На правах рукописи

Трифонов Константин Николаевич

Задачи хаотической динамики теории гамильтоновых и обратимых систем

Специальность 1.1.2 —

«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2024

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Научный руководитель:

Лерман Лев Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики».

Официальные оппоненты:

Глызин Сергей Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Давыдов Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории динамических систем ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится « ___ » декабря 2024 г. в на заседании диссертационного совета 24.2.340.16 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» и на официальном сайте организации: https://diss.unn.ru/1494

Автореферат разослан «____» _________ 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.340.16
канд. физ-мат. наук Бирюков Руслан Сергеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая работа относится к одному из наиболее важных и интересных разделов теории динамических систем — теории многомерных гладких систем со сложным, хаотическим поведением траекторий. В диссертации изучается важный класс таких систем – многомерные гамильтоновы и обратимые динамические системы. Системы дифференциальных уравнений, которые можно записать в гамильтоновой форме, являются классическим объектом исследования в теории дифференциальных уравнений. Они представляют математические модели явлений, возникающих в различных разделах современной физики, механики, гидродинамики, нелинейной оптики, химии (задачи молекулярной динамики). В некотором смысле можно сказать, что большинство физических задач на базисном уровне, без учета диссипации, описываются гамильтоновыми системами и поэтому их изучение представляет первостепенный интерес. Обратимые динамические системы (как векторные поля, так и диффеоморфизмы) также появляются в различных разделах науки, причем обратимыми могут быть как гамильтоновы, так и негамильтоновы системы. В последнем случае они характеризуются тем, что их поведение диссипативно в одних областях фазового пространства и близко к консервативному – в других областях фазового пространства. Поэтому исследование обратимых систем представляет собой большой интерес как с математической, так и с прикладной точки зрения.

В настоящее время общепризнано, что большинство гамильтоновых и обратимых систем имеют весьма сложную динамику, поэтому одним из плодотворных подходов при изучении их динамики является исследование поведения системы в окрестностях каких-то инвариантных подмножеств, которые могут быть выделены некими простыми условиями. Изучение систем в окрестностях гомоклинических траекторий и гетероклинических контуров является одной из таких задач. Кроме того гомоклинические и гетероклинические траектории часто являются объектом исследования в прикладных задачах, например при изучении локализаванных решений в уравнениях с частными производными (решения типа бегущих волн, стационарные решения и т.д.).

Известно, что изучение гомоклинических траекторий и поведения гамильтоновой системы в окрестности таких траекторий началось с работ А.Пуанкаре, обнаружившим сложное поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой неподвижной точки при наличии трансверсальной гомоклинической траектории седла. Затем это изучение было продолжено в работах Дж. Биркгофа: в случае двумерных симплектических диффеоморфизмов им было доказано существование счетного множества седловых периодических траекторий в окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к седловой неподвижной точке. Следующий шаг был сделан С. Смейлом, доказавшим, при условии линеаризуемости диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки, теорему о сложной структуре поведения траекторий в малой окрестности трансверсальной гомоклинической траектории для диффеоморфизмов общего типа. Однако задача об описании структуры множества всех траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гомоклинической траектории, им не была решена. Эта задача без каких-либо дополнительных предположений была затем решена Л.П. Шильниковым. Все это касалось изучения гомоклинических траекторий к седловым периодическим траекториям гладких потоков или, соответственно, гомоклинических траекторий седловых неподвижных точек гладких диффеоморфизмов. Первые результаты по изучению гомоклинических структур в многомерных гамильтоновых системах были получены Р. Девани. Изучение динамики в окрестности гетероклинических контуров разного типа было развитием этой тематики, где с одной стороны были получены близкие результаты, а с другой стороны были обнаружены принципиально новые явления – сосуществование инвариантных множеств, содержащих устойчивые, седловые и неустойчивые периодические траектории, т.е. то, что потом стало называться смешанной динамикой. Здесь в первую очередь следует отметить работы Ш. Ньюхаоса, Л.П. Шильникова, Н.К. Гаврилова, С.В. Гонченко, Д.В. Тураева, П. Дуарте, Л. Мора, Н. Ромеро и др.

В общей динамической системе наличие состояний равновесия, имеющих чисто мнимые собственные значения, является вырождением и изучается в теории бифуркаций. В отличие от этого, в гамильтоновых системах состояния равновесия с собственными значениями на мнимой оси являются состояниями равновесия общего типа, они не исчезают при вариации параметров системы. Поэтому изучение гомоклинических траекторий для таких состояний равновесия является одной из важных задач. Для существования гомоклинических траекторий у состояния равновесия должны существовать гиперболические направления, т.е. спектр его собственных значений должен содержать как чисто мнимые, так и собственные значения с ненулевой реальной частью. Такие состояния равновесия существуют уже в системах с двумя степенями свободы и называются седло-центрами. Первый существенный результат о структуре гамильтоновой системы в окрестности гомоклинической траектории к седло-центру был получен Л.М. Лерманом [1]. Он доказал, что при выполнении некоторого условия общего положения на систему с петлей все малые ляпуновские седловые периодические траектории, существующие в окрестности седло-центра и заполняющие его двумерное центральное многообразие, имеют каждая по четыре трансверсальные гомоклинические траектории Пуанкаре и тем самым, в силу результатов С. Смейла и Л.П. Шильникова,

[1] Лерман Л. М. О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра //Методы качеств. теории диф. ур. Межвуз. сб. науч. трудов/ Под ред. Е.А. Леонтович-Андроновой. Горький: Горьковский ун-т. – 1987. – С. 89-103.

система обладает сложной структурой и неинтегрируема. В дальнейшем, эти результаты были обобщены на системы с параметрами (Кольцова–Лерман), на многомерные гамильтоновы системы (Кольцова–Лерман), на обратимые гамильтоновы системы (Mielke-Holmes–O'Reiley, Grotta Ragazzo, Yagasaki и др.).

Напомним важное для дальнейшего изложения понятие обратимой системы. Пусть M – гладкое многообразие, на котором действует гладкий диффеоморфизм L, являющийся инволюцией, т.е. $L^2 = L \circ L = id_M$, где id_M – тождественное отображение на M. Векторное поле v на M называется обратимым (reversible), если выполнено тождество $DL(v(x)) = -v(L(x))$ для любой точки $x \in M$. Это тождество влечет сопряженность потока Φ^t с обратным потоком: $L \circ \Phi^t = \Phi^{-t} \circ L$. В теории обратимых систем важную роль играет множество $Fix(L)$ неподвижных точек инволюции. Предполагается, что это множество является гладким подмногообразием в M, причем его размерность равна половине размерности M, т.е. рассматриваются четномерные M. Траектория γ обратимого поля называется симметричной, если она инвариантна относительно действия L. В частности, такая траектория обязана пересекать множество $Fix(L)$. Поэтому симметричное состояние равновесия лежит в $Fix(L)$ и его спектральные свойства аналогичны свойствам состояний равновесия гамильтоновых систем, а траектория, которая пересекает $Fix(L)$ дважды, является периодической траекторией, период которой равен времени перехода от одной точки пересечения до другой. Спектральные свойства мультипликаторов симметричных периодических траекторий аналогичны свойствам периодических траекторий гамильтоновых систем.

Задачи об исследовании систем с гетероклиническими структурами возникают как при исследовании задач теории динамических систем для характеризации хаотического поведения, так и в прикладных задачах. Например, моделью распространения воздушных пузырьков в тонких трубках, проводящих сжимаемую жидкость [2] является некоторое интегро-дифференциальное уравнение, а уравнение для его бегущих волн приводится к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, численные эксперименты с которой показали наличие симметричного гетероклинического контура, состоящего из седло-центра, периодической траектории и пары гетероклиничесих траекторий. С контуром связано существование гомоклинических траекторий к седло-центру, соответствующих локализованным решениям типа солитонов для исходного уравнения. Другой задачей, где возникает вопрос о поведении траекторий в обратимой (негамильтоновой) системе является уравнение для стационарных решений для известного уравнения в частных производных, а именно – один из вариантов уравнения Свифта-Хоэнберга [3]. Некоторые

[2] Малкин А. И. Акустические солитоны в заполненных жидкостью упругих трубах //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1995. – Т. 342, № 5. – С.621-625.

