количественного, но даже качественного совпадения с опытом в этой области. Действительно, кривая, соответствующая формулам (2.32), (2.33), (2.34) (см. рисунок 2.13), после входа в режим насыщения идет горизонтально (как и для случая заземленного эмиттера на рисунке 2.11), но экспериментальные данные показывают спад коллекторного тока при дальнейшем увеличении входного напряжения (сравнение с экспериментом будет обсуждаться в следующем параграфе). Этот спад появляется при ненулевом стабилизирующем сопротивлении и усиливается при его увеличении. Формулы (2.32), (2.33), (2.34) можно несколько изменить (убрав R_{ne} из выражения (2.34)), чтобы после точки насыщения начинался спад (хотя незначительное различие в наклонах линий все же остается – см. следующий параграф).

$$i_c = \alpha D_{01}(U_{in}) -$$
$$- D_2(\alpha D_{01}(U_{in})(R + R_n) - (E - U_{in})). \tag{2.35}$$

Здесь функция D_{01} уже была определена формулой (2.33), а вторая функция D_2 такая же, как и для случая заземленного эмиттера (см. формулу (2.30) в предыдущем параграфе). Соответствующий график изображен на рисунке 2.14 (сплошная линия).

Участок подъема для графиков на рисунках 2.13 и 2.14 соответствует усилительному режиму. На этом квазилинейном участке слева от точки насыщения и справа от почти нулевого участка отсечки график коллекторного тока, определяемого формулой (2.35), параллелен следующей прямой (это же относится и к графику, соответствующему формулам (2.32), (2.33), (2.34)):

$$i_c = \frac{\alpha U_{in}}{R_{ne} + R}. \tag{2.36}$$

Как видно из рисунка 2.14, в режимах отсечки и усиления эти графики практически неразличимы.

Вычислим входное сопротивление устройства на квазилинейном участке режима усиления, равное отношению входного напряжения к входному току. Роль входного тока в данном случае играет базовый ток (i_b). На интересующем нас участке ток базы связан с коллекторным током следующим образом:

$$i_b = i_c \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Подставим сюда коллекторный ток из соотношения (2.36).

$$i_b = \left(\frac{\alpha U_{in}}{R_{ne} + R}\right)\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{(1-\alpha)U_{in}}{R_{ne} + R}.$$

Отсюда получаем:

$$R_{in} = \frac{U_{in}}{i_b} = \frac{R_{ne} + R}{1 - \alpha}.$$

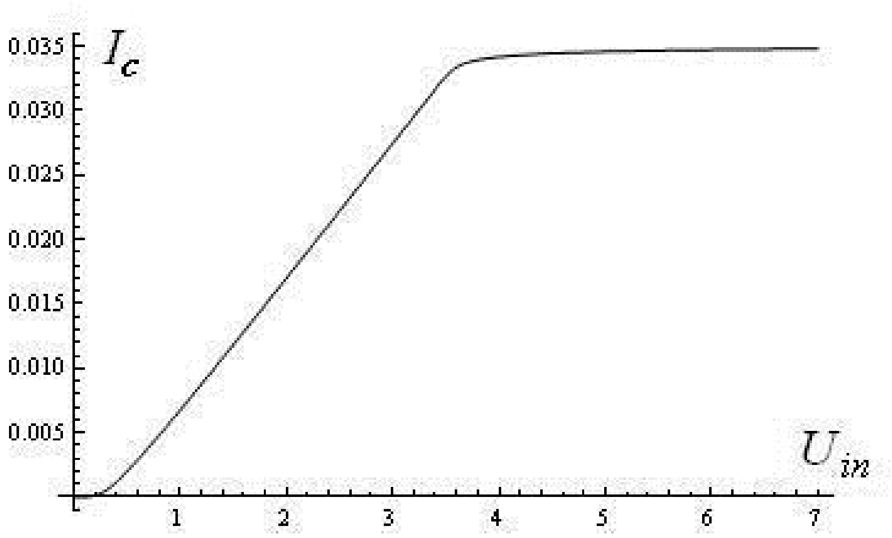


Рис. 2.13 Зависимость коллекторного тока усилителя от входного напряжения (не учтен спад в режиме насыщения),

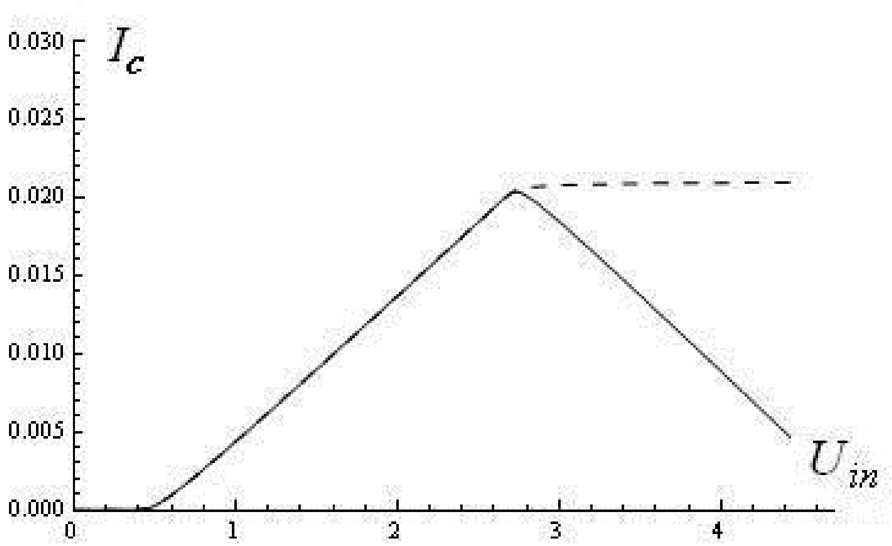


Рис. 2.14 Зависимость коллекторного тока усилителя от входного напряжения (сплошная линия соответствует формуле (2.35), пунктир – вариант, где не учитывается спад).

Так как параметр α близок к единице, входное сопротивление усилителя с общим эмиттером велико (по сравнению с суммой внутреннего сопротивления и сопротивления стабилизирующего резистора).

2.7 Экспериментальная проверка и сравнение с результатами компьютерного моделирования.

В двух предыдущих параграфах (2.5 и 2.6) на основе предложенных автором выражений для характеристик биполярного транзистора (уточняющих известные выражения Эберса-Молла посредством учета внутренних сопротивлений переходов транзистора) были получены формулы для коллекторного тока нескольких вариантов усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером. Представляет интерес сравнение предложенного способа описания с результатами, которые получаются при использовании других методов моделирования (и с результатами опытов).

Приведем еще раз окончательную формулу (2.35) вместе с собранными в одном месте выражениями для двух «диодных» функций.

$$i_c = \alpha D_{01}(U_{in}) -$$
$$- D_2(\alpha D_{01}(U_{in})(R + R_n) - (E - U_{in})),$$

$$D_{01}(x) = -I_s +$$
$$+ \frac{\varphi}{R + R_{ne}} W(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R + R_{ne}}{\varphi} e^{I_s \frac{R+R_{ne}}{\varphi}}),$$

$$D_2(x) = -I_s +$$

$$+\frac{\varphi}{R(1+\frac{1}{\alpha})+R_n} W\left(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R(1+\frac{1}{\alpha})+R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R(1+\frac{1}{\alpha})+R_n}{\varphi}}\right).$$

Если R_{ne}=0, эти формулы переходят в выражения (2.29), (2.30), (2.26) для коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером без стабилизирующего резистора в эмиттерной цепи (то есть с заземленным эмиттером).

Целью данного параграфа является сравнение результатов расчетов по этим формулам с результатами моделирования (симуляции) в программе OrCAD и с экспериментальными данными.

Важная задача – определение конкретных значений параметров транзистора, входящих во все эти формулы. Для испытаний был взят *n-p-n* транзистор BC337. По методике, описанной в параграфе 2.3, были определены параметры его эмиттерного перехода.

R=2.243 Ом,

φ =0.027 В,

I_s =5.52*10^{-15} А.

Видно, что ток насыщения I_s очень мал. Его изменение слабо влияет на положение линии вольт-амперной характеристики. Если I_s увеличится в 1000 раз, а R уменьшится в 10 раз, линия вольт-амперной характеристики практически останется на месте (для этой проверки брались значения тока, меньшие, чем 12 мА).

Вычисленное значение параметра φ почти совпадает с его теоретическим значением для температуры 300К (0.026 В). Это означает, что коэффициент неидеальности можно считать равным единице.

Параметр α был взят равным 0.9.

Для экспериментальной проверки формул была собрана установка – усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером (с использованием упомянутого транзистора). В качестве источника сигнала и батареи питания использовались источники «DC Power Supply HY3005». Напряжение задавалось на встроенных индикаторах до подключения источников к усилителю (при этом напряжение питания составляло 4.3 в). Коллекторный ток измерялся мультиметром «Victor VC 9808+». Сопротивление в цепи коллектора было 100 Ом, сопротивление в эмиттерной цепи варьировалось: 0 Ом (заземленный эмиттер), 50 Ом и 100 Ом. Также в большинстве опытов небольшой резистор (10 Ом) подключался последовательно с источником сигнала.

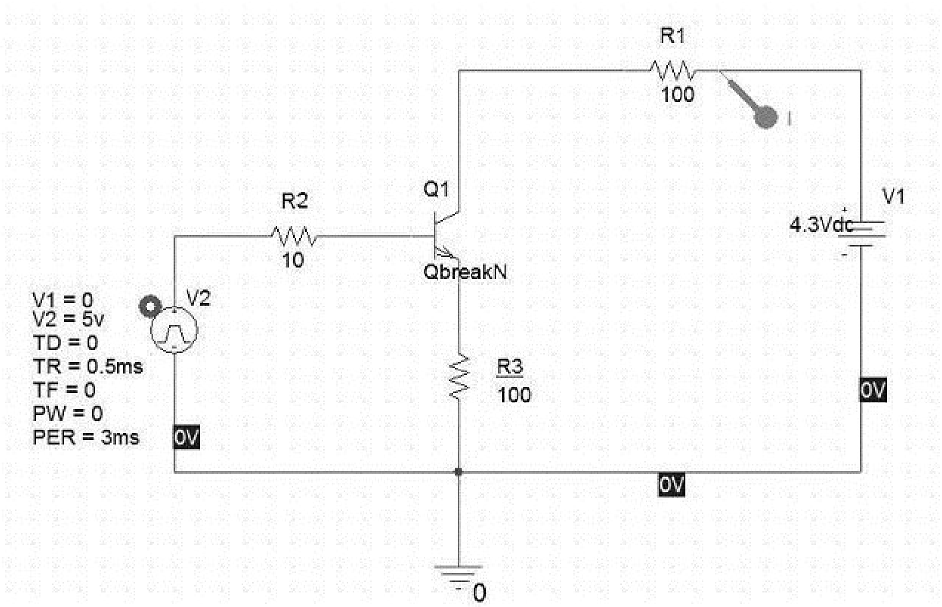


Рис. 2.15. Схема моделируемого усилителя в программе OrCAD. Рядом с резистором R1 изображен “маркер” для измерения тока. Экспериментальная установка также соответствует этой схеме, но вместо V1 и V2 взяты источники “DC Power Supply HY3005”.

Было проведено сравнение результатов, полученных при помощи вышеприведенных формул с результатами компьютерного моделирования в программе OrCAD 16.6 Lite. Модуль Capture CIS использовался для построения схемы, а модуль PSpice A/D – для расчета и вывода графических результатов моделирования. В схеме использовались стандартные PSpice компоненты – “NPN” (со значениями параметров по умолчанию), “Resistor” и “Voltage Source” (Pulse).

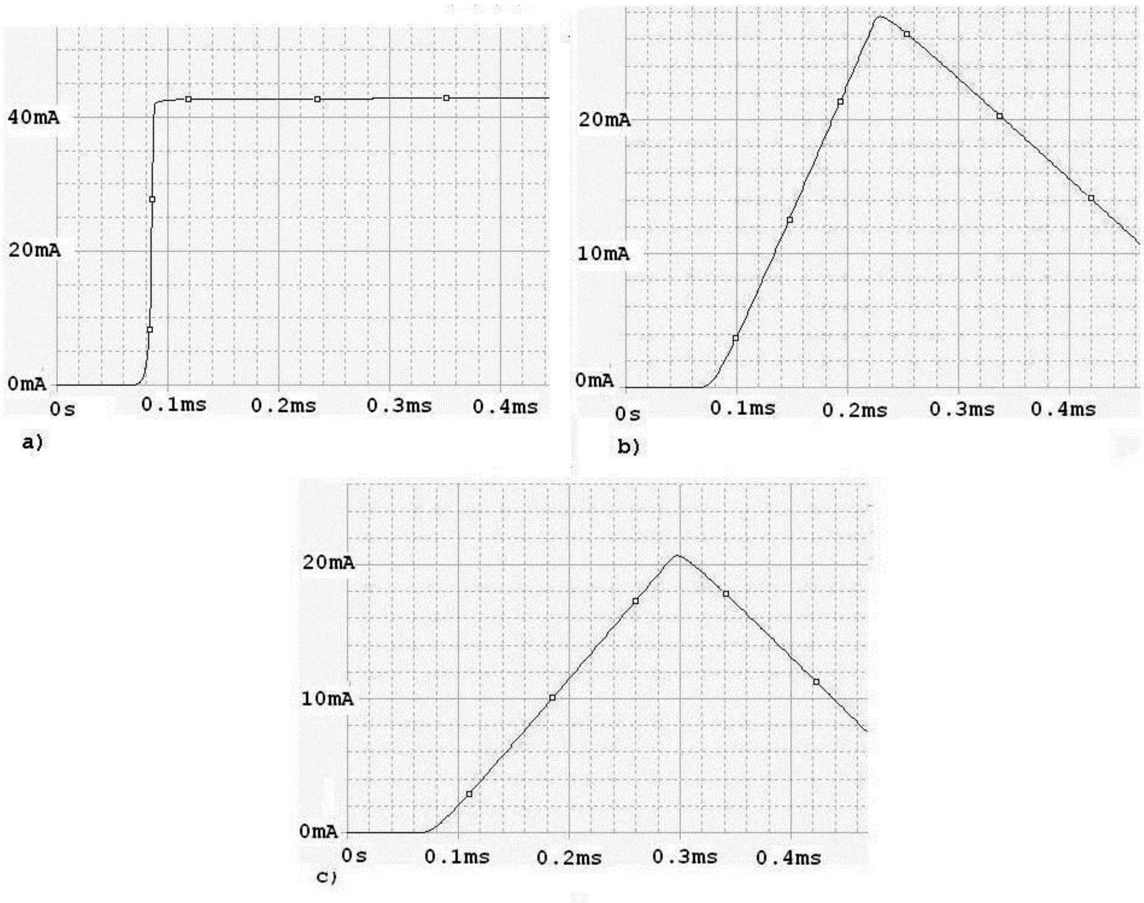


Рис. 2.16. Графики, полученные в программе OrCAD: (a) соответствует усилителю с заземленным эмиттером, график (b) – усилителю со стабилизирующим 50-омным резистором в цепи эмиттера (R3), на графике (c) в цепь эмиттера подключен резистор номиналом 100 Ом. Вертикальная ось – коллекторный ток (в мА), горизонтальная – время в мс (одной десятой мс соответствует 1 вольт).

Сама схема изображена на рисунке 2.15. Во входную цепь был включен резистор с небольшим сопротивлением (отсутствие этого резистора приводит к ошибке процедуры симуляции). Резистору *R1* соответствует значение R_n в приведенных выше формулах, резистору *R3* – значение R_{ne}. Снятие характеристики усилителя (зависимости тока в коллекторной цепи от напряжения усиливаемого сигнала) в программе производилось с помощью импульсного источника напряжения, настроенного таким образом, что его напряжение изменялось (линейно) от нуля до пяти вольт за 0.5 миллисекунд. На графиках, изображенных на рисунке 2.16, по горизонтальной оси отложено время. Если считать, что одной десятой части миллисекунды соответствует 1 вольт, мы получим вольт-амперную характеристику усилителя.

Приведем график расчета усилителя с заземленным эмиттером (без стабилизации) по формулам (2.29), (2.30), (2.26) (см. рис. 2.17 слева). График дополнен экспериментальными результатами (сплошные точки) и результатами OrCAD (овалы). На графике справа (b) параметр I_s увеличен в 1000 раз, в этом случае теоретическая линия сдвигается влево и более точно соответствует экспериментальным результатам.

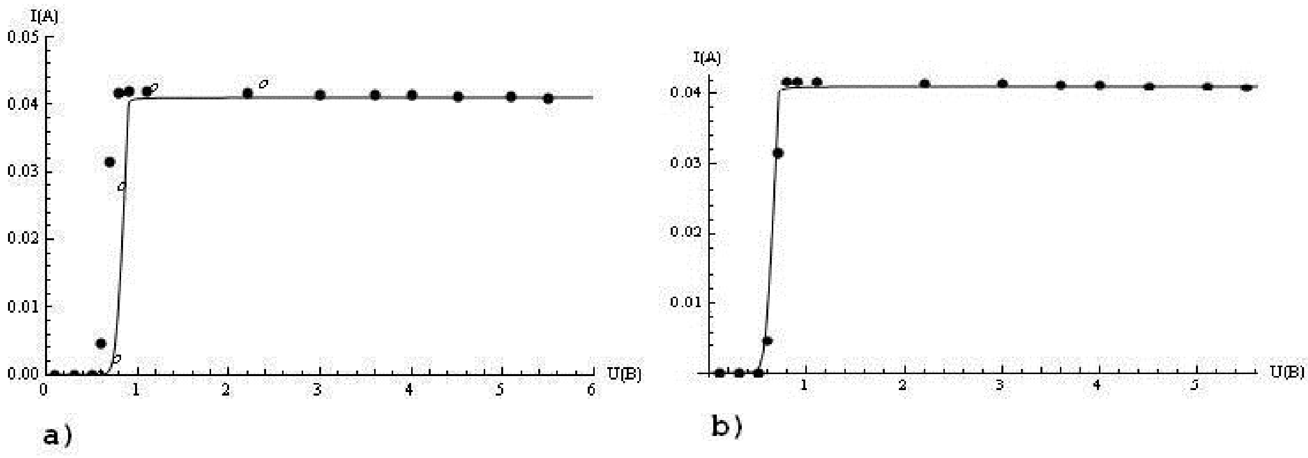


Рис. 2.17. График коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (эмиттер заземлен). По горизонтали – напряжение входного сигнала. Сплошная линия – расчет по формулам (2.29), (2.30), (2.26). Сплошные точки – экспериментальные данные. Овалы на левом графике – данные моделирования схемы в OrCAD.

Если рассмотреть расчет усилителя со стабилизирующим резистором в эмиттерной цепи по формулам (2.32), (2.33), (2.34), мы получим данные, почти совпадающие с экспериментом и с результатами моделирования в OrCAD для режима отсечки (запертого транзистора) и усилительного режима, но после перехода через точку насыщения поведение теоретической кривой будет другим. Кривая, соответствующая формулам (2.32), (2.33), (2.34), идет горизонтально (как и для случая заземленного эмиттера на рисунке 2.17), а экспериментальные данные (и данные моделирования) показывают спад коллекторного тока при дальнейшем увеличении входного напряжения. Как уже говорилось, формулы (2.32), (2.33), (2.34) можно несколько изменить (см. выражения в начале этого параграфа или идентичную им формулу (2.35)), чтобы после точки насыщения начинался спад (хотя незначительное различие в наклонах линий все же остается).

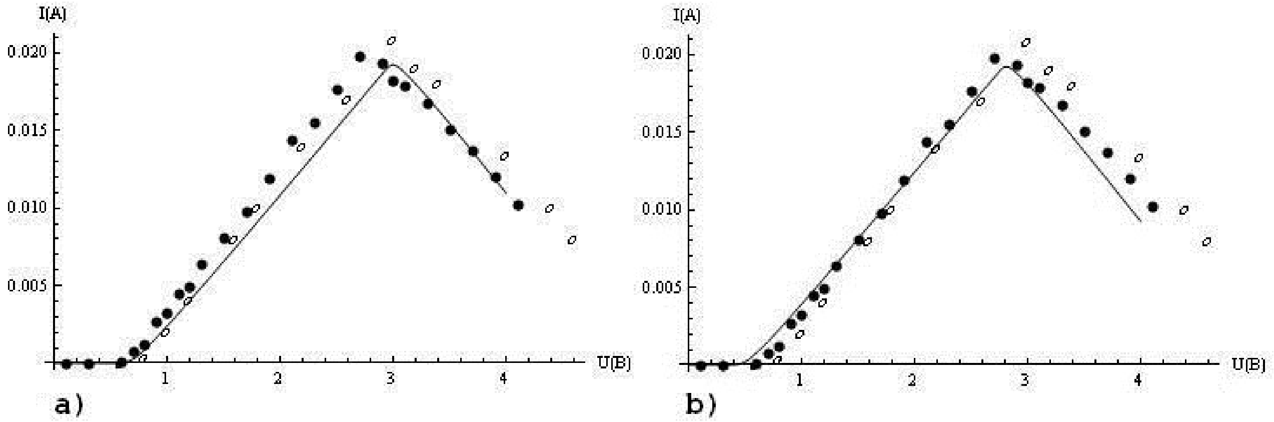


Рис. 2.18. График коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (в цепи эмиттера – стабилизирующий резистор номиналом 100 Ом). По горизонтали – напряжение входного сигнала. Сплошная линия – расчет по формулам (2.35), (2.33), (2.30). Сплошные точки – экспериментальные данные. Овалы – данные моделирования в OrCAD.

Приведем результаты расчета для схемы со 100-омным стабилизирующим резистором в цепи эмиттера. Левый график на рисунке 2.18 соответствует I_s=5.52*10^{-15} А, правый график – значению, в 1000 раз большему.

Приведем также расчетные данные с увеличенным током насыщения I_s=5.52*10^{-12} А в сравнении с данными эксперимента для схемы со стабилизирующим резистором (50 и 100 Ом) при отсутствии 10-омного резистора в цепи базы (в предыдущих вариантах эксперимента он присутствовал). В этом случае наблюдалась некоторая нестабильность работы экспериментальной схемы при напряжении входного сигнала около 1 вольта. Результаты показаны на рисунке 2.19.

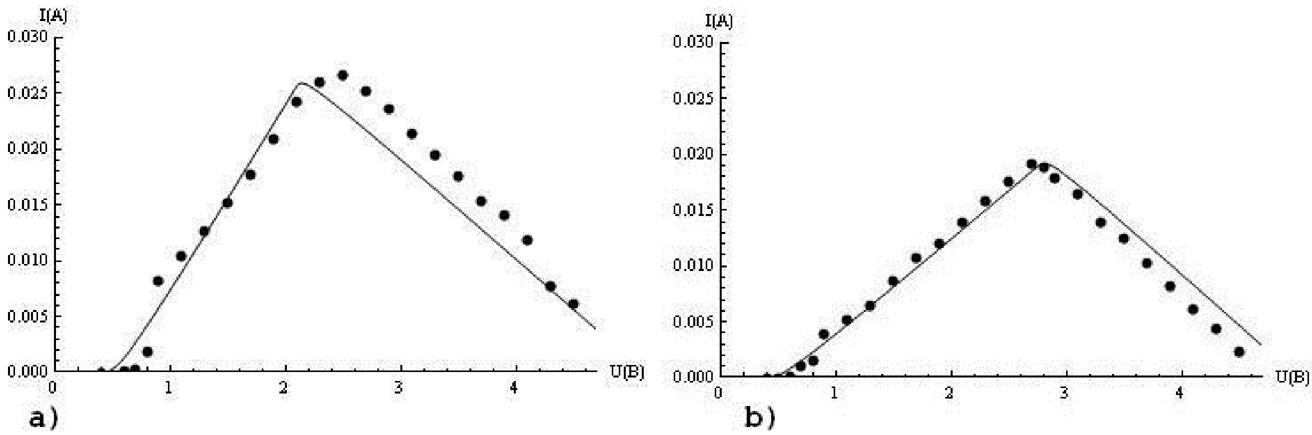


Рис. 2.19. График коллекторного тока усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (в цепи эмиттера – стабилизирующий резистор номиналом 50 Ом слева и 100 Ом справа). Резистор в цепи базы отсутствует. По горизонтали – напряжение входного сигнала.

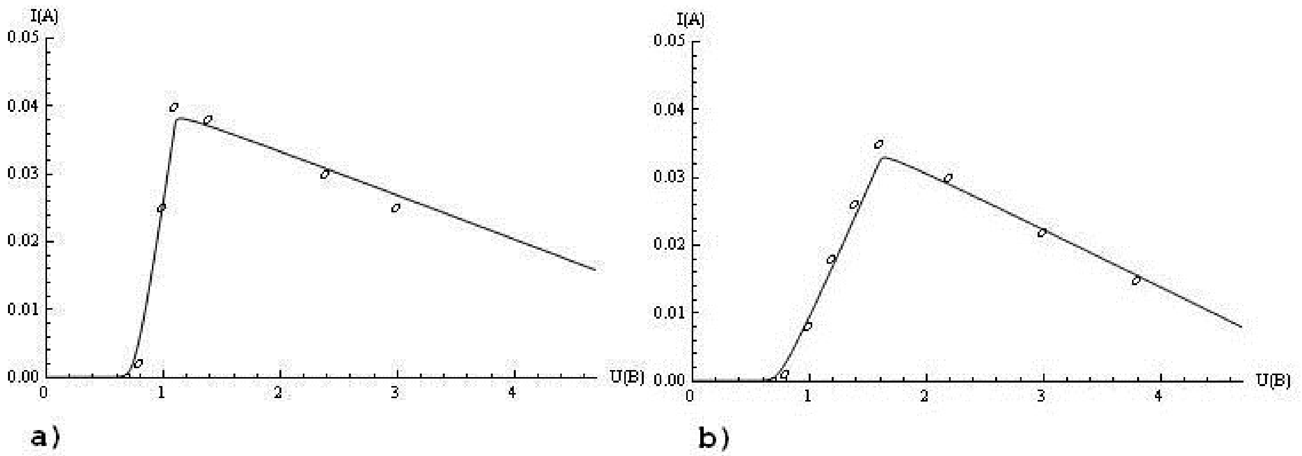


Рис. 2.20. Графики коллекторного тока. Слева: R3=5 Ом, справа: R3=20 Ом. Сплошная линия соответствует формулам (2.35), (2.33), (2.30). Овалы соответствуют данным моделирования в системе OrCAD.

В заключение на рисунке 2.20 приведем графики с результатами моделирования в OrCAD при еще меньших значениях стабилизирующего сопротивления в цепи эмиттера (5 Ом на левом графике и 20 Ом на правом). Сопротивление *R2* в цепи базы (см. рис. 2.15) присутствует, но уменьшено до значения 1 Ом. Сплошные линии – результаты расчета по формулам (2.35), (2.33), (2.30) при I_s=5.52*10^{-15} А, результатам OrCAD соответствуют овалы.

Обсудим полученные результаты. Из приведенных графиков видно, что при исследованных значениях входных напряжений и параметров элементов схемы предлагаемые формулы достаточно точно передают поведение характеристик усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером. Хотя, конечно, уравнения, на основе которых получены эти формулы, не претендуют на полное описание свойств биполярного транзистора. Например, в данной модели совершенно не учитываются емкостные свойства *p-n* переходов. В более сложные модели (например, в уже упомянутую в первой главе модель Гуммеля-Пуна) входит значительно большее количество параметров. Но примененный здесь подход позволяет получить аналитические формулы для характеристик (пусть и использующие не очень распространенную специальную функцию Ламберта).

До сих пор в этом параграфе мы интересовались лишь коллекторным током усилителя. Скажем несколько слов о токах эмиттера и базы. В параграфе 2.4 «Уравнения для транзисторных характеристик» уже говорилось о том, что в случае, когда коллекторный переход остается закрытым, выполняется соотношение $i_c=\alpha i_e$ (так как параметр α близок к единице, это означает, что коллекторный и эмиттерный токи почти равны). В режиме насыщения, когда открываются оба перехода, нет оснований ожидать выполнения данного соотношения. Моделирование в системе OrCAD показывает, что коллекторный и эмиттерный токи в режиме насыщения отличаются друг от друга (и, соответственно, базовый ток вовсе не мал). Приведем на рисунке 2.21 один из графиков, где сплошной линией обозначен ток коллектора, пунктиром - ток эмиттера, а точечно-пунктирной линией – базовый ток (видно, что коллекторный и эмиттерный токи почти совпадают лишь в режиме отсечки и в усилительном режиме).

В заключение заметим, что из хода рассуждений при получении формул для коллекторного тока в предыдущих параграфах ясно, что вплоть до точки насыщения ток эмиттера в рамках рассматриваемой модели определяется функцией $D_0(U_{be})$ в формуле (2.29) (и функцией $D_{01}(U_{in})$ в формуле (2.35)). Коллекторный ток до точки насыщения определяется главным образом первым слагаемым в формулах (2.29) и (2.35) (то есть приближенно равен эмиттерному току, умноженному на близкий к единице коэффициент α), но потом заметный рост второго слагаемого (по абсолютной величине) приводит к тому, что система из усилительного режима переходит в режим насыщения.

