

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.
Лобачевского»

На правах рукописи

ТРИФОНОВ КОНСТАНТИН НИКОЛАЕВИЧ

Задачи хаотической динамики теории гамильтоновых и обратимых систем

Специальность 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор,
Лерман Лев Михайлович

Нижегород – 2024

Оглавление

Введение	4
1 Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура	13
1.1 Основные понятия и определения	13
1.2 Мозеровские координаты	15
1.3 Локальная структура системы около седло-центра	17
1.4 Отображение Пуанкаре в окрестности γ	20
1.5 Глобальные отображения	24
1.6 Возможные типы симметричных контуров	25
1.7 Уровень V_0	27
1.8 Гиперболичность и эллиптичность на уровнях $c < 0$	31
1.9 Гиперболичность и эллиптичность на уровнях $c > 0$	37
1.10 Случай 2 при $c > 0$	41
1.11 1-параметрическое семейство: счетное множество гомоклиник седло-центра	42
2 Парные гетероклинические контуры в обратимых системах	47
2.1 Введение	47
2.2 Предварительные сведения и основные результаты	51
2.3 Локальное и глобальное отображения	55
2.4 Доказательства	58
2.5 Второй тип парного гетероклинического контура	67
2.5.1 Пример	76
3 Частично гиперболические симплектические автоморфизмы 6-мерного тора	80
3.1 Предварительные сведения	80
3.2 Частично гиперболические автоморфизмы с одномерным неустойчивым слоением	87
3.2.1 Примеры автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с транзитивным одномерным неустойчивым слоением	92
3.2.2 Разложимые автоморфизмы с одномерным неустойчивым слоением	94
3.3 Частично гиперболические автоморфизмы с двумерным неустойчивым слоением	96
3.3.1 Примеры автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с транзитивным двумерным неустойчивым слоением	98

3.3.2	Разложимые автоморфизмы с двумерным неустойчивым слоением	101
3.4	Классификация частично гиперболических автоморфизмов	103
3.5	Дополнение	111
Литература		115

Введение

Актуальность темы. Настоящая работа относится к одному из наиболее важных и интересных разделов теории динамических систем — теории многомерных гладких систем со сложным, хаотическим поведением траекторий. В диссертации изучается важный класс таких систем — многомерные гамильтоновы и обратимые динамические системы. Системы дифференциальных уравнений, которые можно записать в гамильтоновой форме, являются классическим объектом исследования в теории дифференциальных уравнений. Они представляют математические модели явлений, возникающих в различных разделах современной физики, механики, гидродинамики, нелинейной оптики, химии (задачи молекулярной динамики). В некотором смысле можно сказать, что большинство физических задач на базисном уровне, без учета диссипации, описываются гамильтоновыми системами и поэтому их изучение представляет первостепенный интерес. Обратимые динамические системы (как векторные поля, так и диффеоморфизмы) также появляются в различных разделах науки, причем обратимыми могут быть как гамильтоновы, так и негамильтоновы системы. В последнем случае они характеризуются тем, что их поведение диссипативно в одних областях фазового пространства и близко к консервативному — в других областях фазового пространства. Поэтому исследование обратимых систем представляет собой большой интерес как с математической, так и с прикладной точки зрения.

В настоящее время общепризнано, что большинство гамильтоновых и обратимых систем имеют весьма сложную динамику, поэтому одним из плодотворных подходов при изучении их динамики является исследование поведения системы в окрестностях каких-то инвариантных подмножеств, которые могут быть выделены некими простыми условиями. Изучение систем в окрестностях гомоклинических траекторий и гетероклинических контуров является одной из таких задач. Кроме того гомоклинические и гетероклинические траектории часто являются объектом исследования в прикладных задачах, например при изучении локализованных решений в уравнениях с частными производными (решения типа бегущих волн, стационарные решения и т.д.).

Известно, что изучение гомоклинических траекторий и поведения гамильтоновой системы в окрестности таких траекторий началось с работ А. Пуанкаре, обнаружившим сложное поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой неподвижной точки при наличии трансверсальной гомоклинической траектории седла. Затем это изучение было продолжено в работах Дж. Биркгофа: в случае двумерных симплектических диффеоморфизмов им было доказано существование счетного множества седловых периодических траекторий в окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к седловой неподвижной точке. Следующий шаг был сделан С. Смейлом, доказавшим, при

условии линеаризуемости диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки, теорему о сложной структуре поведения траекторий в малой окрестности трансверсальной гомоклинической траектории для диффеоморфизмов общего типа. Однако задача об описании структуры множества всех траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гомоклинической траектории, им не была решена. Эта задача без каких-либо дополнительных предположений была затем решена Л.П. Шильниковым. Все это касалось изучения гомоклинических траекторий к седловым периодическим траекториям гладких потоков или, соответственно, гомоклинических траекторий седловых неподвижных точек гладких диффеоморфизмов. Первые результаты по изучению гомоклинических структур в многомерных гамильтоновых системах были получены Р. Девани. Изучение динамики в окрестности гетероклинических контуров разного типа было развитием этой тематики, где с одной стороны были получены близкие результаты, а с другой стороны были обнаружены принципиально новые явления – сосуществование инвариантных множеств, содержащих устойчивые, седловые и неустойчивые периодические траектории, т.е. что потом стало называться смешанной динамикой. Здесь в первую очередь следует отметить работы Ш. Ньюхауса, Л.П. Шильникова, С.В. Гонченко, Д.В. Тураева, П. Дуарте, Л. Мора, Н. Ромеро, А. Родригеса и др.

В общей динамической системе наличие состояний равновесия, имеющих чисто мнимые собственные значения, является вырождением и изучается в теории бифуркаций. В отличие от этого, в гамильтоновых системах состояния равновесия с собственными значениями на мнимой оси являются состояниями равновесия общего типа, они не исчезают при вариации параметров системы. Поэтому изучение гомоклинических траекторий для таких состояний равновесия является одной из важных задач. Для существования гомоклинических траекторий у состояния равновесия должны существовать гиперболические направления, т.е. спектр его собственных значений должен содержать как чисто мнимые, так и собственные значения с ненулевой реальной частью. Такие состояния равновесия существуют уже в системах с двумя степенями свободы и называются седло-центрами. Первый существенный результат о структуре гамильтоновой системы в окрестности гомоклинической траектории к седло-центру был получен Л.М. Лерманом [104]. Он доказал, что при выполнении некоторого условия общего положения на систему с петлей все малые ляпуновские седловые периодические траектории, существующие в окрестности седло-центра и заполняющие его двумерное центральное многообразие, имеют каждая по четыре трансверсальные гомоклинические траектории Пуанкаре и тем самым, в силу результатов С. Смейла и Л.П. Шильникова, система обладает сложной структурой и неинтегрируема. В дальнейшем, эти результаты были обобщены на системы с параметрами (Кольцова–Лерман), на многомерные гамильтоновы системы (Кольцова–Лерман), на обратимые гамильтоновы системы (Mielke-Holmes–O’Reiley, Grotta Ragazzo, Yagasaki и др.)

Напомним важное для дальнейшего изложения понятие обратимой системы. Пусть M – гладкое многообразие, на котором действует гладкий диффеоморфизм L , являющийся инволюцией, т.е. $L^2 = L \circ L = id_M$, где id_M – тождественное отображение на M . Векторное поле v на M называется обратимым (reversible), если выполнено тождество $DL(v(x)) = -v(L(x))$ для любой точки $x \in M$. Это тождество влечет сопряженность потока Φ^t с обратным потоком: $L \circ \Phi^t = \Phi^{-t} \circ L$. В теории обратимых систем важную роль играет множество $\text{Fix}(L)$ неподвижных точек инволюции. Ниже предполагается, что это множество является гладким подмногообразием в M , причем его размерность равна половине размерности M , т.е. мы предполагаем, что M – четномерно. Траектория γ обратимого поля называется симметричной, если она инвариантна относительно действия L . В частности, такая траектория обязана пересекать множество $\text{Fix}(L)$. Поэтому симметричное состояние равновесия лежит в $\text{Fix}(L)$ и его спектральные свойства аналогичны состояниям равновесия гамильтоновых систем, а траектория, которая пересекает $\text{Fix}(L)$ дважды, является периодической траекторией, период которой равен времени перехода от одной точки пересечения до другой. Спектральные свойства мультипликаторов симметричных периодических траекторий аналогичны свойствам периодических траекторий гамильтоновых систем.

Задачи об исследовании систем с гетероклиническими структурами возникают как при исследовании задач теории динамических систем для характеристики хаотического поведения, так и в прикладных задачах. Например, моделью распространения воздушных пузырьков в тонких трубках, проводящих сжимаемую жидкость [108] является некоторое интегро-дифференциальное уравнение, а уравнение для его бегущих волн приводится к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, численные эксперименты с которой показали наличие симметричного гетероклинического контура, состоящего из седло-центра, периодической траектории и пары гетероклинических траекторий. С контуром связано существование гомоклинических траекторий к седло-центру, соответствующих локализованным решениям типа солитонов для исходного уравнения. Другой задачей, где возникает вопрос о поведении траекторий в обратимой (негамильтоновой) системе является уравнение для стационарных решений для известного уравнения в частных производных, а именно – один из вариантов уравнения Свифта-Хоэнберга [84]. Некоторые варианты этого уравнения получены из вариационных принципов и их уравнения для стационарных решений приводятся к гамильтоновым системам [3, 10, 24]; однако существуют и негамильтоновы версии, одна из которых рассмотрена в диссертации, она приводится к обратимой системе в $\mathbb{R}^4$, не являющейся гамильтоновой. Все это говорит об актуальности рассматриваемых задач о структуре траекторий системы в окрестностях гетероклинических контуров.