[3] Swift J., Hohenberg P. C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability //Physical Review A. –

варианты этого уравнения получены из вариационных принципов и их уравнения для стационарных решений приводятся к гамильтоновым системам [4] [5] [6]; однако существуют и негамильтоновы версии, одна из которых рассмотрена в диссертации, она приводится к обратимой системе в $\mathbb{R}^4$, не являющейся гамильтоновой. Все это говорит об актуальности рассматриваемых задач о структуре траекторий системы в окрестностях гетероклинических контуров.

Симплектические отображения возникают как отображения Пуанкаре на некоторых секущих в фиксированном уровне гамильтониана для автономных гамильтоновых систем. Также они появляются в неавтономных гамильтоновых системах, периодически зависящих от времени, при изучении отображения за период системы. Структура таких отображений в смысле поведения траекторий итераций такого отображения в общем случае весьма сложна. Впервые изучение таких сохраняющих площадь отображений проводилось Дж. Биркгофом, который получил для них большое число замечательных результатов. В начале 60-х годов прошлого столетия появились модели симплектических отображений с гиперболической структурой (аносовские диффеоморфизмы). Их изучение привело к большому прогрессу в теории динамических систем и, в частности, в теории гамильтоновых систем. Одним из примеров такого поведения был т.н. гиперболический автоморфизм Тома на двумерном торе, как пример (предположительно) структурно устойчивого диффеоморфизма со счетным плотным множеством периодических точек. Затем Д. В. Аносов ввел общий класс гиперболических систем и, в частности, гиперболических диффеоморфизмов [7] и доказал их структурную устойчивость. Позже, в работах М. И. Брина и Я. Б. Песина [8] были введены частично гиперболические системы, в которых было ослаблено условие гиперболичности, но сохранены свойства эргодичности, перемешивания, K-свойства и т.д..

Частично гиперболические симплектические автоморфизмы 6-мерного тора являются одной их классических простых моделей хаотической динамики, которые очень просто формулируются, но имеют сложное поведение траекторий, которое характеризуется как наличием траекторий с нулевыми ляпуновскими показателями, так и с положительными/отрицательными показателями. Такие автоморфизмы порождаются целочисленными симплектическими

1977. – V. 15, № 1. – P. 319.

[4]Belyakov L. A., Glebsky L. Y., Lerman L. M. Abundance of stable stationary localized solutions to the generalized 1D Swift-Hohenberg equation //Comput. Math. Appl. – 1997. – V. 34, № 2-4. – P. 253-266.

[5]Budd C. J., Kuske R. Localized periodic patterns for the non-symmetric generalized Swift-Hohenberg equation //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2005. – V. 208, № 1-2. – P. 73-95.

[6]Glebsky L. Y., Lerman L. M. On small stationary localized solutions for the generalized 1D Swift–Hohenberg equation //Chaos: Inter. J. Nonlin. Sci. – 1995. – V. 5, № 2. – P. 424-431.

[7]Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны //Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. – 1967. – Т. 90, № 0. – С. 3-210.

[8]Брин М. И., Песин Я. Б. Частично гиперболические динамические системы //Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1974. – Т. 38, № 1. – С. 170-212.

линейными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^{2n}$ в частично гиперболическом случае, т.е. когда собственные значения матрицы преобразования лежат вне и на единичной окружности комплексной плоскости. Важной задачей было получить их топологическую классификацию.

В настоящее время получено много результатов о частично гиперболических диффеоморфизмах [9] [10]. Что касается частично гиперболических автоморфизмов тора $\mathbb{T}^n$, то наиболее подробное их исследование было проведено в статье [11], где был исследован вопрос об их устойчивой эргодичности, поставленный в [12]. Несмотря на большое число работ по частично гиперболическим диффеоморфизмам, классификация таких симплектических автоморфизмов не была получена.

Целью диссертационной работы является изучение и характеризация сложного поведения динамической системы, основываясь на ее поведении в окрестности инвариантных подмножеств с простой динамикой, а именно – гетероклинических контуров различного типа. Поскольку основным классом исследуемых систем являются гамильтоновы и обратимые системы, то изучаются окрестности контуров различного типа, встречающихся в таких системах. Их выбор основывается на том, что они были обнаружены в конкретных системах, не были ранее исследованы и приводят к математически нетривиальным задачам. Другим подходом к изучению сложной динамики является исследование модельных задач, являющихся простыми по постановке, но приводящих к сложному поведению траекторий. С этой целью изучаются частично гиперболические симплектические автоморфизмы 6-мерного тора, моделирующие поведение гамильтоновой системы с четырьмя степенями свободы на уровнях ее гамильтониана.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи:**

1. Изучение динамики вещественно-аналитической обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности ее симметричного контура, состоящего из симметричного седло-центра, симметричной седловой периодической траектории в том же уровне гамильтониана и пары несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией.
2. Изучение динамики гладкого четырехмерного обратимого векторного поля в окрестностях гетероклинических контуров двух типов. Контур первого типа состоит из двух несимметричных седло-фокусов, переставляемых инволюцией, и двух симметричных невырожденных гетероклини-

[9] Burns K., Wilkinson A. On the ergodicity of partially hyperbolic systems //Annals of Mathematics. – 2010. – V. 171, № 1. – P. 451-489.

[10] Hammerlindl A., Potrie R. Partial hyperbolicity and classification: a survey //Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2018. – V. 38, № 2. – P. 401-443.

[11] Hertz F. R. Stable ergodicity of certain linear automorphisms of the torus //Annals of mathematics. – 2005.– V. 162 – P. 65-107.

[12] Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds// Berlin. Springer Verlag – 1977.

ческих траекторий, связывающих седло-фокусы. Контур второго типа состоит из двух симметричных седло-фокусов и двух несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией, связывающих оба седло-фокуса.

3. Описание динамики и получение классификации симплектических частично гиперболических автоморфизмов 6-мерного тора.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

1. Для обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного контура с предельным множеством из седло-центра и гиперболической периодической траектории доказано существование счетного семейства трансверсальных однообходных гомоклинических траекторий для седловой периодической траектории и связанной с ними гиперболической динамики, существование счетных семейств эллиптических периодических траекторий в окрестности контура, а поэтому – КАМ торов в их окрестностях.
2. Для общего однопараметрического семейства обратимых гамильтоновых систем, у которого система при критическом значении параметра имеет указанный контур, доказано существование счетного множества значений параметра, при которых соответствующая система семейства имеет невырожденную гомоклиническую траекторию к седло-центру, а следовательно гиперболическую динамику в близких уровнях соответствующего гамильтониана.
3. Для 4-мерной обратимой системы с гетероклиническим контуром первого типа доказано существование однопараметрического семейства симметричных периодических траекторий, накапливающихся к контуру, существование счетных семейств 2-обходных контуров и конечного числа 3-обходных контуров рассматриваемого типа, что характеризует сложную динамику в окрестности такого контура.
4. Для общего однопараметрического семейства обратимых систем с гетероклиническим контуром первого типа доказано существование счетных семейств несимметричных гомоклинических траекторий для каждого седло-фокуса. Для седло-фокуса с отрицательной седловой величиной это позволяет доказать существование асимптотически устойчивых периодических траекторий вблизи гомоклинической, а для парного седло-фокуса с положительной седловой величиной – асимптотически неустойчивых периодических траекторий.
5. Для 4-мерной обратимой системы с гетероклиническим контуром второго типа доказано существование счетных семейств n-обходных гомоклинических траекторий к каждому симметричному седло-фокусу, что характеризует сложную динамику в окрестности контура.