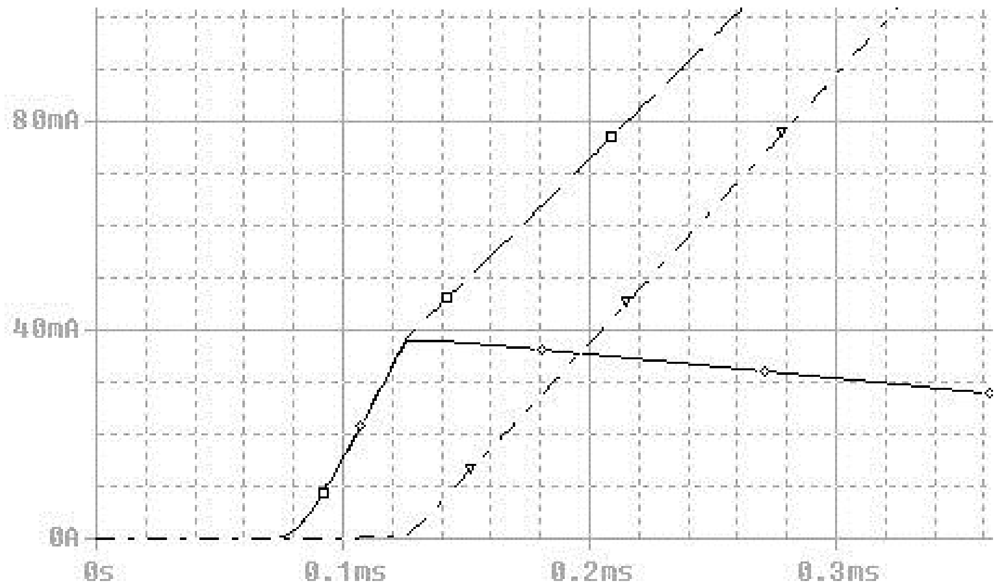


Рис. 2.21. Графики коллекторного (сплошная линия), эмиттерного (прерывистая линия) и базового тока (прерывистая линия с точками), полученные в системе OrCAD (сопротивления в цепи базы и цепи эмиттера - 10 Ом, в цепи коллектора – 100 Ом). По горизонтальной оси отложено время, которое прямо пропорционально входному напряжению (как на рис. 2.16).

2.8 Границы усилительного режима.

При эксплуатации усилительных устройств нежелателен выход напряжения усиливаемых сигналов за пределы квазилинейного участка рабочего режима (так как это приведет к появлению нелинейных искажений). В настоящем параграфе мы получим приближенные выражения для критических значений напряжения входного сигнала, которые соответствуют границам усилительного режима (см. рисунок 2.22).

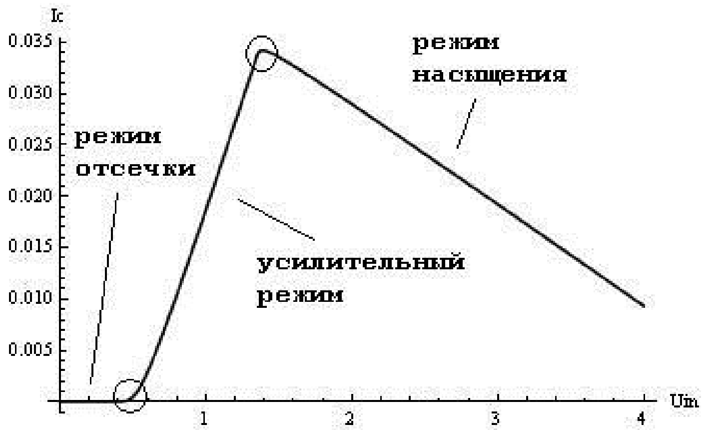


Рис. 2.22. Токовая характеристика. Интересующие нас граничные точки обведены кружочками.

Введем для удобства небольшие изменения в запись исходных соотношений. Вместо «диодной» функции (2.4) при записи формул из начала предыдущего параграфа (они же: (2.35), (2.33) и (2.30)) можно использовать двухпараметрическую функцию $D_{(2)}(x,y)$:

$$D_{(2)}(x,y) = -I_s + \frac{\varphi}{y} W\left(I_s \frac{y}{\varphi} e^{\frac{yI_s + x}{\varphi}}\right). \qquad (2.37)$$

Формула (2.35) для коллекторного тока при этом выглядит так:

$$
\begin{aligned}
i_c &= \alpha D_{(2)}(U_{in}, R_{ne} + R) - \\
&- D_{(2)}(\alpha(R_n + R)D_{(2)}(U_{in}, R_{ne} + R) - \\
&- (E - U_{in}), R_n + R(1 + \frac{1}{\alpha})).
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

В соответствии с выражением (2.5) функция (2.37) имеет следующую асимптотику при больших положительных значениях x:

$$
D_{(2)}(x, y) \approx \frac{x}{y} + \frac{\varphi}{y}\ln(I_s \frac{y}{\varphi}). \tag{2.39}
$$

При поиске «правого» критического значения (оно соответствует большему значению входного напряжения - см. рис. 2.22) нас будет интересовать точка, где второе слагаемое функции для коллекторного тока «отрывается» от области значений, близких к нулю.

Приравнивая нулю асимптотику (2.39), мы получим:

$$
x \approx -\varphi \ln(I_s \frac{y}{\varphi}).
$$

Замечание: отсюда следует вывод - если параметр y по какой либо причине увеличился в некоторое количество раз, то для того, чтоб найденное значение x осталось неизменным, нужно в такое же количество раз уменьшить значение I_s. Но из-за медленности изменения логарифмической функции дополнительное уменьшение I_s может оказаться излишним.

При нахождении границ усилительного режима мы пренебрежем внутренними сопротивлениями транзистора. Тогда

$$
\begin{aligned}
i_c &= \alpha D_{(2)}(U_{in}, R_{ne}) - \\
&- D_{(2)}(\alpha R_n D_{(2)}(U_{in}, R_{ne}) - \\
&- (E - U_{in}), R_n).
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

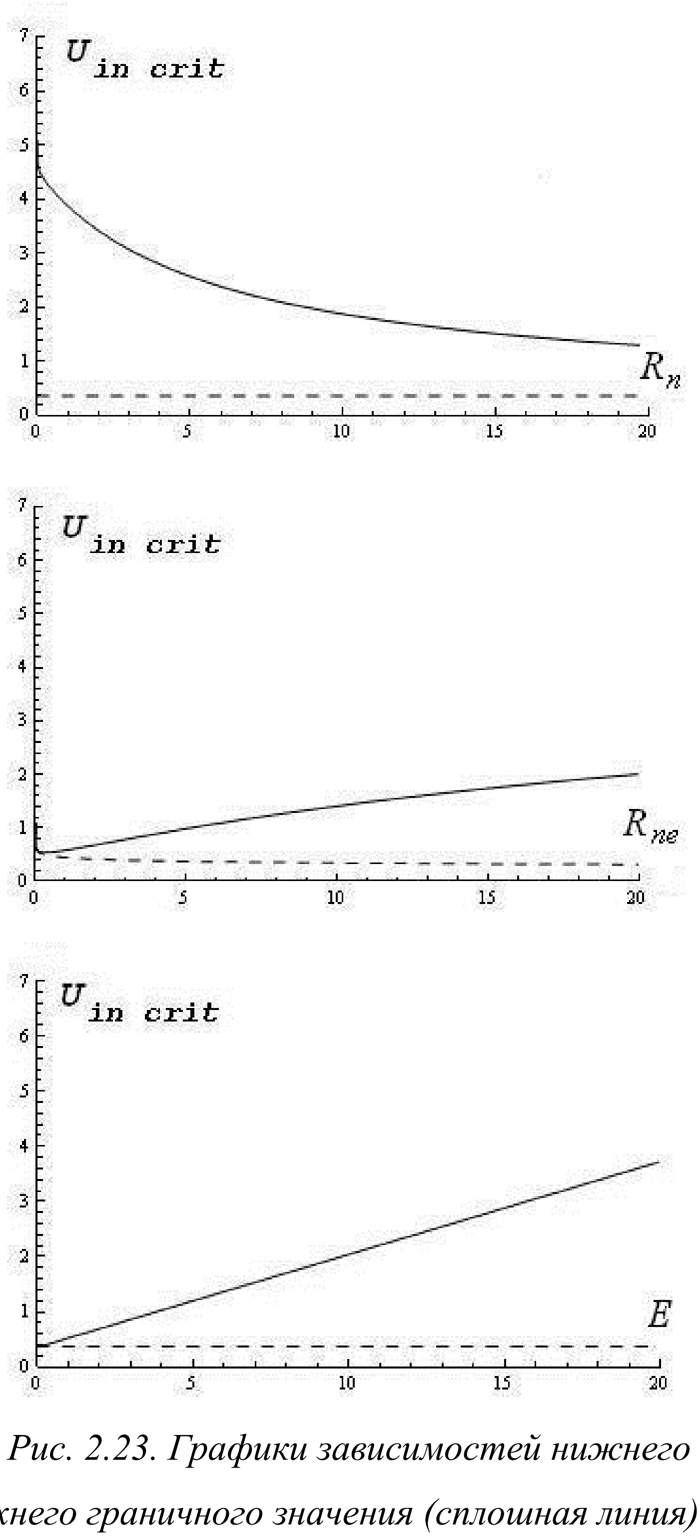


Рис. 2.23. Графики зависимостей нижнего граничного значения (пунктир) и верхнего граничного значения (сплошная линия) от R_n, R_{ne} и E.

Асимптотика для второго слагаемого имеет следующий вид:

$$-\frac{U_{in}(1+\dfrac{\alpha R_n}{R_{ne}})-E+\varphi\ln(\dfrac{I_s R_n}{\varphi})+\alpha\varphi\dfrac{R_n}{R_{ne}}\ln(\dfrac{I_s R_{ne}}{\varphi})}{R_n}.$$

Приравнивая это выражение нулю, мы получим приближенное значение для верхней границы входного напряжения:

$$U_{in}\approx\frac{E-\varphi[\ln(\dfrac{I_s R_n}{\varphi})+\dfrac{\alpha R_n}{R_{ne}}\ln(\dfrac{I_s R_{ne}}{\varphi})]}{1+\dfrac{\alpha R_n}{R_{ne}}}. \qquad (2.41)$$

Нетрудно найти и нижнее граничное значение:

$$U_{in}\approx-\varphi\ln(\frac{I_s R_{ne}}{\varphi}).$$

Графики этих значений изображены на рисунке 3.23. Осям абсцисс соответствуют R_n, R_{ne} и напряжение питания E.

Из этих графиков видно, что при необходимости расширить диапазон усиливаемых входных сигналов нам нужно повышать напряжение питания E. Также возможно увеличение сопротивления стабилизирующего резистора R_{ne} и, наоборот, уменьшение сопротивления резистора в цепи коллектора (R_n). Но последние действия (изменения номиналов резисторов) приведут к уменьшению усиления (в первом случае уменьшится выходной ток, во втором случае – напряжение, снимаемое с резистора R_n).

2.9 Некоторые параметрические зависимости.

Параметры, явно входящие в формулы для коллекторного тока усилителя ((2.35), (2.33) и (2.30), или же (2.38) и (2.37)), могут в свою очередь зависеть от некоторых «внешних» параметров, например, температуры, дозы поглощенной радиации или просто от времени (при «старении» полупроводниковых приборов). Представляет интерес изменение выходных параметров (того же коллекторного тока) и изменение вида характеристик в зависимости от значений и «явных» и «внешних» параметров.

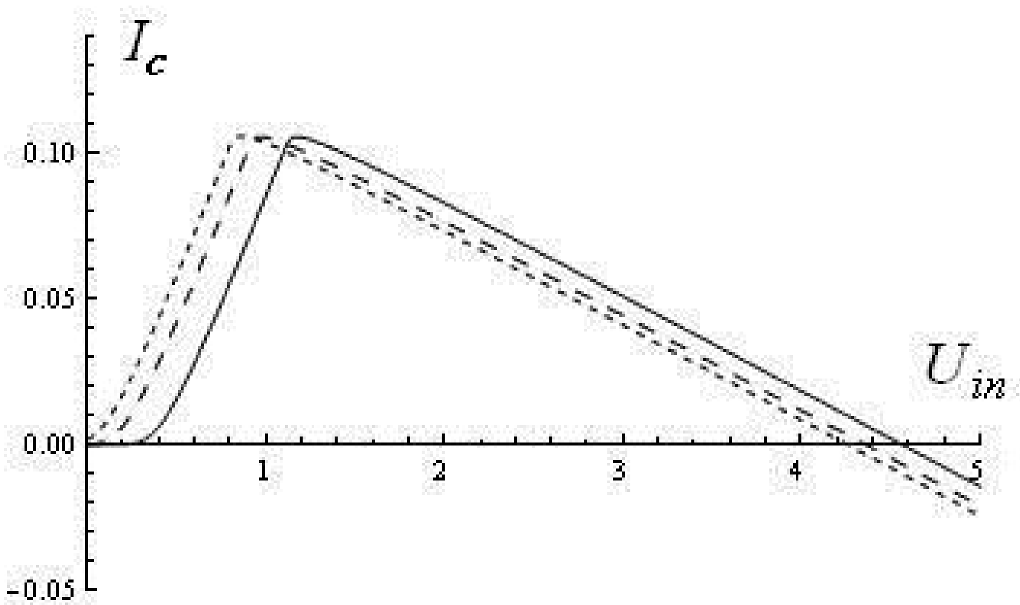


Рис. 2.24. Графики зависимостей коллекторного тока от входного напряжения усилителя при разных значениях тока насыщения.

Приведем серию зависимостей коллекторного тока от входного напряжения при разных значениях тока насыщения I_s (см. рис. 2.24). Переход от сплошной линии к пунктиру соответствует увеличению тока насыщения в тысячу раз, переход к точечному пунктиру – дальнейшее увеличение в 10 раз. Также приведем (см. рис. 2.25) серию аналогичных зависимостей при уменьшении коэффициента передачи тока от 0.99 (сплошная линия) к 0.9 (пунктир) и к 0.7 (точечный пунктир). При этом уменьшается наклон линии на квазилинейном усилительном участке.

Зависимость некоторых важных для практики величин от «внешних» параметров можно получить прямо из соответствующих формул. Например, для усилительных устройств представляет интерес производная токовой функции на квазилинейном участке усилительного режима. Для усилителя ТОЭ со стабилизирующим резистором в цепи эмиттера соответствующую величину можно получить, используя асимптотику (2.39) первого слагаемого в формуле (2.40) (здесь мы пренебрегаем внутренним сопротивлением транзистора, см. также формулу (2.36)):

$$K = \frac{di_c}{dU_{in}} \approx \frac{\alpha}{R_{ne}}.$$

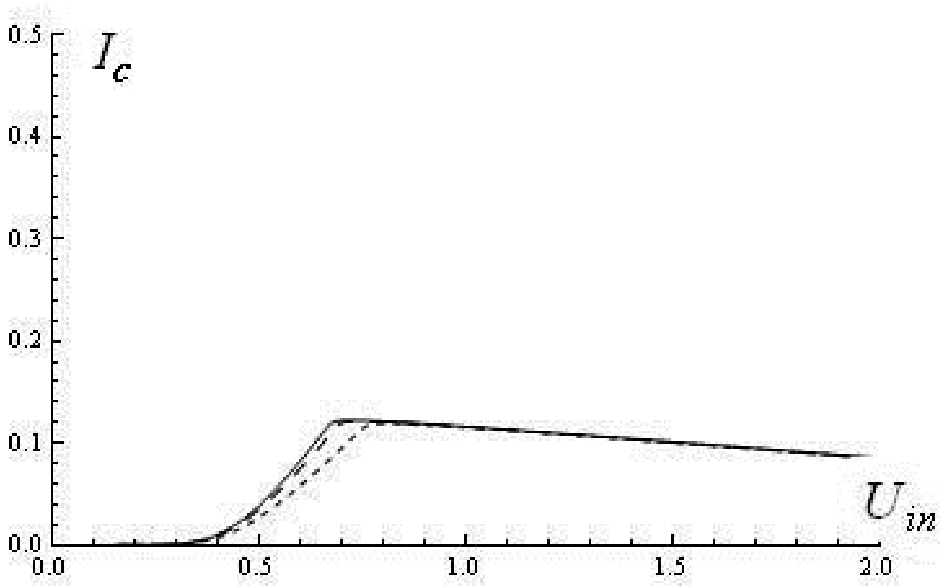


Рис. 2.25. Графики зависимостей коллекторного тока от входного напряжения усилителя при разных значениях параметра α (коэффициента передачи тока).

Как видно, эта величина прямо пропорциональна коэффициенту передачи тока. Если мы будем знать формулу зависимости коэффициента α от величины поглощенной дозы радиации *P*, мы сразу запишем выражение *K(P)* (с использованием компьютерных средств симуляции эту зависимость найти сложнее).

Также, используя формулу (2.41), можно определить, как зависит от величины α (и от *P*) верхняя граница входного напряжения (см. рис. 2.26).

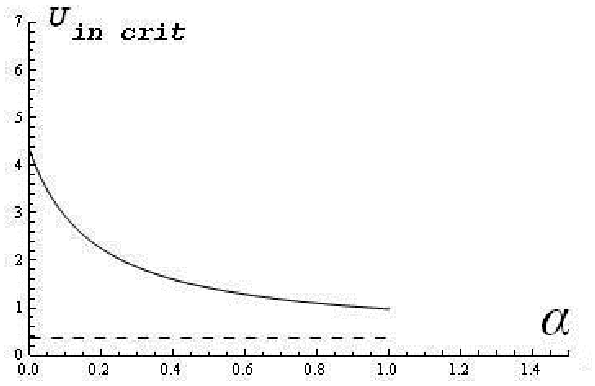


Рис. 2.26. График зависимости нижнего граничного значения (пунктир) и верхнего граничного значения (сплошная линия) от коэффициента α.

2.10 Решения, следующие из модели Эберса-Молла.

Представляет интерес вопрос – что даст использование специальной функции Ламберта, если мы останемся в рамках известной модели Эберса-Молла? Вернемся к усилителю на основе включения транзистора с общим эмиттером – см. схему на рисунке 2.27. От схемы, изображенной на рисунке 2.12, она отличается наличием резистора в базовой цепи. Также внутренняя часть биполярного транзистора изображена в соответствии с инжекционной моделью Эберса-Молла (см. рисунок 1.1 в параграфе 1.1).

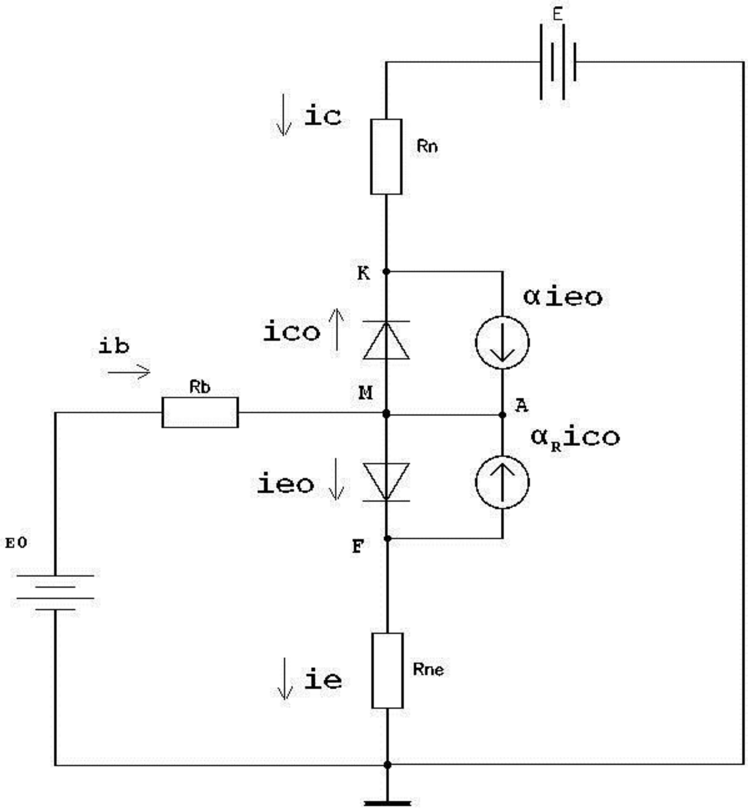


Рис. 2.27. Схема усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (в цепях базы, эмиттера и коллектора подключены резисторы).

Запишем уравнение, следующие из закона Кирхгофа, примененного к базо-эмиттерному контуру схемы (который обходится по часовой стрелке).

$$i_e R_{ne} + i_b R_b + U_{MF} = E_0. \qquad (2.42)$$

Далее применим закон Кирхгофа к коллекторно-базовому контуру (обход – в обратном направлении).

$$i_c R_n - i_b R_b + U_{KM} = E - E_0. \qquad (2.43)$$

Здесь уместно отметить, что, применяя законы Кирхгофа, нежелательно проводить контур через «перемычку» *MA*. Чтобы «запретить» это, можно считать, что в этой перемычке подключен фиктивный дискретный элемент с неизвестной характеристикой.

Используем тот факт, что в усилительном режиме

$$i_b = i_e(1-\alpha),$$
$$i_c = i_e\alpha,$$
$$i_b = i_c\,\frac{(1-\alpha)}{\alpha}.$$

С учетом этого

$$U_{MF} + i_e(R_{ne} + (1-\alpha)R_b) = E_0,$$
$$-U_{MK} + i_c(R_n - \frac{1-\alpha}{\alpha}R_b) = E - E_0. \qquad (2.44)$$

Учтем выражения (следующие из формулы Шокли), при помощи которых напряжение на идеальном *p-n* переходе выражается через ток. Токи насыщения I_{Se} и I_{Sc} здесь мы считаем разными.

$$U_{MK} = \varphi\ln(1 + \frac{i_{c0}}{I_{Sc}}),$$
$$U_{MF} = \varphi\ln(1 + \frac{i_{e0}}{I_{Se}}).$$

Также учтем присутствие источников тока (коэффициенты передачи тока для общности также считаем разными):

$$i_{c0} + i_c = \alpha i_{e0},$$
$$i_{e0} - i_e = \alpha_R i_{c0}.$$

Уравнения (2.44) теперь запишутся так:

$$i_e(R_{ne}+(1-\alpha)R_b)+\varphi\ln(1+\frac{i_e+\alpha_R i_{c0}}{I_{Se}})=E_0,$$

$$i_c(R_n-\frac{1-\alpha}{\alpha}R_b)-\varphi\ln(1+\frac{\alpha i_{e0}-i_c}{I_{Sc}})=E-E_0. \qquad (2.45)$$

Теперь предположим, что $i_{c0}\approx 0$ (тогда $i_{e0}\approx i_e$). Это соответствует усилительному режиму, когда коллекторный переход заперт. В этом случае

$$i_e(R_{ne}+(1-\alpha)R_b)+\varphi\ln(1+\frac{i_e}{I_{Se}})=E_0,$$

$$i_c(R_n-\frac{1-\alpha}{\alpha}R_b)-\varphi\ln(1+\frac{\alpha i_e}{I_{Sc}}-\frac{i_c}{I_{Sc}})=E-E_0. \qquad (2.46)$$

Вначале решим первое уравнение относительно эмиттерного тока. Для этого нужно привести его к виду (2.3) или просто воспользоваться тем фактом, что трансцендентное уравнение

$$V\ln(\frac{I}{I_0}+a)+RI=E, \qquad (2.47)$$

где I_0,a,R,V,E – некоторые числовые коэффициенты, имеет следующее решение, выражающееся через функцию Ламберта W:

$$I=-aI_0+\frac{V}{R}W(\frac{R}{V}I_0\exp(\frac{RaI_0}{V})\exp(\frac{E}{V})). \qquad (2.48)$$

Решив первое уравнение (2.46), мы получим выражение для эмиттерного тока:

$$i_e = -I_{Se} + \frac{\varphi}{R_{ne} + (1-\alpha)R_b} W(I_{Se} \frac{R_{ne} + (1-\alpha)R_b}{\varphi} \cdot$$

$$\cdot e^{I_{Se}\frac{R_{ne}+(1-\alpha)R_b}{\varphi}} e^{\frac{E_0}{\varphi}}). \qquad (2.49)$$

Теперь точно также решим второе уравнение (2.46) относительно коллекторного тока (считая эмиттерный ток параметром).

$$i_c = I_{Sc} + \alpha i_e - \frac{\varphi}{R_n - \frac{1-\alpha}{\alpha} R_b} W(I_{Sc} \frac{R_n - \frac{1-\alpha}{\alpha} R_b}{\varphi} \cdot$$

$$\cdot e^{I_{Sc}\frac{R_n - \frac{1-\alpha}{\alpha}R_b}{\varphi}(1+\frac{\alpha i_e}{I_{Sc}})} e^{-\frac{(E-E_0)}{\varphi}}). \qquad (2.50)$$

Здесь для учета возможной несимметричности транзистора оказывается удобным вместо «диодной» функции (2.4) ввести следующую функцию с четырьмя параметрами:

$$D_{(4)}(x, y, z, \varphi) = -z + \frac{\varphi}{y} W(z \frac{y}{\varphi} e^{\frac{yz+x}{\varphi}}) \qquad (2.51)$$

(по аналогии с использованной в параграфе 2.8 двухпараметрической функцией). Тогда формулы для эмиттерного и коллекторного тока мы можем записать следующим образом:

$$i_e = D_{(4)}(E_0, \{R_{ne} + (1-\alpha)R_b\}, I_{Se}, \varphi),$$
$$i_c = \alpha D_{(4)}(E_0, \{R_{ne} + (1-\alpha)R_b\}, I_{Se}, \varphi) -$$
$$- D_{(4)}(\alpha(R_n - \frac{1-\alpha}{\alpha} R_b) D_{(4)}(E_0, \{R_{ne} +$$
$$+ (1-\alpha)R_b\}, I_{Se}, \varphi) - (E - E_0), \{R_n - \frac{1-\alpha}{\alpha} R_b\}, I_{Sc}, \varphi). \tag{2.52}$$

В этой формуле некоторые «составные» сопротивления записаны в фигурных скобках – для удобства чтения. Видно, что вклад сопротивления R_b (в цепи базы) «замаскирован» за счет близости параметра α к единице. Замечание: 4-й параметр оставляет возможность варьировать (делать разным для двух переходов) коэффициент неидеальности, входящий в параметр φ (мы здесь эту возможность не используем).

Если считать ток насыщения одинаковым для двух переходов, коллекторный ток, описываемый формулой (2.52) при R_b=0, идентичен коллекторному току, описываемому формулами (2.35), (2.33), (2.30) (или формулой (2.38)) при R=0. Если же учитывать наличие внутренних сопротивлений транзистора, то только что рассмотренная модель позволяет предположить, что внутренние сопротивления включены последовательно с внешними. В соответствии с этим можно заменить в формуле (2.52) R_n на (R_n + $R_{n\ внутр}$), R_{ne} на (R_{ne} + $R_{ne\ внутр}$) и R_b на (R_b + $R_{b\ внутр}$). При подобном подходе мы можем учесть не только внутреннее коллекторное и эмиттерное сопротивления (раньше мы для простоты считали их одинаковыми – равными R), но и внутреннее сопротивление базы (которое раньше мы вообще не учитывали).

Формулы (2.52) можно записать в менее громоздком виде, если ввести эквивалентные сопротивления (из формул видно, что сопротивление базы дает некоторую, вообще говоря, небольшую за счет близости α к единице, добавку к сопротивлениям в эмиттерной и коллекторной цепи):

$$R_{EQ1} = R_{ne} + (1-\alpha)R_b,$$
$$R_{EQ2} = R_n - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}R_b. \tag{2.53}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &i_e = D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi),\\ &i_c = \alpha D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi) -\\ &- D_{(4)}(\alpha R_{EQ2} D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi) -\\ &-(E - E_0), R_{EQ2}, I_{Sc}, \varphi). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Как измениться результат, если на схеме усилителя (рис. 2.27) мы заменим транзистор *n-p-n* на *p-n-p* и при этом поменяем полярность источника питания E и источника сигнала E_0? Оказывается, что при использовании противоположного направления обхода контуров мы получим точно такие же формулы для коллекторного и эмиттерного тока, как и в только что рассмотренном случае (имеются в виду формулы (2.49), (2.50), (2.52) и (2.54)). Но это будут противоположно направленные токи (ведь изменено направление обхода). Если же мы вернемся к тем же направлениям обхода, что и при решении задачи с транзистором *n-p-n*, мы должны будем вставить знак «минус» перед напряжениями E, E_0 и перед токами i_c, i_e.

2.11 Дополнительные замечания о режиме насыщения.