Как известно, симплектические отображения получаются как отображения Пуанкаре на некоторых секущих в фиксированном уровне гамильтониана для

автономных гамильтоновых систем. Также они появляются при изучении неавтономных гамильтоновых систем, периодически зависящих от времени, при изучении отображения за период системы. Структура таких отображений в смысле поведения траекторий итераций такого отображения в общем случае весьма сложна. Впервые изучение таких сохраняющих площадь отображений проводилось Дж. Биркгофом, который получил для них большое число замечательных результатов. В начале 60-х годов прошлого столетия появились модели симплектических отображений с гиперболической структурой (аносовские диффеоморфизмы). Их изучение привело к большому прогрессу в теории динамических систем и, в частности, в теории гамильтоновых систем. Одним из примеров такого поведения был т.н. гиперболический автоморфизм Тома на двумерном торе, как пример (предположительно) структурно устойчивого диффеоморфизма со счетным плотным множеством периодических точек. Затем Д. В. Аносов ввел общий класс гиперболических систем и, в частности, гиперболических диффеоморфизмов [92] и доказал их структурную устойчивость. Позже, в работах М. И. Брина и Я. Б. Песина [98] были введены частично гиперболические системы, в которых было ослаблено условие гиперболичности, но сохранены свойства эргодичности, перемешивания, К-свойства и т.д..

Частично гиперболические симплектические автоморфизмы 6-мерного тора являются одной из классических простых моделей хаотической динамики, которые очень просто формулируются, но имеют сложное поведение траекторий, которое характеризуется наличием траекторий с нулевыми ляпуновскими показателями, так и с положительными/отрицательными показателями. Такие автоморфизмы порождаются целочисленными симплектическими линейными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^{2n}$ в частично гиперболическом случае, т.е. когда собственные значения матрицы преобразования лежат вне и на единичной окружности комплексной плоскости. Важной задачей было получить их топологическую классификацию.

В настоящее время получено много результатов о частично гиперболических диффеоморфизмах [12, 32, 37]. Что касается частично гиперболических автоморфизмов тора $\mathbb{T}^n$, то наиболее подробное их исследование было проведено в статье [37], где был исследован вопрос об их устойчивой эргодичности, поставленный в [38]. Несмотря на большое число работ по частично гиперболическим диффеоморфизмам, классификация таких симплектических автоморфизмов не была получена.

Целью диссертационной работы является изучение и характеристика сложного поведения динамической системы, основываясь на ее поведении в окрестности инвариантных подмножеств с простой динамикой, а именно – гетероклинических контуров различного типа. Поскольку основным классом исследуемых систем являются гамильтоновы и обратимые системы, то изучаются окрестности контуров различного типа, встречающихся в таких системах. Их выбор основывается на том, что они были обнаружены в конкретных системах, не были ранее

исследованы и приводят к математически нетривиальным задачам. Другим подходом к изучению сложной динамики является исследование модельных задач, являющихся простыми по постановке, но приводящие к сложному поведению траекторий. С этой целью изучаются частично гиперболические симплектические автоморфизмы 6-мерного тора, моделирующие поведение гамильтоновой системы с четырьмя степенями свободы на уровнях ее гамильтониана.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Изучение динамики вещественно-аналитической обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности ее симметричного контура, состоящего из симметричного седло-центра, симметричной седловой периодической траектории в том же уровне гамильтониана и пары несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией.
2. Изучение динамики гладкого четырехмерного обратимого векторного поля в окрестностях гетероклинических контуров двух типов. Контур первого типа состоит из двух несимметричных седло-фокусов, переставляемых инволюцией и двух симметричных невырожденных гетероклинических траекторий. Контур второго типа состоит из двух симметричных седло-фокусов и двух несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией, идущих от первого седло-фокуса ко второму и наоборот.
3. Описание динамики и получение классификации симплектических частично гиперболических автоморфизмов 6-мерного тора.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

1. Для обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного контура с предельным множеством из седло-центра и гиперболической периодической траектории доказано существование счетного семейства трансверсальных однообходных гомоклинических траекторий для седловой периодической траектории и связанной с ними гиперболической динамики, существование счетных семейств эллиптических периодических траекторий в окрестности контура, что влечет существование близких к ним инвариантных КАМ торов.
2. Для общего однопараметрического семейства обратимых гамильтоновых систем, у которого система при критическом значении параметра имеет указанный контур, доказано существование счетного множества значений параметра, при которых соответствующая система семейства имеет невырожденную гомоклиническую траекторию к седло-центру, а следовательно гиперболическую динамику в близких уровнях соответствующего гамильтониана.

3. Для 4-мерной обратимой системы с гетероклиническим контуром первого типа доказано существование однопараметрического семейства симметричных периодических траекторий, накапливающихся к контуру, существование счетных семейств 2-обходных контуров и конечного числа 3-обходных контуров рассматриваемого типа, что характеризует сложную динамику в окрестности такого контура.
4. Для общего однопараметрического семейства обратимых систем с гетероклиническим контуром первого типа доказано существование счетных семейств несимметричных гомоклинических траекторий для каждого седло-фокуса. Для седло-фокуса с отрицательной седловой величиной это позволяет доказать существование асимптотически устойчивых периодических траекторий вблизи гомоклинической, а для парного седло-фокуса с положительной седловой величиной – асимптотически неустойчивых периодических траекторий.
5. Для 4-мерной обратимой системы с гетероклиническим контуром второго типа доказано существование счетных семейств n -обходных гомоклинических траекторий к каждому симметричному седло-фокусу, что характеризует сложную динамику в окрестности контура.
6. Для общего однопараметрического семейства обратимых системы с контуром второго типа доказано существование счетного множества значений параметра, накапливающихся к критическому, при которых система имеет 2-обходный контур второго типа.
7. Дана топологическая классификации возможных типов поведения траекторий симплектических автоморфизмов на 6-мерном торе с одномерным неустойчивым слоением и построены примеры таких автоморфизмы во всех случаях, как транзитивных, так и разложимых.
8. Дана топологическая классификации возможных типов поведения траекторий симплектических автоморфизмов на 6-мерном торе с двумерным неустойчивым слоением и построены примеры таких автоморфизмы во всех случаях, как транзитивных, так и разложимых.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории гладких динамических систем (векторных полей и диффеоморфизмов на гладких многообразиях) и теории бифуркаций, методы теории нормальной формы, методы симплектической геометрии и топологии.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты вносят вклад в развитие теории многомерных динамических систем, а методы исследования могут быть применены для характеристики хаотического поведения систем в теории обратимых гамильтоновых систем при изучении структуры траекторий и ее бифуркаций при вариации уровня гамильтониана и параметров в окрестностях гетероклинических контуров различного типа, при изучении пространственной структуры стационарных и бегущих локализованных волн для уравнений с частными

производными и интегро-дифференциальных уравнений, в задачах неголономной механики, которые могут быть представлены в виде обратимых систем дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теоремы о существовании счетного семейства трансверсальных гомоклинических траекторий для седловой периодической траектории, счетных семейств эллиптических периодических траекторий в окрестности рассматриваемого гетероклинического контура обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.
2. Для общего однопараметрического семейства обратимых гамильтоновых систем, имеющего при критическом значении параметра указанный гетероклинический контур, доказано существование счетного множества значений параметра, при которых соответствующая система семейства имеет гомоклиническую траекторию седло-центра.
3. Для гетероклинических контуров первого типа в обратимых системах доказательства теорем о существовании однопараметрического семейства симметричных периодических траекторий, накапливающихся к контуру, о существовании счетных семейств 2-обходных контуров и конечного числа 3-обходных гетероклинических контуров первого типа и теоремы о существовании счетных семейств n -обходных гомоклинических траекторий к каждому симметричному седло-фокусу для контуров второго типа.
4. Для контуров первого типа в общем однопараметрическом семействе обратимых систем доказательства теоремы о существовании счетных семейств несимметричных гомоклинических траекторий для каждого седло-фокуса, для контуров второго типа – теоремы о существовании счетного множества значений параметра, накапливающихся к критическому, при которых соответствующая система имеет 2-обходный контур второго типа.
5. Теоремы о классификации частично гиперболических симплектических автоморфизмов 6-мерного тора как с одномерным неустойчивым слоением, так и с двумерным неустойчивым слоением.

Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались

на научных семинарах ИИТММ ННГУ «Нелинейная динамика: теория и приложения» им. Л.П. Шильникова (руководитель – С.В. Гонченко)

научном семинаре Лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ, Нижний Новгород (руководители В.З. Гринес, О.В. Починка).

Кроме этого результаты докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях:

Международная конференция “ Topological methods in dynamics and related topics” (Н. Новгород, 2019 г.);

Международная конференция “Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ”. (МФТИ, г. Долгопрудный 2019);

Рабочая группа “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop”, (Н. Новгород, 2019);

Конференция “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, (Н. Новгород, 2020 г.);

8th International Conference on Nonlinear Science and Complexity 2020-21 (Marseille, France, 2021 г.);

Международная конференция “Topological Methods in Dynamics and Related Topics – IV” (Н. Новгород, 2021 г.);

Международная конференция “Shilnikov WorkShop” (Н. Новгород, 2021, 2022, 2023);

Вторая конференция Математических центров России (г. Москва, 2022 г.).

Результаты диссертации явились составной частью работ, выполнявшихся при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSWR-2020-0036), грантов РФФИ и РНФ.

Личный вклад. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно с Л.М. Лерманом, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, Л.М. Лерману принадлежат постановки задач и участие в обсуждении результатов. В работах, выполненных совместно с Л.М. Лерманом и Н.Е. Кулагиным, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, Л.М. Лерману принадлежат постановки задач, Н.Е. Кулагину принадлежат результаты численных экспериментов.

Публикации по теме работы. Всего по теме диссертации автором опубликовано 14 работ, из них 6 работ в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 124 страницы. Список литературы содержит 117 наименований.

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Lerman L. M., Trifonov K. N. Geometry of symplectic partially hyperbolic automorphisms on 4-torus //Dynamical Systems. – 2020. – V. 35, № 4. – P. 609-624.

2. Лерман Л. М., Трифонов К. Н. Топология симплектических частично гиперболических автоморфизмов 4-мерного тора //Математические заметки. – 2020. – Т. 108, № 3. – С. 474-476.

3. Lerman L. M., Trifonov K. N. Saddle-center and periodic orbit: Dynamics near symmetric heteroclinic connection //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – V. 31, № 2.

4. Трифонов К. Н. О частично гиперболических симплектических автоморфизмах шестимерного тора // Теоретическая и математическая физика. – 2022. – Т. 212, № 2. – С. 287-302.

5. Lerman L. M., Trifonov K. N. Symplectic partially hyperbolic automorphisms of 6-torus // Journal of Geometry and Physics. – 2024. – V. 195. – P. 105038.