6. Для общего однопараметрического семейства обратимых системы с контуром второго типа доказано существование счетного множества значений параметра, накапливающихся к критическому, при которых система имеет 2-обходный контур второго типа.
7. Дана топологическая классификации возможных типов поведения траекторий симплектических автоморфизмов на 6-мерном торе с одномерным неустойчивым слоением и построены примеры таких автоморфизмы во всех случаях, как транзитивных, так и разложимых.
8. Дана топологическая классификации возможных типов поведения траекторий симплектических автоморфизмов на 6-мерном торе с двумерным неустойчивым слоением и построены примеры таких автоморфизмы во всех случаях, как транзитивных, так и разложимых.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории гладких динамических систем (векторных полей и диффеоморфизмов на гладких многообразиях) и теории бифуркаций, методы теории нормальной формы, методы симплектической геометрии и топологии.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты вносят вклад в развитие теории многомерных динамических систем, а методы исследования могут быть применены для характеризации хаотического поведения систем в теории обратимых гамильтоновых систем при изучении структуры траекторий и ее бифуркаций при вариации уровня гамильтониана и параметров в окрестностях гетероклинических контуров различного типа, при изучении пространственной структуры стационарных и бегущих локализованных волн для уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений, в задачах неголономной механики, которые могут быть представлены в виде обратимых систем дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теоремы о существовании счетного семейства трансверсальных гомоклинических траекторий для седловой периодической траектории, счетных семейств эллиптических периодических траекторий в окрестности рассматриваемого гетероклинического контура обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.
2. Для общего однопараметрического семейства обратимых гамильтоновых систем, имеющего при критическом значении параметра указанный гетероклинический контур, доказано существование счетного множества значений параметра, при которых соответствующая система семейства имеет гомоклиническую траекторию седло-центра.
3. Для гетероклинических контуров первого типа в обратимых системах доказательства теорем о существовании однопараметрического семейства

симметричных периодических траекторий, накапливающихся к контуру, о существовании счетных семейств 2-обходных контуров и конечного числа 3-обходных гетероклинических контуров первого типа и теоремы о существовании счетных семейств n-обходных гомоклинических траекторий к каждому симметричному седло-фокусу для контуров второго типа.

4. Для контуров первого типа в общем однопараметрическом семействе обратимых систем доказательства теоремы о существовании счетных семейств несимметричных гомоклинических траекторий для каждого седло-фокуса, для контуров второго типа – теоремы о существование счетного множества значений параметра, накапливающихся к критическому, при которых соответствующая система имеет 2-обходный контур второго типа.
5. Теоремы о классификации частично гиперболических симплектических автоморфизмов 6-мерном тора как с одномерным неустойчивым слоением, так и с двумерным неустойчивым слоением.

Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались

на научных семинарах ИИТММ ННГУ «Нелинейная динамика: теория и приложения» им. Л.П. Шильникова (руководитель – С.В. Гонченко)

научном семинаре Лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ, Нижний Новгород (руководители В.З. Гринес, О.В. Починка).

Кроме этого результаты докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях:

Международная конференция “ Topological methods in dynamics and related topics” (Н. Новгород, 2019 г.);

Международная конференция “Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ”. (МФТИ, г. Долгопрудный 2019);

Рабочая группа “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop”, (Н. Новгород, 2019);

Конференция “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, (Н. Новгород, 2020 г.);

8th International Conference on Nonlinear Science and Complexity 2020-21 (Marseille, France, 2021 г.);

Международная конференция “Topological Methods in Dynamics and Related Topics – IV” (Н. Новгород, 2021 г.);

Международная конференция “Shilnikov WorkShop” (Н. Новгород, 2021, 2022, 2023);

Вторая конференция Математических центров России (г. Москва, 2022 г.).

Результаты диссертации явились составной частью работ, выполнявшихся при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSWR-2020-0036), грантов РФФИ и РНФ.

Личный вклад. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно с Л.М. Лерманом, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, Л.М. Лерману принадлежат постановки задач и участие в обсуждении результатов. В работах, выполненных совместно с Л.М. Лерманом и Н.Е. Кулагиным, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, Л.М. Лерману принадлежат постановки задач, Н.Е. Кулагину принадлежат результаты численных экспериментов.

Публикации по теме работы. Всего по теме диссертации автором опубликовано 14 работ, из них 6 работ в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 124 страницы. Список литературы содержит 117 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержатся краткие исторические сведения, дается общая характеристика рассматриваемых задач, обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели, задачи и основные результаты диссертации, указана научная новизна и практическая значимость работы, приведены сведения об апробации результатов работы, сведения о публикациях.

В первой главе рассматривается аналитическая обратимая гамильтонова система X_H на четырехмерном вещественно-аналитическом симплектическом многообразии (M, Ω), где Ω – симплектическая 2-форма, на котором действует анти-симплектическая аналитическая инволюция L: $L^*\Omega = -\Omega$, а ее множество неподвижных точек инволюции $Fix(L)$ является гладким двумерным подмногообразием в M. Предполагается, что векторное поле X_H имеет симметричное состояние равновесия p, $H(p) = 0$, типа седло-центр, седловую периодическую траекторию γ, $H(\gamma) = 0$, и две гетероклинические траектории: Γ_1, идущую при возрастании времени от γ к p, и $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$, идущую при возрастании времени от p к γ. Изучается поведение траекторий в окрестности полученного гетероклинического контура, состоящего из траекторий $p, \Gamma_1, \gamma, \Gamma_2$. Отметим, что сама задача, по постановке, является бифуркационной, т.к. структура траекторий системы на инвариантном уровне гамильтониана меняется при изменении внутреннего параметра системы – значения гамильтониана c вблизи его нулевого значения. Например, на уровнях, отличных от $V_0 = \{H = 0\}$, состояние равновесия отсутствует, т.е. контур разрушается и происходят бифуркации. В частности, интересны бифуркации рождения эллиптических периодических траекторий в окрестности контура.

Напомним, что особая точка p гамильтонового векторного поля X_H на 4-мерном симплектическом многообразии M называется седло-центром, если оператор линеаризации векторного поля в точке p имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$, $\omega \neq 0$, и пару вещественных собственных значений $\pm\lambda \neq 0$. В окрестности такой особой точки существует единственное локальное инвариантное двумерное гладкое (аналитическое, если система аналитическая) центральное многообразие, заполненное замкнутыми траекториями (ляпуновское семейство периодических траекторий), а также две гладкие инвариантные кривые $W^s(p), W^u(p)$ – устойчивая и неустойчивая кривые. Во всем пространстве ляпуновские периодические траектории являются седловыми: каждая из них лежит в своем 3-мерном уровне гамильтониана и в нем эта траектория седловая. Поэтому они обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, являющимися гладкими цилиндрами, объединение устойчивых многообразий вместе с $W^s(p)$ образует гладкое центрально-устойчивое 3-мерное многообразие $W^{cs}(p)$, соответственно, объединение неустойчивых многообразий вместе с $W^u(p)$ образует гладкое центрально-устойчивое 3-мерное многообразие $W^{cu}(p)$. Траектории системы, не лежащие на $W^s(p) \cup W^u(p)$, выходят из окрестности точки p.

По предположению, в трехмерном уровне гамильтониана V_0, содержащем седло-центр, лежит также седловая периодическая траектория γ. Напомним, что в окрестности такой траектории в том же уровне гамильтониана лежат два гладких (соответственно – аналитических, если система вещественно–аналитическая) двумерных лагранжевых многообразия $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$, являющиеся ее устойчивым и неустойчивым многообразиями, соответственно. Они содержат каждое саму γ и топологически являются оба либо цилиндрами (если периодическая траектория имеет положительные мультипликаторы), либо листами Мебиуса (если периодическая траектория имеет отрицательные мультипликаторы).

Для того, чтобы понять поведение траекторий системы около состояния равновесия типа седло-центр описана их структура слоения на траектории на каждом уровне гамильтониана. Симметричная периодическая траектория γ в уровне V_0 лежит вне некоторой окрестности седло-центра p, поэтому нужно описать положение этой траектории. Здесь возможны два типа симметричных гетероклинических контуров, которые мы называем случаем 1 (см. рис. 1) и случаем 2 (см. рис. 2).