При выводе формул (2.52) в предыдущем параграфе мы предполагали, что система находится в усилительном режиме (который наиболее часто применяется на практике). После перехода в режим насыщения данное решение для токов, возможно, перестанет быть верным. В параграфе 2.7 мы отмечали небольшое отличие между ходом теоретической характеристики в режиме насыщения и экспериментальными данными. Можно искусственным образом ввести коррекцию во второе слагаемое коллекторного тока в формуле (2.54), чтобы наклон линии в режиме насыщения был задан наперед. Для этого умножим второй параметр (во втором слагаемом) на корректирующий множитель μ_1. Выражение для коллекторного тока после этого будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} i_c &= \alpha D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi) - \\ &- D_{(4)}(\alpha R_{EQ2} D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi) - \\ &- (E - E_0), R_{EQ2}\mu_1, I_{Sc}, \varphi). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Запишем асимптотику коллекторного тока (не учитывая логарифмический член):

$$i_c \approx \alpha \frac{E_0}{R_{EQ1}} - \frac{\alpha R_{EQ2}(\frac{E_0}{R_{EQ1}}) - E + E_0}{R_{EQ2}\mu_1}. \tag{2.56}$$

Выделим члены, пропорциональные входному напряжению:

$$\alpha \frac{E_0}{R_{EQ1}} - \alpha \frac{E_0}{R_{EQ1}\mu_1} - \frac{E_0}{R_{EQ2}\mu_1}.$$

Пусть это суммарное выражение равно $E_0\sigma_1$, где σ_1 – некоторая наперед заданная величина. Теперь мы можем найти значение корректировочного множителя:

$$\mu_1 = \frac{\dfrac{\alpha}{R_{EQ1}} + \dfrac{1}{R_{EQ2}}}{\dfrac{\alpha}{R_{EQ1}} - \sigma_1}. \tag{2.57}$$

Применим ли аналогичный подход к эмиттерному току? При взгляде на рисунок 2.21, где эмиттерный ток имеет почти такой же «излом», как и коллекторный, возникает мысль о том, что к выражению для эмиттерного тока (первая формула (2.54)) тоже имеет смысл добавить второе слагаемое (такое же, как в выражении для коллекторного тока, но с другим корректирующим множителем μ_2).

$$\begin{aligned} i_e &= D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi) - \\ &- D_{(4)}(\alpha R_{EQ2} D_{(4)}(E_0, R_{EQ1}, I_{Se}, \varphi) - \\ &- (E - E_0), R_{EQ2}\mu_2, I_{Sc}, \varphi). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Вычисляя асимптотику этого выражения и приравнивая члены, пропорциональные E_0, произведению $E_0\sigma_2$ (где σ_2 – другая наперед заданная величина), мы получим:

$$\mu_2 = \frac{\dfrac{\alpha}{R_{EQ1}} + \dfrac{1}{R_{EQ2}}}{\dfrac{1}{R_{EQ1}} - \sigma_2}. \tag{2.59}$$

Какие величины можно взять в качестве σ_1 и σ_2? Предположим, что при переходе усилительной схемы в режим насыщения (когда открыты оба перехода транзистора) существенную роль играют лишь омические сопротивления схемы. Этой ситуации соответствует соединение внутренних выводов всех трех резисторов на схеме, изображенной на рисунке 2.27 (центральный транзистор при этом «исчезает»). Нетрудно найти токи для этого случая:

$$i_c = \frac{-E_0 R_{ne} + E(R_b + R_{ne})}{R_b R_n + R_b R_{ne} + R_n R_{ne}},$$
$$i_e = \frac{E_0 R_n + E R_b}{R_b R_n + R_b R_{ne} + R_n R_{ne}},$$
$$i_b = \frac{E_0 (R_n + R_{ne}) - E R_{ne}}{R_b R_n + R_b R_{ne} + R_n R_{ne}}. \qquad (2.60)$$

Пользуясь этими формулами, можно записать выражения для коэффициентов σ:

$$\sigma_1 = \frac{-R_{ne}}{R_b R_n + R_b R_{ne} + R_n R_{ne}},$$
$$\sigma_2 = \frac{R_n}{R_b R_n + R_b R_{ne} + R_n R_{ne}}. \qquad (2.61)$$

Из полученных выражений следует, что коллекторный ток в режиме насыщения перестает зависеть от входного напряжения, если R_{ne} стремится к нулю при не равном нулю сопротивлении в цепи базы (R_b). Тут уместно вспомнить о поправочном слагаемом $1/\alpha$, которое мы искусственно ввели в параграфе 2.5 (см. формулу (2.30)) для того, чтоб иметь горизонтальную характеристику в режиме насыщения. Возможно, если учесть присутствие внутреннего сопротивления базы, которое, при своей малости, значительно превышает внутреннее сопротивление эмиттера, необходимость в такой поправке отпадет (кстати, экспериментальный график на рисунке 2.17 показывает, что малозаметный спад характеристики в режиме насыщения, по-видимому, все же имеется).

Согласно замечанию, сделанному в параграфе 2.8, мы, скорректировав вторые параметры в функциях $D_{(4)}$, также должны скорректировать и третьи параметры (чтоб не изменилась граница усилительного режима). Это сведется к делению тока насыщения I_{Sc} (который входит во вторые слагаемые формул (2.55) и (2.58)) на μ_1 для коллекторного тока и на μ_2 для эмиттерного. Но из-за медленности изменения логарифмической функции такое усложнение может не понадобиться.

2.12 Выводы.

Использование специальной функции Ламберта позволило записать в аналитической форме зависимость тока через полупроводниковый диод от приложенного напряжения при учете внутреннего омического сопротивления диода. Аналогичная формула выражает ток через участок цепи с резистором и диодом, которые включены последовательно. Разработан математический алгоритм, который позволяет произвести подбор параметров нелинейной модели полупроводникового диода (или использующей функцию Ламберта, или экспоненциальной), используя экспериментальные данные - отсчеты напряжения и тока через диод.

Применение данного подхода к биполярному транзистору, который считается симметричным, позволило записать выражения для его характеристик (можно считать, что они уточняют известные уравнения Эберса-

Молла, так как учитывают внутреннее сопротивление *p-n* переходов транзистора). Также были получены аналитические выражения для коллекторного тока в усилителе на основе включения транзистора с общим эмиттером (рассмотрены вариант с заземленным эмиттером и вариант со стабилизирующим резистором в цепи эмиттера). Было проведено сравнение полученных выражений с результатами опыта и с результатами компьютерного моделирования.

Выводы произведенных проверок: формулы (2.29), (2.30), (2.26) для коллекторного тока усилителя ОЭ без стабилизирующего резистора в цепи эмиттера достаточно точны при надлежащем подборе параметров. Результаты, полученные с помощью этих формул, близки и к эксперименту, и к результатам моделирования в программе OrCAD.

При наличии стабилизирующего резистора в цепи эмиттера формулы (2.32), (2.33), (2.34) дают близкие к эксперименту (и к моделированию в OrCAD) результаты в режиме отсечки и в квазилинейном усилительном режиме. Положение точки насыщения также передается достаточно точно, но после точки насыщения выражения (2.32), (2.33), (2.34) дают переход к постоянному значению тока, в то время, как в реальности наблюдается спад характеристики. Если внести изменения в эти формулы (см. выражения в начале параграфа 2.7 или формулы (2.35), (2.33), (2.30)), учет поведения характеристики после точки насыщения будет более точным.

В параграфе 2.5 введено понятие «усилительной» функции – передаточной характеристики усилителя по напряжению, имеющей вид перепада от большего постоянного или почти постоянного значения к меньшему (уместно отметить, что именно в случае нахождения рабочей точки в средней части этого достаточно крутого перепада система имеет усилительные свойства).

В заключительных параграфах второй главы (2.8 – 2.11) уравнения характеристик были представлены в форме, более удобной для расчета границ квазилинейного режима (данный расчет произведен в параграфе 2.8). Вместо нескольких вариантов «диодной» функции с одним параметром были использованы функции с несколькими параметрами. Это позволило сделать формулы более компактными. В параграфе 2.10 многопараметрическая функция также была использована при решении задачи о расчете усилителя ТОЭ с несимметричным транзистором и с дополнительно включенным резистором в цепи базы (при этом использовалась инжекционная модель Эберса-Молла). Решение было получено для квазилинейного усилительного режима, но также сделаны дополнения, позволяющие описать поведение системы в режиме насыщения. Присутствие внутренних сопротивлений транзистора первоначально не было учтено, но тот факт, что они соединены последовательно с внешними сопротивлениями, позволяет легко включить их в полученные формулы (суммируя внутренние сопротивления с соответствующими внешними). Эти формулы используют большое число параметров и достаточно сложны, так что, если не нужен детальный учет несимметричных внутренних сопротивлений и внешнего сопротивления базы, достаточно использовать соотношения, приведенные в параграфе 2.7.

Результаты этой главы (в том числе и соответствующие пунктам 1,2,3 положений, выносимых на защиту) получены автором лично. Они опубликованы в статьях [А1],[А2],[А3],[А6] и [А7].

ГЛАВА 3

Применение полученных соотношений к расчету усилительных и генераторных схем.

3.1 Двухтактный усилитель.

В третьей части данной работы полученные ранее аналитические выражения для характеристик будут применены к исследованию еще нескольких электронных схем (помимо усилителя ТОЭ, расчеты для которого приведены во второй главе). В качестве первого примера рассмотрим двухтактный усилитель на комплементарных транзисторах (см. рис. 3.1). Как видно из рисунка, эта схема обладает симметрией, которая будет использована при ее расчете.

Пусть в некоторый момент времени потенциал верхней точки источника входного сигнала больше, чем потенциал нижней точки. Для верхней половины схемы при принятом для нее направлении обхода мы должны считать это входное напряжение положительным. Для нижней же половины схемы это напряжение будет отрицательным. Ясно, что такое входное напряжение запирает нижний транзистор, коллекторный ток через него можно считать нулевым, и всю нижнюю половину схемы поэтому можно исключить из рассмотрения (см. рис. 3.2 слева). Для оставшейся верхней половины формула для коллекторного тока уже была подобрана в первой части данной работы (см. ф. (2.35)). Для краткости обозначим данную функцию тока как $I(U_{in})$ (и повторим ее определение):

$$I(U_{in}) = \alpha D_{01}(U_{in}) - \\ - D_2(\alpha D_{01}(U_{in})(R + R_n) - (E - U_{in})). \qquad (3.1)$$

График коллекторного тока для положительного входного напряжения изображен на рисунке 3.3. Правда, если полезной нагрузкой считать резистор R_{ne}, нас будет интересовать не коллекторный ток, а эмиттерный. Но в режиме усиления и в режиме отсечки можно пренебречь отличием коллекторного тока от эмиттерного. Поэтому можно считать, что мы знаем эмиттерный ток для этих режимов (изобразим его на рисунке 3.4). Поведением эмиттерного тока в режиме насыщения мы интересоваться не будем.

Теперь пусть потенциал верхней точки источника сигнала ниже, чем потенциал нижней точки. Верхний транзистор будет закрыт, коллекторный ток его будет практически равен нулю. Теперь мы можем исключить из рассмотрения уже верхнюю часть схемы (см. рис. 3.2 справа).

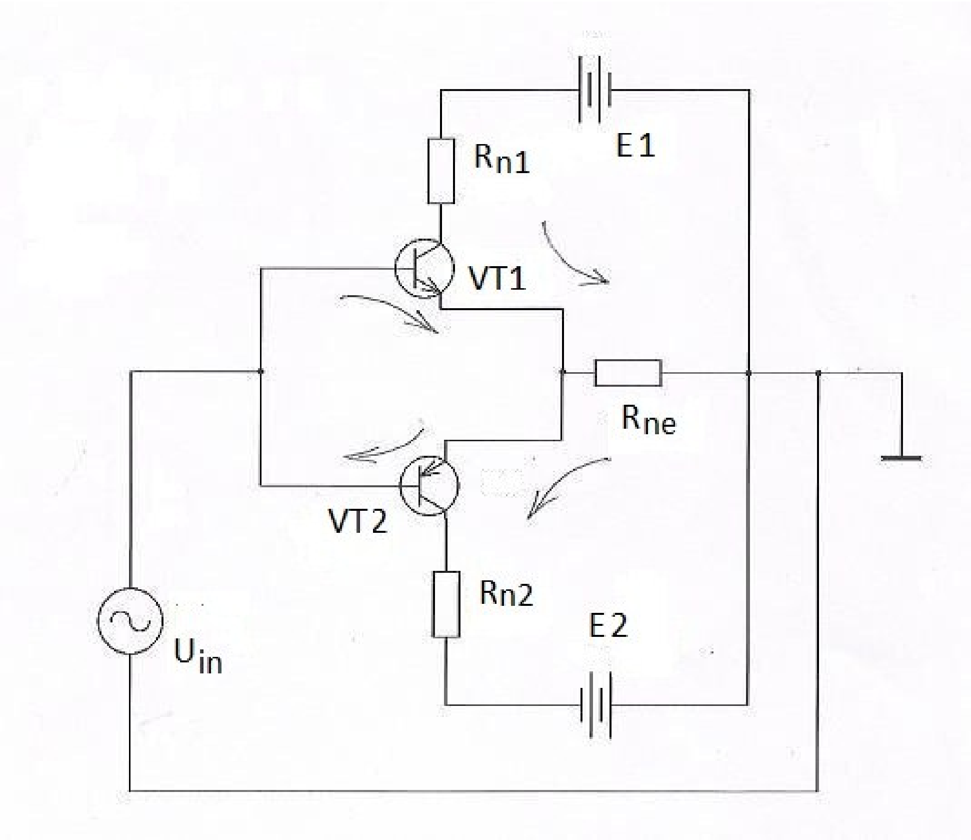


Рис. 3.1 Усилитель на комплементарных транзисторах. Полезной нагрузкой здесь является резистор R_{ne}. Стрелками обозначены направления обхода контуров схемы (им соответствуют направления тока, которые считаются положительными).

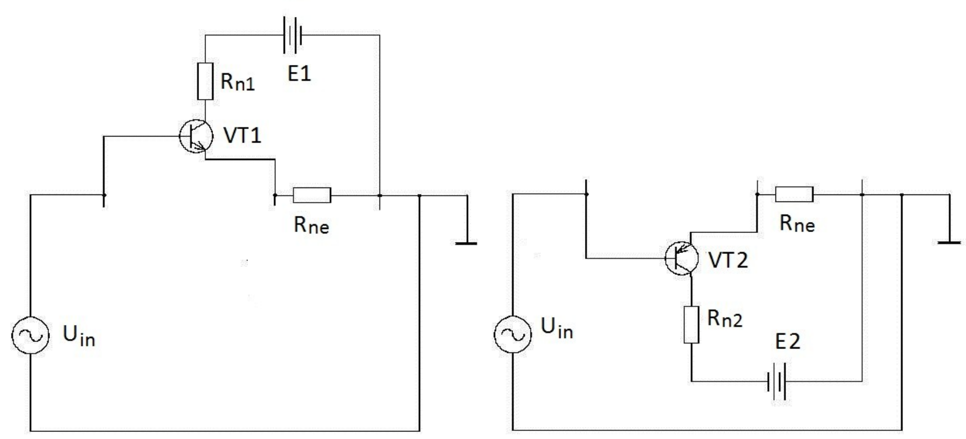


Рис.3.2 Верхняя и нижняя «половинки» для двухтактного усилителя.

Для нижней части схемы (для ее направления обхода) данный импульс мы также должны считать положительным. Обратим также внимание на то, что ток через резистор нагрузки R_{ne} сменит свой знак, если «задействовать» направление обхода нижней части схемы.

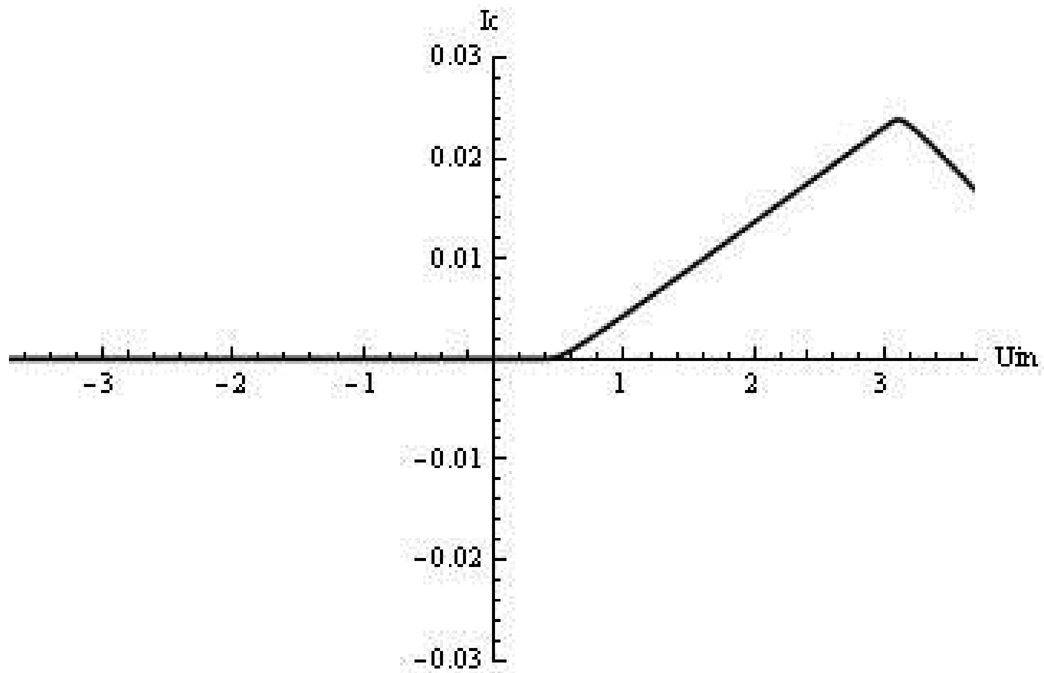


Рис. 3.3 График зависимости коллекторного тока от напряжения входного сигнала для верхней «половины» схемы.

Для однозначного представления результатов расчета мы должны принять какое-то одно направление обхода в ветке схемы с резистором нагрузки (R_{ne}). Пусть это будет направление обхода верхней части схемы. Тогда, при отрицательной полярности импульса, мы сможем воспользоваться расчетом, уже проведенным для верхней части схемы, если изменим знак и входного напряжения, и выходного тока на противоположный (это будет соответствовать переходу к направлению обхода нижней части схемы). Таким образом, полученный график для положительных значений входного напряжения и выходного тока (см. график на рис. 3.4, соответствующий усилительному режиму и режиму отсечки) нужно просто инвертировать относительно начала координат, чтоб получить окончательный результат для отрицательных значений входного напряжения. Если обозначить зависимость эмиттерного тока усилителя, соответствующего верхней половине схемы, от входного напряжения как $I_e(U_{in})$ (эта функция $I_e(U_{in})$ практически не отличается от введенной выше функции $I(U_{in})$ в режиме усиления и режиме отсечки), токовую характеристику для «полного» двухтактного усилителя можно записать следующим образом:

$$i = h(U_{in})I_e(U_{in}) - h(-U_{in})I_e(-U_{in}). \tag{3.2}$$

Здесь $h(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, а эмиттерная токовая функция обозначена нижним индексом «e».

На рисунке 3.5 изображен получившийся при выполнении такой процедуры график тока через резистор нагрузки R_{ne} в зависимости от входного напряжения U_{in}.

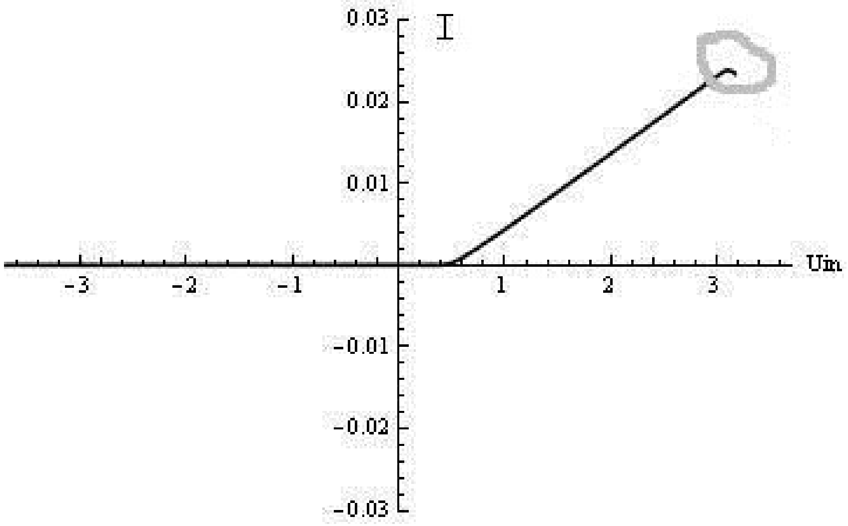


Рис. 3.4 График зависимости эмиттерного тока от напряжения входного сигнала для верхней «половины» схемы (для усилительного режима и режима отсечки). Обведено место перехода графика в режим насыщения. Ход графика в режиме насыщения на рисунке не обозначен (маленький загиб вниз на обведенном участке вовсе не соответствует реальному ходу кривой).

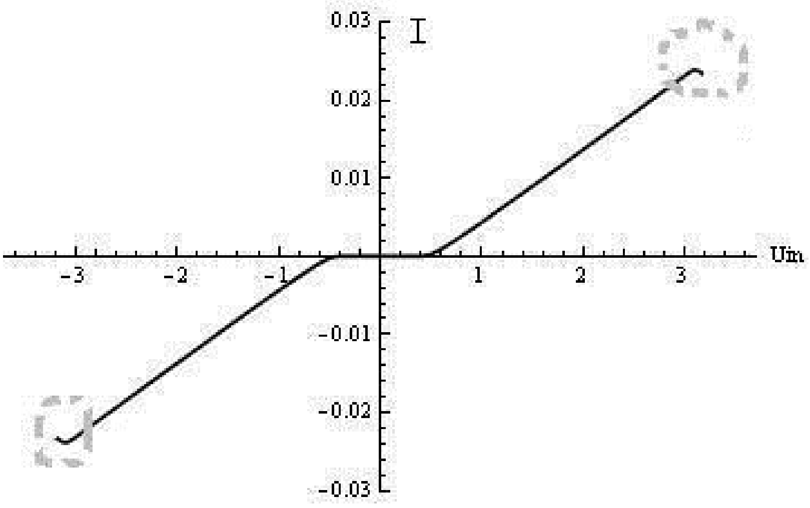


Рис. 3.5 График зависимости тока через резистор R_{ne} от напряжения входного сигнала. Обведены места перехода графика в режим насыщения.

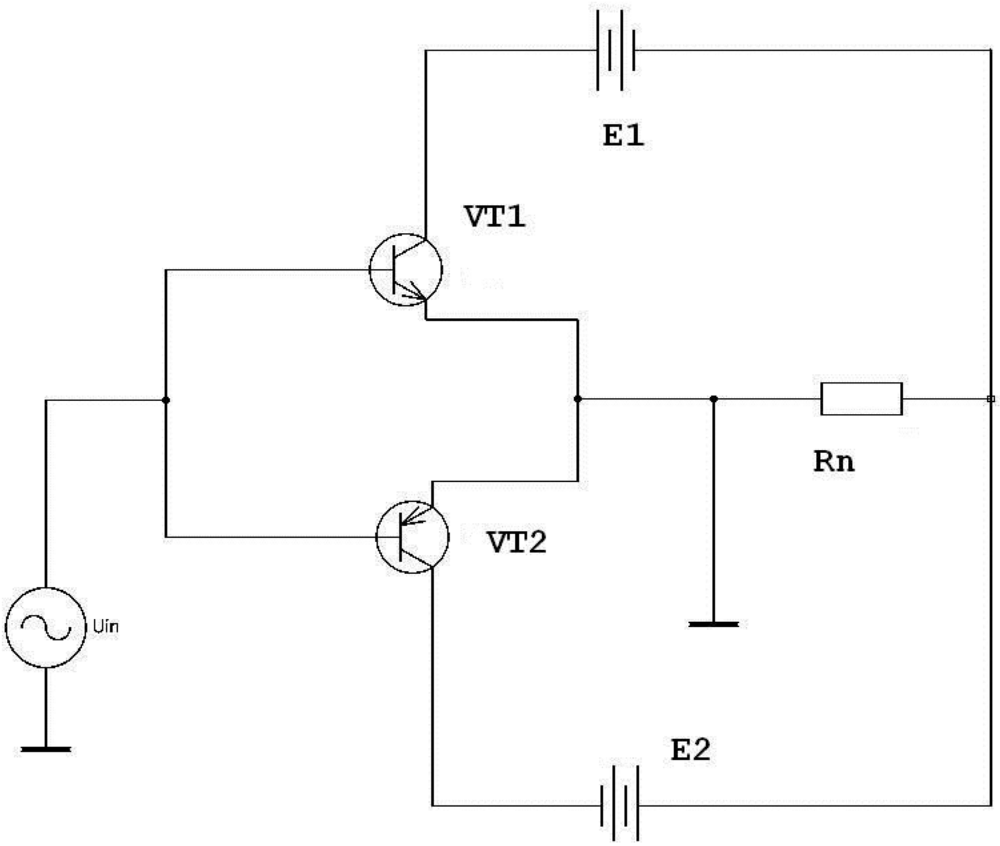


Рис.3.6 Еще одна модель усилителя на комплементарных транзисторах. Резистор нагрузки помещен в цепь коллектора.

Если мы будем считать сопротивления в коллекторных цепях нулевыми, обе половинки изображенного на рисунке 3.1 усилителя будут эмиттерными повторителями (или усилителями с общим коллектором). Такие усилители усиливают ток. Можно ли сделать «двойной» усилитель с общим эмиттером, который будет усиливать напряжение? Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 3.6. Резистор нагрузки R_n (а не R_{ne}) помещен в цепь коллектора (в ее участок, общий для обеих половинок схемы, верхней и нижней).

При расчете данной схемы ее тоже можно разделить на две половинки, почти дословно повторяя рассуждения, приведенные в начале параграфа.

Каждая половинка будет усилителем с общим эмиттером. Так как нагрузочный резистор находится в цепи коллектора, нас будет интересовать именно коллекторный ток. В итоге для тока через резистор нагрузки R_n мы тоже придем к формуле, аналогичной формуле (3.2), но токовая функция $I(U_{in})$ (уже без индекса «e» - см. формулу (3.1)) теперь будет соответствовать не эмиттерному, а коллекторному току верхнего усилителя:

$$i = h(U_{in})I(U_{in}) - h(-U_{in})I(-U_{in}).$$

С резистора нагрузки можно снимать напряжение пропорциональное величине коллекторного тока и сопротивлению этого резистора.

И для схемы, изображенной на рисунке 3.6, и для исходной схемы (рисунок 3.1) может быть необходима борьба с нелинейными искажениями типа «отсечки» (или «ступеньки»), возникающими в тех случаях, когда входное напряжение мало и соответствующий его знаку транзистор не открылся (находится в режиме отсечки). Для такой борьбы нужно обеспечить так называемый «ток покоя», который протекает через оба транзистора при отсутствии входного сигнала и приоткрывает их. С этой целью схему, изображенную на рисунке 3.6, можно изменить, например, следующим образом, как показано на рисунке 3.7 (добавив диод и дополнительный резистор в базовую цепь каждого транзистора).

На схему, изображенную на рисунке 3.7, автором был получен патент на полезную модель (N 192244).

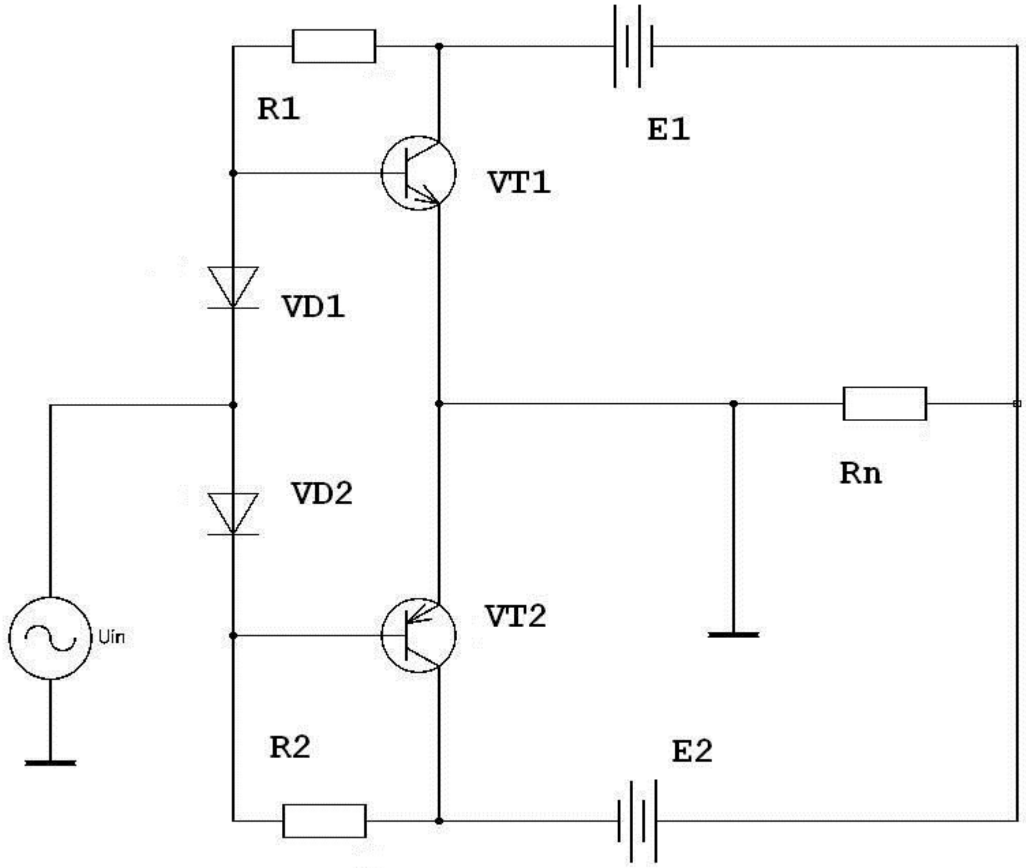


Рис.3.7 Добавления в модель усилителя с рисунка 3.6, обеспечивающие протекание тока покоя.

3.2 Симметричный триггер.

Рассмотрим далее следующую схему: симметричный триггер, содержащий два биполярных транзистора (рис. 3.8). Пусть величины сопротивлений одинаковы: $R_1=R_2=R$.

Коллекторные цепи обоих транзисторов аналогичны коллекторной цепи усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (без стабилизации), которая была рассмотрена во второй главе. Так что при расчете только что приведенной схемы вполне можно применить уже полученные результаты (в частности, формулу (2.29)).

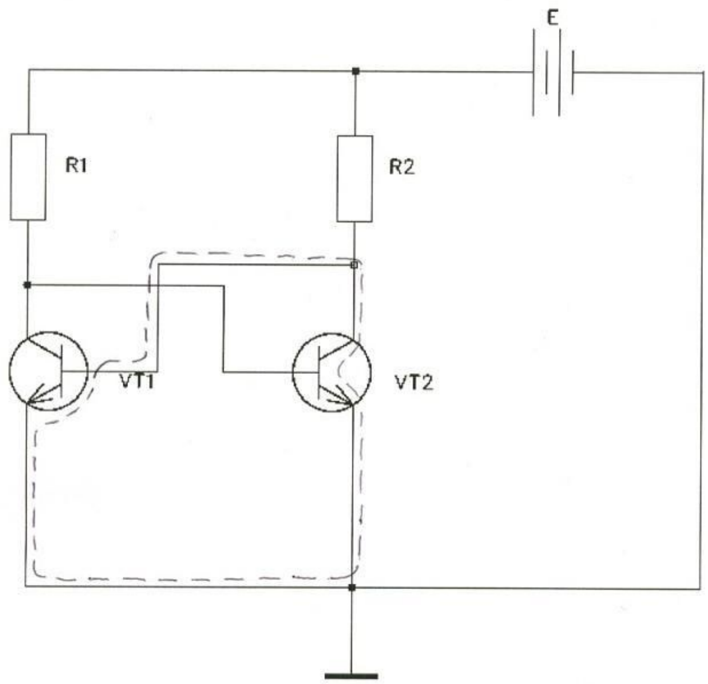


Рис. 3.8 Схема симметричного триггера.