6. Kulagin N. E., Lerman L. M., Trifonov K. N. Twin heteroclinic connections of reversible systems // Regular and Chaotic Dynamics. – 2024. – V. 29, № 1. – P. 40-64.

Материалы конференций и прочие издания

1. Lerman L.M., Trifonov K.N. Complicated dynamics in a reversible Hamiltonian system // Abstracts of the Intern. Conf. “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop”, Nizhny Novgorod, 2019, Book of Abstracts.– P. 128-129.

2. Trifonov K.N. Complicated dynamics in a reversible Hamiltonian system // 8th International Conference on Nonlinear Science and Complexity 2020-21, Marseille, 2021, Book of Abstracts.– P. 29.

3. Lerman L.M., Trifonov K.N. Partially Hyperbolic Symplectic Automorphisms of 6-Torus // International Conference “Topological Methods in Dynamics and Related Topics – IV”, Nizhny Novgorod, 2021, Book of Abstracts.– P. 35-36.

4. Лерман Л.М., Трифонов К.Н. Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, Труды XX международной конференции. Нижний Новгород, 2020.– С. 240-241.

5. Trifonov K.N. Partially Hyperbolic Symplectic Automorphisms of 4-Torus // International Conference “Shilnikov WorkShop 2021”, Nizhny Novgorod, Book of Abstracts.– P. 29.

6. Лерман Л. М., Трифонов К. Н. Симплектические частично-гиперболические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$: динамика и классификация // Вторая конференция Математических центров России, г. Москва, 2022, Аннотации докладов.– С. 51.

7. Trifonov K.N. Symplectic Partially Hyperbolic Automorphisms of 6-Torus // International Conference “Shilnikov WorkShop 2022”, Nizhny Novgorod, Book of Abstracts.– P. 35.

8. Лерман Л. М., Трифонов К. Н. Симплектические частично-гиперболические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$ // International Conference “Shilnikov WorkShop 2023”, Nizhny Novgorod, Book of Abstracts.– P. 21.

Глава 1

Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура

1.1 Основные понятия и определения

Пусть (M, Ω) – вещественно-аналитическое четырехмерное симплектическое многообразие, Ω – симплектическая 2-форма, а H – вещественно-аналитическая функция (гамильтониан). Функция H задает гамильтоново векторное поле X_H на M . В дальнейшем предполагается, что векторное поле X_H имеет особую точку p типа седло-центр. Без ограничения общности, будем считать, что седло-центр лежит в нулевом уровне гамильтониана, т. е. $H(p) = 0$. Также будем предполагать, что в том же трехмерном уровне гамильтониана $H = 0$ лежит седловая периодическая траектория γ . Ниже используется обозначение $V_c = \{x \in M | H(x) = c\}$.

Напомним, что особая точка p гамильтонового векторного поля X_H на 4-мерном симплектическом многообразии M называется седло-центром [104], если оператор линеаризации векторного поля в точке p имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и пару вещественных собственных значений $\pm\lambda \neq 0$. В окрестности такой точки существует единственное локальное инвариантное 2-мерное симплектическое многообразие W_p^c , заполненное замкнутыми траекториями l_c (ляпуновское семейство периодических траекторий). В вещественно-аналитическом случае M, H многообразие W_p^c является вещественно-аналитическим. В соответствующем уровне гамильтониана ляпуновская периодическая траектория является седловой вблизи точки p и каждая из них расположена на своем уровне гамильтониана $V_h = \{x \in M | H(x) = h\}$.

Также в окрестности точки p система имеет локальные 3-мерные центрально-устойчивое многообразие W^{cs} и центрально-неустойчивое многообразие W^{cu} , проходящие через точку p . Эти подмногообразия содержат траектории, асимптотические к траекториям ляпуновского семейства при $t \rightarrow \infty$ (для W^{cs}) и при $t \rightarrow -\infty$ (для W^{cu}), причем $W^c = W^{cs} \cap W^{cu}$. Многообразие W^{cs} (соответственно, W^{cu}) само расслоено уровнями V_h на локальные устойчивые (неустойчивые) многообразия периодических траекторий l_c , эти многообразия диффеоморфны цилиндрам $I \times S^1$. Кроме того W^{cs} (соответственно, W^{cu}), являясь заполненным цилиндром, содержит гладкую кривую $W^s(W^u)$ – локальное устойчивое (неустойчивое) многообразие точки p , состоящее из точки p и двух полутраекторий стремящихся к p при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Всюду в этой главе предполагается, что в уровне гамильтониана V_0 , содержащем седло-центр, лежит также седловая периодическая траектория γ . В M

периодическая траектория γ принадлежит однопараметрическому семейству таких периодических траекторий $\gamma_c \subset V_c$, образующих аналитический 2-мерный симплектический цилиндр. Напомним, что в V_c периодическая траектория γ_c имеет два гладких (соответственно – аналитических, если система вещественно-аналитическая) двумерных лагранжевых многообразия $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$, являющихся ее устойчивым и неустойчивым многообразиями, соответственно. Они содержат каждую саму γ и топологически являются оба либо цилиндрами (если периодическая траектория имеет положительные мультипликаторы), либо листами Мебиуса (если периодическая траектория имеет отрицательные мультипликаторы).

Всюду в этой главе предполагается, что рассматриваемое векторное поле $v = X_H$ является также обратимым. Обратимость означает, как известно [21], что на многообразии M , где задано векторное поле v , гладко действует инволюция $L : M \rightarrow M$, $L^2 = id_M$, и векторное поле v обладает свойством $DLv = -v \circ L$. Основное свойство обратимого векторного поля состоит в следующем: если $x(t)$ является решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, то $x_1(t) = Lx(-t)$ также является его решением. Траектория γ обратимого векторного поля v называется *симметричной*, если она является инвариантным множеством относительно действия инволюции L , т.е. для любой точки $x \in \gamma$ выполнено $Lx \in \gamma$. В частности, состояние равновесия p , $v(p) = 0$, симметрично, если $L(p) = p$, т.е. точка p принадлежит множеству неподвижных точек инволюции $Fix(L)$. Справедливо следующее утверждение [21].

Предложение 1. Траектория обратимого векторного поля симметрична, тогда и только тогда, когда она пересекает $Fix(L)$. Симметричная периодическая траектория пересекает множество $Fix(L)$ ровно в двух точках. Верно и обратное: если траектория обратимого векторного поля пересекает $Fix(L)$ в двух разных точках x_1, x_2 , то эта траектория является симметричной, периодической и ее период равен удвоенному времени перехода из x_1 в x_2 .

Для гамильтоновой системы свойство обратимости требует уточнения, так как инволюция действует на симплектической форме

$$[L^*\Omega](\xi, \eta) = \Omega(DL(\xi), DL(\eta)).$$

В дальнейшем предполагается, что аналитическое инволютивное отображение L является *антиканоническим* отображением, т.е. $L^*(\Omega) = \Omega \circ DL = -\Omega$. Говорят, что гамильтонова система X_H с вещественно-аналитическим гамильтонианом H обратима относительно инволюции L , если $H \circ L = H$. В этом случае справедливы следующие тождества:

$$DLX_H = -X_H \circ L, \text{ и } \Phi_t \circ L = L \circ \Phi_{-t}.$$

Также предполагается, что $Fix(L)$ является двумерным аналитическим многообразием в M (не обязательно связным).

Итак, рассматривается аналитическая обратимая гамильтонова система X_H на четырехмерном вещественно-аналитическом симплектическом многообразии (M, Ω) , на котором антиканонически действует аналитическая инволюция L . Ниже считаем, что множество $Fix(L)$ является гладким двумерным подмногообразием в M . Также предполагается, что X_H имеет симметричное состояние равновесия p , $H(p) = 0$, типа седло-центр, седловую периодическую траекторию γ , $H(\gamma) = 0$, и две гетероклинические траектории: Γ_1 , идущую при возрастании времени от γ к p , и $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$, идущую при возрастании времени от p к γ . Изучается поведения траекторий в окрестности полученного гетероклинического контура, состоящего из следующих траекторий $p, \Gamma_1, \gamma, \Gamma_2$. Отметим, что сама задача, по постановке, является бифуркационной, т.к. структура траекторий на инвариантном уровне гамильтониана меняется при изменении внутреннего параметра системы – значения гамильтониана с вблизи его нулевого значения. Например, на уровнях, отличных от $V_0 = \{H = 0\}$, состояние равновесия отсутствует, т.е. контур разрушается и происходят бифуркации. В частности, нас будут интересовать бифуркации рождения эллиптических периодических траекторий.

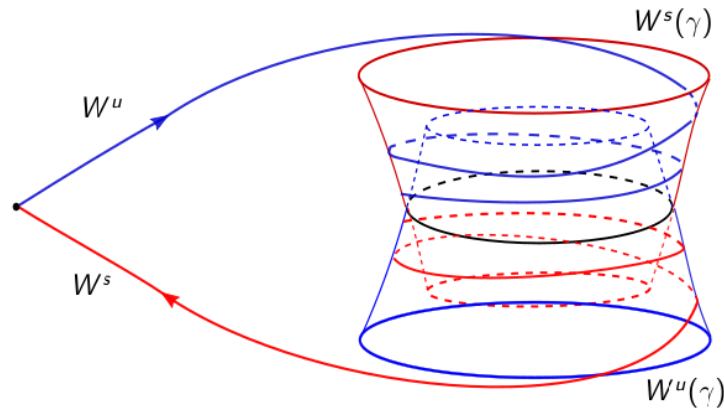


Рис. 1.1. Гетероклинический контур

1.2 Мозеровские координаты

Для изучения системы нужно построить удобную систему координат в окрестности состояния равновесия типа седло-центр p . Результаты, которые используются ниже, в аналитическом случае получены в работе Мозера [71, 72], в которых говорится, что около особой точки типа седло-центр вещественно-аналитическое гамильтоново векторное поле интегрируемо, конечно-гладкий вариант для седловой неподвижной точки симплектического диффеоморфизма получен в работе [26].