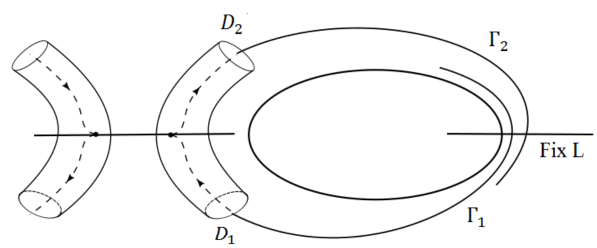


Рис. 1. Случай 1

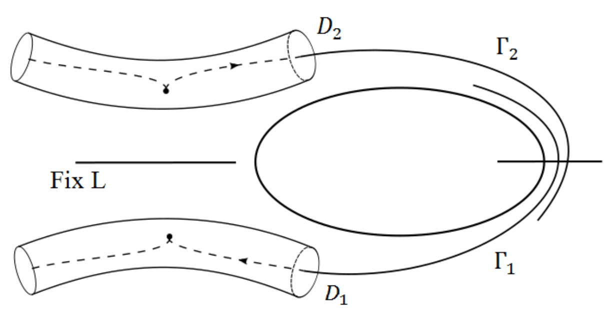


Рис. 2. Случай 2

Первым результатом этой главы является следующая теорема:

Теорема 1. *Если аналитическая обратимая гамильтонова система имеет гетероклинический контур типа 1 с указанными свойствами, то седловая периодическая траектория γ имеет счетное множество однообходных* *трансверсальных гомоклинических траекторий. В случае контура типа 2 на уровне $H = 0$ нет траекторий, отличных от траекторий контура, лежащих целиком в достаточно малой окрестности контура.*

В первой главе также рассматриваются уровни $V_c, c < 0$, вблизи контура для случая 1. Для случая 2 и $c < 0$ все траектории, входящие в окрестность, покидают ее, то же верно и для траекторий, входящих в окрестность, при убывании t.

Для случая 1 доказаны следующие результаты:

Теорема 2. *Предположим, что выполнено неравенство $a_1'(0) \neq 0$ для коэффициента глобального отображения. Тогда существует последовательность $c_n \to -0$ такая, что на уровне V_{c_n} периодическая траектория γ_{c_n} обладает гомоклинической траекторией, вдоль которой устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(\gamma_{c_n})$, $W^u(\gamma_{c_n})$ имеют квадратичное касание. Для каждого такого значения c_n существует счетное множество с-интервалов I_{nm}, $I_{nm} \to c_n$ при $m \to \infty$, значения которых $c \in I_{nm}$ представляют уровни, на которых система имеет однообходные эллиптические траектории.*

Чтобы доказать существование эллиптических периодических траекторий в некоторой окрестности контура, сначала находится счетное множество значений $c_n < 0$, для которых система на уровне V_{c_n} имеет нетрансверсальную гомоклиническую траекторию с квадратичным касанием для седловой периодической траектории γ_{c_n}. Это позволяет применить результаты о существовании каскадов эллиптических периодических траекторий на уровнях, близких к V_{c_n} (см., например, [13] [14]).

Теорема 3. *Пусть f гладкое (не менее C^4) симплектическое отображение, имеющее седловую неподвижную точку p и гомоклиническую траекторию $f^n(q)$, проходящую через точку $q \neq p$. Предположим, что устойчивое и неустойчивое многообразие седловой неподвижной точки p квадратично касаются в точке q. Тогда для любого общего гладкого однопараметрического семейства гладких симплектических отображений f_μ, совпадающего при $\mu = 0$ с f, для любого отрезка значений параметра $[-\mu_0, \mu_0]$, существует целое число $k_0 \in \mathbb{Z}$ и счетное множество открытых интервалов I_k, $k \geq k_0$, таких, что I_k накапливаются к $\mu = 0$ при $k \to \infty$, и отображение f_μ, $\mu \in I_k$ имеет однообходную эллиптическую периодическую траекторию (периода $q + k$).*

Уровни V_c, при достаточно малом $c > 0$, содержат седловую ляпуновскую периодическую траекторию l_c. Ее локальные устойчивое $W^s(l_c)$ и неустойчивое $W^u(l_c)$ многообразия принадлежат V_c, а их продолжение вдоль потока во всем фазовом многообразии происходит вблизи кривых $W^s(p)$ и $W^u(p)$,

[13] Delshams A., Gonchenko M., Gonchenko S. On dynamics and bifurcations of area-preserving maps with homoclinic tangencies //Nonlinearity. – 2015. – V. 28, № 9. – P. 3027-3071.

[14] Gonchenko M. S., Gonchenko S. V. On cascades of elliptic periodic points in two-dimensional symplectic maps with homoclinic tangencies //Regular and Chaotic Dynamics. – 2009. – V. 14. – P. 116-136.

соответственно. Следовательно, они будут пересекать секущие $D_1(c)$ и $D_2(c)$ по окружностям $\sigma_s(c)$, $\sigma_u(c)$.

В этом случае строится гиперболическое множество, которое формируется вблизи гетероклинического контура, включающего пару седловых периодических траекторий l_c, γ_c и четыре трансверсальные гетероклинические траектории, две из которых переходят, при увеличении времени, от l_c к γ_c (около Γ_2), а две другие - от γ_c к l_c (около Γ_1). Кроме того, существует счетное множество трансверсальных гомоклинических траекторий для каждой периодической траектории l_c и γ_c. Все это является основой для построения гиперболического множества.

Теорема 4. *При достаточно малых значениях $c > 0$ многообразия $W^s(l_c)$ и $W^u(\gamma_c)$ пересекаются трансверсально по двум гетероклиническим траекториям $\Gamma_{11}(c)$, $\Gamma_{12}(c)$ и, в силу симметрии, $W^u(l_c)$ и $W^s(\gamma_c)$ пересекаются трансверсально по двум гетероклиническим траекториям $\Gamma_{21}(c) = L(\Gamma_{11}(c))$, $\Gamma_{22}(c) = L(\Gamma_{12}(c))$, образуя, тем самым, трансверсальный гетероклинический контур.*

След $W^u(\gamma_c)$ в окрестности $\Pi^s(c)$ (образ локально-неустойчивого многообразия) под действием глобального отображения $T_2(c) \circ T(c) \circ T_1(c)$) состоит из пары аналитических спиралевидных кривых, которые наматываются на замкнутую кривую $T_2(c)(\sigma_u(c))$ и пересекают трансверсально локально-неустойчивое многообразие в счетном множестве точек, являющихся следами трансверсальных гомоклинических траекторий Пуанкаре периодической траектории γ_c.

Со множеством трансверсальных гомоклинических траекторий периодической траектории γ_c связано гиперболическое множество. Однако это гиперболическое множество не исчерпывает инвариантные множества на уровне V_c. Здесь также доказано существование эллиптических периодических траекторий для интервалов c-значений, стремящихся к $c = 0$. С этой целью сначала доказывается следующая теорема

Теорема 5. *Существует последовательность значений $c_n \to 0$ такая, что на уровне V_{c_n} седловая ляпуновская периодическая траектория l_{c_n} обладает гомоклинической траекторией, вдоль которой $W^s(l_{c_n})$ и $W^u(l_{c_n})$ имеют квадратичное касание.*

Теперь снова применяется теорема 3 о существовании эллиптической периодической точки в общем однопараметрическом семействе двумерных симплектических диффеоморфизмов, содержащем диффеоморфизм с квадратичным гомоклиническим касанием.

Для случая 2 все траектории на уровне V_0, проходящие через достаточно малую окрестность контура, кроме траекторий самого контура, покидают эту окрестность, и не существует траекторий, которые целиком лежат в этой окрестности. Уровни V_c, при $c < 0$ вообще не содержат траекторий, принадлежащих целиком этим уровням, поскольку траектории, входящие в заполненный цилиндр через секущую $D_1(c)$, покидают окрестность точки p, не пересекая вторую секущую $D_2(c)$. Именно поэтому рассматриваются уровни V_c для $c > 0$, где возникают траектории, лежащие целиком в непосредственной близости контура. На соответствующем трансверсальном диске $D_1(c)$ эти траектории входят в заполненный цилиндр через точки, лежащие внутри окружности $\sigma_s(c)$ (след устойчивого многообразия ляпуновской периодической траектории) и выходят через диск $D_2(c)$ из другого заполненного цилиндра через точки, лежащие внутри окружности соответствующей окружности $\sigma_u(c)$. Для этого случая справедлива следующая теорема

Теорема 6. *Для случая 2 существует достаточно малое $c_0 > 0$ такое, что на интервале $(0, c_0)$ существует счетное множество интервалов значений c, которые соответствуют уровням V_c, содержащим однообходную эллиптическую периодическую траекторию в окрестности исходного гетероклинического контура.*

Также в этой главе рассматривается общее 1-параметрическое семейство обратимых гамильтоновых систем X_{H_μ}, содержащее при $\mu = 0$ систему, имеющую гетероклинический контур, рассмотренный выше. Основным результатом, который был получен здесь, является теорема о существовании счетного множества значений параметра μ, накапливающихся к $\mu = 0$, при которых соответствующая система имеет гомоклиническую траекторию к седло-центру.