Рассмотрим контур, выделенный пунктиром на данной схеме. Исходя из закона Кирхгофа,

$$U_{be1} + U_{ec2} = 0.$$

Это можно записать так (если поменять местами уменьшаемое и вычитаемое при вычислении потенциала для второго транзистора):

$$U_{be1} - U_{ce2} = 0.$$

Но

$$U_{ce2} = F(U_{be2}).$$

Здесь F – введенная нами выше во второй главе «усилительная» функция. Мы считаем, что присутствие первого усилителя с высоким входным сопротивлением не влияет на режим работы второго усилителя (и наоборот), поэтому расчеты «выходных» функций, произведенные для усилителя ТОЭ, остаются верными. Если пренебречь током базы, «усилительную» функцию можно выразить через «токовую» функцию для коллекторного тока $I(U_{be})$, определяемую формулой (2. 29):

$$F(U_{be2}) = E - RI(U_{be2}). \tag{3.3}$$

В итоге усилительная функция будет определяться формулой (2.31).

Итак,

$$U_{be1} = F(U_{be2}).$$

Рассмотрев аналогично другую часть симметричной схемы и повторив вышеприведенные рассуждения, мы придем к выводу, что

$$U_{be2} = F(U_{be1}).$$

Комбинируя две последние формулы, получим:

$$U_{be1} = F(F(U_{be1})). \tag{3.4}$$

По своей форме это есть конечное уравнение, решив которое, мы найдем несколько значений для напряжения база-эмиттер. Ясно, что данное уравнение может быть применено не только к триггеру на биполярных транзисторах, но и к другим физическим системам с похожим поведением, и выражение для усилительной функции, имеющей характер нисходящего перепада между двумя стационарными состояниями, может быть аппроксимировано посредством выражений, отличающихся от (2.31). Для удобства дальнейшей графической иллюстрации решения данного уравнения рассмотрим пример, когда усилительная функция аппроксимируется не формулой (2.31), а следующим выражением:

$$y = F(x) = E_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + Be^{2gx}}}. \tag{3.4}$$

В этом случае функция F имеет более пологий спад при увеличении входного параметра (чем функция (2.31) для малых значений внутреннего сопротивления *p-n* переходов транзистора). Символом "x" здесь обозначено напряжение U_{be} на любом из двух транзисторов. Параметры для данной функции возьмем следующие: $E_0=0{,}02,\ g=10,\ B=0{,}004$.

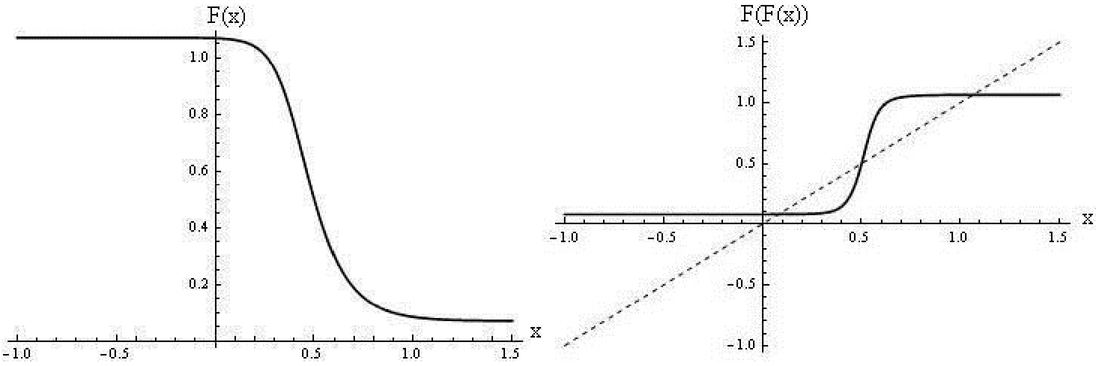


Рис. 3.9 График усилительной функции и графическое решение уравнения для точек равновесия.

Графики для функции $F(x)$ и для результата ее повторного действия $F(F(x))$ приведены на рис. 3.9.

Уравнение

$$x = F(F(x)) \tag{3.5}$$

удобно решать графически. Нужно найти точки пересечения кривой

$$y = F(F(x)),$$

изображенной сплошной линией справа на рис.3.9, и прямой

$$y = x,$$

изображенной там же пунктиром (y – это ордината приведенных на рисунке графиков). Видно, что имеются три точки пересечения. Двум крайним точкам соответствуют устойчивые равновесные значения напряжения триггера. Средняя точка – неустойчивая, система при малейшем отклонении от нее «сваливается» в одно из крайних состояний равновесия. Подобные устройства с парой устойчивых равновесных состояний (близких к нулю и к напряжению питания) используются в цифровых схемах для представления двоичных нуля и единицы.

Чтобы обосновать утверждения об устойчивости состояний равновесия, рассмотрим динамическую задачу. Для этого необходимо учесть емкости *p-n* переходов в биполярных транзисторах. В первой главе уже говорилось о том, что емкости *p-n* переходов достаточно сложным образом зависят от напряжения и тока (см. (1.16) и (1.18)). Здесь, на начальном этапе наших рассуждений, мы для упрощения задачи будем считать емкость константой (например, равной барьерной емкости перехода при нулевом приложенном напряжении, т.е. параметру C_0 в формуле (1.16)). Учитывая приведенную на рисунке 1.5 (в первой главе) схему замещения для транзистора, расчетная схема триггера должна принять более сложный вид (как это изображено на рисунке 3.10).

Если пренебречь токами базы, схему с емкостями можно упростить (см. рисунок 3.11). Пара емкостей C_1 и C_2 (и C_3,C_4 соответственно) заменяется на емкость $C_1C_2/(C_1+C_2)$.

Для транзистора, находящегося на рисунке 3.11 справа, выполняется соотношение, следующее из закона Кирхгофа:

$$U_{ce2} = E - Ri_2$$

(мы помним, что величина сопротивления резистора R_2 равна R).

Так как (в пренебрежении током базы первого транзистора)

$$i_2 = i_c + i_0,$$

можно записать:

$$U_{ce2} = E - Ri_c - Ri_0.$$

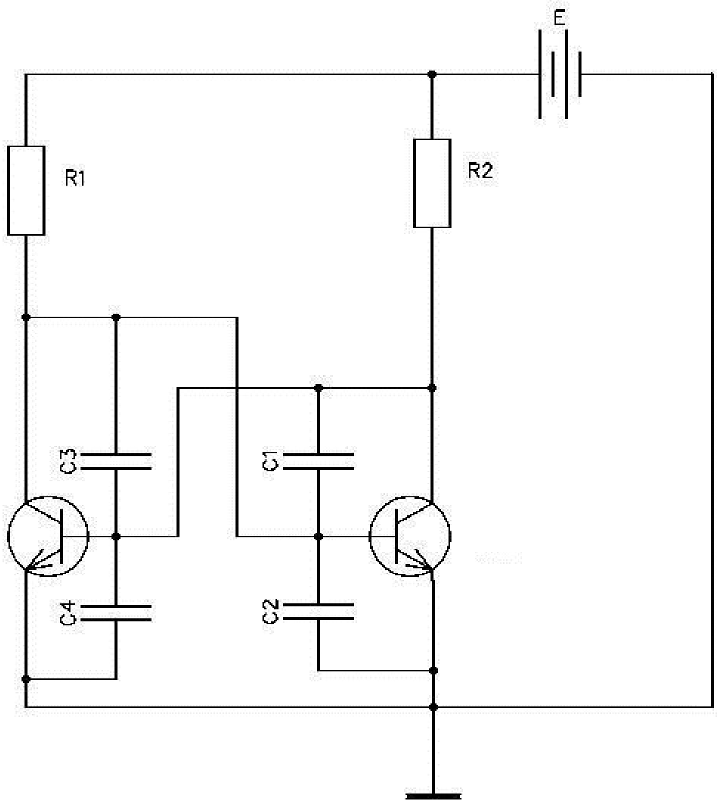


Рис. 3.10 Схема симметричного триггера, учитывающая емкости p-n переходов.

Ток через конденсатор зависит от напряжения коллектор-эмиттер:

$$i_0 = C\frac{dU_{ce2}}{dt}.$$

Поэтому:

$$U_{ce2} = (E - Ri_c) - RC\frac{dU_{ce2}}{dt}.$$

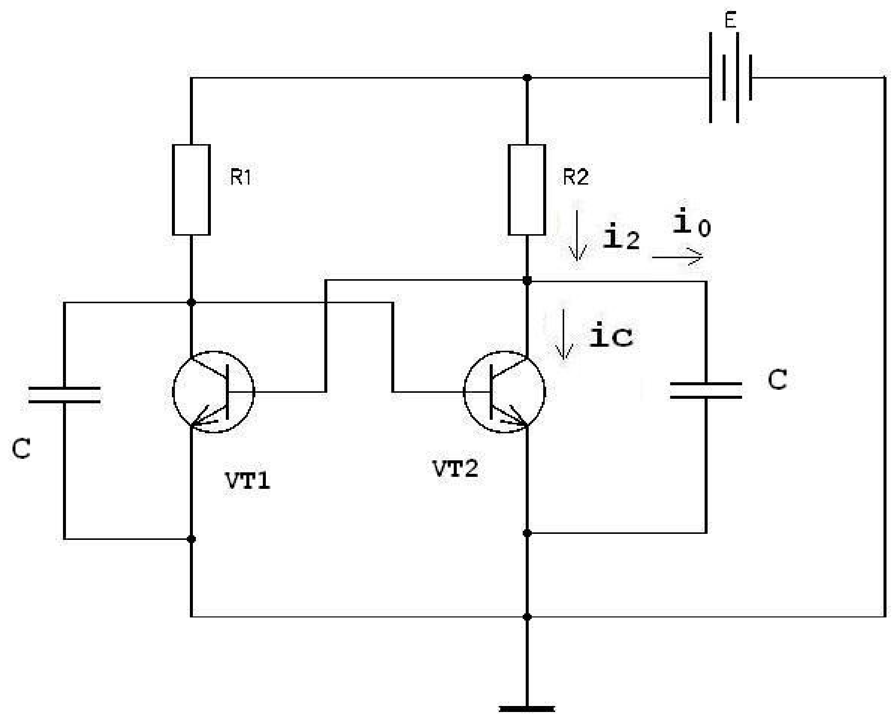


Рис. 3.11 Упрощенный учет емкостей.

Выражение в скобках является уже рассмотренной нами усилительной функцией $F(U_{be2})$ (мы считаем, что подключение «симметричного» усилителя с большим входным сопротивлением оставляет в силе формулы для коллекторного тока исходного усилителя). Вследствие этого последнее уравнение можно записать так:

$$U_{ce2} = F(U_{be2}) - RC\frac{dU_{ce2}}{dt}.$$

Выше мы уже выяснили, что U_{be1}=U_{ce2}. Аналогично: U_{be2}=U_{ce1}. Поэтому:

$$U_{ce2} = F(U_{ce1}) - RC\frac{dU_{ce2}}{dt}.$$

Если рассмотреть первый транзистор (слева на рисунке 3.11), мы получим такое же выражение:

$$U_{ce1} = F(U_{ce2}) - RC\frac{dU_{ce1}}{dt}.$$

Итак, если обозначить напряжения коллектор-эмиттер как y_1 и y_2, мы имеем для них следующую симметричную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{1}{RC}(F(y_2) - y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{1}{RC}(F(y_1) - y_2). \end{cases} \tag{3.6}$$

Стационарные состояния данной системы определяются уже рассмотренным выше уравнением (3.5).

Вернемся к значениям емкости C, входящей в уравнения (3.6). В первой главе в параграфе 1.3 отмечалось, что емкости *p-n* переходов зависят от напряжения, причем полная емкость перехода равна сумме двух емкостей: барьерной и диффузионной. При обратных и небольших прямых напряжениях преобладает барьерная емкость, а при достаточно больших прямых напряжениях – диффузионная емкость. Здесь мы имеем дело с составной емкостью C, состоящей из последовательно соединенных емкостей коллекторного и эмиттерного перехода. Предположим, что эта емкость является функцией напряжения коллектор-эмиттер, и что нам известна соответствующая вольт-фарадная характеристика. Следует ожидать, что при малых значениях этого напряжения, когда оба транзисторных перехода открыты, емкость будет иметь диффузионный характер. При больших же значениях, когда оба перехода закрыты, емкость будет барьерной, и ее величина будет существенно меньшей. Перепишем уравнения (3.6), явно обозначая зависимость емкости от напряжения:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{1}{RC(y_1)}(F(y_2) - y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{1}{RC(y_2)}(F(y_1) - y_2). \end{cases} \tag{3.7}$$

Если емкость C не принимает бесконечно больших значений, стационарные состояния такой усложненной системы будут определяться тем же уравнением (3.5) (для переменной y_1 или y_2). Пусть y_{10} и y_{20} – одно из стационарных состояний. Для определения его типа используем общую теорию динамических систем, изложенную, например, в [15]. Обозначим правую часть первого уравнения (3.7) как $P(y_1,y_2)$, а правую часть второго уравнения – как $Q(y_1,y_2)$. Из общей теории следует, что типы состояний равновесия определяются корнями λ следующего характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь

$$a = \left.\frac{\partial P}{\partial y_1}\right|_{y_{10},y_{20}}, \quad b = \left.\frac{\partial P}{\partial y_2}\right|_{y_{10},y_{20}},$$

$$c = \left.\frac{\partial Q}{\partial y_1}\right|_{y_{10},y_{20}}, \quad d = \left.\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right|_{y_{10},y_{20}}.$$

В нашем случае

$$a = -\frac{1}{RC(y_{10})}, \quad b = \frac{1}{RC(y_{10})} \left.\frac{dF(y_2)}{dy_2}\right|_{y_{20}},$$

$$c = \frac{1}{RC(y_{20})} \left.\frac{dF(y_1)}{dy_1}\right|_{y_{10}}, \quad d = -\frac{1}{RC(y_{20})}.$$

Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^2 + \frac{C(y_{10}) + C(y_{20})}{RC(y_{10})C(y_{20})}\lambda +$$

$$+\frac{1}{R^2 C(y_{10})C(y_{20})}(1 - \left.\frac{dF(y_2)}{dy_2}\right|_{y_{20}} \left.\frac{dF(y_1)}{dy_1}\right|_{y_{10}}) = 0.$$

Решения этого квадратного уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{C(y_{10}) + C(y_{20})}{2RC(y_{10})C(y_{20})}\{-1 \pm$$

$$\pm\sqrt{1 - \frac{4C(y_{10})C(y_{20})}{(C(y_{10}) + C(y_{20}))^2}(1 - \left.\frac{dF(y_2)}{dy_2}\right|_{y_{20}} \left.\frac{dF(y_1)}{dy_1}\right|_{y_{10}})}\}.$$

Так как функция *F* имеет «квазиступенчатый» вид (вид перепада от величины, близкой к напряжению питания, к почти нулевой величине), в области крайних стационарных точек производные, стоящие под знаком квадратного корня, близки к нулю (если края функции *F* достаточно плоские). В центральной же стационарной точке эти производные, напротив, велики (если перепад достаточно крутой). Поэтому, если функция *F* достаточно близка к идеальной «ступеньке», двум крайним стационарным состояниям соответствуют действительные отрицательные значения λ, а центральному состоянию – действительные значения, одно из которых отрицательно, а другое – положительно. Из общей теории следует, что крайние стационарные состояния будут устойчивыми узлами, а центральное – седлом (неустойчивым состоянием равновесия).

При численном решении дифференциальных уравнений (3.7) для начальных оценок разумно использовать одно из постоянных значений емкости в одной из стационарных точек или некоторое среднее постоянное значение. В этом случае (если считать емкость *C* константой) характеристическое уравнение выглядит несколько проще:

$$\lambda^2 + \frac{2}{RC}\lambda + \frac{1}{R^2C^2}(1 - \frac{dF}{dy_2}(y_{20})\frac{dF}{dy_1}(y_{10})) = 0.$$

Его решения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{RC}\{-1 \pm \sqrt{\frac{dF}{dy_2}(y_{20})\frac{dF}{dy_1}(y_{10})}\}.$$

3.3 Дифференциальный усилитель.

Рассмотрим еще один усилитель, обладающий симметрией (см. рисунок 3.12). Он состоит из двух одинаковых половинок. В коллекторную цепь включен дополнительный источник питания E_2 (помимо основного источника E_1). Его роль состоит в том, чтоб создать напряжение смещения для борьбы с искажениями отсечки (данные искажения возникают из-за существования почти нулевого участка характеристики при малых прямых токах и напряжениях). В реальных схемах часто включают еще один общий резистор в эмиттерной цепи (он в этом случае был бы подключен последовательно с источником напряжения смещения E_2), но мы для простоты выкладок его не рассматриваем. Номиналы резисторов справа и слева считаются одинаковыми: $R_{n1}=R_{n2}=R_n$, $R_{ne1}=R_{ne2}=R_{ne}$.

Данная схема имеет два источника входного сигнала. Клемм вывода тоже две. На рисунке обведен пунктиром блок, фактически представляющий собой усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером, имеющий стабилизирующий резистор в эмиттерной цепи. Этот усилитель был уже рассмотрен выше (см. формулу (2.35) для коллекторного тока и идентичную ей формулу (3.1) для токовой функции). В качестве входного напряжения эта «половина» усилителя имеет сумму U_{in} и напряжения смещения E_2, а в качестве напряжения питания – сумму E_1 и E_2. Модифицируем формулу (3.1), представив функцию $I(U_{in})$ как функцию I_p двух аргументов – входного напряжения и напряжения питания:

$$I_p(U_{in}, E) = \alpha D_{01}(U_{in}) - \\ - D_2(\alpha D_{01}(U_{in})(R + R_n) - (E - U_{in})). \tag{3.8}$$

Фактически эта формула описывает нелинейный трехполюсник (на рисунке 3.12 он обведен пунктиром), на который подается два напряжения: одно между левым и нижним проводом, а второе – между верхним и нижним. Подставляя в эту формулу напряжения, соответствующие подключенным на схеме источникам, мы получим следующее значение для коллекторного тока в левом транзисторе (этот ток проходит через резистор R_{n1}):

$$i_{c1} = I_P(U_{in1} + E_2, E_1 + E_2) = \alpha D_{01}(U_{in1} + E_2) - \\ - D_2(\alpha D_{01}(U_{in1} + E_2)(R + R_n) - (E - U_{in1})). \tag{3.9}$$

Аналогичная формула получается для коллекторного тока в правом транзисторе:

$$i_{c2} = I_P(U_{in2} + E_2, E_1 + E_2) = \alpha D_{01}(U_{in2} + E_2) - \\ - D_2(\alpha D_{01}(U_{in2} + E_2)(R + R_n) - (E - U_{in2})).$$

Здесь функция D_{01} определяется формулой (2.33), а функция D_2 - формулой (2.30).

Выходные напряжения будут следующими:

$$U_1 = E_1 - R_n i_{c1},$$
$$U_2 = E_1 - R_n i_{c2}.$$

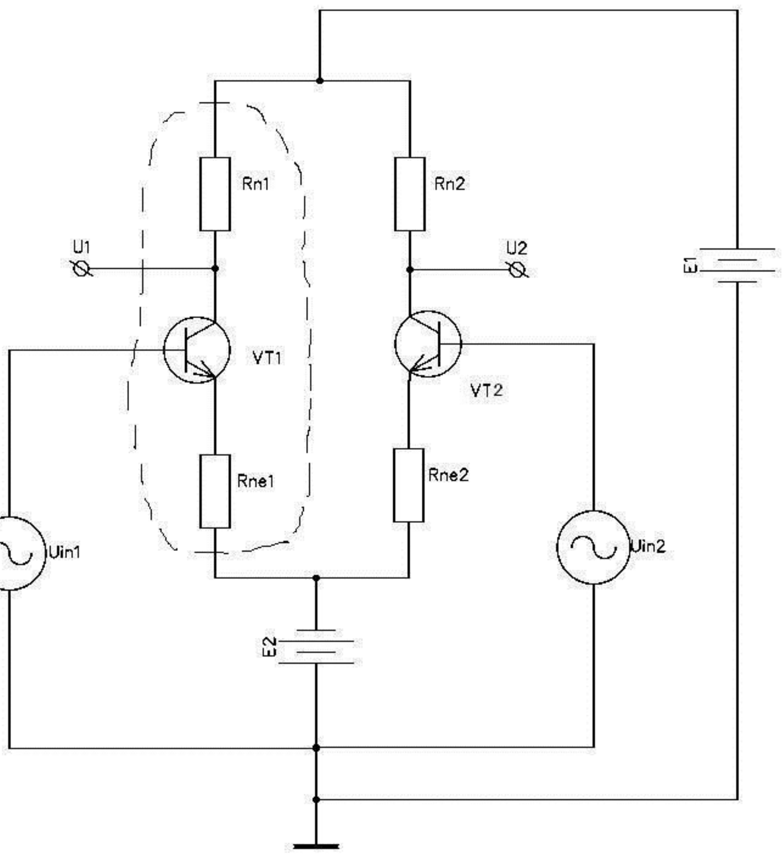


Рис.3.12 Дифференциальный усилитель.

Обычно в подобных схемах полезным выходным сигналом является разность выходных напряжений правой и левой частей схемы (обозначим это напряжение как U_d).

$$U_d = U_2 - U_1 = R_n(I_P(U_{in2} + E_2, E_1 + E_2) - \\ - I_P(U_{in1} + E_2, E_1 + E_2)). \qquad (3.10)$$

Если

$$U_{in2} = U_{in1} + \Delta U,$$

тогда

$$U_d = R_n(I_P(U_{in1} + \Delta U + E_2, E_1 + E_2) - \\ - I_P(U_{in1} + E_2, E_1 + E_2)).$$

Если добавка ΔU мала, тогда

$$U_d = R_n \Delta U \left. \frac{\partial I_P(U, E_1 + E_2)}{\partial U} \right|_{U = U_{in1} + E_2} . \qquad (3.11)$$

Полезный разностный сигнал в этом случае пропорционален производной токовой характеристики. Из формулы видно, что постоянная составляющая входного сигнала (имеется в виду U_{in1}) выводит рабочую точку на квазилинейный участок усилительного режима так же, как и дополнительный источник напряжения смещения E_2.

3.4 Токовое зеркало.

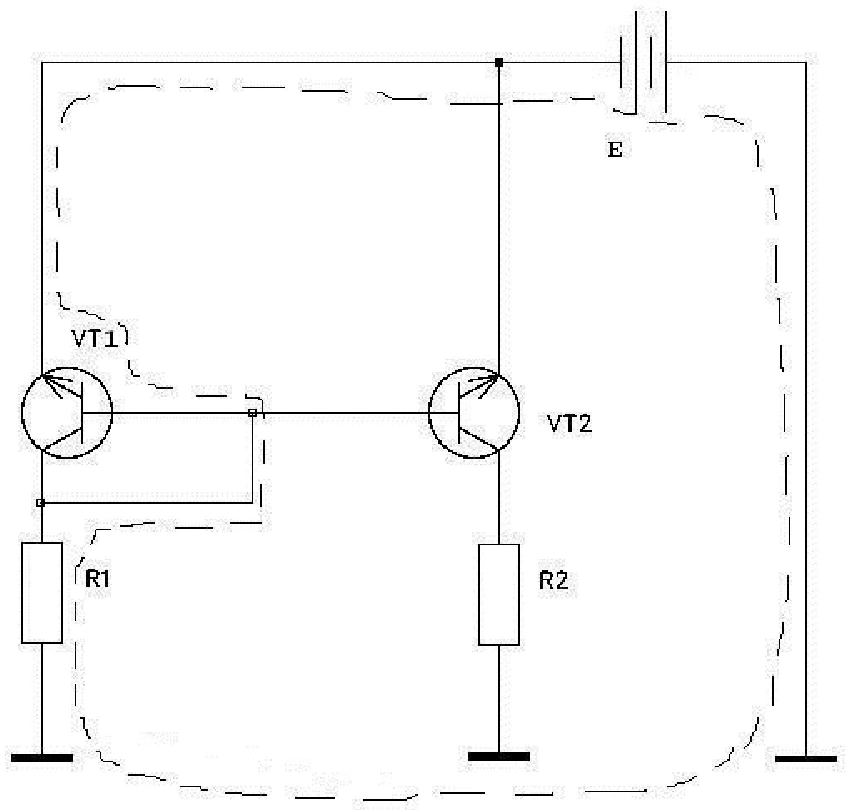


Рис. 3.13 Токовое зеркало.

В качестве следующего примера, иллюстрирующего применение предложенных функций для токовых характеристик полупроводниковых устройств, мы рассмотрим токовое зеркало (см. рис. 3.13). Оно используется в случаях, когда нужно сделать почти равными токи в двух ветвях схемы. Симметрия двух половинок этого устройства нарушена проводником, шунтирующим коллектор левого транзистора.

Сделаем обход по контуру, обозначенному пунктирной линией на рисунке 3.13 (по направлению часовой стрелки). Получим для тока i_1, протекающего через резистор R_1:

$$R_1 i_1 + U_{be1} = E.$$

В эту формулу входит напряжение база-эмиттер для левого транзистора. Эмиттерный переход транзистора при закороченном коллекторном переходе ничем не отличается от диода, поэтому ток через него определяется через напряжение по формуле (2.4). Мы пренебрежем базовым током через второй транзистор. С учетом этого

$$i_1 = D(U_{be1}) = -I_s + \frac{V_t}{R} W\left(e^{\frac{U_{be1}}{V_t}} I_s \frac{R}{V_t} e^{I_s \frac{R}{V_t}}\right).$$

Напряжение U_{be1} нам неизвестно. Известным параметром является напряжение питания. Во второй части был рассмотрен ток через участок цепи с диодом и резистором (см. параграф 2.2 «Последовательное соединение диода и резистора»). Воспользуемся здесь соответствующей формулой, чтоб выразить ток i_1 через напряжение питания E:

$$i_1 = -I_s + \frac{V_t}{R + R_n} W\left(e^{\frac{E}{V_t}} I_s \frac{R + R_n}{V_t} e^{I_s \frac{R + R_n}{V_t}}\right).$$

Теперь найдем ток i_2 через резистор R_2. Фактически правый транзистор вместе с источником питания и с сопротивлением R_2 представляет собой усилитель на основе включения транзистора с общим эмиттером, причем, как видно из схемы, эмиттерная стабилизация отсутствует. Входное напряжение совпадает с напряжением база-эмиттер на левом транзисторе. Его можно найти, используя уже найденный ток i_1:

$$U_{in2} = U_{be2} = U_{be1} = E - R_1 i_1 =$$
$$= E - R_1\{-I_s + \frac{V_t}{R+R_n} W(e^{\frac{E}{V_t}} I_s \frac{R+R_n}{V_t} e^{I_s \frac{R+R_n}{V_t}})\}. \quad (3.12)$$

Теперь для расчета воспользуемся результатами для усилителя ТОЭ без стабилизации (или с заземленным эмиттером – в данном случае под заземлением мы будем понимать отсутствие резистора в цепи эмиттера). Используем формулы (2.29), (2.30), (2.26). В качестве U_{be} в формулу (2.29) подставим напряжение U_{in2}, рассчитанное по формуле (3.12). Запишем формулу (2.29) в применении к нашему случаю:

$$i_2 = \alpha D_0(E - R_1 i_1) -$$
$$- D_2(\alpha D_0(E - R_1 i_1)(R + R_n) - (E - (E - R_1 i_1))).$$

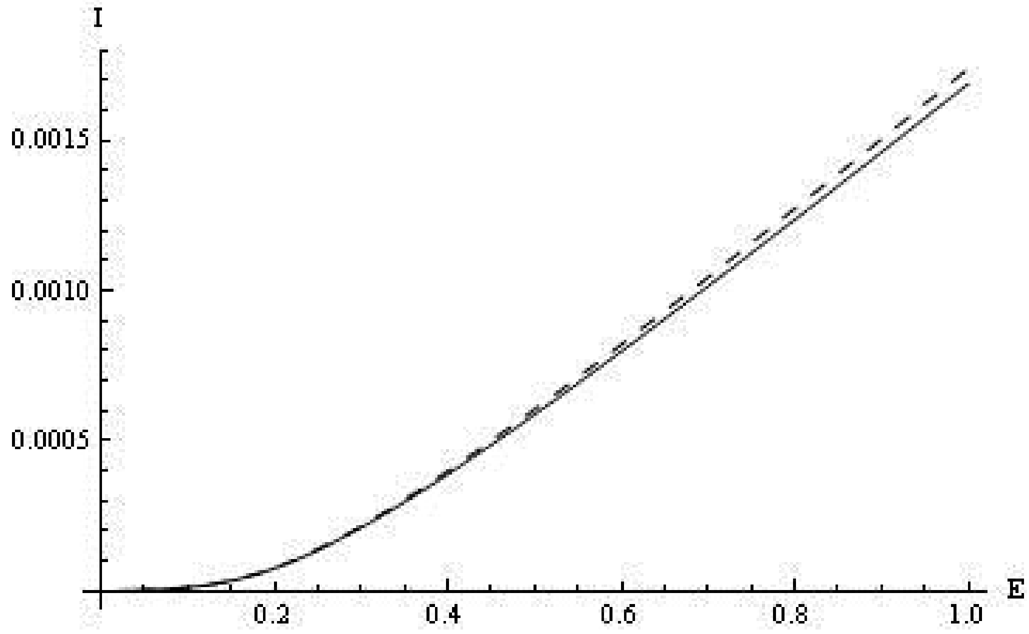


Рис.3.14 Зависимость токов в токовом зеркале от напряжения питания.

Приводить формулу, получающуюся при подстановке в это выражение i_1, мы не будем (она слишком громоздкая). Для расчета можно воспользоваться какой-либо системой символьной математики. Приведем график для токов i_1 (пунктирная линия) и i_2 (сплошная линия) в зависимости от напряжения питания E (рис. 3.14).

Линии сближаются при стремлении параметра α к единице (график получен при α=0.97).

3.5 Усилитель на основе включения транзистора с общей базой.