Теорема 1. Пусть X_H аналитическое гамильтоново векторное поле и p его состояние равновесия типа седло-центр. Тогда в некоторой окрестности U точки p существуют аналитические симплектические координаты (x_1, y_1, x_2, y_2) , $\Omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$, и вещественно-аналитическая функция $h(\xi, \eta)$, для которых гамильтониан H имеет вид

$$h(\xi, \eta) = \lambda\xi + \omega\eta + R(\xi, \eta), \quad R(\xi, \eta) = O(\xi^2 + \eta^2),$$

$$\xi = x_1 y_1; \quad \eta = \frac{x_2^2 + y_2^2}{2}.$$

Чтобы получить симплектическую замену координат в этой теореме, кроме результатов из [71], нужно использовать результаты Рюссмана [78].

Замечание 1. Заменой времени ($t \rightarrow \pm t/n$) и, при необходимости, каноническим преобразованием ($y_1 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow -y_1$), можно сделать $\lambda = -1$, а $\omega > 0$ (новое ω представляет с точностью до знака отношение $|\omega/\lambda|$). Всюду ниже будем использовать эту нормализацию.

Обозначим через $\Phi^t : m \rightarrow \Phi^t(m)$ поток векторного поля X_H . В координатах теоремы 1 система, соответствующая векторному полю X_H , запишется

$$\dot{x}_1 = -h_\xi x_1, \quad \dot{y}_1 = h_\xi y_1, \quad \dot{x}_2 = -h_\eta y_2, \quad \dot{y}_2 = h_\eta x_2 \quad (1.1)$$

и Φ^t как

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[-t \cdot h_\xi^0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp[t \cdot h_\xi^0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t \cdot h_\eta^0) & -\sin(t \cdot h_\eta^0) \\ 0 & 0 & \sin(t \cdot h_\eta^0) & \cos(t \cdot h_\eta^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ x_2^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где

$$h_\xi^0 = h_\xi(\xi_0, \eta_0), \quad h_\eta^0 = h_\eta(\xi_0, \eta_0), \quad \xi_0 = x_1^0 y_1^0, \quad \eta_0 = ((x_2^0)^2 + (y_2^0)^2)/2.$$

Поскольку рассматриваемая гамильтонова система обратима, важно выяснить к какому наиболее простому виду можно привести одной заменой инволюцию и гамильтониан в окрестности симметричного седло-центра. Это означает, что мозеровские координаты нужно согласовать со свойством обратимости в системе координат из Теоремы 1. Это было сделано в работе [76]. Напомним необходимые результаты.

Лемма 1. Пусть σ – антиканоническое отображение на $(\mathbb{R}^4, \Omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)$, которое сохраняет начало координат и для него выполнено тождество

$h \circ \sigma = h$. Тогда σ имеет следующий вид

$$v : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \pm e^{\partial_\xi g} & 0 & 0 \\ \pm e^{-\partial_\xi g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\partial_\eta g) & -\sin(\partial_\eta g) \\ 0 & 0 & \sin(\partial_\eta g) & \cos(\partial_\eta g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

где в первых двух строках этой матрицы либо оба знака $+$, либо оба знака $-$, и g – вещественная функция от ξ и η .

Теорема 2. Предположим, что векторное поле X_H удовлетворяет условиям теоремы 1, обратимо относительно антиканонической инволюции L и имеет симметричное состояние равновесия p типа седло-центр. Тогда в некоторой окрестности U точки p существует такая аналитическая система координат с теми же свойствами, как в теореме 1, в которой L является одним из следующих линейных преобразований:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

1.3 Локальная структура системы около седло-центра

Используя мозеровские координаты, опишем строение уровней гамильтониана $V_c = \{H = c\}$ и поведение траекторий системы около состояния равновесия на каждом уровне. Здесь мы следуем работе [105]. Эта информация будет необходима для дальнейшего исследования. В мозеровских координатах система вблизи точки p имеет вид (1.1). Система локально интегрируема и имеет две инвариантные симплектические плоскости (фактически – диска): $x_1 = y_1 = 0$ и $x_2 = y_2 = 0$. Квадратичные функции $\xi = x_1 y_1$, $\eta = (x_2^2 + y_2^2)/2$ являются локальными интегралами системы. Рассмотрим плоскость (ξ, η) в окрестности начала координат $(0, 0)$. Уровень V_c гамильтониана соответствует аналитической кривой $\xi = -c + \omega\eta + O(\eta^2 + c^2) = a_c(\eta)$, $0 \leq \eta \leq \eta_*$. Для достаточно малого значения c эти кривые образуют аналитическое слоение в окрестности начала координат $(0, 0)$. В самом деле, при $\eta \geq 0$, нужно рассмотреть прямоугольник $|\xi| \leq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_*$ в плоскости (ξ, η) .

Рассмотрим сначала уровень V_0 , которому соответствует кривая $\xi = \omega\eta + O(\eta) = a(\eta)$ на плоскости (ξ, η) , $0 \leq \eta \leq \eta_*$. Рассмотрим окрестность этой кривой $|\xi - a(\eta)| \leq \rho$ для достаточно малого ρ . Для получения окрестности начала координат в $\mathbb{R}^4$ с координатами (x_1, x_2, y_1, y_2) выберем еще две секущие $|x_1| = d$, $|y_1| = d$. На многообразии M окрестность U точки p в координатах (x_1, y_1, x_2, y_2) можно представить как прямое произведение двух достаточно малых дисков $(x_1, y_1, 0, 0)$ и $(0, 0, x_2, y_2)$.

Локальную структуру уровня V_0 будем изучать, расщепляя его на инвариантные уровни интеграла η . При $\eta = 0$ (начало координат на диске $(0, 0, x_2, y_2)$) получаем $\xi = a(0) = 0$, т.е. "крест" на диске $(x_1, y_1, 0, 0)$ (объединение двух прямых $y_1 = 0$ и $x_1 = 0$). В U этот крест является объединением локального устойчивого и неустойчивого многообразий седло-центра p (кривых – в данном случае). При $\eta > 0$ получаем положительное значение $\xi = a(\eta)$, которому на диске $(x_1, y_1, 0, 0)$ соответствует два куска гиперболы $x_1 y_1 = a(\eta)$, лежащие в первом и третьем квадранте плоскости $(x_1, y_1, 0, 0)$, соответственно. В U каждый кусок гиперболы умножается на окружность $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$ на плоскости $(0, 0, x_2, y_2)$. Меняя η от нуля до η_* , получаем два заполненных цилиндра в U , которые имеют единственную общую точку – начало координат, т.е. седло-центр. Каждый заполненный цилиндр содержит угол, составленный из двух склеенных полуотрезков креста ($x_1 \geq 0, y_1 = 0$ и $y_1 \geq 0, x_1 = 0$ для одного цилиндра и $x_1 \leq 0, y_1 = 0$ и $y_1 \leq 0, x_1 = 0$ для другого цилиндра). Заметим, что два отрезка креста ($x_1 \geq 0, y_1 = 0$, и $y_1 \geq 0, x_1 = 0$) являются топологическим пределом при $\eta \rightarrow +0$ цилиндров $x_1 y_1 = v(\eta)$, $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$, лежащих в одном заполненном цилиндре, а два других отрезка креста ($x_1 \leq 0, y_1 = 0$, и $y_1 \leq 0, x_1 = 0$) являются топологическим пределом при $\eta \rightarrow +0$ цилиндров $x_1 y_1 = v(\eta)$, $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$, лежащих в другом заполненном цилиндре. Таким образом, в каждом заполненном цилиндре лежит одна половина устойчивой кривой (устойчивая сепаратриса) и одна половина неустойчивой кривой (неустойчивая сепаратриса) седло-центра. При фиксированном $\eta > 0$ каждый двумерный цилиндр является инвариантным множеством и траектории на нем выходят из одной части двух секущих $|y_1| = d$ в другую часть двух секущих $|x_1| = d$ (см. рис. 1.2).

Замечание 2. Стоит отметить следующее свойство, которое будет использовано ниже. В мозеровских координатах на уровне $H = 0$ секущая для траекторий в заполненном цилиндре, которая проектируется в первый квадрант на плоскости $x_2 = y_2 = 0$, равна $y_1 = d > 0$ (для входящих траекторий) и $x_1 = d$ (для выходящих траекторий), а для второго заполненного цилиндра, который проектируется в третий квадрант, равна $y_1 = -d$ (для входящих траекторий) и $x_1 = -d$ (для выходящих траекторий). Отсюда следует, что для случая первого типа симметрия инволюции переставляет траектории из множества $y_1 > 0$, $x_1 = x_2 = y_2 = 0$ с траекториями из множества $x_1 > 0$, $y_1 = x_2 = y_2 = 0$ и траектории из множества $y_1 < 0$, $x_1 = x_2 = y_2 = 0$ с траекториями из множества

$x_1 < 0$, $y_1 = x_2 = y_2 = 0$. Следовательно, симметрия переставляет секущие из одного и того же заполненного цилиндра. Для случая второго типа симметрия инволюции переставляет траектории из множества $y_1 > 0$, $x_1 = x_2 = y_2 = 0$ с траекториями из множества $x_1 < 0$, $y_1 = x_2 = y_2 = 0$ и траектории из множества $y_1 < 0$, $x_1 = x_2 = y_2 = 0$ с траекториями из множества $x_1 > 0$, $y_1 = x_2 = y_2 = 0$. Следовательно, симметрия переставляет секущие из разных заполненных цилиндров. Это будет использовано для классификации гетероклинических контуров.

Уровень V_c при $c < 0$ на плоскости (ξ, η) соответствует кривой $\xi = -c + \omega\eta + O(\eta^2 + c^2) = a_c(\eta) > 0$ при всех $0 \leq \eta \leq \eta_*$. Следовательно, уровень V_c при $c < 0$ состоит из несвязного объединения двух заполненных цилиндров, их проекции на плоскость (x_1, y_1) есть два криволинейных четырехугольника в первом и третьем квадрантах, ограниченных отрезками $|x_1| = d$, $|y_1| = d$, и кусками гипербол $x_1 y_1 = a_c(0) = -c > 0$ и $x_1 y_1 = a_c(\eta_*)$. Каждый двумерный цилиндр $\eta = \eta_0$ расслаивается траекториями потока, идущими из одной секущей $|y_1| = d$ в другую $|x_1| = d$ (см. рис. 1.3).