Теорема 7. *Пусть X_{H_μ} общее 1-параметрическое семейство обратимых аналитических гамильтоновых систем, которое при $\mu = 0$ имеет гетероклинический контур типа 1 или 2, рассмотренные в предыдущих разделах. Тогда существует последовательность значений параметров μ_n, накапливающихся к $\mu = 0$, при которых соответствующая система семейства имеет гомоклиническую траекторию общего типа к седло-центру. Соответствующие значения μ_n имеют один и тот же знак.*

Следует отметить, что эта теорема дает критерий существования гомоклинических траекторий седло-центра, обычно поиск таких траекторий является весьма трудной задачей, как теоретически, так и численно.

Во второй главе изучается динамика гладких четырехмерных векторных полей, обратимых относительно некоторой гладкой инволюции, имеющей гладкое двумерное подмногообразие неподвижных точек. Представлена структура траекторий такой системы вблизи двух типов гетероклинических контуров, включающих седло-фокусы и соединяющих их гетероклинических траекторий. Для гладкого четырехмерного векторного поля седло-фокусом называется состояние равновесия p, у которого оператор линеаризация в точке p, действующий в касательном пространстве T_pM, имеет четверку собственных значений $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$, $\alpha_i\beta_i \neq 0$, $\alpha_1\alpha_2 < 0$. Такое состояние равновесия имеет седловой тип, оно обладает локально двумя гладкими двумерными инвариантными многообразиями, устойчивым $W^s(p)$ и неустойчивым $W^u(p)$, трансверсально пересекающимися в точке p. Первый тип гетероклинических контуров состоит из пары несимметричных седло-фокусов p_1, p_2, $p_2 = L(p_1)$, и двух симметричных невырожденных гетероклинических траекторий Γ_i, $i = 1, 2$, соединяющих эти два седло-фокуса (см. рис. 3, левая часть). Седловой величиной седло-фокуса является число $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2$. Для несимметричной пары седло-фокусов p_1, p_2, $p_2 = L(p_1)$, их седловые величины σ_1, σ_2 имеют противоположные знаки: $\sigma_2 = -\sigma_1$. Это следует из соотношений для операторов линеаризации $A_1 = D\Phi^0(p_1), A_2 = D\Phi^0(p_2)$ для p_1, p_2, $A_2 = -DL(p_2) \circ A_1 \circ DL^{-1}(p_2)$, что означает, что собственные значения оператора линеаризации A_2 равны минус собственным значениям оператора линеаризации A_1. Для определенности будем считать, что $\sigma_1 < 0$, тогда $\sigma_2 > 0$.

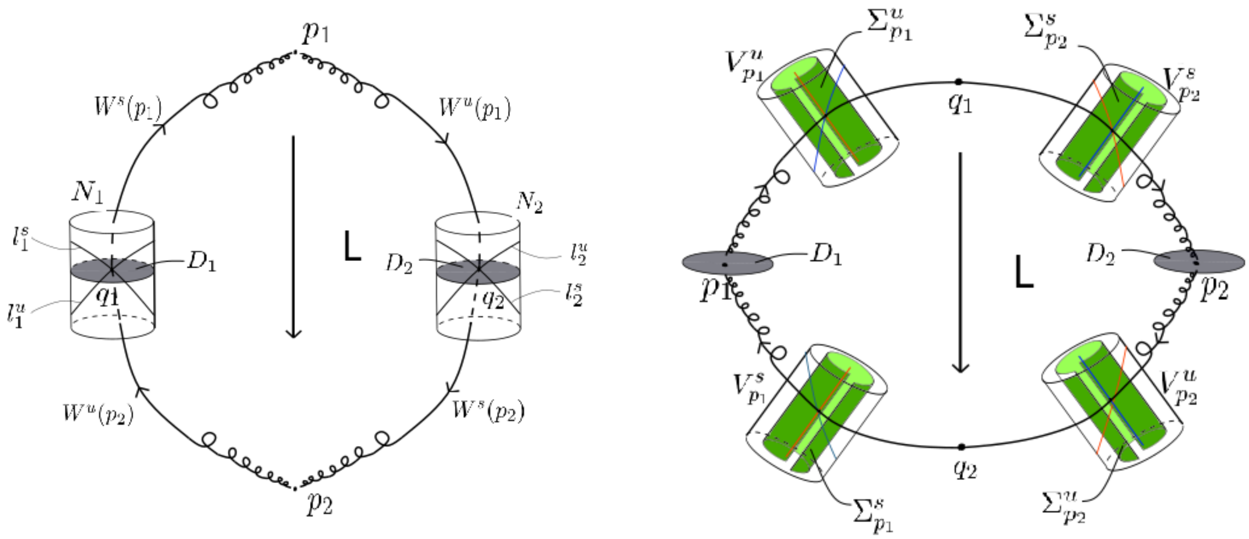
Гетероклинической траекторией векторного поля v является такая его траектория, которая стремится к разным состояниям равновесия при $t \to -\infty$ и $t \to \infty$. Изучаются и другие типы гетероклинических траекторий, связывающих состояние равновесия и периодические траектории, инвариантные торы, но мы ограничиваемся лишь рассмотрением состояний равновесия в качестве предельных множеств траектории. В нашем случае это будет траектория, соединяющая p_1 и p_2. Предположим, кроме того, что обе траектории Γ_1, Γ_2 симметричны ($L(\Gamma_i) = \Gamma_i$) и невырождены (см. ниже). Гетероклиническая траектория принадлежит пересечению устойчивого многообразия одного состояния равновесия и неустойчивого многообразия другого состояния равновесия. Возьмем точку q на этой траектории и выберем некоторую секущую N к потоку, содержащую эту точку. Для четырехмерного многообразия пересечение N с устойчивым многообразием одного седло-фокуса и с неустойчивым многообразием другого седло-фокуса дает две гладкие кривые, проходящие через q. Невырожденность гетероклинической траектории означает, что полученные две гладкие кривые не касаются друг друга в точке q.

В случае парного гетероклинического контура первого типа существование двух симметричных гетероклинических траекторий Γ_i, $i = 1, 2$, означает, что локальное неустойчивое многообразие $W^u(p_2)$, продолженное потоком, пересекает устойчивое многообразие $W^s(p_1)$ и пересечение содержит Γ_1, причем симметричность гетероклинических траекторий означает, что $L(\Gamma_1) = \Gamma_1$. То же самое справедливо и для Γ_2, но $\Gamma_2 \subset W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$. Напомним, что симметрия траектории означает, что эта траектория пересекает множество неподвижных точек инволюции Fix (L) [15]. Обозначим через $q_i = \Gamma_i \cap \mathrm{Fix}\ (L)$, $i = 1, 2$. Пусть $\varphi_i(t)$ будут решения поля v, которые начинаются в точках q_i при $t = 0$, $\varphi_i(0) = q_i$. Такое решение обладает свойством симметрии $\varphi_i(t) = L\varphi_i(-t)$ и $\lim \varphi_1(t) = p_1$ при $t \to \infty$, $\lim \varphi_1(t) = p_2$ при

[15] Devaney R. L. Blue sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems //Indiana University Mathematics Journal. – 1977. – V. 26, № 2. – P. 247-263.

$t \to -\infty$, и $\lim \varphi_2(t) = p_2$ при $t \to \infty$, $\lim \varphi_2(t) = p_1$ при $t \to -\infty$.