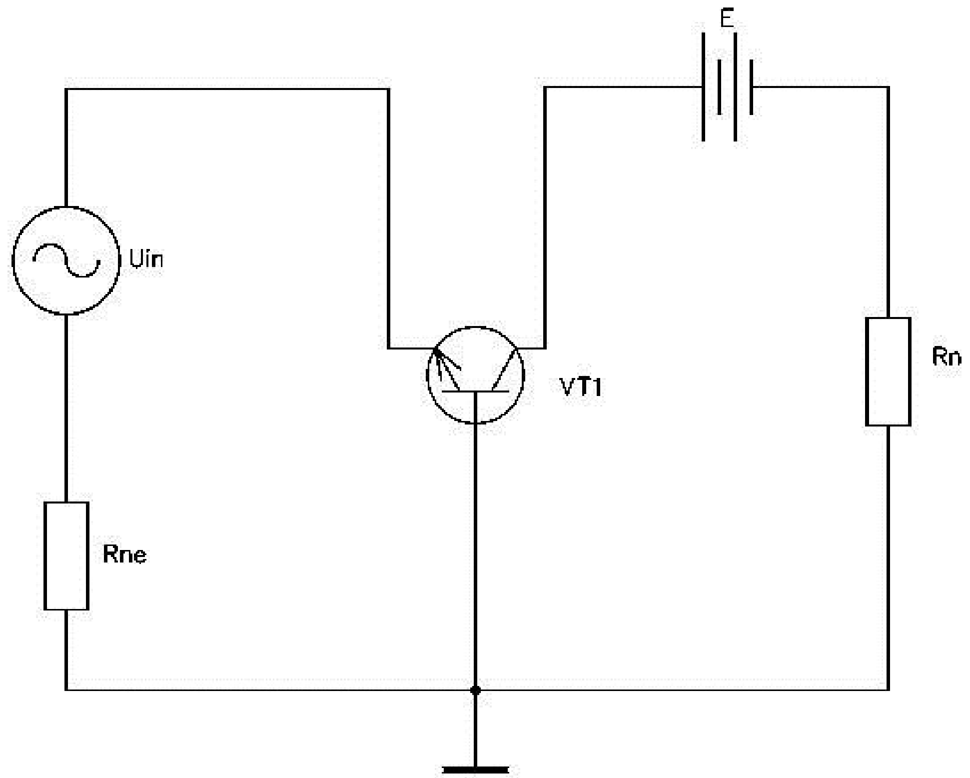


Рис.3.15 Усилитель ТОБ (с общей базой).

Крайние случаи рассмотренного нами выше усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (ТОЭ) со стабилизацией в цепи эмиттера – это усилитель ТОЭ с заземленным эмиттером (когда сопротивление резистора в эмиттерной цепи R_{ne} стремится к нулю) и эмиттерный повторитель, он же усилитель на основе включения транзистора с общим коллектором (когда сопротивление резистора в коллекторной цепи R_n стремится к нулю). В этом параграфе мы рассмотрим еще один вариант простой усилительной схемы – усилитель на основе включения транзистора с общей базой (смотри рисунок 3.15). Сопротивлением нагрузки считаем резистор R_n.

Чтобы применить к этому усилителю предложенные нами ранее формулы, повернем его схему (рис. 3.16 слева), чтоб сделать очевидным его сходство с усилителем ТОЭ с эмиттерной стабилизацией (рис. 3.16 справа).

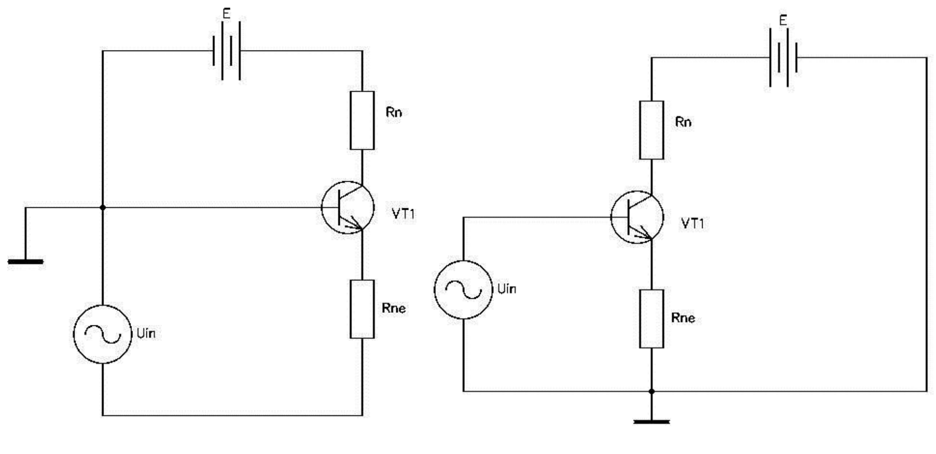


Рис. 3.16 Усилитель ТОБ (схема повернута) и усилитель ТОЭ (со стабилизирующим резистором в цепи эмиттера).

Теперь немного изменим положение компонент усилителя ТОЭ (без изменения соединяющих проводов – см. рис. 3.17 справа).

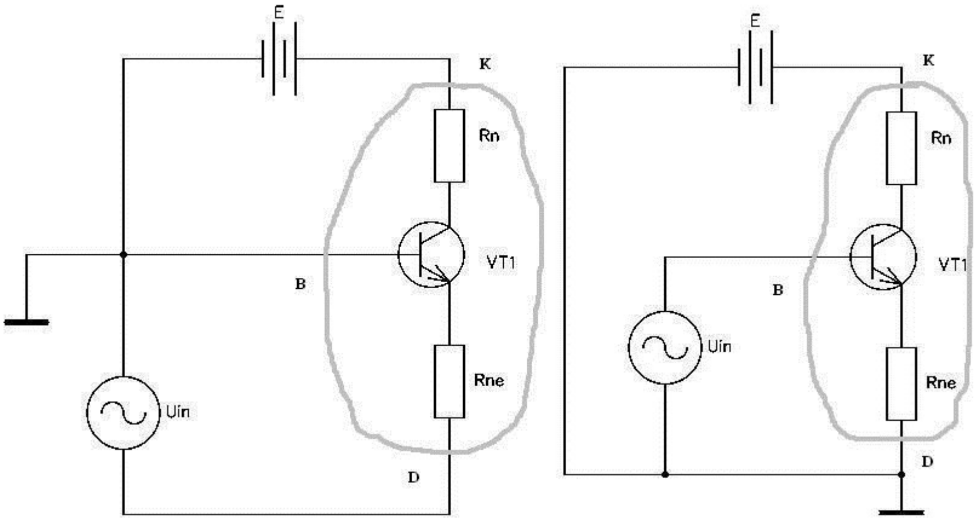


Рис. 3.17 Усилитель ТОБ (схема повернута) и усилитель ТОЭ с измененным положением компонент.

Ясно, что на точки B и D в обоих случаях действует напряжение U_{in}. Но на точки K и D в случае усилителя ТОЭ (справа на рис. 3.17) действует напряжение E, а в случае усилителя ТОБ (слева на том же рисунке) действует $E+U_{in}$. Это позволяет написать следующее выражение для коллекторного тока, (используя формулу (3.8) для обведенных серой линией блоков на рисунке 3.17):

$$\begin{aligned} i_c = I_B(U_{in}, E+U_{in}) = \alpha D_{01}(U_{in}) - \\ - D_2(\alpha D_{01}(U_{in})(R+R_n) - E). \end{aligned} \quad (3.13)$$

На рисунке 3.18 приведены результаты расчета коллекторного тока и напряжения на резисторе R_n (при нулевой величине стабилизирующего резистора).

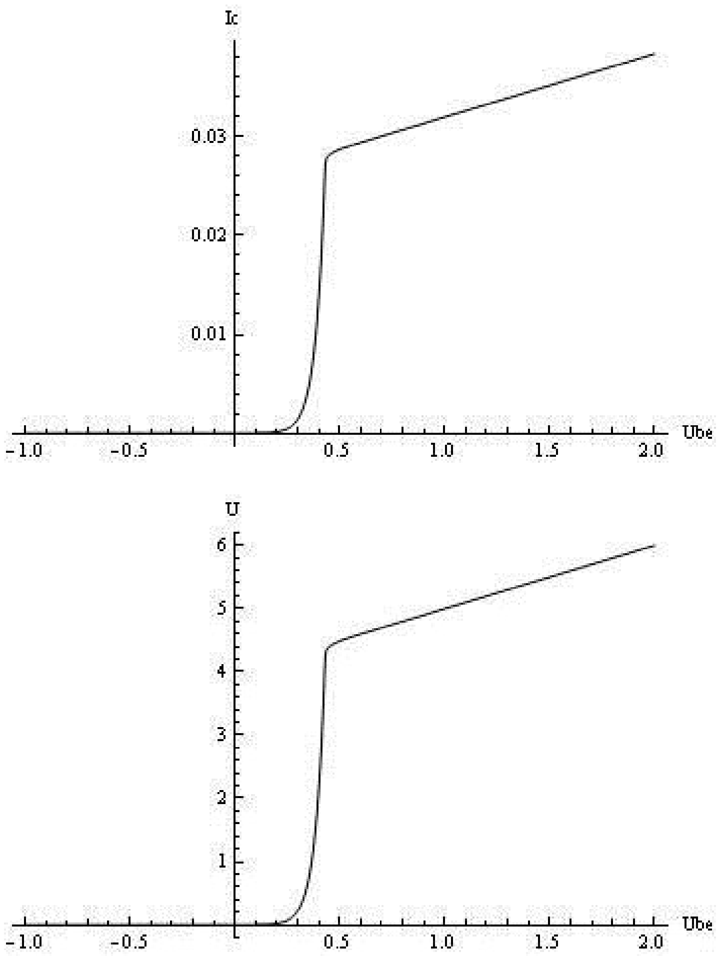


Рис. 3.18 Графики коллекторного тока и напряжения на резисторе нагрузки (R_n) в усилителе ТОБ.

Вычислим входное сопротивление усилителя на основе включения транзистора с общей базой (на квазилинейном участке режима усиления). Роль входного тока теперь будет играть не базовый ток, а ток эмиттера (i_e). Эмиттерный ток связан с коллекторным следующим образом (на интересующем нас участке):

$$i_e = \frac{i_c}{\alpha}.$$

Коллекторный ток на квазилинейном участке режима усиления, так же, как и в случае усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером, выражается формулой (2.36). Поэтому

$$i_e = \left(\frac{\alpha U_{in}}{R_{ne} + R}\right)\frac{1}{\alpha} = \frac{U_{in}}{R_{ne} + R}.$$

Отсюда получаем:

$$R_{in} = \frac{U_{in}}{i_e} = R_{ne} + R.$$

Если резистор стабилизации отсутствует, входное сопротивление усилителя на основе включения транзистора с общей базой мало, что считается его недостатком (см., например, [16]).

3.6 Мультивибратор.

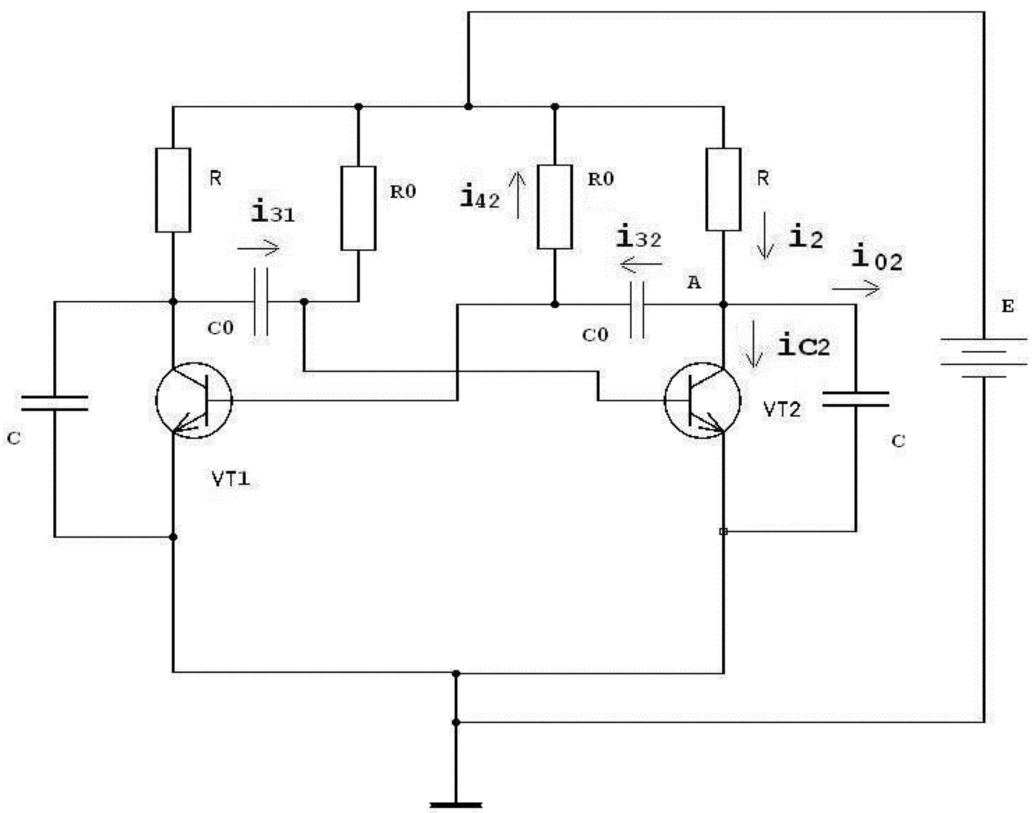


Рис. 3.19 Симметричный мультивибратор.

Рассмотрим схему симметричного мультивибратора (рис.3.19). Такое устройство можно рассматривать в качестве «наследника» симметричного триггера – схема на рисунке 3.11 дополнена парой конденсаторов и парой сопротивлений с номиналами C_0 и R_0. Конденсаторы включены в разрыв проводников, соединяющих коллекторы и базы транзисторов. Дополнительные сопротивления соединяют противоположные от коллекторов выводы этих конденсаторов с полюсом питания. Так же, как и в триггере, мы учитываем присутствие емкостей *p-n* переходов транзистора (пренебрегая токами базы).

Важную роль в этой задаче будет играть напряжение на дополнительных конденсаторах C_0. Уточним, что мы будем понимать под данным напряжением: это разность между потенциалом того вывода конденсатора, который ближе к краю схемы (к правому краю для правого конденсатора или к левому краю для левого), и потенциалом другого вывода (того, который ближе к центру). В соответствии с этим на рисунке выбрано направление токов i_{32} и i_{31}.

Так же, как и для триггера, мы будем составлять уравнения для правого транзистора (он у нас обозначен индексом «2»). Рассмотрим контур, проходящий через источник питания E, резистор R в правой части схемы и коллекторно-эмиттерный переход второго транзистора (контур направим против часовой стрелки). Тогда:

$$i_2 R + U_{ce2} = E. \quad (3.14)$$

В узле A:

$$i_2 = i_{c2} + i_{02} + i_{32}.$$

С учетом этого предыдущее соотношение (3.14) можно записать так:

$$U_{ce2} = E - i_{c2}R - RC\frac{dU_{ce2}}{dt} - i_{32}R. \quad (3.15)$$

Теперь рассмотрим контур, проходящий через источник питания E, правый резистор R_0 и базово-эмиттерный переход первого транзистора (контур также направим против часовой стрелки). Из законов Кирхгофа следует:

$$-i_{42}R_0 + U_{be1} = E.$$

Так как в пренебрежении током базы (для первого транзистора) $i_{42}=i_{32}$, соотношение (3.15) можно записать так:

$$U_{ce2} = E - i_{c2}R - RC\frac{dU_{ce2}}{dt} + \frac{E - U_{be1}}{R_0}R. \qquad (3.16)$$

Первые два слагаемых в правой части соотношения (3.16) представляют собой уже рассмотренную ранее усилительную функцию (см. также замечания, касающиеся высокого входного сопротивления в параграфе 3.2 – мы считаем, что здесь они сохраняют свою силу).

$$E - i_{c2}R = F(U_{be2}).$$

Используем контур, проходящий через правый конденсатор C_0, коллекторно-эмиттерный переход второго транзистора и базово-эмиттерный переход первого (тоже против часовой стрелки), чтоб выразить U_{be1} в выражении (3.16) через «правые» параметры:

$$U_{be1} = U_{ce2} - V_2.$$

Здесь V_2 – напряжение на правом конденсаторе C_0.

Далее рассмотрим контур, по часовой стрелке проходящий через левый конденсатор C_0, коллекторно-эмиттерный переход первого транзистора и базово-эмиттерный переход второго, чтоб выразить U_{be2} через более удобные для нас величины (для этого можно воспользоваться и симметрией схемы):

$$U_{be2} = U_{ce1} - V_1.$$

В итоге мы получаем уравнение:

$$U_{ce2} = -RC\frac{dU_{ce2}}{dt} + F(U_{ce1} - V_1) +$$

$$+\frac{R}{R_0}V_2 - \frac{R}{R_0}U_{ce2} + \frac{R}{R_0}E.$$

Используем контур (последний в этом параграфе), проходящий через источник питания, правый резистор R_0, правый конденсатор C_0 и коллекторно-эмиттерный переход правого транзистора (против часовой стрелки), чтоб записать еще одно уравнение:

$$R_0C_0\frac{dV_2}{dt} + V_2 = U_{ce2} - E.$$

Аналогичные уравнения можно записать и для другой половины схемы (они будут выглядеть точно так же, с точностью до замены индекса «2» на «1»). Приведем все четыре уравнения для величин V_1,V_2,U_{ce1},U_{ce2}:

$$RC\frac{dU_{ce1}}{dt} = -U_{ce1} + F(U_{ce2} - V_2) -$$

$$-\frac{R}{R_0}(U_{ce1} - E - V_1),$$

$$R_0C_0\frac{dV_1}{dt} + V_1 = U_{ce1} - E,$$

$$RC\frac{dU_{ce2}}{dt} = -U_{ce2} + F(U_{ce1} - V_1) -$$

$$-\frac{R}{R_0}(U_{ce2} - E - V_2),$$

$$R_0C_0\frac{dV_2}{dt} + V_2 = U_{ce2} - E. \qquad (3.17)$$

В этих уравнениях, как и в уравнениях для триггера (параграф 3.2), емкость C зависит от напряжения: в первом уравнении системы (3.17) C зависит от U_{ce1}, в третьем – от U_{ce2}. Для начальных оценок можно использовать одно из постоянных значений емкости в одной из стационарных точек задачи о триггере, в который мультивибратор превратится, если конденсаторы C_0 замкнуть (зашунтировать), а резисторы R_0 убрать. Или, как и в задаче о триггере, использовать некоторое среднее постоянное значение емкости.

Рассматриваемая система является системой с двумя степенями свободы (и с четырехмерным фазовым пространством). Отметим, что схожая задача для лампового мультивибратора рассматривалась еще в [15] (правда, там были не только другие активные элементы, но и другая конфигурация соединительных проводников). В процессе решения авторы перешли к системе с одной степенью свободы (с двумя неизвестными функциями). Мы здесь останемся в рамках модели с двумя степенями свободы и проведем по возможности более простое рассмотрение движений исследуемой системы без сокращения числа переменных.

Если $R_0 \gg R$, уравнения записываются так:

$$\begin{aligned}
&RC\frac{dU_{ce1}}{dt} = -U_{ce1} + F(U_{ce2} - V_2),\\
&R_0C_0\frac{dV_1}{dt} + V_1 = U_{ce1} - E,\\
&\ldots,\\
&\ldots.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Если внутренняя емкость транзистора C (в [15] ее аналогом является внутренняя паразитная емкость лампы) стремится к нулю, первое уравнение становится не дифференциальным, а конечным трансцендентным (или алгебраическим – в зависимости от вида функции F):

$$f_1(U_{ce1}, U_{ce2}, V_2) = -U_{ce1} + F(U_{ce2} - V_2) = 0. \tag{3.19}$$

Функция f_1 задает фазовую поверхность «вырожденной» системы (так же, как аналогичная ей функция f_2). Именно по этим фазовым поверхностям проходят «медленные» движения системы. При этом уравнения «быстрых» движений можно записать так:

$$RC\frac{dU_{ce1}}{dt} = f_1(U_{ce1}, U_{ce2}, V_2),$$

$$RC\frac{dU_{ce2}}{dt} = f_2(U_{ce2}, U_{ce1}, V_1).$$

Если рассматривать точки фазового пространства с конечными величинами функций f_1 и f_2, при стремлении C к нулю производные величин U_{ce1} и U_{ce2} должны стремиться к бесконечности. Ясно, что линии движения при этом почти параллельны плоскости V_1V_2 фазового пространства. Это означает, что V_1 и V_2 (напряжения на конденсаторах) при таких движениях (скачках) не меняются.

Исследуем «медленные» движения. Выразим U_{ce1} из уравнения (3.19) и подставим во второе уравнение (3.18).

$$R_0C_0\frac{dV_1}{dt} + V_1 = F(U_{ce2} - V_2) - E. \qquad (3.20)$$

Вспомним, что усилительная функция F для усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером имеет вид резкого перепада от напряжения питания E к почти нулевому значению (в несколько десятых вольта – обозначим его как $2E_0$). Будем считать, что перепад происходит при аргументе, равном E_0 (то есть напряжение перепада в два раза меньше, чем «нижнее» значение функции F). Медленные движения нашей системы как раз и происходят на почти постоянных «хвостах» усилительной функции (а «быстрые» - при перепаде ее значения). Пусть для определенности F=E. Тогда

$$R_0C_0\frac{dV_1}{dt}+V_1=0. \tag{3.21}$$

Решение этого уравнения:

$$V_1=Ae^{-\frac{t}{R_0C_0}}.$$

Здесь A – произвольная константа. Данное решение соответствует разрядке конденсатора.

Если F=0, вместо (3.21) мы будем иметь уравнение

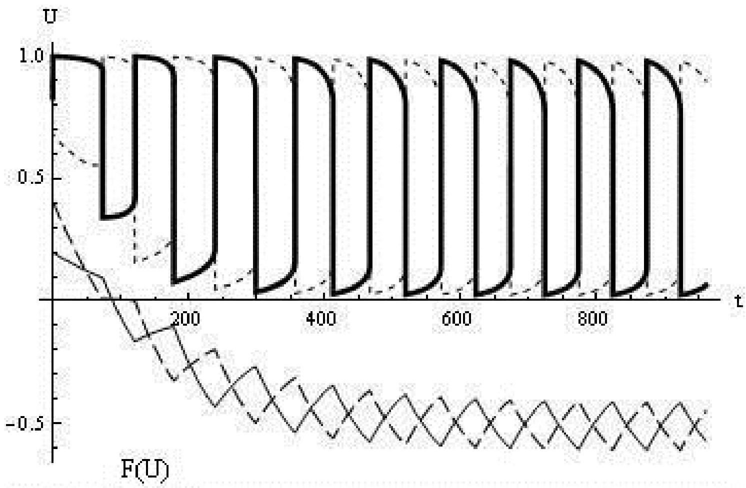
$$R_0C_0\frac{dV_1}{dt}+V_1=-E. \tag{3.22}$$

Его решение:

$$V_1=-E-Ae^{-\frac{t}{R_0C_0}}.$$

Конденсатор при этом находится в процессе зарядки.

Дифференциальные уравнения (3.17) имеют решение в виде незатухающих колебаний не для всех значений параметров (также не при всех значениях параметров возможно применение численных алгоритмов в стандартных вычислительных приложениях). Приведем численное решение, полученное средствами пакета Wolfram Mathematica 9.0 - см. график на рисунке 3.20. Усилительная функция F при этом определяется приведенной в параграфе о триггере формулой (3.4), параметры задачи следующие: $E_0=0.02$, $G=5$, $B=0.0004$, $R_0=1.1$, $C_0=100$, $R=0.01$, $C=0.0033$, $E=1+E_0$.



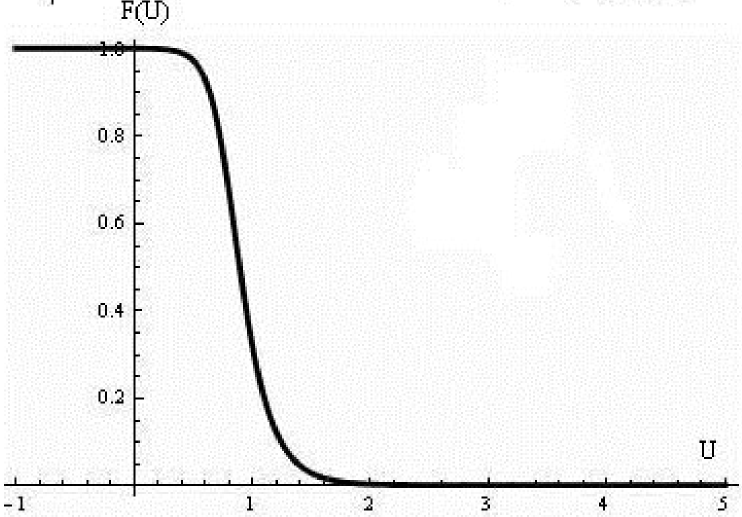


Рис. 3.20 Наверху - численные решения для напряжений $U_{ce1}(t)$ (сплошная толстая линия), $V_1(t)$ (сплошная тонкая линия), $V_2(t)$ (прерывистая линия), $U_{ce2}(t)$ (прерывистая линия с короткими отрезками). Внизу – усилительная функция.

Из графиков видно, что при данных значениях параметров предположение о постоянстве $U_{ce1}(t)$ (и $U_{ce2}(t)$) в пределах полупериода колебаний (фактически сделанное ранее) является достаточно грубым приближением. Но движения все равно подразделяются на «быстрые» и «медленные» (решение имеет разрывный характер).

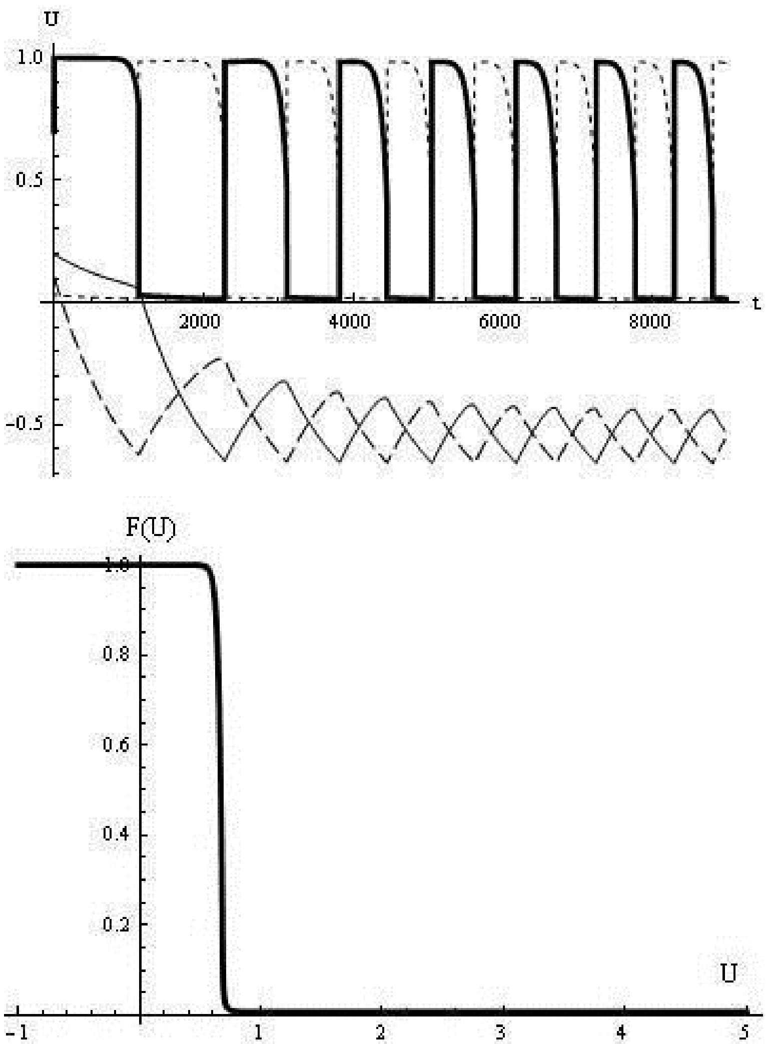


Рис. 3.21 Численные решения для напряжений и усилительная функция (внизу).

Численное решение уравнений с усилительной функцией, которая записывается через формулы (2.35), (2.33) и (2.30) при $R_{ne}=0$, имеет похожий вид (см. рис. 3.21).

3.7 Транзисторный аналог генератора Ван-дер-Поля.

Здесь токовая функция будет использована при рассмотрении транзисторного аналога генератора Ван-дер-Поля. Ламповая схема данного генератора приводится в ряде книг (например [17]). Рассмотрим аналог данной схемы с усилителем на биполярном транзисторе (рис.3.22).