При $c > 0$ ситуация более сложная, так как кривая $\xi = a_c(\eta)$ на плоскости (ξ, η) при $0 \leq \eta \leq \eta_*$ соответствует как положительным значениям ξ , так и отрицательным значениям (для $|c|$ достаточно малых). Обозначим через η_c единственный положительный корень уравнения $a_c(\eta) = 0$. Тогда при $0 \leq \eta \leq \eta_c$ куски гипербол $x_1 y_1 = a_c(\eta) < 0$ лежат во втором и четвертом квадрантах плоскости $(x_1, y_1, 0, 0)$, а при $\eta > \eta_c$ – в первом и третьем квадрантах этой плоскости. Топологический тип множества уровня V_c является связной суммой двух заполненных цилиндров (т.е. шаров). Чтобы увидеть это, рассмотрим проекцию множества V_c на плоскость $(x_1, y_1, 0, 0)$, лежащую внутри квадрата $|x_1| \leq d$, $|y_1| \leq d$. Разрежем это множество на две половины диагональю $y_1 = -x_1$. Над этой диагональю в V_c лежит двумерная сфера S . Действительно, крайним точкам диагонали во втором и четвертом квадрантах соответствуют в V_c две точки $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ и $(\sqrt{c}, -\sqrt{c})$ (для них $\eta = 0$), но для любой точки диагонали между крайними в V_c лежит окружность, т.к. для этих точек $\eta > 0$. В частности, над средней точкой отрезка $(0, 0)$ лежит окружность $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta_c$, это периодическая ляпуновская траектория. Отрезки $x_1 = 0$ и, соответственно, $y_1 = 0$ плоскости, в V_c соответствуют устойчивому и неустойчивому многообразию периодических траекторий.

Подмножество $V_c^+ \subset V_c$, лежащее над полуплоскостью $x_1 + y_1 > 0$ состоит из трех частей. Одна из них соответствует значениям $\eta_c \leq \eta \leq \eta_*$. При строгом неравенстве получается множество, диффеоморфное прямому произведению кольца (на плоскости (x_2, y_2)) на отрезок. При $\eta \rightarrow \eta_c + 0$ это множество имеет в качестве топологического предела множество, являющееся прямым произведением угла в плоскости (x_1, y_1) : $0 \leq x_1 \leq d$, $y_1 = 0$, и $0 \leq y_1 \leq d$, $x_1 = 0$ на окружность $x_2^2 + y_2^2 = \eta_c$. Две другие части V_c^+ представляют собой два

заполненных цилиндра. Они получаются, если рассмотреть подмножества, проектирующиеся во второй и четвертый квадранты плоскости (x_1, y_1) . Чтобы это увидеть, зафиксируем некоторое η , $0 \leq \eta < \eta_c$. Подмножество из V_c^+ , лежащее над полуплоскостью $x_1 + y_1 > 0$ при $\xi < 0$, состоит из двух заполненных цилиндров, каждый из них расслоен на двумерные цилиндры, лежащие над кусками гиперболы $\xi = a_c(\eta)$, соответственно, во втором и четвертом квадранте. Одна из граничных окружностей такого цилиндра лежит над точкой на диагонали (для каждого цилиндра – своя), вторая граничная окружность – над точкой отрезка $x = d$ или $y = d$. Заполненный цилиндр, проектирующийся во второй квадрант, склеен боковой границей с множеством, лежащим над первым квадрантом вдоль цилиндра $x_1 = 0, y_1 > 0, x_2^2 + y_2^2 = 2\eta_c$, а второй заполненный цилиндр, проектирующийся в четвертый квадрант, склеен его боковой границей с множеством над первым квадрантом вдоль цилиндра $y_1 = 0, x_1 > 0, x_2^2 + y_2^2 = 2\eta_c$. Таким образом, получается множество, гомеоморфное заполненному цилиндру, из которого вырезан внутренний шар с границей S .

Аналогичным образом получается вторая часть V_c^- множества V_c , лежащая над полуплоскостью $x_1 + y_1 \leq 0$. Множества V_c^- и V_c^+ склеены вдоль сферы S , склейка соответствует одинаковым точкам диагонали $y_1 = -x_1$. Наглядно это можно себе представить в таком виде, что в каждой половине (заполненном цилиндре) вырезали по внутреннему шару и по границе этих двух шаров полученные половины склеили согласно ориентации. Это и есть частный случай связной суммы двух многообразий. Топологически полученное множество гомеоморфно сферическому слою $S^2 \times I$. Поскольку каждый уровень расслоен на инвариантные цилиндры $\eta = const$, получаем полную картину локального поведения траекторий вблизи седло-центра (см. рис. 1.2-1.4).

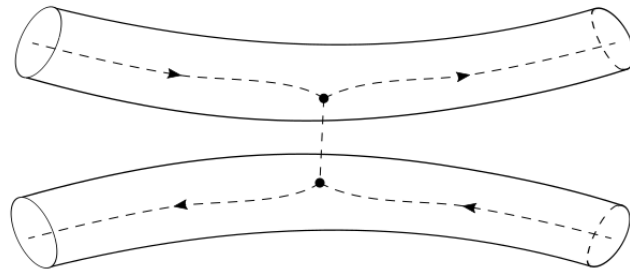


Рис. 1.2. $c = 0$

1.4 Отображение Пуанкаре в окрестности γ

Для описания поведения траекторий в окрестности периодической траектории γ на уровне V_0 , рассмотрим двумерное симплектическое аналитическое отображение Пуанкаре, порожденное потоком X_H на некоторой аналитической

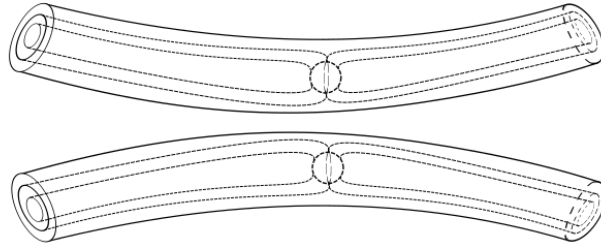


Рис. 1.3. $c < 0$

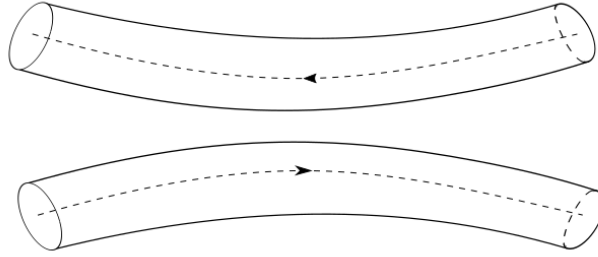


Рис. 1.4. $c > 0$

секущей Σ к γ . Для рассматриваемого случая, векторное поле обратимо, поэтому секущую можно выбрать так, что обратимость сохранится и для отображения Пуанкаре.

Симметричная периодическая траектория пересекает многообразие $Fix(L)$ в двух точках m_1, m_2 . Возьмем одну из них, $m = m_1$, и рассмотрим трехмерную аналитическую секущую N для γ содержащую m . N можно выбрать так, чтобы m принадлежало N вместе с некоторым достаточно малым аналитическим диском из $Fix(L)$ и секущая N являлась инвариантной относительно действия инволюции L . В дальнейшем предполагается такой выбор секущей.

В достаточно малой окрестности точки m уровни V_c образуют аналитическое расслоение на трехмерные многообразия, так как $dH_m \neq 0$. Уровень V_0 содержит кривую γ , но N трансверсально этой кривой, поэтому V_0 и N пересекаются друг с другом трансверсально в точке m , следовательно, они пересекаются в M вдоль аналитического двумерного диска $\Sigma \subset N$. Σ секущая к γ в уровне V_0 и мы получаем аналитическое отображение Пуанкаре $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ с неподвижной седловой точкой m .

Для изучения поведения траекторий системы в окрестности γ воспользуемся теоремой Мозера [72] о нормальной форме двумерного аналитического симплектического диффеоморфизма в окрестности седловой неподвижной точки. Так как седловая периодическая траектория γ ориентируема, согласно предположению, ее мультипликаторы ν, ν^{-1} положительны.

Теорема 3 (Мозер). В окрестности седловой неподвижной точки вещественно-

аналитического симплектического отображения S существуют симплектические аналитические координаты (u, v) и аналитическая функция $f(\zeta)$, $\zeta = uv$, $f(0) = \nu$, такая, что S имеет следующий вид

$$\bar{u} = u/f(\zeta), \bar{v} = vf(\zeta), \text{ где } f(\zeta) = \nu + O(\zeta), \quad 0 < \nu < 1. \quad (1.3)$$

В рассматриваемом нами случае отображение S также является обратимым относительно ограничения инволюции на секущую Σ и инволюция переставляет устойчивое и неустойчивое многообразия (в данном случае кривые) неподвижной точки m . Так как $X_H(m) \neq 0$, то пересечение $Fix(L)$ и V_0 трансверсально в точке m и является аналитической кривой $l \subset \Sigma$, являющейся линией симметрии содержащей m . Нетрудно доказать, следуя работе [100], что симплектические координаты (u, v) в теореме Мозера можно выбрать так, чтобы на Σ действие ограничения инволюции действовало следующим образом $(u, v) \rightarrow (v, u)$. Тогда локально около точки m множество неподвижных точек этой инволюции совпадает с диагональю $u = v$. В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

Траектория Γ_1 несимметрична и стремится к γ при $t \rightarrow -\infty$, следовательно, пересекает Σ в счетном множестве точек, стремящихся к m , но не лежащих на l . Эти точки принадлежат аналитической кривой w_u , являющейся следом на диске Σ многообразия $W^u(\gamma)$. Аналогично, траектория Γ_2 пересекает Σ в счетном множестве точек, стремящихся к m при положительных итерациях S , причем точки не лежат на l . Эти точки принадлежат аналитической кривой w_s , являющейся следом многообразия $W^s(\gamma)$ на Σ . В мозеровских координатах локально-устойчивая кривая совпадает с осью v (она задается как $u = 0$), а локально-неустойчивая с осью u ($v = 0$). Поэтому точка p_s – след траектории Γ_2 – имеет координаты $(0, v_+)$, а точка $p_u = L(p_s)$ – след траектории Γ_1 – координаты $(u_-, 0)$. Для определенности будем считать, что $v_+ > 0$. Тогда, ввиду обратимости и действия инволюции, имеем $u_- = v_+$.