Вторым типом парных гетероклинических контуров в обратимой системе являются контура, состоящие из двух симметричных седло-фокусов $p_1, p_2 \in \in \mathrm{Fix}\ (L)$ и двух несимметричных гетероклинических траекторий Γ_1, Γ_2, соединяющих p_1, p_2 и переставляемых инволюцией $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$ (см. рис. 3, правая часть). В отличие от первого типа парных гетероклинических контуров, которые являются структурно устойчивыми объектами в классе обратимых векторных полей относительно действия инволюции L, второй тип таковым не является, поскольку гетероклиническая траектория Γ_1 (и Γ_2) несимметрична и может быть разрушена обратимым возмущением. Это следует из того, что гомо- и гетероклинические траектории не являются структурно устойчивыми объектами в классе общих векторных полей.



а) Тип 1

б) Тип 2

Рис. 3. Два типа парных гетероклинических контуров

Сформулируем результаты, которые доказаны во второй главе. Первым результатом является теорема о существовании однопараметрического семейства периодических траекторий для парного гетероклинического контура первого типа, данная теорема была сформулирована без доказательства в работе Девани [16]

Теорема 8. *Существует окрестность U гетероклинического контура $C = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ такая, что U содержит гладкое однопараметрическое семейство симметричных периодических траекторий γ_τ, накапливающихся к контуру C. Параметризацией семейства можно считать период γ_τ и γ_τ топологически стремится к контуру C при $\tau \to \infty$.*

[16] Devaney R. L. Blue sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems //Indiana University Mathematics Journal. – 1977. – V. 26, № 2. – P. 247-263.

Вторым результатом является теорема о существование счётного множества двухобходных симметричных гетероклинических контуров, содержащих состояния равновесия p_1, p_2. Обходностью ориентируемой замкнутой кривой γ, лежащей в окрестности данной ориентируемой замкнутой кривой C, называется целое число, выражающее класс свободной гомотопии γ относительно γ, т.е. C: $[\gamma] = n[C]$.

Теорема 9. *Существует окрестность U гетероклинического контура $C = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ такая, что U содержит счетное множество симметричных двухобходных невырожденных гетероклинических траекторий, идущих от p_2 к p_1 при увеличении времени. Аналогично существует счетное множество симметричных двухобходных невырожденных гетероклинических траекторий, идущих от p_1 к p_2 при увеличении времени. Таким образом, взяв по одной гетероклинической траектории из этих двух семейств, получаем счетное множество гетероклинических контуров первого типа.*

Эта теорема позволяет доказать существование 2^n-обходных симметричных невырожденных гетероклинических контуров, существующие в окрестностях исходного парного контура C. Но чтобы доказать существование контуров любой обходности, нужно доказать существование симметричных гетероклинических траекторий нечетной обходности. Для этой цели доказана следующая теорема

Теорема 10. *Для любой окрестности контура C существует конечное число симметричных трехобходных гетероклинических траекторий, идущих при увеличении времени от p_2 к p_1. Аналогично существует еще одно конечное семейство симметричных трехобходных гетероклинических траекторий, идущих при увеличением времени от p_1 к p_2.*

Следующая теорема касается семейства обратимых векторных полей, гладко зависящего от параметра. Пусть v_μ — такое семейство, каждое векторное поле v_μ обратимо относительно гладкой инволюция L того же типа, что и выше. Предполагается, что векторное поле v_0 при $\mu = 0$ имеет гетероклинический контур первого типа.

Теорема 11. *Предположим, что семейство v_μ удовлетворяет некоторому условию общего положения при $\mu = 0$, а именно $[\beta_1(\mu)/\beta_2(\mu)]' \neq 0$. Тогда для любой фиксированной окрестности V гетероклинического контура C при $\mu = 0$ существует последовательность μ_n, накапливающаяся к значению $\mu = 0$, такая, что векторное поле v_μ при $\mu = \mu_n$ имеет симметричную пару несимметричных гомоклинических траекторий одну к p_1, другую к p_2. Обе гомоклинические траектории принадлежат окрестности V.*

Теорема 11 утверждает, что если, кроме того, выполняется неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ то при $\mu = \mu_n$ векторное поле v_{μ_n} удовлетворяет условиям теоремы Шильникова [17] о существовании счетного множества седловых периодических траекторий (в нашем случае несимметричных) в окрестности гомоклинической траектории для p_1. По симметрии существует аналогичное семейство несимметричных периодических траекторий в окрестности гомоклинической траектории для p_2. Другой результат, доказанный в работе [18], гласит, что если седловое значение отрицательно для седло-фокуса p_1, то для типичного двупараметрического семейства существуют системы семейства, имеющие устойчивые периодические траектории вблизи гомоклинической траектории к p_1. Ввиду обратимости такая система имеет еще и неустойчивые периодические траектории вблизи симметричной гомоклинической траектории к p_2, для которых седловая величина положительна. Такая ситуация говорит о том, что в этом случае система имеет смешанную динамику [19], так как фазовое пространство содержит периодические траектории устойчивого, седлового и неустойчивого типов, а также эллиптические симметричные периодические траектории. Например, такой тип гетероклинического контура встречается в одной из моделей кельтского камня [20]. Таким образом, это позволяет утверждать, что в модели кельтского камня существуют устойчивые периодические траектории.

Дальнейшие результаты касаются существования периодических и гомоклинических траекторий для контуров второго типа.

Теорема 12. *Для любой окрестности U парного гетероклинического контура второго типа C и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют счетные семейства n-обходных невырожденных симметричных гомоклинических траекторий для p_i, $i = 1, 2$, и счетные однопараметрические семейства симметричных периодических траекторий.*

Следующий результат касается существования двухобходных контуров вблизи исходного контура C для семейств обратимых систем общего положения с контуром второго типа. Контура включают в себя два симметричных седло-фокуса p_1, p_2, являющихся продолжением по параметру исходных седло-фокусов и каждый такой контур содержит две невырожденные несимметричные двухобходные гетероклинические траектории, переставляемые инволюцией L.

Теорема 13. *Предположим, что семейство v_μ удовлетворяет условию общего положения при $\mu = 0$. Тогда для любой фиксированной окрестности V гетероклинического контура C при $\mu = 0$ существует последователь-*

[17] Шильников Л. П. О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса //ДАН СССР. – 1967. – Т. 172, № 2. – С. 298.

[18] Овсянников И.М., Шильников Л. П. Системы с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса и спиральный хаос //Математический сборник. – 1991. – Т. 182, № 7. – С. 1043-1073.

[19] Gonchenko S. V., Turaev D. V. On three types of dynamics and the notion of attractor //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2017. – V. 297. – P. 116-137.

[20] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone //Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – V. 18. – P. 521-538.

ность μ_n, накапливающаяся к значении $\mu = 0$ такая, что векторное поле v_{μ_n} имеет гетероклинический контур второго типа, включающий пару симметричных седло-фокусов и две несимметричные невырожденные двухобходные гетероклинические траектории, соединяющие седло-фокусы и переставляемые инволюцией.

В третьей главе изучается топологическая динамика автоморфизмов шестимерного тора, порожденных целочисленными симплектическими преобразованиями пространства $\mathbb{R}^6$, в частично гиперболическом случае. Обычно соответствующие диффеоморфизмы тора называются симплектическими автоморфизмами тора. Целью является классификация возможных типов поведения траекторий симплектических частично гиперболических автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$.

Для автоморфизмов тора справедлива, в частности, следующая классическая теорема Халмоша [21]

Теорема 14. (Халмош) *Непрерывный автоморфизм f компактной абелевой группы G является эргодическим (или перемешивающим) тогда и только тогда, когда индуцированный им автоморфизм группы характеров G^* не имеет конечных орбит.*

Из этой теоремы следует, в частности, что автоморфизм f_A, порожденный целочисленной унимодулярной матрицей A на $\mathbb{T}^n$, является эргодическим или перемешивающим тогда и только тогда, когда матрица A не имеет собственных значений, являющихся корнями из единицы.