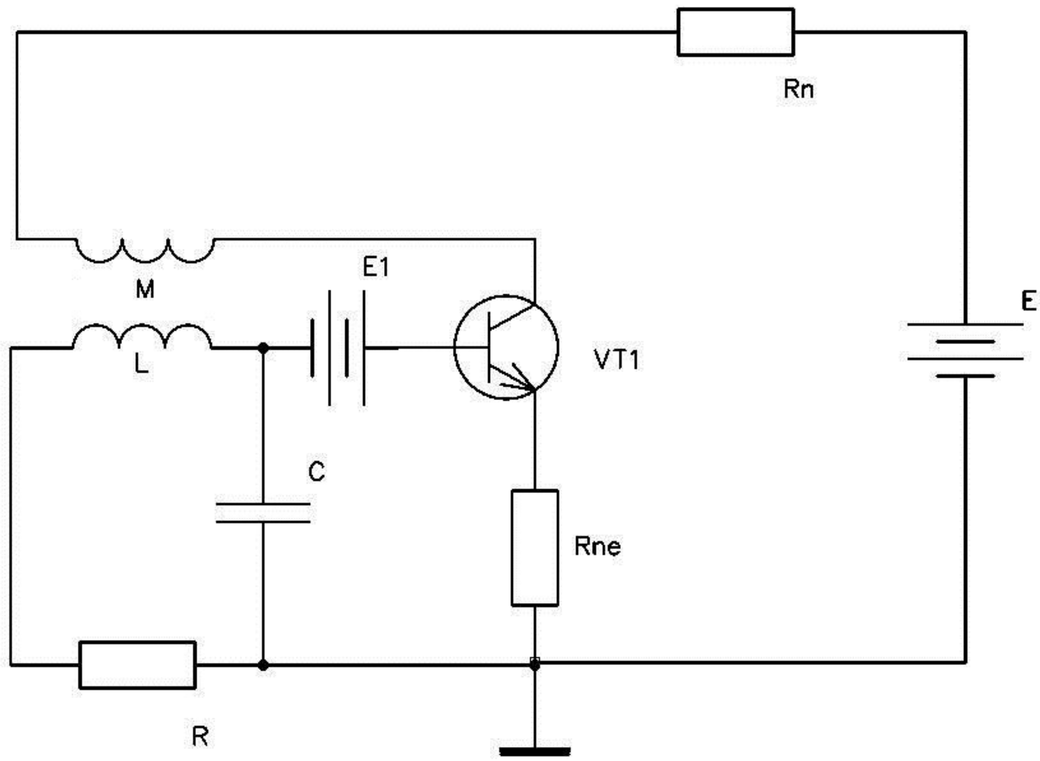


Рис. 3.22 Транзисторный аналог генератора Ван-дер-Поля.

Сделаем обход колебательного контура изображенной на рисунке 3.22 схемы.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + U_c - M\frac{di_c}{dt} = 0. \tag{3.23}$$

Здесь i – ток через катушку индуктивности L, U_c – напряжение на конденсаторе C, i_c – коллекторный ток транзистора, M – взаимная индуктивность катушек связи.

Если пренебречь током базы и приближенно считать, что

$$i = C\frac{dU_c}{dt},$$

тогда

$$LC\frac{d^2U_c}{dt^2} + RC\frac{dU_c}{dt} + U_c - M\frac{di_c}{dt} = 0.$$

Разберемся подробнее с последним слагаемым:

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{di_c}{dU_c}\frac{dU_c}{dt}. \qquad (3.24)$$

$\frac{di_c}{dU_c}$ - это аналог крутизны характеристики лампы. В качестве аналитического выражения для i_c мы используем формулу (2.35) (подставив U_c+E_1 вместо U_{in}).

Окончательно дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе выглядит так:

$$LC\frac{d^2U_c}{dt^2} + (RC - M\frac{di_c(U_c + E_1)}{dU_c})\frac{dU_c}{dt} + U_c = 0.$$

Результат численного решения данного уравнения (с использованием пакета Wolfram Mathematica) приведен на рисунке 3.23 (при нулевом сопротивлении стабилизирующего резистора). Важно наличие напряжения смещения в цепи базы (на рис.3.22 обозначено как E_1) – оно введено для того, чтобы почти плоский участок производной токовой функции приходился на нулевое напряжение.

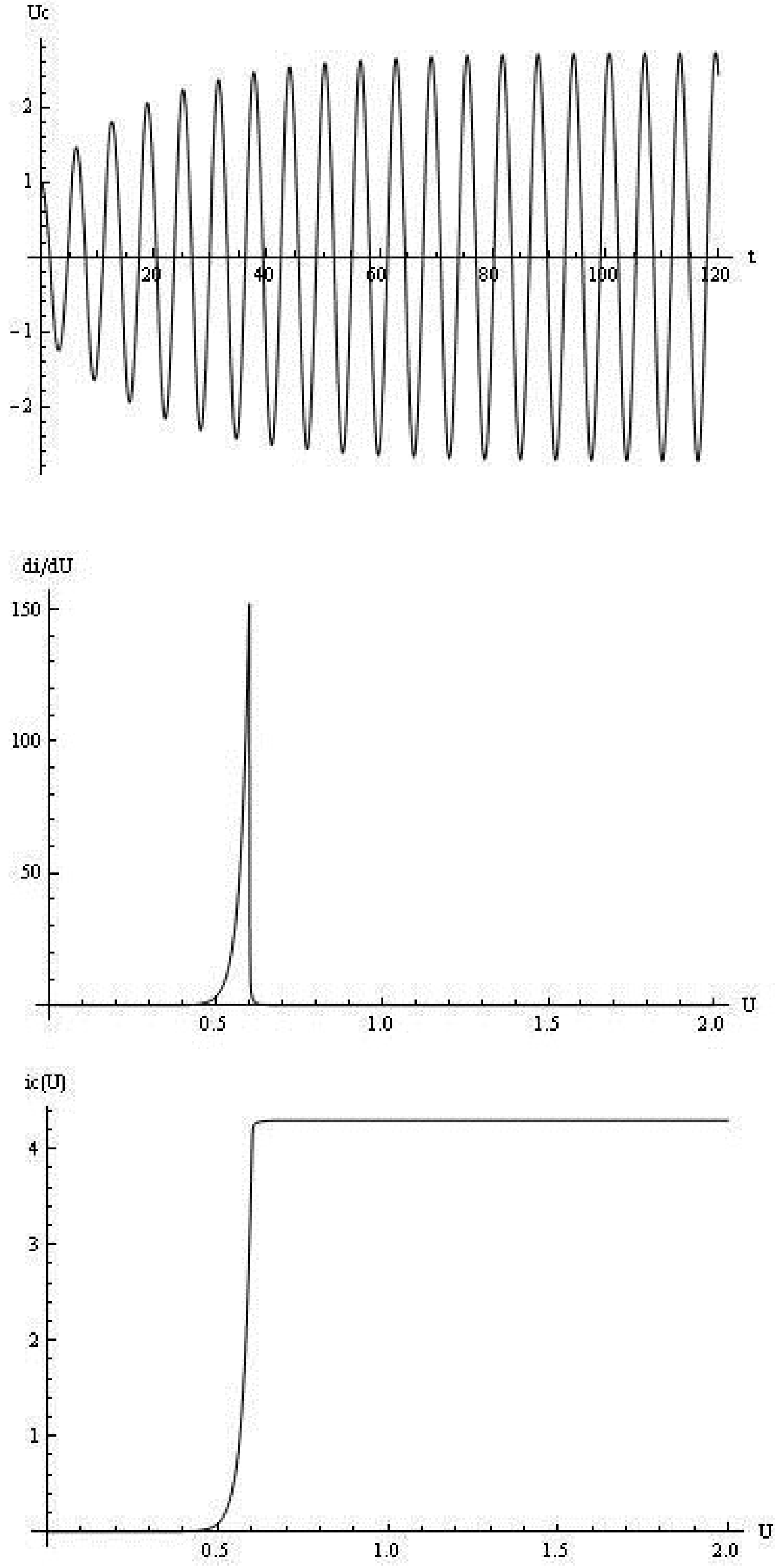


Рис.3.23 График зависимости напряжения U_c от времени (наверху), а также производная токовой функции и сама токовая функция (внизу).

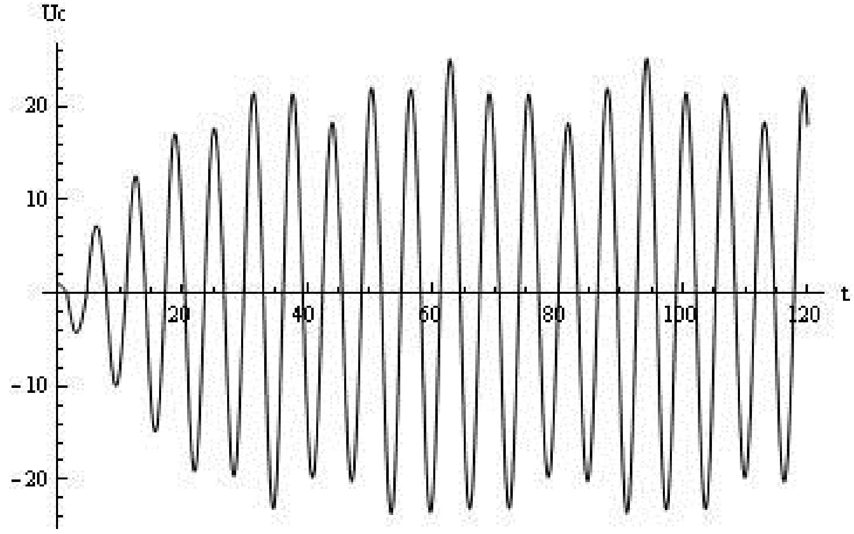


Рис.3.24 Модуляция амплитуды колебаний (увеличен параметр М и одновременно уменьшены потери).

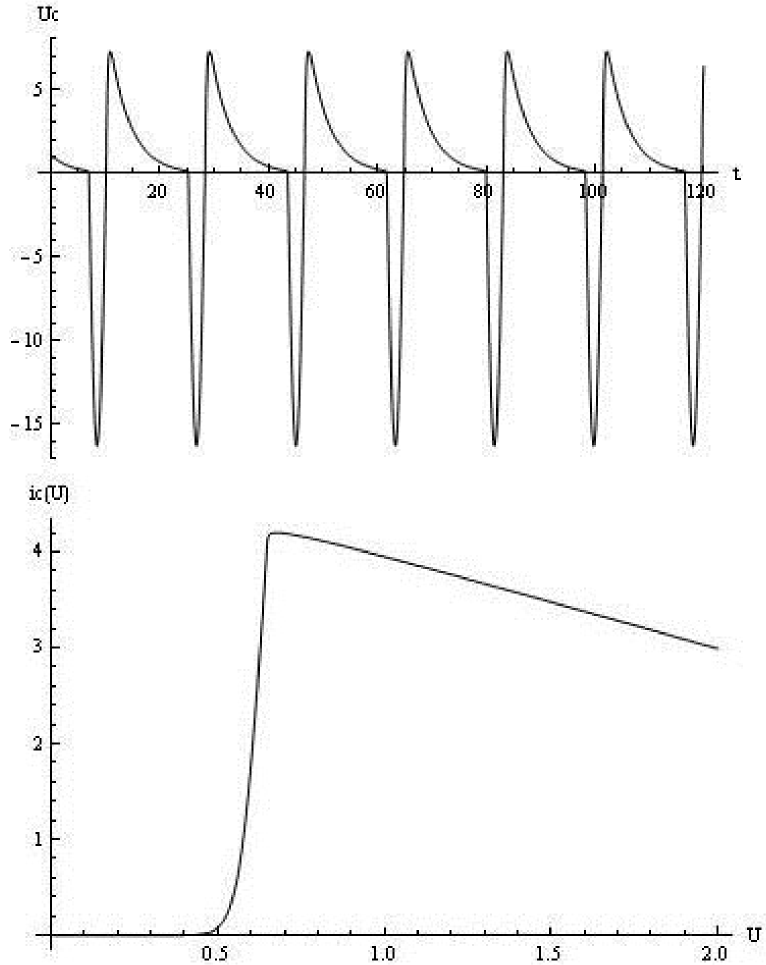


Рис. 3.25 Искажения (в схему введен стабилизирующий резистор R_{ne}). Внизу – токовая характеристика.

Из графика видно, что амплитуда колебаний растет и стабилизируется при некотором значении (система «выходит» на предельный цикл).

Увеличение параметра M (при этом возможно также одновременное уменьшение потерь) приводит при численном расчете к появлению беспорядочной модуляции амплитуды (см. рисунок 3.24).

Если при нулевой величине R_{ne} колебания были гармоническими, введение ненулевого R_{ne} в сделанных численных экспериментах не влияло на качественное поведение решения. Но если при нулевой величине R_{ne} мы имели модуляцию (как на рис. 3.24), увеличение R_{ne} в ряде численных экспериментов приводило к появлению сильных искажений (см. рисунок 3.25).

3.8 Выводы.

В третьей главе полученные для усилителя ТОЭ выражения, использующие функцию Ламберта, применены для исследования других распространенных транзисторных схем. Эти исследования привели к вполне адекватным результатам. Наряду с различными схемами двухтактных усилителей рассмотрен вариант, на который автором был получен патент на полезную модель.

В параграфе 3.3 обращено внимание на тот факт, что выражение для коллекторного тока усилителя ТОЭ со стабилизацией может рассматриваться как токовая характеристика трехполюсника, состоящего из транзистора и двух резисторов, при этом напряжение питания является одним из двух входных напряжений (наряду с напряжением усиливаемого сигнала). Это позволило применить полученные соотношения к расчету усилителя на основе включения транзистора с общей базой (ТОБ) и дифференциального усилителя. Также рассмотрены импульсные схемы: мультивибратор и симметричный триггер. В этих случаях не важен конкретный вид «усилительной» функции (характеристики по напряжению для усилителей, входящих в состав этих схем), важно то, что она имеет вид достаточно резкого перепада между двумя квазистационарными состояниями.

В параграфе 3.7 рассмотрен транзисторный аналог лампового усилителя Ван-дер-Поля. Обращено внимание на негармонические искажения и на беспорядочную модуляцию результатов численного расчета при некоторых значениях параметров.

Результаты этой главы (в том числе и уравнения, соответствующие пункту 4 положений, выносимых на защиту) получены автором лично (см. [А4], [А5] и [А8]).

ГЛАВА 4

Исследование схем, содержащих мемристорные устройства.

4.1 Мемристоры.

Во второй и третьей частях диссертации рассматривалось применение новых математических моделей к уже давно существующим приборам (полупроводниковым диодам и биполярным транзисторам). Но в последующие годы были созданы новые типы твердотельных радиотехнических элементов. К ним, наряду с широко распространенными полевыми и МОП-транзисторами, относятся мемристоры – резисторы с памятью.

Мемристор – дискретный радиотехнический элемент, теоретически предсказанный в семидесятые годы прошлого века ([18] и [19]) и реализованный на практике значительно позже (в 2008 году) в форме устройства с резистивным переключением [20]. Возможности интеграции мемристивных устройств с КМОП-схемами [21,22] делают весьма актуальным изучение электрических цепей, в состав которых мемристоры входят наряду с обычными дискретными элементами. Последовательное подключение мемристора и резистора может быть полезным при проведении измерений. Соединение мемристора с реактивными элементами в работе [23] использовалось для построения моделей работы нервной системы: были найдены численные решения уравнений последовательного колебательного контура, в котором параллельно с емкостью подключен мемристор (описываемый моделью с переключением порогового типа, введенной в этой же статье). В работах [24] и [25] изучалось последовательное соединение мемристора с емкостью («*MC*-цепь») и с индуктивностью («*ML*-цепь»), причем была применена «модель с дрейфом примеси». Статьи, в которых использовались уравнения, описывающие последовательное соединение мемристора и полупроводникового диода, автору неизвестны (за исключением работы [26], в которой SPICE-модель мемристора [27] комбинировалась с упрощенной идеализированной моделью диода Зенера – подобные схемы с мемристорно-диодными ячейками предлагается использовать в биоморфных нейропроцессорах [28]). Отметим, что даже если сейчас какие-то комбинации и не имеют практического применения (например, комбинация мемристора и индуктивности), все равно представляет интерес теоретическое исследование этих случаев, так как реальные дискретные элементы могут иметь заметные «паразитные» свойства других элементов (например, паразитную индуктивность).

В четвертой главе диссертации исследованы уравнения, описывающие участки радиотехнических цепей, в состав которых входят мемристоры, последовательно соединенные с традиционными дискретными элементами: резистором, полупроводниковым диодом, индуктивностью и емкостью. При этом рассмотрены мемристоры, управляемые напряжением и подчиняющиеся уравнениям модели с переключением порогового типа. Также представлены новые математические выражения для описания динамики внутреннего параметра мемристора с переключением порогового типа, которые использованы для численного моделирования последовательного соединения мемристора с вышеупомянутыми элементами (в традиционной модели используются функции, которые задаются разными формулами при разных значениях параметров – такие функции не всегда удобны для численного счета).

4.2 Математические модели мемристоров.

Получили известность следующие общие уравнения [19] для мемристивных систем, управляемых напряжением:

$$I(t) = \frac{V(t)}{R(x,V)},$$
$$\frac{dx}{dt} = f(x,V). \qquad (4.1)$$

Здесь $I(t)$ – ток, протекающий через мемристор, $V(t)$ – напряжение, приложенное к мемристору, x – внутренний параметр мемристора (или вектор-столбец внутренних параметров, если их несколько). Внутренний параметр x может, в частности, быть долей длины мемристора, обладающей уменьшенным сопротивлением. Полное сопротивление мемристора R в этом случае можно выразить так: $R = R_{off} + (R_{on} - R_{off})\,x$. Смысл параметров R_{off} и R_{on} следующий: если бы прибор целиком был заполнен «беспримесным» материалом с низкой проводимостью, его сопротивление было бы R_{off}, в случае же заполнения материалом с примесью (и с высокой проводимостью) сопротивление было бы R_{on} ($R_{on} < R_{off}$). В правой части второго уравнения (4.1) стоит f – некоторая функция напряжения и внутреннего параметра (или же вектора внутренних параметров).

В качестве возможной функции состояния f в статье [29] приведена следующая функция, описываемая разными выражениями при различных значениях аргумента:

$$f(V,x) = \begin{cases} \alpha(V - V_{t+})(1-x), & V > V_{t+}, \\ \beta(V - V_{t-})x, & V < V_{t-}, \\ 0, & V_{t-} < V < V_{t+}. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Здесь α, β – скорости переключения, V_{t+} и V_{t-} – пороги переключения (предполагается, что первый порог имеет положительное значение, а второй – отрицательное). В диссертации далее исследуется поведение электрических цепей с мемристором в том случае, когда аналогичные пороги переключения «сглажены», а заданное внешнее напряжение V является последовательностью треугольных импульсов, соответствующей часто применяющейся линейной развертке по напряжению в эксперименте. Внутренний параметр x будет считаться долей длины элемента с уменьшенным сопротивлением.

Функцию (4.2) можно представить с помощью единой формулы, используя ступенчатую функцию Хевисайда $h(y)$, равную 1, если $y > 0$, и 0, если $y < 0$ (при нулевом значении y можно считать ее равной 0.5):

$$f(V,x) = h(V - V_{t+})\alpha(V - V_{t+})(1 - x) + \\ + h(-(V - V_{t-}))\beta(V - V_{t-})x. \tag{4.3}$$

Такая замена в некоторых случаях приводит к упрощению программ для численных расчетов (например, в системе “Wolfram Mathematica”). Более того, такая запись позволяет легко перейти от функции Хевисайда к сглаженным пороговым функциям, что также может оказаться полезным (в приложении “Wolfram Mathematica” это примерно в два раза повышает скорость счета).

При проведении численных расчетов возможна ситуация, когда решение $x(t)$ выходит за границы [0,1] (это границы допустимых значений для x, ведь x – это доля «низкоомной» длины мемристора). Чтобы избежать возникновения такой ситуации, функцию (4.3) можно умножить на «оконную» функцию. Пример степенной оконной функции [30]:

$$W(x) = 1 - (2x - 1)^{2p}. \tag{4.4}$$

Целое число p достаточно велико (например, $p = 10$ – см. [30]).

В качестве подобной функции можно использовать и функцию, которая экспоненциально спадает до нуля на границах допустимого отрезка значений x

(рис. 4.1). Ее особенность состоит в том, что она почти равна нулю не только в малой окрестности точек 0 и 1, но и во всей внешней части оси x (за пределами промежутка [0,1]).

$$W(x) = P_0(x-\delta)P_0(-(x-(1-\delta))). \qquad (4.5)$$

Здесь δ – некоторое малое по сравнению с единицей число («отступ» оконной функции от границ промежутка), $P_0(x)$ – пороговая функция, в качестве которой можно взять, например, следующую:

$$P_0(x) = 0.5erf(v_0 x) + 0.5. \qquad (4.6)$$

Или же [27]

$$P_0(x) = \frac{1}{1+\exp(-v_0 x)}.$$

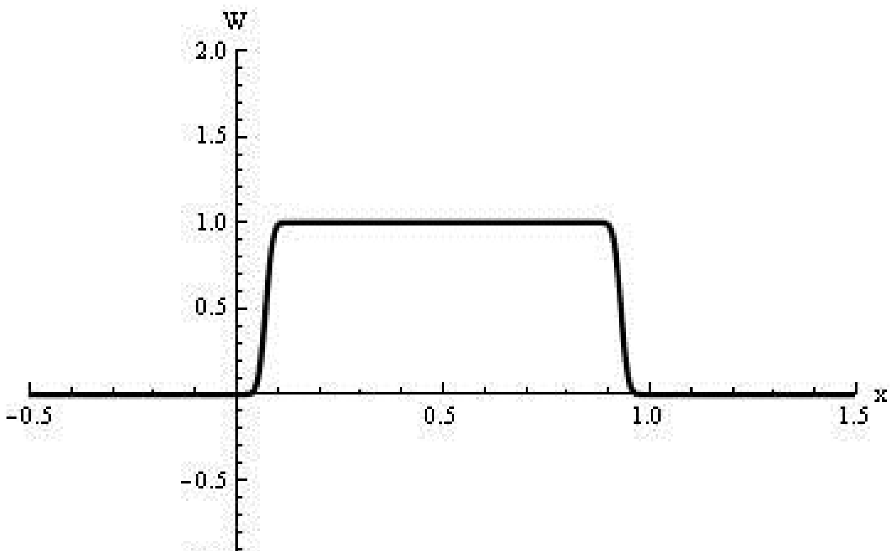


Рис. 4.1. Оконная функция.

Отметим, что в качестве пороговых функций можно было бы взять и функции, использованные в двух предыдущих главах диссертации для описания характеристик усилителей, но использование только что приведенных функций предпочтительней вследствие простоты их математических выражений.

Пороговая функция в формуле (4.6) выражается через «функцию ошибок». Параметр v_0 определяет быстроту спадания пороговых функций. Чем большее значение имеет этот параметр, тем резче перепад. Данные функции стремятся к нулю в «минус-бесконечности» и к единице в «плюс-бесконечности» (рис. 4.2).

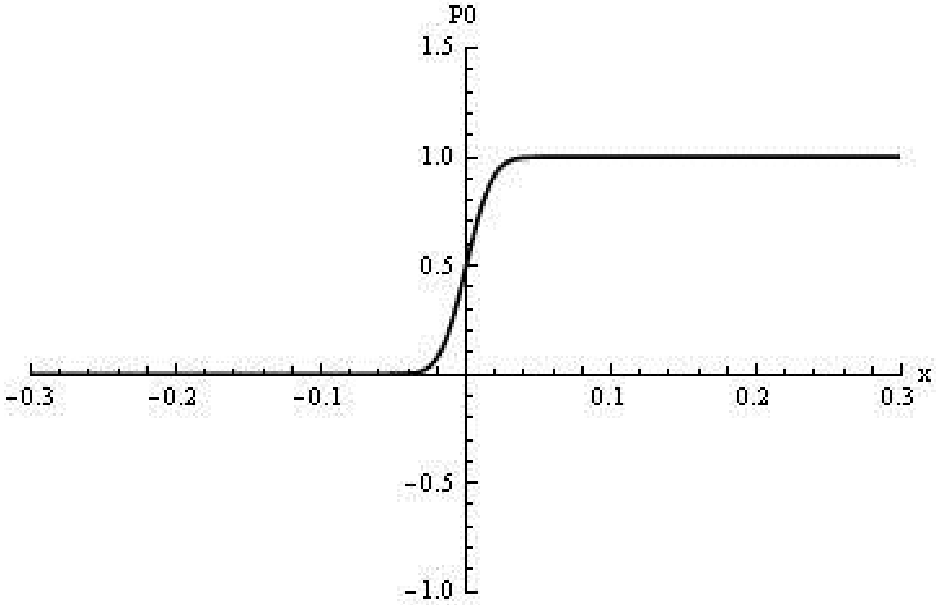


Рис. 4.2. Пороговая функция (вычислена по формуле (4.6)).

Мы заменим обобщенные функции Хевисайда в выражении (4.3) на аналогичные пороговые функции, зависящие от напряжения:

$$
\begin{aligned}
&f(V,x) = P_1(V - V_{t+})\alpha(V - V_{t+})(1-x) + \\
&+ P_1(-(V - V_{t-}))\beta(V - V_{t-})x, \\
&P_1(V) = 0.5erf(v_1 V) + 0.5.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Здесь параметр v_1 также определяет быстроту спадания пороговой функции.

При больших значениях «параметра крутизны» v_1 функция состояния (4.7) почти не отличается от функции (4.2) и ее аналога (4.3). Если сравнить вариант (4.2) с функциями состояния классических моделей мемристора, которые представлены, например, в статье [31], то вариант (4.2) несколько проще, чем выражения в моделях, которые авторами статьи [31] охарактеризованы как достаточно точные (модель Якопчича [32] и модель

TEAM). Этот вариант, тем не менее, сохраняет основные их черты – деление области изменения управляющего параметра на три части. Внутренний же параметр x по своей сути тот же самый, что и в простых моделях с дрейфом примеси.

Оказывается, что при использовании выражения (4.7) с достаточно резким перепадом пороговой функции можно отказаться от умножения правой части этого выражения на дополнительную оконную функцию вида (4.4) или (4.5). Именно так и сделано в дальнейшем изложении.

4.3 Результаты моделирования: одиночный мемристор

Вначале мы исследуем самый простой случай, когда управляющее напряжение приложено непосредственно к мемристору. При этом решается второе из уравнений (4.1) – уравнение состояния (причем функция состояния f определяется соотношением (4.7)). После этого с помощью первого уравнения (4.1) определяется ток. Результаты численных расчетов в приложении “Wolfram Mathematica 9.0” приведены на рис. 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 и 4.7. Пороги переключения симметричны относительно нуля и равны 0.7, –0.7. Сопротивления R_{off} и R_{on} равны 10 и 1. Скорости переключения равны 10. В качестве внешнего заданного напряжения $V = V_0(t)$ взята последовательность треугольных импульсов (рис. 4.3). Ее удобно выразить через конечный ряд Фурье (в этом случае мы имеем дело с функцией, которая обладает непрерывной производной).

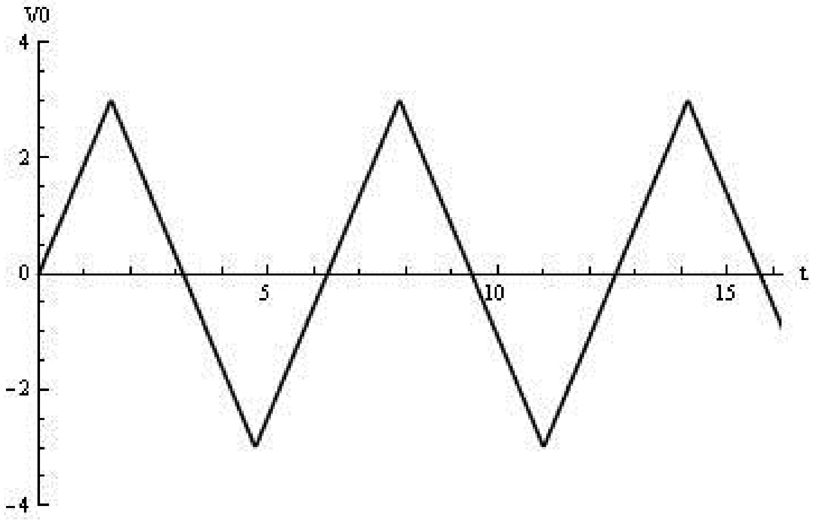


Рис. 4.3. Внешнее напряжение на мемристоре (задано в виде ряда Фурье с 20 слагаемыми).

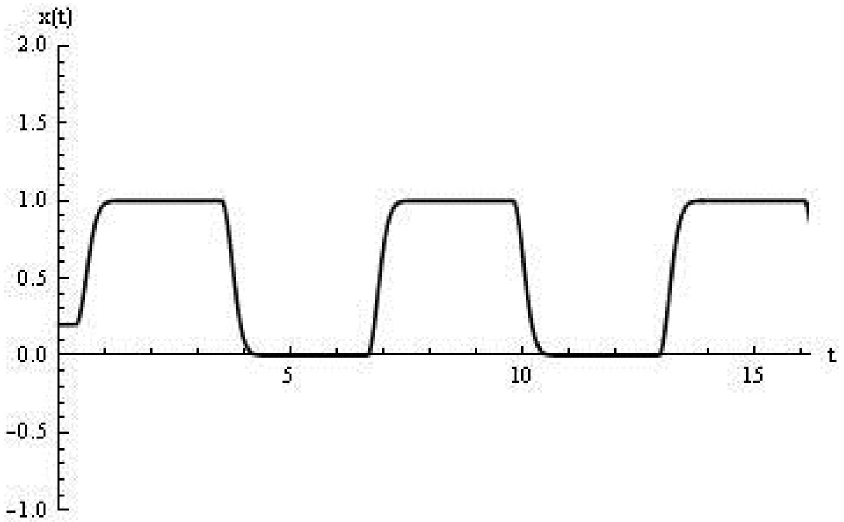


Рис. 4.4. Внутренний параметр мемристора (зависимость от времени).

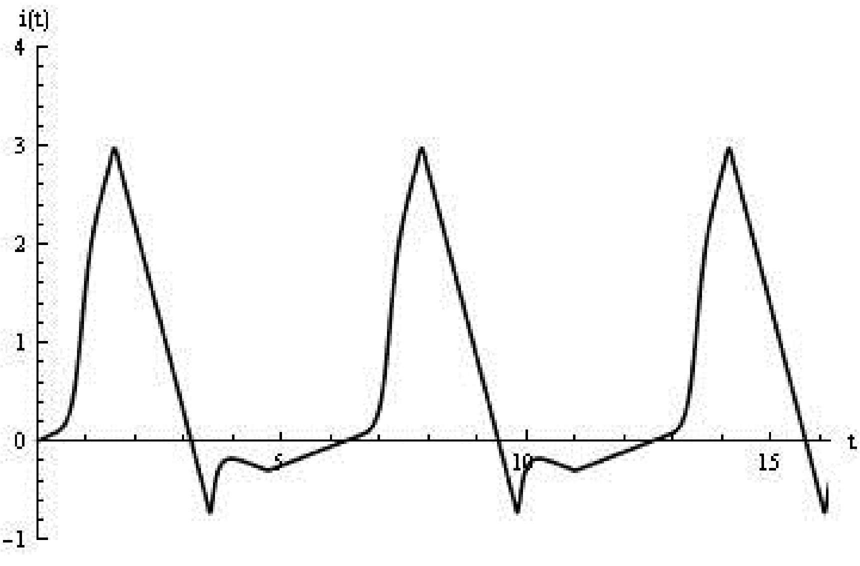


Рис. 4.5. Ток через мемристор (зависимость от времени).