Выберем окрестности Π^s, Π^u точек p_s, p_u , определяемые неравенствами $\Pi^s : |v - v_+| < \varepsilon, |u| < \delta$, и $\Pi^u : |v| < \delta, |u - u_-| < \varepsilon$, величины δ, ε достаточно малы. Множество точек из Π^s , которые отображаются в окрестность Π^u какой-либо итерацией отображения S , как известно из [82, 115], состоит из счетного множества полос в Π^s , стремящихся к устойчивой кривой $u = 0$. Благодаря удобной нормальной форме, эти полосы легко находятся. Справедливо следующее утверждение

Лемма 2. Уравнения $u = f^k(\zeta)(u_- \pm \varepsilon)$ определяют функции $u = s_k^\pm(v)$, областью определения которых является $|v - v_+| < \varepsilon$. Для них выполняются неравенства $s_k^+(v) > s_k^-(v) > s_{k+1}^+(v)$, и $s_k^+(v)$ равномерно стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Боковые границы полос σ_k^s являются отрезками $|v - v_+| = \pm \varepsilon$. Их верхней границей служит кривая $s_k^+(v)$, определяемая решением уравнения

$u_k = u_- + \varepsilon$, а нижней границей является кривая, являющаяся решением уравнения $u_k = u_- - \varepsilon$. Для доказательства леммы возьмем произвольное v , $|v - v_+| \leq \varepsilon$ и найдем соответствующие значения $u = s_k^+(v)$ и $u = s_k^-(v)$ из уравнений:

$$u = f^k(\zeta)(u_- + \varepsilon), \quad u = f^k(\zeta)(u_- - \varepsilon).$$

Рассмотрим, например, первое уравнение. Поскольку значение ζ сохраняется вдоль траекторий S , то умножая обе части первого уравнения на v получаем $g_k(\zeta) = \zeta/f^k(\zeta) = v(u_- + \varepsilon)$. При $k \geq k_0 > 0$ эта последовательность комплексных функций имеет каждая обратную и все они определены на одном и том же диске $|\zeta| \leq \sigma$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Это следует из теоремы об обратной комплексной функции, поскольку $g_k(0) = 0$, $g'_k(0) = \nu^{-k}$. Таким образом, получаем $s_k^+(v) = g^{-1}(v(u_- + \varepsilon))/v$ и $s_k^+(v) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по v . $\square$

Функции $s_k^\pm(v)$ являются верхней и нижней границей полос σ_k^s . Отсюда следует существование счетного множества таких полос для всех

$$k > k_0 = E \left\{ \frac{\ln((\varepsilon + u_-)/\delta)}{\ln(\nu^{-1})} \right\}.$$

Здесь предполагается, что $\varepsilon + u_- > \delta$ (это первое ограничение на величины ε, δ , определяющие размеры окрестностей следов гетероклинических точек).

Ограничение инволюции L на Σ действует как $L : (u, v) \rightarrow (v, u)$, откуда получаем, что $u_- = v_+ = r$. Таким образом, получаем такое же условие на k_0 для полос σ_k^u :

$$k > k_0 = E \left\{ \frac{\ln((\varepsilon + r)/\delta)}{\ln(\nu^{-1})} \right\}.$$

Еще одно ограничение на эти величины получается из требования, чтобы окрестность Π^s не пересекалась со своим образом $S(\Pi^s)$, а окрестность Π^u - со своим прообразом $S^{-1}(\Pi^u)$, и $\Pi^s \cap \Pi^u = \emptyset$. Эти условия приводят к следующим неравенствам:

$$\delta < r \frac{1 - \nu}{1 + \nu}, \quad \delta < r - \varepsilon.$$

Теперь можно утверждать, в силу данной конструкции, что все траектории отображения S , которые проходят через точки окрестности Π^s и достигают окрестности Π^u при положительных итерациях отображения S , должны проходить через построенные полосы $\sigma_k^s, k \geq k_0$. Эти полосы имеют своим топологическим пределом отрезок $u = 0$ в Π^s . В последнем случае они принадлежат устойчивому многообразию и при положительных итерациях отображения S^n стремятся к неподвижной точке m при $n \rightarrow \infty$.

В силу обратимости S и тех же самых соображений получаем, что образы полос σ_k^s в Π^u , т.е. полосы σ_k^u , при $k \rightarrow \infty$ стремятся к отрезку неустойчивого многообразия $v = 0$ в Π^u . Эти точки при отрицательных итерациях отображения S стремятся к неподвижной точке m .

Замечание 3. Отметим следующий полезный факт. При изменении c (значение гамильтониана) вблизи нуля гамильтонова система в окрестности периодической траектории γ имеет аналитическое инвариантное 3-мерное подмногообразие $V_c = \{H = c\}$. На V_c лежит седловая периодическая траектория γ_c , являющаяся продолжением по c траектории γ . Семейство γ_c образует аналитический двумерный локальный симплектический цилиндр, содержащий $\gamma_0 = \gamma$. Выбранная выше 3-мерная секущая N при пересечении с V_c дает аналитический 2-мерный симплектический диск Σ_c , являющийся локальной секущей ограничения потока на уровень V_c . Выбирая секущую вещественно-аналитическим подмногообразием, получим вещественно-аналитический диск Σ_c и на нем вещественно-аналитическое отображение Пуанкаре S_c с седловой неподвижной точкой m_c . Поэтому для этого отображения также справедлива теорема Мозера и его можно привести аналитической заменой координат к виду (1.3). Более того, поскольку зависимость от параметра c отображения будет аналитической, то замену можно делать сразу для всех достаточно малых c , в (1.3) функция f будет аналитически зависеть от параметра c . Это будет использовано ниже при изучении динамики на V_c для c близких к $c = 0$.

1.5 Глобальные отображения

Теперь рассмотрим глобальное отображение T_1 , определяемое сдвигом по траекториям системы, проходящих вблизи глобального куска Γ_1 , и действующее из окрестности Π^u в окрестность D_1 , $T_1 : \Pi^u \rightarrow D_1$. Отображение T_1 является аналитическим симплектическим диффеоморфизмом, который записывается в следующем виде $x_2 = f(u, v)$, $y_2 = g(u, v)$, здесь симплектичность эквивалентна тождеству $f_u g_v - f_v g_u \equiv 1$ (сохранение площади).

Линеаризация этого отображения в точке $(u_-, 0)$ имеет вид $x_2 = \alpha(u - u_-) + \beta v$, $y_2 = \gamma(u - u_-) + \delta v$, где $\alpha = f_u$, $\beta = f_v$, $\gamma = g_u$, $\delta = g_v$, все производные вычисляются в точке $(u_-, 0)$. Таким образом, мы получаем общий вид отображения T_1 :

$$x_2 = \alpha(u - u_-) + \beta v + \dots, \quad y_2 = \gamma(u - u_-) + \delta v + \dots.$$

Поскольку исследуемая система обратима и секущие выбираются согласно действию инволюции, то глобальное отображение около траектории $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$ из окрестности D_2 в окрестность Π^s , $T_2 : D_2 \rightarrow \Pi^s$ выражается в следующем виде $T_2 = L \circ T_1^{-1} \circ L$, или в координатах:

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma \bar{x}_2 + \alpha \bar{y}_2 + \dots, \\ v_1 - v_+ &= -\delta \bar{x}_2 - \beta \bar{y}_2 + \dots. \end{aligned}$$

Ниже при изучении поведения траекторий на уровнях V_c при $c \neq 0$ нам понадобится знать форму глобальных отображений в этих случаях. Как было упо-

мянуто выше, без ограничения общности, координатами на дисках $D_1(c), D_2(c)$ можно считать симплектические координаты (x_2, y_2) и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, соответственно, а на диске $\Sigma(c)$ симплектические координаты (u, v) . Тогда глобальные отображения являются аналитическими симплектическими диффеоморфизмами, аналитически зависящие от c . Таким образом, они имеют вид

$$\begin{aligned} T_1(c) : \quad & x_2 = a(c) + \alpha(c)(u - u_-) + \beta(c)v + \dots, \\ & y_2 = b(c) + \gamma(c)(u - u_-) + \delta(c)v + \dots \\ T_2(c) : \quad & u_1 = a_1(c) + \gamma(c)\bar{x}_2 + \alpha(c)\bar{y}_2 + \dots, \\ & v_1 - v_+ = b_1(c) - \delta(c)\bar{x}_2 - \beta(c)\bar{y}_2 + \dots, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $a_1(c) = \gamma(c)a(c) - \alpha(c)b(c)$, $b_1(c) = -\delta(c)a(c) + \beta(c)b(c)$.

1.6 Возможные типы симметричных контуров

Симметричная периодическая траектория γ в уровне V_0 лежит вне рассматриваемой окрестности седло-центра p , поэтому нужно согласовать расположение этой траектории и ее симметрию с локальным действием инволюции в U , относительно введенных координат. Предполагается, что p и γ связаны двумя несимметричными гетероклиническими траекториями Γ_1 и $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$.

Вблизи точки p инволюция L переставляет локальные устойчивое и неустойчивое многообразия (кривые) состояния равновесия p . Поскольку гетероклинические траектории содержат эти кривые, то возможны два различных случая. Чтобы понять это, напомним, что мы выбрали в окрестности U точки p на уровне V_0 два гладких диска $D_1, D_2 = L(D_1)$, трансверсальных гетероклиническим траекториям Γ_1 и Γ_2 , соответственно. В координатах Мозера вблизи p в качестве таких дисков можно взять секущие $y_1 = \pm d$ и $x_1 = \pm d$, где знак определяется пересечением соответствующей секущей с Γ_1 и Γ_2 . На V_0 координатами на дисках являются (x_2, y_2) , поскольку координата, сопряженная с y_1 (или, соответственно, x_1) находится из равенства $H = 0$. Напомним (см. выше), что в окрестности точки p локальный топологический тип уровня V_0 — это пара 3-мерных заполненных цилиндров, с отождествленными внутренними точками, выбранными по одной в каждом цилиндре (после склейки — это точка p) (см. рис. 1.2). Боковая граница каждого заполненного цилиндра — гладкий двумерный инвариантный цилиндр, две другие границы — два диска («крышки»). Для каждого заполненного цилиндра траектории входят через одну крышку и выходят из цилиндра через другую крышку.