В случае четной размерности тора $n = 2m$ можно рассматривать симплектические автоморфизмы, если в $\mathbb{R}^{2m}$ ввести симплектическую структуру. Для этого зададим в $\mathbb{R}^{2m}$ невырожденную кососимметрическую целочисленную невырожденную матрицу J. Такая матрица определяет в $\mathbb{R}^{2m}$ билинейную 2-форму $[x, y] = (Jx, y)$, где $(\cdot, \cdot)$ – стандартное координатное скалярное произведение относительно стандартных координат. Такую форму называют еще кососкалярным произведением [22]. Линейное отображение $S : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ называется симплектическим, если для него справедливо тождество $[Sx, Sy] = [x, y]$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$. Это влечет следующее тождество для матрицы S симплектического отображения: $S^\top JS = J$. Если J отлична от матрицы $I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, то такую симплектическую структуру в $\mathbb{R}^{2m}$ будем называть нестандартной.

В случае 6-мерного тора симплектические автоморфизмы с положительной топологической энтропией могут быть гиперболическими или частично гиперболическими. Напомним понятие частичной гиперболичности диффеоморфизма гладкого многообразия M, впервые введенное и изученное в [23].

[21] Halmos P.R., On automorphism of compact groups// Bull. AMS. – 1943. – V. 49, № 8. – P. 619-624.

[22] Арнольд В. И. Математические методы классической механики// Рипол Классик. – 1979.

[23] Брин М. И., Песин Я. Б. Частично гиперболические динамические системы //Изв. АН СССР. Сер.

Пусть L линейное преобразование в линейном нормированном пространстве H. Норма и конорма для L определяются, соответственно, как

$$||L|| := \sup_{||v||=1} ||Lv||, \quad m(L) := \inf_{||v||=1} ||Lv||.$$

Пусть теперь $f : M \to M$ – диффеоморфизм гладкого компактного многообразия M.

Определение 1. *Диффеоморфизм $f : M \to M$ называется частично гиперболическим, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного пространства $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, в котором E^u и E^s нетривиальные подрасслоения и*

$$m(D^u f) > ||D^c f|| \geq m(D^c f) > ||d^s f||, \quad m(D^u f) > 1 > ||D^s f||,$$

где $D^\sigma f$ ограничение дифференциала Df на E^σ для $\sigma = s, c$ или u.

Симплектическая целочисленная матрица порождает частично гиперболический автоморфизм тора, если ее собственные значения лежат как вне единичной окружности, так и на единичной окружности. Топологическая классификация таких автоморфизмов определяется в первую очередь топологией слоений, порожденных неустойчивыми (устойчивыми) слоями автоморфизма, так как эти слоения инвариантны относительно действия f, а также действием f на локальном центральном подмногообразии и его продолжении. Поэтому для решения проблемы классификации была в первую очередь исследована структура устойчивого и неустойчивого слоений.

Симплектические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$, которые изучаются в третьей главе, порождены симплектическими частично гиперболическими целочисленными матрицами, у которых либо $\dim W^c = 4, \quad \dim W^s = 1, \quad \dim W^u = 1$, либо $\dim W^c = 2, \quad \dim W^s = 2, \quad \dim W^u = 2$. Здесь W^s - устойчивая плоскость неподвижной точки линейного отображения в начале координат, а W^u – ее неустойчивая плоскость, W^c – центральная плоскость, соответствующая собственным значениям на единичной окружности.

В первом случае изучаются симплектические частично гиперболические автоморфизмы, определяемые симплектической матрицей с двумя (простыми) вещественными собственными значениями λ, λ^{-1}, $|\lambda| > 1$, лежащими вне единичной окружности, и двумя парами комплексно-сопряженных собственных значений на единичной окружности. Соответствующие собственные пространства $l^s, l^u \subset \mathbb{R}^6$ одномерны, а центральное подпространство W^c четырехмерно, при проектировании на тор $\mathbb{T}^6$ и сдвиге их в любую точку тора дают необходимое разложение из определения 1 и вместе с этим соответствующие инвариантные слоения – устойчивое, неустойчивое и центральное.

матем. – 1974. – Т. 38, № 1. – С. 170-212.

При исследовании динамики таких частично гиперболических автоморфизмов сначала изучается возможное поведение линий, полученных при проектировании на тор собственных прямых l^s, l^u, соответствующих вещественным собственным значениям λ, λ^{-1}. Оно зависит от того, как соответствующая прямая расположена относительно целочисленной решетки $\mathbb{Z}^6$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Для автоморфизма f_A замыкание неустойчивого слоя неподвижной точки $\hat{O}$ может быть либо двумерным тором, либо четырехмерным тором, либо совпадать со всем тором $\mathbb{T}^6$, в последнем случае неустойчивое слоение является транзитивным.*

В последнем случае доказано, что устойчивое и центральное слоение также являются транзитивными.

Предложение 2. *Если f_A — симплектический частично гиперболический автоморфизм тора $\mathbb{T}^6$ с транзитивным неустойчивым одномерным слоением, то слои его устойчивого и центрального слоений также плотны на торе $\mathbb{T}^6$.*

В работе построен пример автоморфизма на $\mathbb{T}^6$ с одномерным неустойчивым слоением, для которого доказано, что одномерное неустойчивое слоение является транзитивным, и представлены примеры автоморфизмов с одномерными неустойчивыми и устойчивыми слоениями, которые называются разложимыми. Они характеризуются следующим свойством: замыкание их неустойчивого (устойчивого) слоя является тором размерности меньше шести. Из предложения 1 следует, что в разложимом случае замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой либо двумерный, либо четырехмерный тор.

Во втором случае, когда размерность W^u (и W^s) равна двум, соответствующая симплектическая (6×6)-матрица имеет два собственных значения λ_1, λ_2 вне единичной окружности в $\mathbb{C}$, два собственных значения $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$ внутри единичной окружности и два комплексно-сопряженных собственных значения на единичной окружности. В свою очередь, λ_1, λ_2 могут быть либо двумя различными вещественными числами, либо парой комплексно-сопряженных чисел. Соответственно, W^u натянуто либо на два линейно независимых вещественных собственных вектора γ_1^u, γ_2^u для вещественных собственных значений, либо это инвариантное относительно матрицы A двумерное вещественное подпространство, соответствующее комплексно-сопряженным собственным значениям. В последнем случае инвариантное подпространство порождается вещественной и мнимой частями γ_r^u, γ_i^u комплексного собственного вектора $\gamma_r^u + i\gamma_i^u$, они являются линейно независимыми вещественными векторами.

Для решения проблемы классификации доказан аналог предложения 1. Слои неустойчивого слоения одновременно являются орбитами действия группы $\mathbb{R}^2$, порожденной двумя коммутирующими векторными полями, соответствующими либо собственным векторам двух действительных собственных значений больше единицы, либо действительной и мнимой части комплексного собственного вектора собственного значения больше единицы по модулю.

Предложение 3. *Для автоморфизма f_A замыкание неустойчивого слоя неподвижной точки $\hat{O}$ может быть либо четырехмерным тором, либо всем тором $\mathbb{T}^6$, в последнем случае слоение является транзитивным.*

Также во втором случае построены примеры как транзитивных, так и разложимых автоморфизмов с двумерным неустойчивым слоением.

Выше были представлены автоморфизмы, имеющие транзитивное неустойчивое (и устойчивое) слоение, т.е. все его слои плотны на $\mathbb{T}^6$. Тогда возникает естественный вопрос: пусть неустойчивое слоение автоморфизма f_A транзитивно, является ли транзитивным сам автоморфизм f_A, т.е. имеет ли он транзитивную траекторию? Справедливо следующее утверждение

Предложение 4. *Автоморфизм f_A с транзитивным неустойчивым слоением, транзитивен как диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^6$.*

При изучении частично гиперболических симплектических автоморфизмов главным вопросом является следующий: в каком случае два таких автоморфизма топологически сопряжены. Напомним, что два гомеоморфизма f_1, f_2 метрического пространства M называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$ такой, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

Для классификации частично гиперболических автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ справедлива следующая теорема, опирающаяся на теорему Арова [24]

Теорема 15. *Два симплектических частично гиперболических автоморфизма f_A, f_B на $\mathbb{T}^6$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их матрицы A, B целочисленно подобны.*

Чтобы различать автоморфизмы, не являющиеся топологически сопряженными, полезно иметь несколько простых признаков, которые гарантируют это. Для этого доказано следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть f_A — симплектический частично гиперболический автоморфизм 6-мерного тора $\mathbb{T}^6$ с транзитивным одномерным неустойчивым слоением. Тогда характеристический многочлен матрицы A неприводим над полем $\mathbb{Q}$.*

Также доказано следующее утверждение

Предложение 6. *Если f_A – симплектический частично гиперболический автоморфизм тора $\mathbb{T}^6$ с транзитивным неустойчивым одномерным слоением, то слои его устойчивого и центрального слоений также плотны.*

Теперь вернемся к классификации автоморфизмов f_A на $\mathbb{T}^6$, которые являются разложимыми. На самом деле, теорема Арова работает и в этом слу-

[24] Аров Д. З. О топологическом подобии автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп //Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 5. – С. 133-138.