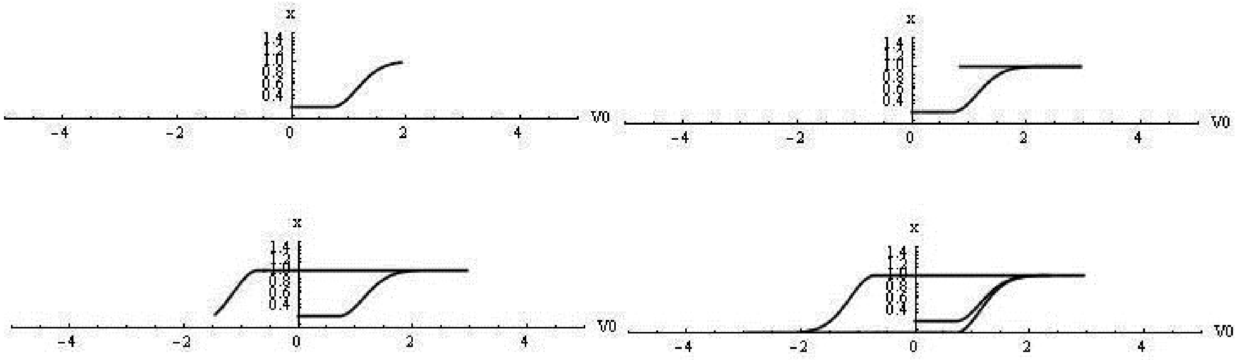


Рис. 4.6. Внутренний параметр – зависимость от внешнего напряжения (наблюдается гистерезис). Графики заканчиваются в моменты времени t = 1, t = 2.7, t = 3.9, t = 7.5.

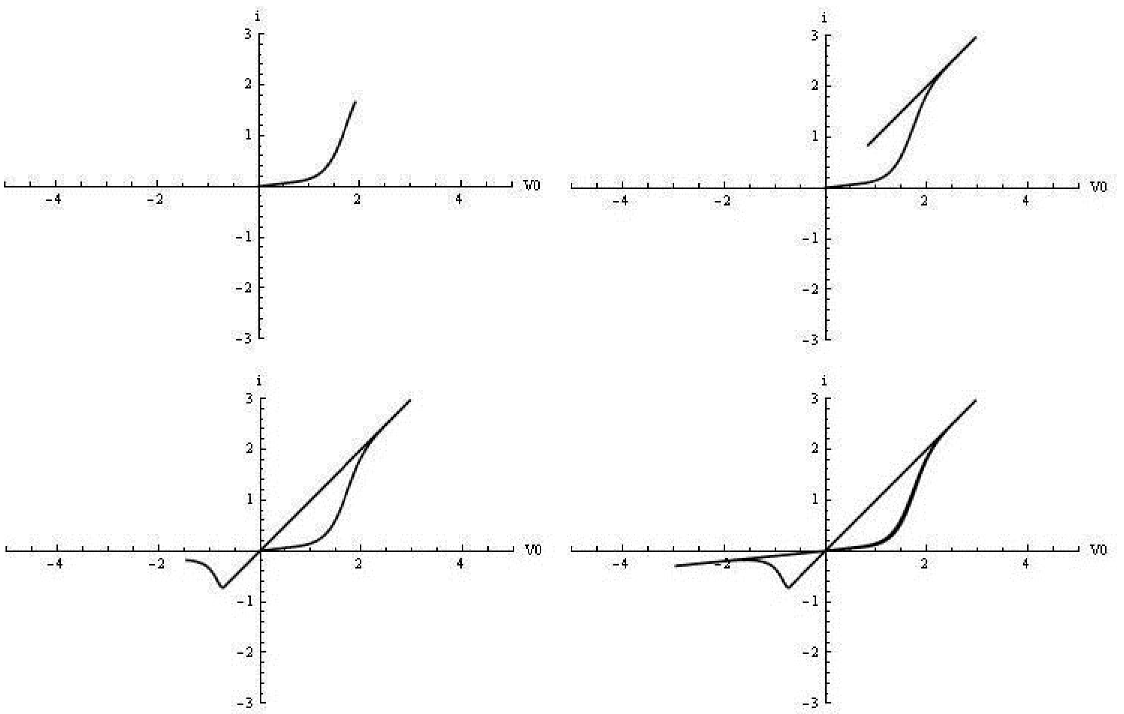


Рис. 4.7. Ток через мемристор – зависимость от напряжения. Графики заканчиваются в моменты времени t = 1, t = 2.7, t = 3.9, t = 7.5 (так же, как и на рис.4.6).

Далее мы рассмотрим варианты последовательного соединения мемристора с рядом дискретных радиотехнических элементов (резистор, полупроводниковый диод, конденсатор и индуктивность).

4.4 Последовательное соединение мемристора и резистора.

Следующий вариант (тоже достаточно простой) – последовательное соединение мемристора и резистора. Пусть напряжение приложено к участку цепи, содержащему оба элемента. В этом случае мы должны решать комбинацию трех уравнений. Первое – это уравнение для участка цепи, связывающее ток (общий для обоих дискретных элементов) и приложенное к участку цепи внешнее напряжение. Данное уравнение является следствием второго закона Кирхгофа. Отметим, что в этом уравнении мы учитываем лишь резистивные свойства мемристора, не усложняя его схему замещения и не выделяя в качестве ее отдельного элемента, например, конденсатор (моделирующий возможное присутствие емкостных свойств мемристора). Следующее уравнение выражает сопротивление мемристора через другие величины (внутренние параметры). Третье уравнение – это дифференциальное уравнение состояния мемристора, причем в него входит напряжение, действующее именно на мемристор (а не на весь участок цепи). Запишем эту систему уравнений, первое и второе из которых в этом случае – конечные (алгебраические или трансцендентные), третье же – дифференциальное.

$$\begin{cases} i = \dfrac{V_0}{R_M + R}, \\ R_M = R_M(x), \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x, iR_M). \end{cases} \tag{4.8}$$

Здесь V_0 – приложенное к участку цепи напряжение, R_M – сопротивление мемристора, R – сопротивление резистора. Вместо величины V (как было в формуле (4.1)) здесь в качестве одного из аргументов функции f подставлено произведение iR_M (падение напряжения на мемристоре).

Подставляя ток i из первого уравнения системы (4.8) в третье и учитывая второе уравнение для R_M, записанное в форме

$$R_M(x) = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \tag{4.9}$$

мы получим дифференциальное уравнение, связывающее внешнее напряжение V_0 и внутренний параметр x:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, \frac{V_0(R_{off} + (R_{on} - R_{off})x)}{R + R_{off} + (R_{on} - R_{off})x}\right). \tag{4.10}$$

Решив это уравнение численно (и найдя $x(t)$), мы, используя первое уравнение системы (4.8), далее можем найти ток на участке цепи и напряжение на мемристоре.

Для последовательной комбинации «мемристор-резистор» было проведено сравнение результатов численного расчета с экспериментом (см. ниже параграф 4.7). При этом использовались данные, полученные в Нижегородском университете им. Лобачевского Михайловым, Гусейновым и Беловым.

4.5 Последовательное соединение мемристора и диода.

Рассмотрим ситуацию, когда последовательно с мемристором включен не резистор, а полупроводниковый диод. В этом случае первое токовое уравнение будет более сложным – мы используем приведенную во второй главе диссертации формулу для тока, проходящего через идеальный диод и резистор, соединенные последовательно (см. также [11]):

$$I = -I_s + \frac{V_T}{R} W\left(e^{\frac{U}{V_T}} I_s \frac{R}{V_T} e^{I_s \frac{R}{V_T}}\right). \tag{4.11}$$

Здесь U – внешнее напряжение, приложенное к участку цепи с диодом и резистором, V_T – температурный потенциал, R – сопротивление резистора, подключенного последовательно с идеальным диодом, I_s – ток насыщения, $W(x)$ – специальная функция Ламберта [10]. В нашем случае роль резистора будет играть мемристор с сопротивлением R_M, зависящим от внутреннего параметра x. Система уравнений будет следующая:

$$\begin{cases} i = -I_s + \dfrac{V_T}{R_M} W\left(e^{\frac{V_0}{V_T}} I_s \dfrac{R_M}{V_T} e^{I_s \frac{R_M}{V_T}}\right), \\ R_M = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x, iR_M). \end{cases} \tag{4.12}$$

Для того чтобы наблюдать переключения (многократные) сопротивления мемристора в данной цепи, мемристор должен быть униполярным (с положительными порогами переключения). В качестве модельного иллюстрирующего примера рассмотрена система, по возможности близкая к описанной в пункте 4.3.а, но функция f, взятая из выражения (4.7), умножена на квадрат функции ошибок от величины, пропорциональной напряжению на мемристоре ($erf^2(50iR_M)$) – чтобы исключить изменение внутреннего параметра мемристора при нулевом напряжении. Пороги переключения следующие: $V_{t-} = 0.65$, $V_{t+} = 0.7$, скорости переключения равны 50, $I_s = 0.00000172$, $V_T = 0.044$. Результаты расчета представлены на рисунке 9. В случае же прежних значений параметров мемристора (как в пункте 4.3.а, когда пороги переключения симметричны относительно нуля) система просто переходит в верхнее состояние ($x \to 1$, см. рис. 4.9). На рисунке 4.10 показан ток через мемристор при симметричных пороговых напряжениях («закругленность» решения наблюдается лишь на первом периоде, когда система еще не переключилась окончательно в верхнее состояние).

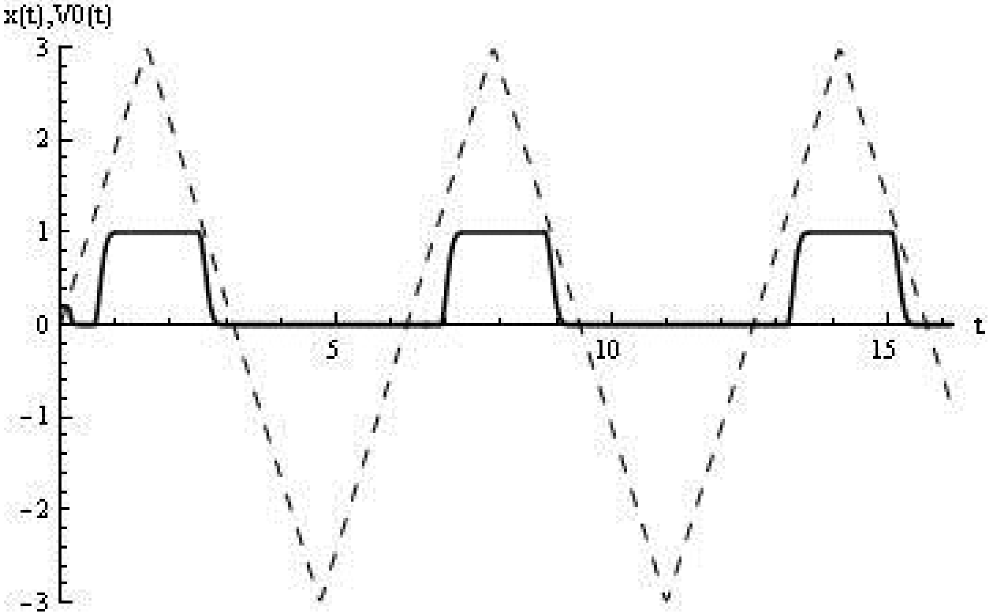


Рис. 4.8. Внутренний параметр мемристора при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода. Пороговые напряжения несимметричны. Прерывистой линией показано внешнее напряжение, приложенное к участку цепи с мемристором и диодом.

На рис. 4.11 показана ВАХ участка цепи с униполярным мемристором и диодом. На рис. 4.12 пороговые напряжения симметричны, но ВАХ вычисляется, начиная с $t = 5$ (то есть, начиная со второго периода, когда переключение в верхнее состояние уже произошло). Видно, что мы имеем обычную характеристику полупроводникового диода (при учете внутреннего омического сопротивления).

Если увеличить ток насыщения диода на несколько порядков, неидеальный диод с внутренним сопротивлением почти не будет отличаться от резистора (то же самое можно сказать и о последовательной комбинации диода и «внешнего» резистора). На рис. 4.13 показана ВАХ для этого случая (ток насыщения увеличен в миллион раз, мемристор биполярный) – она не отличается от графика на рис. 4.7.

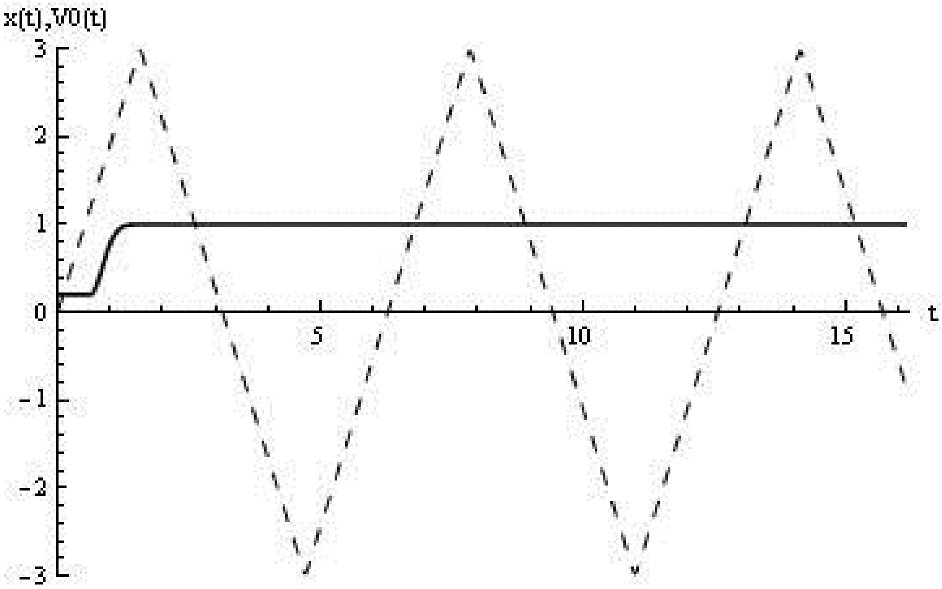


Рис. 4.9. Внутренний параметр мемристора при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода. Пороговые напряжения симметричны.

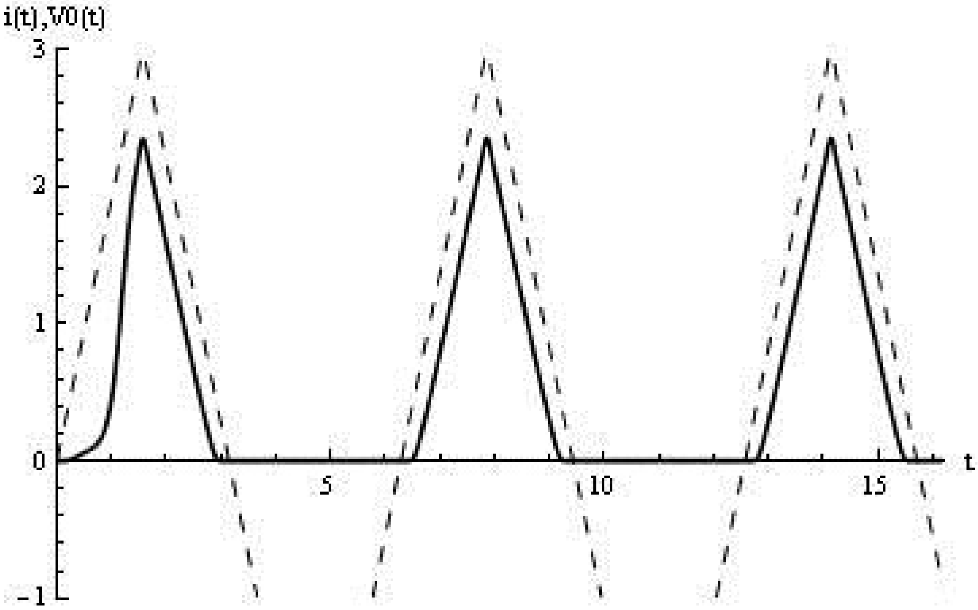


Рис. 4.10. Ток через мемристор при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода. Пороговые напряжения симметричны.

.

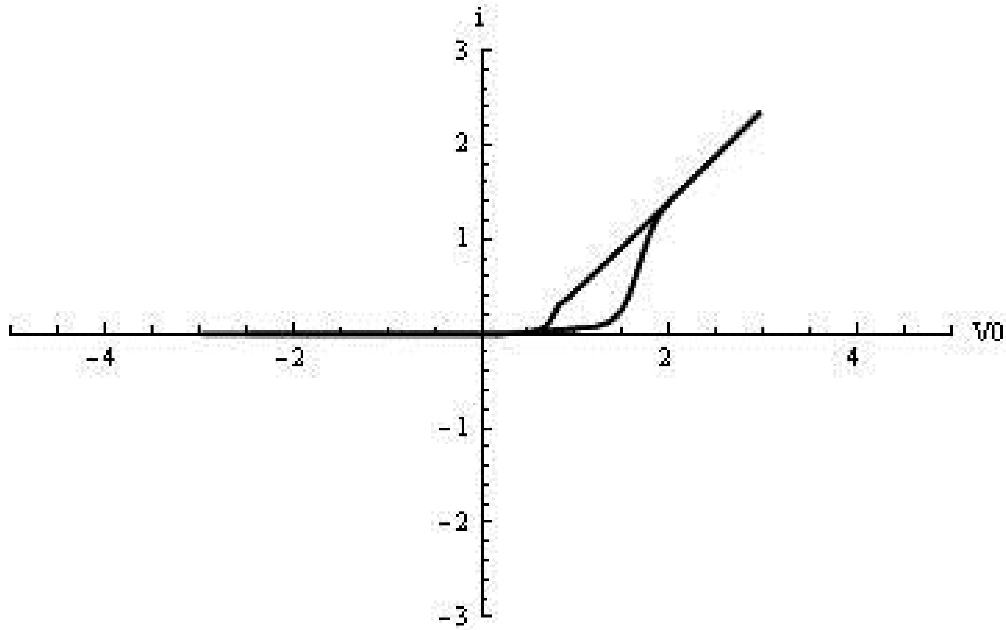


Рис. 4.11. ВАХ участка цепи при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода. Пороговые напряжения несимметричны.

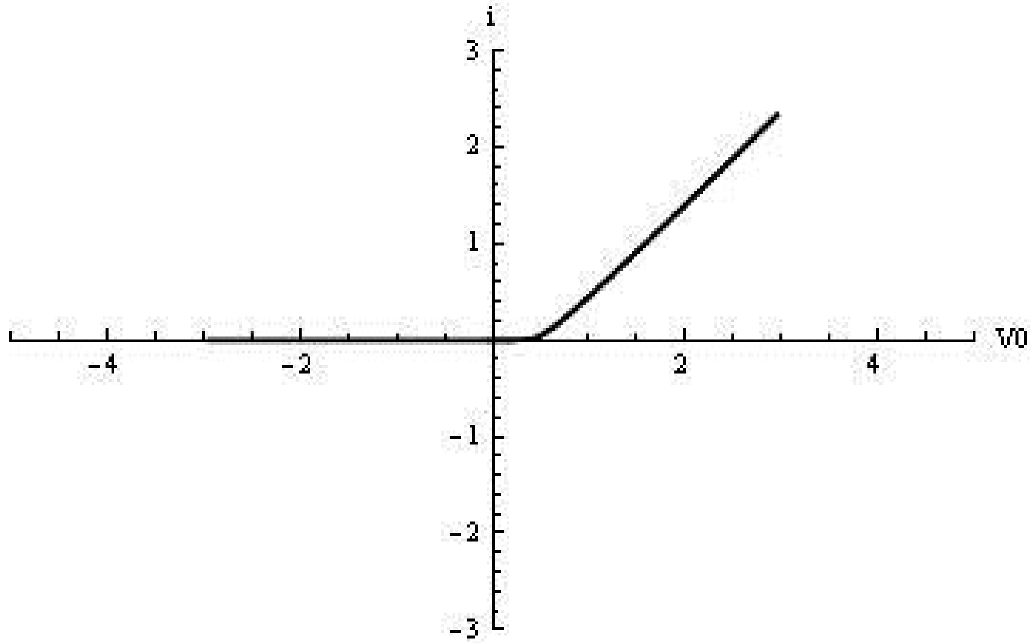


Рис. 4.12. ВАХ участка цепи при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода (время отсчитывается с $t = 5$). Пороговые напряжения симметричны.

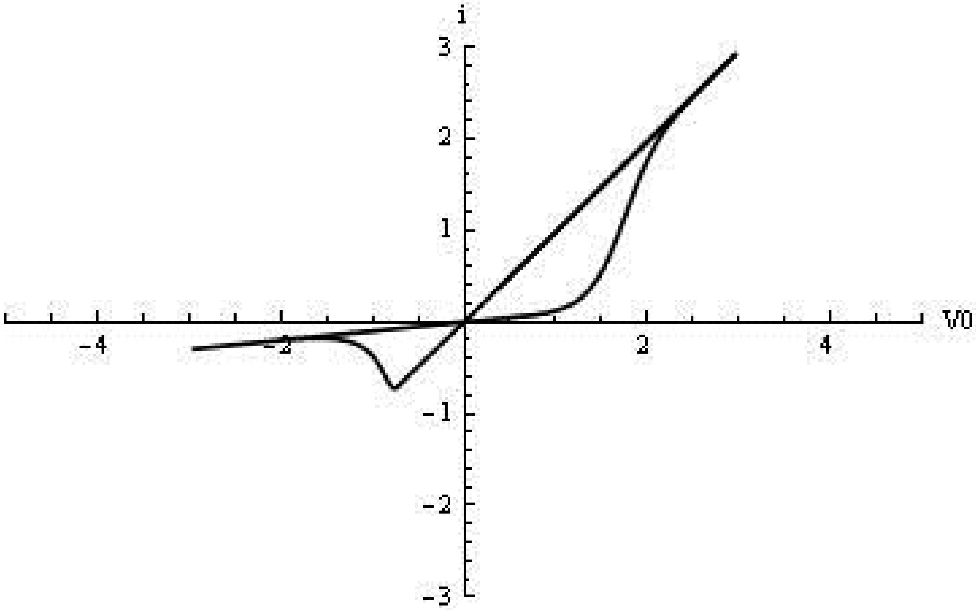


Рис. 4.13. ВАХ участка цепи при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода при увеличенном токе насыщения. Пороговые напряжения симметричны.

4.6 Последовательное соединение мемристора с катушкой индуктивности и с конденсатором.

Рассмотрим случай последовательного соединения мемристора и индуктивности. В этом случае первое уравнение будет дифференциальным.

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + R_M i = V_0, \\ R_M = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x, iR_M). \end{cases} \tag{4.13}$$

Также можно записать уравнения для последовательного соединения мемристора и емкости. При этом в первое уравнение войдет интеграл тока.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C}\displaystyle\int idt + R_M i = V_0, \\ R_M = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x, iR_M). \end{cases} \tag{4.14}$$

Продифференцировав первое уравнение по времени (и помня о том, что сопротивление мемристора зависит от параметра x, который сам является функцией времени), мы получим

$$\begin{cases} \dfrac{i}{C} + \dfrac{d}{dt}(R_M(x)i) = \dfrac{dV_0}{dt}, \\ R_M(x) = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x, iR_M(x)). \end{cases} \tag{4.15}$$

Приведем результаты расчета внутреннего параметра для случая, когда последовательно с мемристором (биполярным, как в пункте 4.3.а) подключена емкость (рис. 4.14). Выбран вариант начальных условий, когда явно просматривается длительный (по сравнению с периодом внешнего воздействия) переходный процесс. На рис. 4.15 изображен график тока.

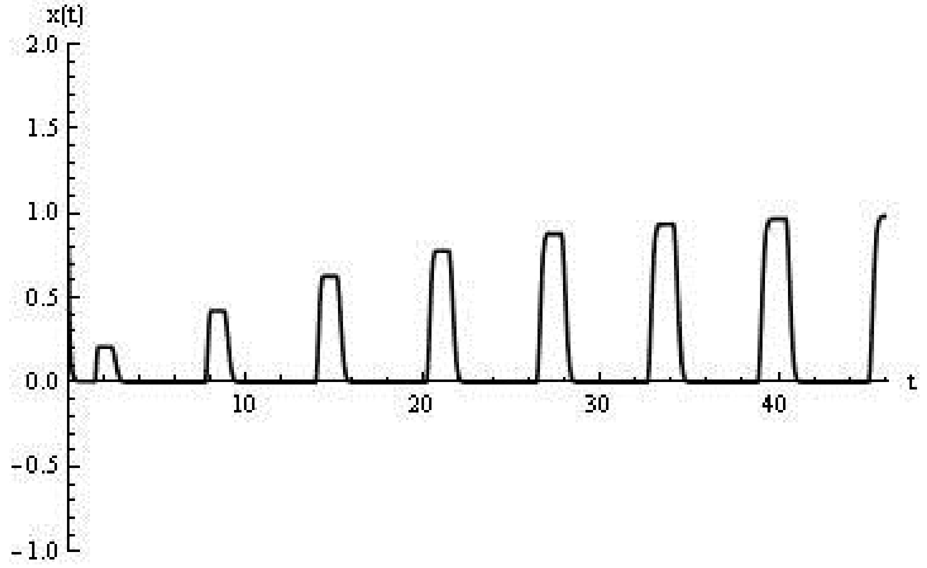


Рис. 4.14. Внутренний параметр мемристора при последовательном соединении мемристора и конденсатора.

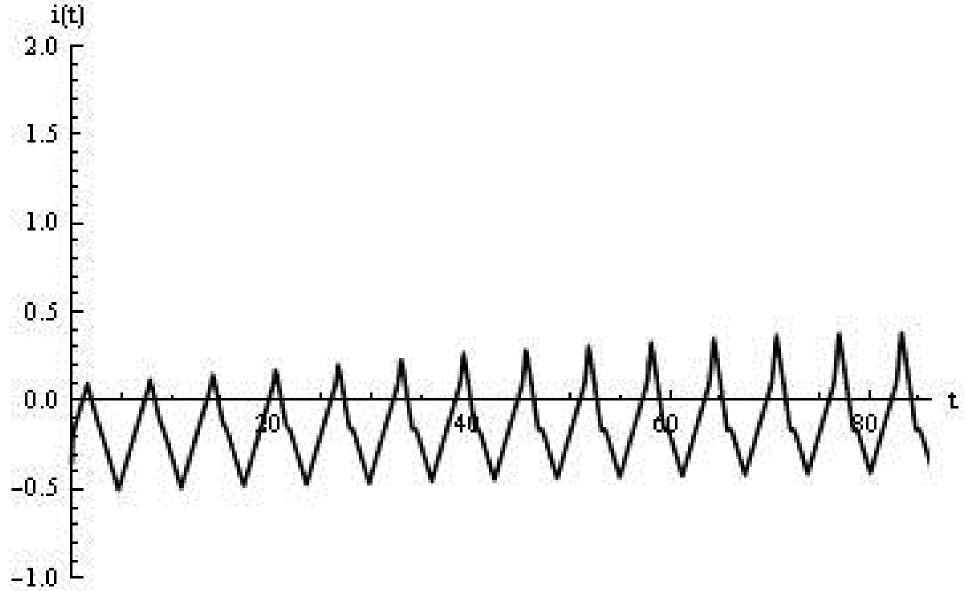


Рис. 4.15. Ток через мемристор при последовательном соединении мемристора и конденсатора.

4.7 Сравнение с опытными данными и обсуждение результатов.

Для сравнения с опытом использовались экспериментальные данные, полученные в Нижегородском университете им. Лобачевского Михайловым, Гусейновым и Беловым для мемристивных устройств в интегральном исполнении со структурой «металл-оксид-металл» [33]. Эта мемристивная структура Au (20 нм) /ZrO_2 (Y) (20 нм) /Ta (20 нм) /Pt (50 нм), сформированная на окисленной подложке кремния, изображена на рисунке 4.16. Пленка ZrO_2(Y) наносилась при температуре 300 °C методом ВЧ-магнетронного распыления мишени из смеси порошков ZrO_2 (88 мол. %) и Y_2O_3 (12 мол. %). Металлические электроды наносились методом магнетронного распыления (при постоянном токе, температура: 200 °C). Размер мемристивного устройства составлял 20 × 20 мкм.

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) измерялась путем подачи внешнего напряжения на цепь «мемристор-резистор», в которой резистор служит одновременно для физического ограничения тока, протекающего через мемристор, и в качестве датчика тока для его измерения. В качестве источника внешнего напряжения и для измерения падения напряжения на резисторе (и, соответственно, тока) использовалось многофункциональное устройство ввода/вывода National Instruments USB-6341 ADC/DAC. Схема измерения приведена на рис. 4.16 б. Сигнал подавался на нижний (Pt) электрод мемристивного устройства. Последовательно к верхнему (Au/Ta) электроду был подключен резистор номиналом 1000 Ом.

С экспериментальными данными сравнивалось численное решение уравнений (4.8)-(4.10). При расчете принималось, что на участок цепи с мемристором и резистором, которые соединены последовательно, подается напряжение, соответствующее данным рис. 4.3, сдвинутым влево на полпериода и смещенным на 0.15 В (амплитуда данного пилообразного напряжения составляла 1.15 В, таким образом внешнее напряжение изменялось от -1 В до 1.3 В, период был равен 18 сек). Для соответствия полярности переключения той, что была реализована в эксперименте при заземлении верхнего электрода мемристивной структуры, полярность напряжения в модели также была изменена на противоположную.