Секущие D_1, D_2 можно считать двумя крышками этих цилиндров и более того, через D_1 траектории входят в заполненный цилиндр, а через D_2 — выхо-

дят. Возможны две различные ситуации: 1) обе траектории Γ_1, Γ_2 принадлежат локально одному и тому же заполненному цилиндру, это равносильно тому, что оба диска D_1, D_2 находятся на границе одного и того же цилиндра; 2) траектория Γ_1 принадлежит локально одному заполненному цилиндру, а Γ_2 локально принадлежит другому заполненному цилиндру, т.е. диски D_1 и D_2 принадлежат границам разных цилиндров. В мозеровских координатах случай 1 соответствует действию инволюции $L : (x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (y_1, x_1, -x_2, y_2)$, а случай 2 соответствует действию инволюции $L : (x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (-y_1, -x_1, -x_2, y_2)$. Случай 1 означает инвариантность связного цилиндра относительно инволюция, а случай 2 означают его перестановочность (один цилиндр переходит в другой). В случае, если L сохраняет цилиндр, пересечение $Fix(L)$ с цилиндром есть кривая, но если L переставляет цилиндры, то это пересечение является единственной точкой p (см. рис. 1.5-1.6).

Рассмотрим траектории векторного поля, проходящие через D_1 вблизи Γ_1 , но отличные от Γ_1 . При возрастании t они входят в соответствующий локальный заполненный цилиндр, проходят его и выходят из цилиндра (сама положительная полутраектория Γ_1 стремится к p и остается в цилиндре). При этом они либо пересекают D_2 (случай 1), либо выходят из цилиндра, не пересекая D_2 (случай 2). В случае 2 отображение Пуанкаре в окрестности контура не определено при значениях $s \leq 0$, поскольку траектории, близкие к Γ_1 , не возвращаются на D_2 , если только для системы не выполнены некоторые дополнительные глобальные условия (типа существование гомоклинической траектории, соединяющей две оставшиеся крышки).

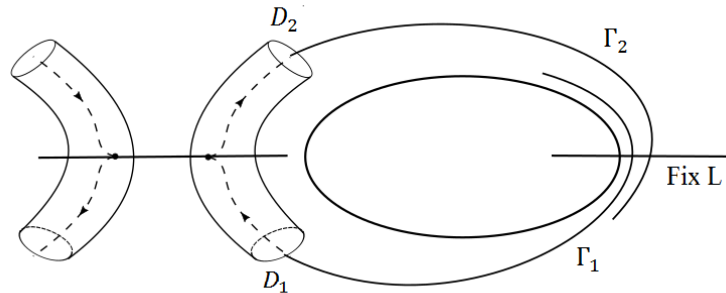


Рис. 1.5. Случай 1

Замечание 4. При достаточно малых положительных $s > 0$ для случая 2 отображение Пуанкаре на соответствующем диске $D_1(s)$ становится определенным внутри некоторого малого диска с центром в точке $(0, 0)$ граничная окружность которого является следом устойчивого многообразия $W^s(l_c)$ ляпуновской периодической траектории l_c . Тогда вдоль некоторой последовательности положительных c_n , стремящихся к нулю, след $W^s(\gamma_{c_n})$ устойчивого многообразия седловой периодической траектории γ_{c_n} будет касаться следа $W^u(\gamma_{c_n})$ на $D_1(c_n)$,

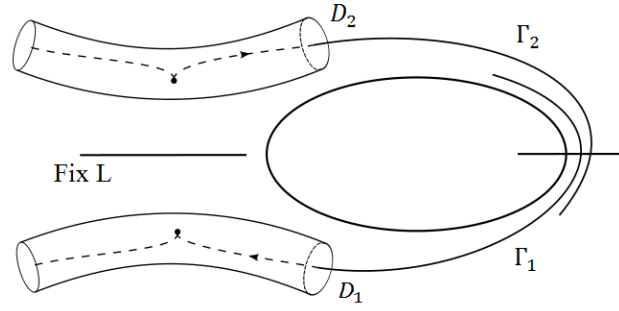


Рис. 1.6. Случай 2

что сопровождается появлением эллиптических периодических траекторий. Это будет рассмотрено ниже.

1.7 Уровень V_0

Начнем с рассмотрения случая 1 при $c = 0$. В окрестности U точки p в мозеровских координатах имеем представление $h = -\xi + \omega\eta + R(\xi, \eta)$, поэтому многообразие W^{cs} задается равенством $x_1 = 0$, W^{cu} – равенством $y_1 = 0$, W^s – равенствами $x_1 = x_2 = y_2 = 0$, и W^u – равенствами $y_1 = x_2 = y_2 = 0$. Предположим, для определенности, что в окрестности U гетероклиническая траектория Γ_1 стремится к p при значениях $y_1 > 0$, т.е. в уровне V_0 диск D_1 определяется равенством $y_1 = d$, а диск D_2 равенством $x_1 = d$. В окрестности U знаки переменных x_1 и y_1 сохраняются под действием потока и трехмерная секущая $N^s : y_1 = d, |x_1| \leq \delta, \eta \leq \eta_0$ трансверсальна Γ_1 и траекториям, близким к Γ_1 , в силу неравенства $h_\xi = -1 + \dots \neq 0$ в окрестности U . Аналогичные утверждения справедливы для секущей $N^u = L(N^s) : x_1 = d, |y_1| \leq \delta, \eta \leq \eta_0$. Каждая секущая расслоена уровнями $H = c$ на диски, один из которых $D_1 = V_0 \cap N^s$ и, соответственно, $D_2 = V_0 \cap N^u$.

Обозначим через $a(\eta)$ решение уравнения $h(\xi, \eta) = 0$ относительно ξ , $\xi = a(\eta) = \omega\eta + O(\eta^2)$. Можно считать, что когда переменные (x, y) изменяются в $U \cap V_0$, соответствующие решения уравнения $h(\xi, \eta) = 0$ лежат на графике функции $a(\eta)$. Тогда двумерный диск D_1 в N^s является графиком функции $x_1 = a(\eta)/d$, а двумерный диск D_2 в N^u является графиком функции $y_1 = a(\eta)/d$. Оба диска D_1 и D_2 являются аналитическими двумерными дисками, симплектическими относительно ограничение 2-формы Ω на D_1 и D_2 , соответственно. Порожденное локальное отображение $T : D_1 \rightarrow D_2$ потоком Φ^t является симплектическим отображением.

Замечание 5. Для второго типа инволюции секущими являются $y_1 = d$ (для N^s) и $x_2 = -d$ (для N^u), соответственно. Следовательно, траектории из $D_1 = N^s \cap V_0$ попадают в $D_2 = N^u \cap V_0$, только если $a(\eta) < 0$.

Найдем явное представление для отображения T в координатах (x_2, y_2) . Время перехода τ траекторий из N^s в N^u найдем из (1.1), где $x_1(\tau) = d$, $y_1(0) = d$: $\tau = -(h_\xi)^{-1} \ln(d/x_1)$, $x_1 = a(\eta)/d$. Из (1.1) следует, что отображение T имеет вид

$$\bar{x}_2 = x_2 \cos \Delta(\eta) - y_2 \sin \Delta(\eta), \quad \bar{y}_2 = x_2 \sin \Delta(\eta) + y_2 \cos \Delta(\eta), \quad (1.5)$$

где

$$\Delta(\eta) = -\frac{h_\eta}{h_\xi} \ln(d/x_1) = a'(\eta) \ln(d^2/a(\eta)) = (\omega + O(\eta)) \ln(d^2/a(\eta)). \quad (1.6)$$

Замечание 6. Для второго типа инволюции формула для $\Delta(\eta)$ видоизменяется следующим образом $\Delta(\eta) = a'(\eta) \ln(-d^2/a(\eta))$.

Первым результатом данной главы является следующая теорема:

Теорема 4. Если аналитическая обратимая гамильтонова система имеет гетероклинический контур типа 1 с указанными свойствами, то седловая периодическая траектория γ имеет счетное множество однообходных трансверсальных гомоклинических траекторий. В случае контура типа 2 на уровне $H = 0$ нет траекторий, отличных от траекторий контура, лежащих целиком в достаточно малой окрестности контура.

Уточним понятие однообходной гомоклинической траектории к периодической траектории γ . Для этого рассмотрим в уровне V_0 достаточно малую трубчатую окрестность траектории γ . Так как уровень V_0 ориентируем, эта окрестность гомеоморфна полноторию $D^2 \times S^1$. Объединение точек траектории Γ_1 , p и точек траектории Γ_2 дает простую незамкнутую кривую без самопересечений в V_0 . Можно считать, что эта бесконечная кривая состоит из трех связных кусков, один из которых R , лежит вне трубчатой окрестности траектории γ , а два других – внутри трубчатой окрестности (напомним, что траектории Γ_1 , Γ_2 асимптотически стремятся к γ). Теперь рассмотрим гомоклиническую траекторию Γ , у которой ее глобальная часть вне трубчатой окрестности принадлежит малой окрестности кривой R , а две остальные части принадлежат трубчатой окрестности. Такую гомоклиническую траекторию для γ назовем однообходной.

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что часть неустойчивой сепаратрисы $w_u \cap \Pi^u$ седловой неподвижной точки m на Σ преобразуется отображением $T_2 \circ T \circ T_1$ в аналитическую кривую, пересекающуюся трансверсально в счетном множестве точек часть $w_s \cap \Pi^s$ неустойчивой сепаратрисы w_s той же неподвижной точки.

Рассмотрим в Π^u кривую $(A, B) : v = 0, |u - u_-| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$, которая является частью кривой w_u . Её образом под действием отображения T_1 является

параметризованная кривая на диске D_1 : $x_2(\tau) = \alpha\tau + \dots$, $y_2(\tau) = \gamma\tau + \dots$, параметром которой является $\tau = u - u_-$. Поскольку отображение T_1 является диффеоморфизмом, то получаем гладкую кривую в D_1 , проходящую через $(0, 0)$, касательный вектор которой в точке $(0, 0)$ является ненулевым вектором (α, γ) . Граничные точки этой кривой обозначим через A_1, B_1 , а полученную кривую через $[A_1, B_1]$.