чае. Тем не менее, в этом случае можно сказать больше о сопрягающем автоморфизме.

Рассмотрим сначала случай, когда f_A имеет одномерное неустойчивое слоение. Пусть f_A – разложимый автоморфизм, порожденный матрицей A (симплектической относительно стандартной или нестандартной симплектической структуры) с одномерным неустойчивым слоением. Это означает, что замыкание любого неустойчивого слоя является тором размерности меньше шести. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. *Если f_A разложимый автоморфизм с одномерным неустойчивым слоением, то целочисленный характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ матрицы A приводим над полем $\mathbb{Q}$.*

В разложимом случае имеют место следующие теоремы о классификации.

Теорема 16. *Пусть симплектический автоморфизм f_A тора $\mathbb{T}^6$ с одномерным неустойчивым слоением разложим, и замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя является четырехмерным тором. Тогда матрица A рационально подобна блочно-диагональной матрице (H, I), где блоки 4×4 для H и 2×2 для I являются сопровождающими матрицами неприводимых характеристических многочленов P_4 и Q_2 соответственно. Две такие блочно-диагональные матрицы $(H, I), (H', I')$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^4\times\mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда частично гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I, I' имеют одинаковый период k, где $k\in\{3,4,6\}$.*

Теорема 17. *Пусть f_B — разложимый симплектический автоморфизм $\mathbb{T}^6$ с одномерным неустойчивыми слоением такой, что замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой двумерный тор. Тогда матрица B рационально подобна блочно-диагональной матрице (H, I), блоки которой являются сопровождающими матрицами 4×4 и 2×2 для H, I, соответственно, порожденные неприводимыми характеристическими многочленами P_4, Q_2, или трем 2×2 матрицам (H, I_1, I_2), порожденным неприводимыми характеристическими многочленами P_2, Q_2, R_2, соответственно.*

В первом случае две такие блочно-диагональные матрицы $(H, I), (H', I')$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^4\times\mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда их гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I, I' имеют одинаковый период k.

Во втором случае два набора блочно-диагональных матриц (H, I_1, I_2), (H', I_1', I_2') порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I_1, I_1' имеют одинаковый период k_1 и I_2, I_2' имеют одинаковый период k_2,

$k_i = 3, 4, 6, \quad i = 1, 2$ *при условии, что* $k_1 \neq k_2$.

Аналогично случаю разложимых симплектических автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с одномерными неустойчивыми слоением, также справедливы теоремы о классификации разложимых автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с двумерным неустойчивым слоением.

Теорема 18. *Пусть* f_A *– разложимый симплектический автоморфизм тора* $\mathbb{T}^6$ *такой, что замыкание любого двумерного неустойчивого (устойчивого) слоя является четырехмерным тором, а матрица* A *имеет либо четверку комплексно-сопряженных собственных значений вне единичной окружности, либо две различные пары вещественных собственных значений вне единичной окружности. Тогда матрица* A *рационально подобна блочно-диагональной матрице* S*, блоки которой* (H, I) *являются сопровождающими матрицами* (4×4) *и* (2×2)*, порожденными множителями характеристического многочлена. Две такие блочно-диагональные матрицы* $(H, I), (H', I')$ *порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на* $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{T}^2$ *тогда и только тогда, когда гиперболические целочисленные матрицы* H *и* H' *целочисленно подобны, а периодические матрицы* I, I' *имеют одинаковый период* k, $k \in \{3, 4, 6\}$.

Теорема 19. *Пусть* f_B *— разложимый симплектический автоморфизм тора* $\mathbb{T}^6$ *такой, что замыкание любого двумерного неустойчивого (устойчивого) слоя является четырехмерным тором, и его характеристический многочлен является произведением трех монических многочленов второй степени. Тогда матрица* B *рационально подобна блочно-диагональной матрице* S*, блоки которой* (H_1, H_2, I) *являются сопровождающими матрицами* (2×2), (2×2) *и* (2×2)*, порожденные множителями характеристического многочлена. Две такие блочно-диагональные матрицы* $(H_1, H_2, I), (H_1', H_2', I')$ *порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на* $\mathbb{T}^6$ *тогда и только тогда, когда гиперболические целочисленные матрицы* H_1 *и* H_1' *целочисленно подобны, гиперболические целочисленные матрицы* H_2 *и* H_2' *также целочисленно подобные, а целочисленные матрицы* I, I' *имеют одинаковый период* k, $k \in \{3, 4, 6\}$

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Lerman L. M., Trifonov K. N. Geometry of symplectic partially hyperbolic automorphisms on 4-torus //Dynamical Systems. – 2020. – V. 35, № 4. – P. 609-624.

2. Лерман Л. М., Трифонов К. Н. Топология симплектических частично гиперболических автоморфизмов 4-мерного тора //Математические заметки. – 2020. – Т. 108, № 3. – С. 474-476.

3. Lerman L. M., Trifonov K. N. Saddle-center and periodic orbit: Dynamics near symmetric heteroclinic connection //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – V. 31, № 2.

4. Трифонов К. Н. О частично гиперболических симплектических автоморфизмах шестимерного тора //Теоретическая и математическая физика. – 2022. – Т. 212, № 2. – С. 287-302.

5. Lerman L. M., Trifonov K. N. Symplectic partially hyperbolic automorphisms of 6-torus //Journal of Geometry and Physics. – 2024. – V. 195. – P. 105038.

6. Kulagin N. E., Lerman L. M., Trifonov K. N. Twin heteroclinic connections of reversible systems //Regular and Chaotic Dynamics. – 2024. – V. 29, № 1. – P. 40-64.

Материалы конференций и прочие издания

1. Lerman L.M., Trifonov K.N. Complicated dynamics in a reversible Hamiltonian system// Abstracts of the Intern. Conf. “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop”, Nizhny Novgorod, 2019, Book of Abstracts.– P. 128-129.

2. Trifonov K.N. Complicated dynamics in a reversible Hamiltonian system// 8th International Conference on Nonlinear Science and Complexity 2020-21, Marseille, 2021, Book of Abstracts.– P. 29.

3. Lerman L.M., Trifonov K.N. Partially Hyperbolic Symplectic Automorphisms of 6-Torus// International Conference “Topological Methods in Dynamics and Related Topics – IV”, Nizhny Novgorod, 2021, Book of Abstracts.– P. 35-36.

4. Лерман Л.М., Трифонов К.Н. Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура// Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, Труды XX международной конференции. Нижний Новгород, 2020.– С. 240-241.

5. Trifonov K.N. Partially Hyperbolic Symplectic Automorphisms of 4-Torus// International Conference “Shilnikov WorkShop 2021”, Nizhny Novgorod, Book of Abstracts.– P. 29.

6. Лерман Л. М., Трифонов К. Н. Симплектические частично-гиперболические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$: динамика и классификация// Вторая конференция Математических центров России, г. Москва, 2022, Аннотации докладов.–

С. 51.

7. Trifonov K.N. Symplectic Partially Hyperbolic Automorphisms of 6-Torus// International Conference “Shilnikov WorkShop 2022”, Nizhny Novgorod, Book of Abstracts.– P. 35.

8. Лерман Л. М., Трифонов К. Н. Симплектические частично-гиперболические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$// International Conference “Shilnikov WorkShop 2023”, Nizhny Novgorod, Book of Abstracts.– P. 21.