(а)

(б)

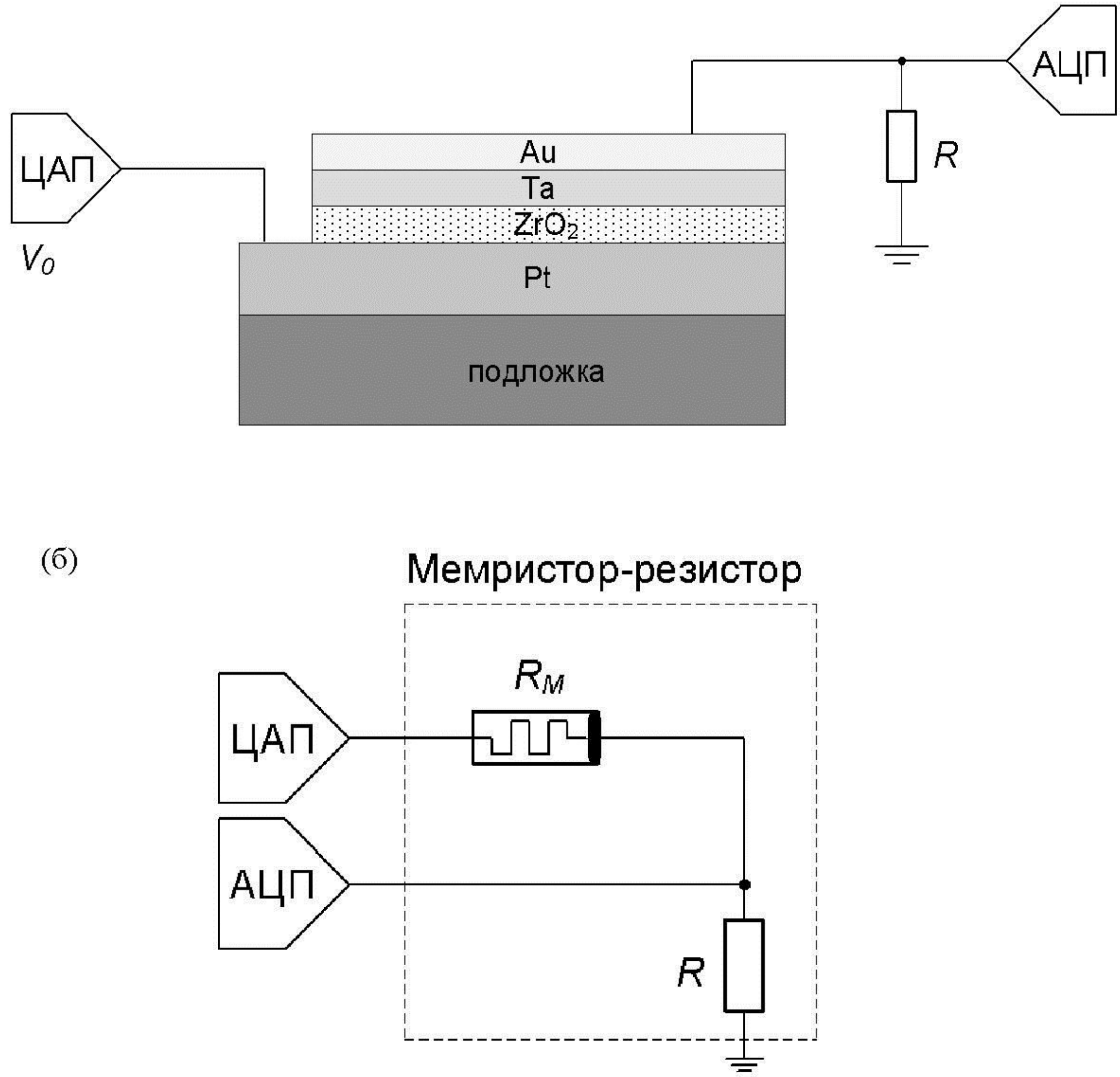


Рис. 4.16. Схематическое изображение структуры мемристивного устройства (а) и схема измерения (б).

Параметры в выражениях (4.7) и (4.9) были выбраны следующие: $\alpha = 173.95$, $\beta = 0.7$ (скорости переключения), $V_{t-} = -0.48$, $V_{t+} = 0.57$ (пороги переключения), $\nu_1 = 30$ (параметр крутизны пороговой функции P_1 – см. формулу (4.7)), $R_{on} = 1400$ Ом, $R_{off} = 17700$ Ом, $R = 1000$ Ом (сопротивление последовательно подключенного резистора). Начальное значение (при $t = 0$) внутреннего параметра x было взято равным 0.2.

На рис. 4.17 жирной штриховой линией изображена расчетная ВАХ последовательной цепи «мемристор-резистор», а серыми сплошными линиями – результаты измерений для 15 циклов переключения.

Следует отметить, что представленная на рисунке 4.17 ВАХ цепи «мемристор-резистор» может быть описана с применением меньшего числа параметров. Результат, например, почти не зависит от «параметра крутизны» пороговой функции (главное, чтобы он был достаточно большим – тогда пороговая функция будет практически неотличима от идеальной функции Хевисайда). Однако этот и другие параметры необходимы для сохранения универсальности модели с точки зрения дальнейших исследований. Кроме того, формально следовало уточнить их значения, использованные в расчетах.

Экспериментальные ВАХ и количество требуемых для их описания параметров модели сильно зависят от структуры и материалов мемристивных устройств, а именно, от механизма переключения и механизмов транспорта заряда в разных состояниях устройства. Выбор оптимальных параметров в каждом конкретном случае представляет собой актуальную задачу для отдельного исследования (см., например, [34-36]).

Из сравнения расчетных и экспериментальных данных на рис. 4.17 видно, что, несмотря на естественный разброс экспериментальных ВАХ от цикла к циклу переключения, модель адекватно воспроизводит основные характеристики системы «мемристор-резистор», такие как напряжения переключения и резистивные состояния (в том числе R_{on} и R_{off}).

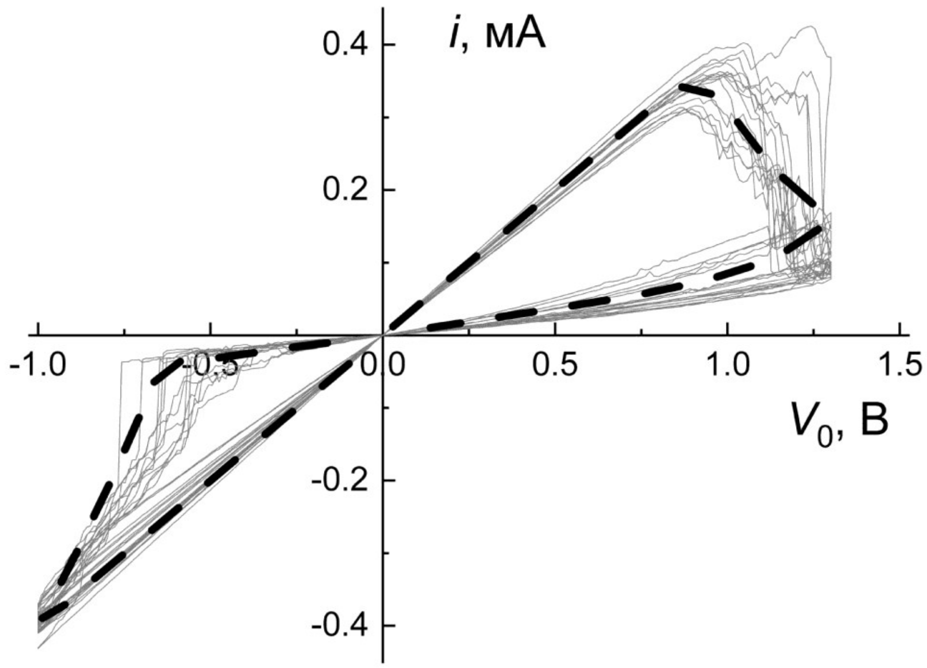


Рис. 4.17. ВАХ цепи «мемристор-резистор». Расчетные данные показаны жирной штриховой линией, экспериментальные данные – серыми сплошными линиями.

4.8 Возможная модель формовки мемристора.

Вернемся к последовательному соединению мемристора и диода. Известно, что тонкопленочные структуры, обладающие эффектом резистивного переключения, могут в начальном состоянии (до процесса электроформовки) иметь ВАХ, похожую на характеристику полупроводникового диода (см., например, [37]). Приведенные в параграфе 4.5 данные наводят на мысль, что один из результатов электроформовки математически эквивалентен резкому повышению тока насыщения во «встроенном» в структуру диоде, благодаря чему диодные свойства образца исчезают. Этот эффект (уже упомянутый в параграфе 4.5) иллюстрируется рисунком 4.18, на котором изображена «обычная» вольт-амперная характеристика диода (при учете его омического сопротивления) и ее трансформации при увеличении тока насыщения в 1000, в 1000000 и в 2000000 раз. При таком увеличении «выживают» лишь резистивные свойства (осложненные присутствием мемристорного эффекта). Предположим, что ток насыщения является переменной величиной, и его изменение с течением времени определяется дифференциальным уравнением. Например, таким:

$$\frac{dI_s}{dt} = \lambda V_0(t). \tag{4.16}$$

Здесь λ – некоторый коэффициент. Тогда динамика мемристора (вместе со «встроенным» диодом) будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{cases} i = -I_s + \dfrac{V_T}{R_M} W\left(e^{\frac{V_0}{V_T}} I_s \dfrac{R_M}{V_T} e^{I_s \frac{R_M}{V_T}}\right), \\ R_M = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \\ \dfrac{dI_s}{dt} = \lambda V_0, \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x, iR_M). \end{cases} \tag{4.17}$$

Также в процессе формовки по аналогичному закону может увеличиваться параметр v_1, определяющий крутизну (быстроту спадания) пороговых функций P_1.

С точки зрения внутренней структуры мемристивного устройства повышение тока насыщения диода соответствует уменьшению энергетического барьера для транспорта носителей тока (например, на границе металл-диэлектрик). В устройствах на основе оксидных материалов модуляция барьера может быть связана с миграцией кислородных вакансий под действием электрического поля и джоулева разогрева [38].

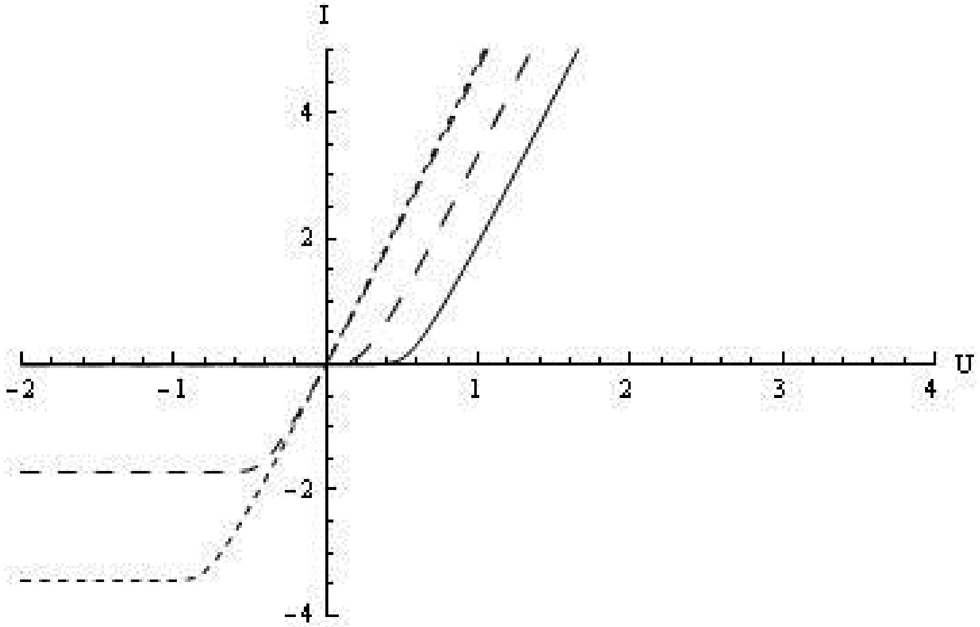


Рис. 4.18. Типичная ВАХ полупроводникового диода (сплошная линия), обладающего внутренним сопротивлением, при токе насыщения, равном `0.00000172`, *и ее изменение при увеличении тока насыщения в 1000 раз (прерывистая линия с длинными отрезками), в 1 млн. раз (прерывистая линия с отрезками среднего размера) и в 2 млн. раз (прерывистая линия с короткими отрезками).*

Альтернативное объяснение выявленной закономерности может базироваться на модели, согласно которой мемристор представляется как параллельное соединение двух участков цепи: «мемристор-диод» и «мемристор-резистор». Причем до электроформовки сопротивление резистора бесконечно велико, а в ходе электроформовки оно снижается и шунтирует диод. Такое объяснение хорошо согласуется с представлением о формировании проводящих каналов (филаментов) по границам зерен в поликристаллической (столбчатой) пленке оксида [39].

Применимость данных моделей к описанию электроформовки реальных мемристоров будет объектом дополнительного исследования и сильно зависит от технологии создания и конкретной структуры мемристивного устройства. Однако обе эти модели соответствуют общепринятым механизмам резистивного переключения и могут быть реализованы с помощью математического представления уравнений мемристора, предложенного в данной работе.

4.9 Выводы

В четвертой главе диссертации предложены математические выражения (соответствующие обобщенной модели мемристивной системы Чуа) для описания динамики мемристора с биполярным резистивным переключением порогового типа. Эти выражения позволяют избежать использования кусочно-заданных функций (которые задаются разными формулами при разных значениях параметров). Также получены численные решения уравнений модели мемристора при действии на него последовательности треугольных импульсов. Выведены уравнения, описывающие последовательное соединение мемристора с дискретными радиотехническими элементами – резистором, диодом, конденсатором и индуктивностью. Приведены численные решения для резистора и конденсатора. Отмечено, что при последовательном соединении мемристора и диода режим переключений реализуется лишь при замене биполярного мемристора униполярным (с положительными порогами переключения). Приведен модельный пример расчетов для этого случая.

Для варианта последовательного соединения «мемристор-резистор» проведено сравнение результатов расчета с экспериментом. Подобраны параметры математической модели, при использовании которых результаты численного расчета адекватно описывают экспериментальные вольт-амперные характеристики и параметры резистивного переключения.

Показано, что в случае соединения с конденсатором возможно существование переходных процессов, по длительности значительно превышающих период внешнего воздействия. Уравнения, описывающие последовательное соединение мемристора и диода, могут быть полезны для моделирования реальных мемристивных систем, где наблюдаются вольт-амперные характеристики диодного типа. Для таких систем предложены физические интерпретации обнаруженных закономерностей в рамках общепринятых механизмов резистивного переключения (интерфейсного с модуляцией барьера по всей площади структуры и филаментного с формированием локальных проводящих каналов).

Результаты этой главы были опубликованы в статье [A9] (в соавторстве) и изложены на XXVII Научной конференции по радиофизике в Нижегородском университете им. Н.И.Лобачевского (на заседании секции «Стохастические мультистабильные системы» 18/05/2023). Уравнения, вошедшие в пункт 5 положений, выносимых на защиту, были получены и численно решены автором.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлено выражение, уточняющее формулу Шокли для вольт-амперной характеристики полупроводникового диода (учитывается внутреннее сопротивление диода, при этом используется специальная функция Ламберта) и рассмотрен алгоритм для вычисления параметров, входящих в это выражение (исходя из наборов экспериментальных данных). Предложены аналитические выражения для характеристик биполярного транзистора (с использованием этой же функции). Показано, что применение данного подхода позволяет произвести расчет усилителя на основе включения транзистора с общим эмиттером (в том числе и при наличии дополнительного резистора в цепи эмиттера) в ключевом и усилительном режиме, а также описать переход в режим насыщения. Получены аналитические формулы для зависимостей тока коллектора и эмиттера от входного напряжения (в случае усилителя с заземленным эмиттером это входное напряжение равно напряжению база-эмиттер). Произведенные проверки показывают близкое совпадение результатов вычислений по формулам для усилителя ТОЭ с результатами опыта и результатами моделирования в приложении OrCAD.

В заключительных параграфах второй главы (2.8 – 2.11) уравнения характеристик представлены в форме (двух- и четырехпараметрической), более удобной для расчета границ квазилинейного режима, а также для учета дополнительных параметров, например сопротивления в цепи базы (и возможной разницы коэффициентов неидеальности в коллекторном и эмиттерном переходах). Также приведены уточненные выражения для режима насыщения.

Полученные формулы для коллекторного тока успешно применены к исследованию других распространенных транзисторных схем, в том числе двухтактного усилителя на комплементарных транзисторах, дифференциального усилителя, усилителя на основе включения транзистора с общей базой, токового зеркала и триггера.

В заключительной четвертой главе диссертации рассмотрены новые дискретные радиотехнические элементы – мемристоры. Сделан переход от функций модели мемристора с переключением порогового типа, которые задаются на разных участках разными выражениями, к функциям, описываемым единой формулой. При этом использовались пороговые функции, чье поведение сходно с «усилительными» функциями, которые рассматривались в предыдущих главах. Получены и численно решены системы уравнений для участков цепи, в которых мемристивное устройство включено последовательно с другими дискретными элементами – обычным резистором, полупроводниковым диодом, катушкой индуктивности и конденсатором. Для случая последовательного соединения мемристора и резистора проведено сравнение расчетных данных с экспериментом. Подробно исследован случай последовательного соединения мемристора и полупроводникового диода (при составлении уравнений для этого варианта схемы использовалась специальная функция Ламберта). Изложены предположения, касающиеся математического описания и физической интерпретации влияния процесса формовки на мемристивную систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ebers J.J., Moll J.L.* Large-signal behaviour of junction transistors // Proc. IRE, 42, No. 12 (December 1954) P. 1761-1772.

2. *Маллер Р., Кейминс Т.* Элементы интегральных схем. М.: Мир, 1989.

3. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.

4. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.

5. *Степаненко И.П.* Основы теории транзисторов и транзисторных схем. М.: Энергия, 1977.

6. *Дробот С.В., Мельниковков В.А., Путилин В.Н.* Электронные приборы и устройства. Практикум. Минск: БГУИР, 2009

7. *Gummel H.K., Poon H.C.* An integral charge control model of bipolar transistors // Bell Sys, Techn. J. 1970. Vol. May-June P. 827-852.

8. *Петросянц К.О., Торговников Р.А.* Сравнительный анализ схемотехнических моделей SiGe гетеробиполярного транзистора // Проблемы разработки перспективных микроэлектронных систем - 2006. Сборник научных трудов / под общ. ред. А.Л.Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2006. С. 184-190.

9. *Битюрин Ю.А., Оболенский С.В., Мельников А.С., Чириманов А.П., Демарина Н.В., Киселева Е.В., Шитвов А.П.* Измерение статических характеристик полупроводникового диода. Н.Новгород: ННГУ, 2004.

10. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.

11. *Banwell T. C. and Jayakumar A.* Exact analytical solution for current flow through diode with series resistance //Electronics letters, vol. 36, pp. 291-292, 2000.

12. *Vargas-Drechsler M. A.* Analytical solutions of diode circuits, Maple application center, July 2005. available online at the electronic address.

13. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972.
14. *Жеребцов И.П.* Основы электроники. Ленинград: Энергоатомиздат, 1985, с.77
15. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний, — М.: ГИФМЛ, 1959.
16. *Гапоненко С.В.* Лампово-транзисторные усилители своими руками. Санкт-Петербург: Наука и техника, 2012.
17. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
18. *Chua L.O.* // IEEE Trans. 1971.V. CT-18. № 5. P. 507.
19. *Chua L.O., Kang S.* // Proc. IEEE. 1976. V. 64. № 2. P. 209.
20. *Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S.* // Nature. 2008. V. 453. P. 80.
21. *Mikhaylov A., Pimashkin A., Pigareva Y. et al.* // Frontiers in Neuroscience. 2020. V. 14. P. 358.
22. *Xu W., Wang J., Yan X.* // Frontiers in Nanotechnology. 2021. V. 3. P. 1.
23. *Pershin Y.P., La Fontaine S., Di Ventra M.* // Phys Rev. E. 2009. V. 80. P. 021926
24. *Joglekar Y.N., Wolf S.J.* // Eur. J. Phys. 2009. V. 30. P. 661.
25. *Mutlu R.* // Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci. 2015. V. 23. P. 1219.
26. *Pisarev A., Busygin A., Udovichenko S., Maevsky O.* // Microelectronic Engineering. 2018. V. 198. P. 1.
27. *Biolek Z., Di Ventra M., Pershin Y. V.* // Radioengineering. 2013. V. 22. P. 945.
28. *Удовиченко С.Ю., Писарев А.Д., Бусыгин А.Н., Бобылев А.Н.* // Наноиндустрия. 2020. Т. 13. № 7-8. С. 466.
29. *Guseinov D.V., Mikhaylov A.N., Pershin Y.P.* // IEEE Trans. Circuits Syst. II. Express Briefs. 2022. V. 69. P. 1802.
30. *Biolek Z., Biolek D., Biolkova V.* // Radioengineering. 2009. V. 18. P. 210.

31. *Kvatinsky S., Friedman E. G., Kolodny A., et al.* // IEEE Trans. Circuits Syst I. Regular Papers. 2013. V. 60. P. 211.
32. *Yakopcic C., Taha T. M., Subramanyam G. et al.* // IEEE Electron Device Lett. 2011. V. 32. P. 1436.
33. *Filatov D.O., Koryazhkina M.N., Novikov A.S. et al.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2022. V. 156. P. 111810.
34. *Zhevnenko D., Meshchaninov F., Kozhevnikov V. et al.* // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. V.142. P. 110382.
35. *Meshchaninov F.P., Zhevnenko D.A., Kozhevnikov V.S. et al.* // Micromachines. 2021. V. 12. № 10. P. 1201.
36. *Zhevnenko D.A., Meshchaninov F.P., Kozhevnikov V.S. et al.* // Micromachines. 2021. V. 12. № 10. P. 1220.
37. *Ярмаркин В.К., Шульман С.Г., Леманов В.В.* // Физика твердого тела. 2008. Т. 50. № 10. С. 1767-1774.
38. *Ryu J. H., Hussain F., Mahata C. et al.* // Appl. Surf. Sci. 2020. V. 529. P. 147167.
39. *Guseinov D. V., Korolev D. S., Belov A. I. et al.* // Model. Simul. Mater. Sci. Eng. 2020. V. 28. P. 015007.
40. *Сергеев С. А., Спиридонов Ф. Ф.* Применение функции Ламберта W в решении задачи теплопроводности // Горизонты образования. 2002, - № 4. - http://edu.secna.ru. - 5 с.
41. *Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M.* Some applications of the Lambert W function to physics. // Canadian J. Physics, 2000. Vol 78, p. 823-831.
42. *Зи С.* Физика полупроводниковых приборов, Т1. М.: Мир, 1984.
43. *Шалимова К.В.* Физика полупроводников. М.: Энергоатомиздат, 1985.
44. *Дворников О., Шульгевич Ю.* Методы идентификации параметров моделей интегральных транзисторов. Часть 1. Расчет Spice-параметров биполярных транзисторов с использованием конструктивно-технологических и электрофизических параметров // Современная электроника 2009 N5 С.48-55.

45. *Потемкин В.В.* Радиофизика. — М.: Издательство Московского университета, 1988.
46. *El Aydi M., Bendaoud R., Yadir S., Amiry H., Assal S., Hajjaj C., Sbaa M., Barkatou M., Benhmida M.* Exact Analytical Solutions of Simples Electrical Circuit's Equations Using Maple Software and Lambert W Function //IOSR Journal of Mathematics Volume 15, Issue 3 Ser. II (May – June 2019), PP 27-30.
47. *Bernardini, A., Werner, K. J., Sarti, A., & Smith, J. O.* Modeling Nonlinear Wave Digital Elements using the Lambert Function //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 63(8), 2016.
48. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
49. *Галицкий В.В.* Статический режим триггера с непосредственными связями в сб. Полупроводниковые триоды и их применение М.: Советское радио, 1964, с. 214-226.
50. *Грэм Дж., Тоби Дж., Хьюлсман Л.* Проектирование и применение операционных усилителей. М.: Мир, 1974.
51. *Хотунцев Ю. Л.* Основы радиоэлектроники. М. : Агар, 1998.
52. *Манаев Е. И.* Основы радиоэлектроники. М. : Радио и связь, 1990.
53. *Штернов А. А.* Физические основы конструирования, технологии РЭА и микроэлектроники. М. : Радио и связь, 1981.
54. *Сигорский В. П.* Основы теории электронных схем. Киев : Вища школа, 1971.
55. *Опадчий Ю. Ф.* Аналоговая цифровая электроника. М. : Горячая Линия - Телеком, 1999.
56. *Веденеев Г. М.* Силовые биполярные транзисторы при работе в ключевых режимах. М. : Изд-во МЭИ, 1992.
57. *Пожела Ю. К.* Физика быстродействующих транзисторов. Вильнюс : Мокслас, 1989.

58. *Блихер А.* Физика силовых биполярных транзисторов / пер. с англ. В. М. Волле, Л. С. Костиной ; под ред. И. В. Грехова. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1986.
59. *Спиридонов Н. С.* Основы теории транзисторов. Киев : Техніка, 1975.
60. *Агаханян Т. М.* Основы транзисторной электроники. М. : Энергия, 1974.
61. *Пауль Р.* Транзисторы : физ. основы и свойства / пер. с нем. В. С. Заседа ; под ред. И. А. Палехова. М. : Советское радио, 1973.
62. *Гаврилов Г. К.* Переходные процессы в транзисторе и методы расчета импульсных схем. М. : Связь, 1971.
63. *Николаевский И. Ф.* Параметры и предельные режимы работы транзисторов. М. : Советское радио, 1971.
64. *Трутко А. Ф.* Методы расчета транзисторов. М. : Энергия, 1971.
65. *Федотов Я. А.* Основы физики полупроводниковых приборов М. : Советское радио, 1970.
66. *Тихомиров В. С.* Стабилизация режима и параметров транзисторного каскада. М. : Энергия, 1969.
67. Расчет схем на транзисторах / пер. с англ. К. Г. Меркулова [и др.]. М. : Энергия, 1969.
68. *Красилов А. В.* Методы расчета транзисторов. М. ; Л. : Энергия, 1964.
69. *Герасимов С. М.* Основы теории и расчета транзисторных схем. М. : Советское радио, 1963.
70. *Кононов Б. Н.* Симметричные триггеры на плоскостных полупроводниковых триодах. М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1960.
71. *Миддлбрук Р. Д.* Введение в теорию транзисторов / пер. с англ. В. Н. Дурнева ; под ред. О. Т. Кильдеева. М. : Атомиздат, 1960.
72. *Леннартц Г.* Конструирование схем на транзисторах / пер. с нем. В. Н. Белоусова [и др.]. М. ; Л. : Энергия, 1964.
73. *Орлов И. Я.* Курс лекций по основам радиоэлектроники. Нижний Новгород **:** Изд-во ННГУ**,** 2005**.**

74. *Ворсин Н. Н., Ляшко М. Н.* Основы радиоэлектроники. Минск : Вышэйшая школа, 1992.
75. *Джонс М. Х.* Электроника - практический курс / пер. с англ. Е.В.Воронова, А.Л.Ларина. М. : Постмаркет, 1999.
76. *Разевиг В. Д.* Система схемотехнического моделирования Micro-Cap V. М. : СОЛОН, 1997.
77. *Киселев В. К., Оболенский С. В., Пузанов, А. С.* // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского 2013. N 2, ч. 1. С. 56-59.
78. *Богачев В. М., Лысенко В. Г., Смольский С. М.* Транзисторные генераторы и автодины М. : Изд-во МЭИ, 1993.
79. *Шур М. С.* Физика полупроводниковых приборов Кн. 1. М. : Мир, 1992.
80. *Гаряинов С. А.* Физические модели полупроводниковых приборов с отрицательным сопротивлением. М. : Радио и связь, 1997.
81. *Титце У.* Полупроводниковая схемотехника / пер. с нем. А.Г. Алексеенко. — М. : Мир, 1983.
82. *Мотова М.И.* Исследование динамики систем с разрывными колебаниями: *учебно-методическое пособие.* — Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2010. — 19 с.
83. *Оболенский С. В.* Моделирование радиационного воздействия на характеристики полупроводниковых структур : *автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.10 - физика полупроводников и диэлектриков. 05.27.01 - твердотелая электроника, микроэлектроника* ; *Нижегор. гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского*. — Нижний Новгород : [ННГУ], 1995. — 18 с.

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК РФ:

А1. *Китаев А.Е.* Аналитическое представление характеристик биполярных транзисторов //Радиотехника 2017 N10 С.189-194.

А2. *Китаев А.Е.* Использование метода наименьших квадратов для подбора параметров вольт-амперной характеристики диода //Труды НГТУ им. Р.Е.Алексеева 2018 N2 С.30-34.

A3. *Китаев А.Е.* Математическое моделирование процессов в транзисторных усилителях и генераторах //Нелинейный мир 2018 N4 С.41-44.

A4. *Китаев А.Е.* Приложение функции Ламберта к расчету некоторых транзисторных схем //Нелинейный мир 2018 N5 С.16-22.

A5. *Китаев А.Е.* Патент на полезную модель (N 192244)

A6. *Китаев А.Е.* Сравнение различных подходов к моделированию транзисторных усилителей //Радиотехника 2020 N1 С.74-80.

A7. *Китаев А.Е.* Вычисление границ усилительного режима и некоторые сопутствующие вопросы теории усилителя с общим эмиттером //Радиотехника 2020 N10 С.70-77.

A8. *Китаев А.Е.* Дифференциальные уравнения для триггера и мультивибратора //Радиотехника и электроника 2021 Т66 N5 С. 483-489.

A9. *Китаев А.Е., Белов А.И., Гусейнов Д.В., Михайлов А.Н.* Последовательное соединение мемристора с другими дискретными элементами: резистором, полупроводниковым диодом, катушкой индуктивности и емкостью //Радиотехника и электроника 2023 Т68 N3 С.295-304.