Кривая $[A_1, B_1]$ отображением T преобразуется в спиралевидную кривую на диске D_2 :

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= x_2(\tau) \cos \Delta(\eta(\tau)) - y_2(\tau) \sin \Delta(\eta(\tau)), \\ \bar{y}_2 &= x_2(\tau) \sin \Delta(\eta(\tau)) + y_2(\tau) \cos \Delta(\eta(\tau)).\end{aligned}$$

В симплектических полярных координатах на D_1, D_2 , соответственно,

$$x_2 = \sqrt{2\eta} \cos \phi, \quad y_2 = \sqrt{2\eta} \sin \phi, \quad \bar{x}_2 = \sqrt{2\bar{\eta}} \cos \theta, \quad \bar{y}_2 = \sqrt{2\bar{\eta}} \sin \theta,$$

отображение T имеет вид

$$\bar{\eta} = \eta, \quad \theta = \phi + \Delta(\eta) \pmod{2\pi}.$$

Это отображение определено для значений $\eta > 0$. Под действием отображения T кривая $[A_1, B_1]$ преобразуется в две бесконечные спирали, соответственно для $\tau > 0$ и $\tau < 0$

$$\bar{\eta} = \eta(\tau), \quad \theta = \phi(\tau) + \Delta(\eta(\tau)),$$

где для достаточно малого $|\tau|$, при $\alpha \neq 0$ получаем

$$\eta(\tau) = (x_2^2(\tau) + y_2^2(\tau))/2 = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{2} \tau^2 + O(\tau^3), \quad \tan \phi(\tau) = \frac{\gamma}{\alpha} + O(\tau),$$

а при $\alpha = 0$ угол определяется через $\cot \phi$, здесь значение ϕ при $\tau \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow -0$ отличается на π . Так как функция $\phi(\tau)$ ограничена при $\tau \rightarrow \pm 0$, а функция $\Delta(\eta(\tau))$ монотонно возрастает до ∞ , то каждая из спиралей, при $|\tau| \rightarrow 0$, стремится к точке $(0, 0)$ на D_2 , совершая бесконечное число оборотов по углу: $\theta(\tau) \rightarrow \infty$. Возьмем отрезок на прямой $u = 0$ симметричный к $[A, B]$ и его T_2 -прообраз $[A_2, B_2]$ на D_2 является аналитической кривой, проходящей через точку $(0, 0)$, симметричной к $[A_1, B_1]$. Поэтому, полученная кривая пересекает каждую спираль в счетном множестве точек, через которые проходят траектории, стремящиеся к γ при $t \rightarrow \pm\infty$, т.е. они являются гомоклиническими траекториями Пуанкаре [115]. Для завершения доказательства нам нужно показать трансверсальность пересечения спиралей и кривой $[A_2, B_2]$. Вместо этого докажем трансверсальность T_2 -образов спиралей и отрезка $u = 0$ на Π^s .

Рассмотрим, например, одну из спиралей, заданную неравенством $\tau > 0$ и

применим отображение T_2 к ней

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma \bar{x}_2 + \alpha \bar{y}_2 + \dots = \\ &= \sqrt{2\eta(\tau)} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \left[\sin(\varphi(\tau) + \Delta(\eta(\tau)) + \sigma) + O(\sqrt{2\eta(\tau)}) \right], \\ v_1 - v_+ &= -\delta \bar{x}_2 - \beta \bar{y}_2 + \dots = \\ &= \sqrt{2\eta(\tau)} \sqrt{\beta^2 + \delta^2} \left[\sin(\varphi(\tau) + \Delta(\eta(\tau)) + \sigma_1) + O(\sqrt{2\eta(\tau)}) \right]. \end{aligned}$$

Отображение T_2 преобразует спираль и точку $(0, 0)$ из D_2 в некоторую спиралевидную кривую и точку $(0, v_+)$ в Π^s . Нам нужно доказать, что полученная спираль не касается прямой $u = 0$ ни в одной общей точке. Для этого покажем, что производная $u'_1(\tau)$ не обращается в ноль в точках пересечения спирали и прямой $u = 0$ в окрестности Π^s . Поскольку $\eta(\tau) \neq 0$, нули функции $u_1(\tau)$ определяются нулями функции $\sin(\varphi(\tau) + \Delta(\eta(\tau)) + \sigma)$, и необходимо проверить неравенство $u'_1(\tau) \neq 0$ для тех τ где $u_1 = 0$.

Производная $u'_1(\tau)$ в точках где $\sin(\varphi(\tau) + \Delta(\eta(\tau)) + \sigma) = 0$, равна с точностью до ненулевого множителя

$$\cos(\varphi(\tau) + \Delta(\eta(\tau)) + \sigma)(\varphi'(\tau) + \Delta'(\eta(\tau))\eta'(\tau)).$$

Таким образом, первый множитель отличен от нуля и главный член в скобках, для достаточно малых τ , равен $\Delta'(\eta(\tau))\eta'(\tau)$, стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow 0$. Действительно, по формуле (1.6) для Δ имеем

$$\Delta'(\eta) = a''(\eta) \ln(d^2/a(\eta)) - \frac{a'^2(\eta)}{a(\eta)} = \frac{-a'^2(\eta) + a''(\eta)a(\eta) \ln(d^2/a(\eta))}{a(\eta)},$$

следовательно, числитель является отрицательным и отделен от нуля при малых значениях η , но знаменатель стремится к нулю при $\eta \rightarrow +0$. Соотношение $\eta'(\tau)/a(\beta(\tau))$ имеет порядок $1/\tau$. Таким образом, было доказано существование счетного множества трансверсальных гомоклинических траекторий.

В случае контура типа 2 траектории системы, проходящие в окрестности Π^u через точки неустойчивой кривой $v = 0$, $|u - u_-| < \varepsilon$, при возрастании времени t пересекают диск D_1 и затем выходят из окрестности V_0 (см. рис. 1.6). Аналогично, то же самое происходит, в силу симметрии, при убывании времени t , для траекторий, проходящих через точки устойчивого многообразия вида $u = 0, |v - v_+| < \varepsilon$ на Π_0^s . $\square$

Доказанная теорема позволяет использовать результаты [82, 115] о структуре траекторий вблизи трансверсальных гомоклинических траекторий двумерного диффеоморфизма. А именно, вблизи каждой гомоклинической траектории существует ее окрестность, такая, что траектории диффеоморфизма, проходящие через эту окрестность, образуют инвариантное гиперболическое подмножество,

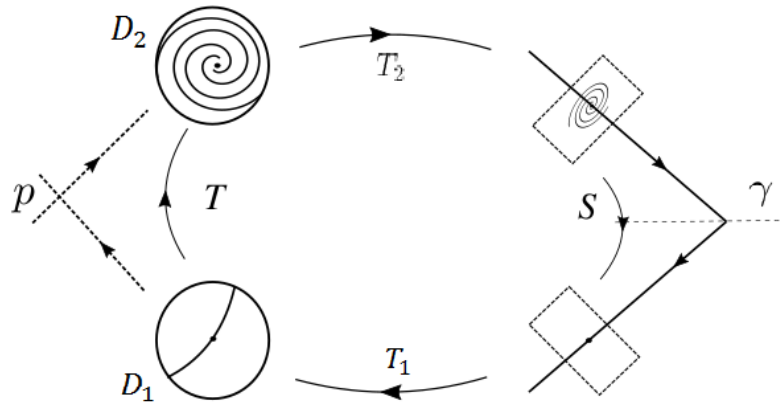


Рис. 1.7. Отображение Пуанкаре при $c = 0$.

динамика которого сопряжена со сдвигом транзитивной цепи Маркова (см., например, [103])). На Π^s имеем счетное множество различных гомоклинических траекторий, накапливающихся на след гетероклинической траектории Γ_2 . Ясно, что для фиксированной гомоклинической точки из этого множества, размер окрестности, где выполняется описание, стремится к нулю по мере приближения гомоклинических точек к следу Γ_2 . Если мы рассмотрим только конечное число гомоклинических точек вне малой окрестности следа Γ_2 , то получим равномерно гиперболическое множество, порожденное этими гомоклиническими траекториями. Следовательно, вся область, где существует гиперболическое множество для нашего случая, должна иметь форму двух рогов, ограниченных двумя параболоподобными кривыми, которые являются касательными к точке $(0, v_+)$ (см. рис. 1.8). Полосы вблизи гомоклинических траекторий (см. выше) для разных гомоклинических точек взаимодействуют друг с другом при итерациях отображения Пуанкаре, которые приводят к цепи Маркова со счетным множеством состояний, но инвариантное множество, полученное таким образом, не является равномерно гиперболическим, а только неравномерно гиперболическим.

1.8 Гиперболичность и эллиптичность на уровнях $c < 0$

В этом разделе рассматриваются уровни V_c , $c < 0$, вблизи контура для случая 1. Для случая 2 и $c < 0$ все траектории, входящие в окрестность через диск $D_1(c)$, покидают ее, то же верно и для траекторий, входящих в окрестность, при убывании t , через диск $D_2(c)$.

В этом случае доказаны следующие результаты:

- 1) существование гиперболического множества на конечном числе трансверсальных гомоклинических траекторий к седловой периодической траектории γ_c ;
- 2) существование счетного множества интервалов значений $c < 0$, накапли-

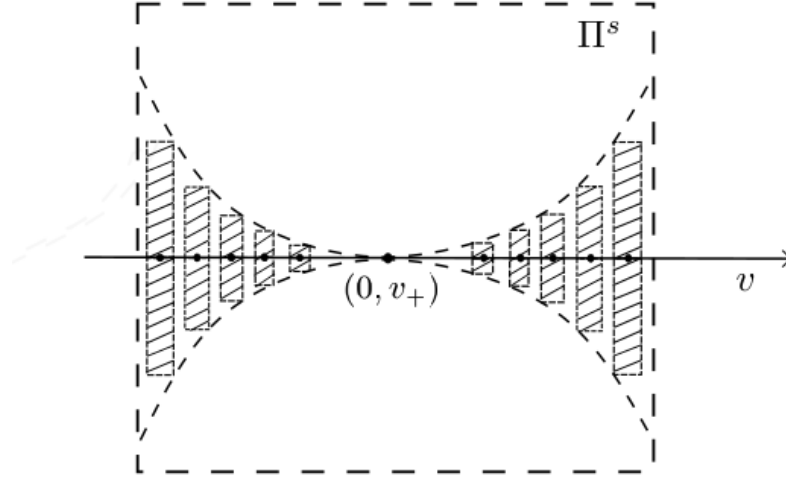


Рис. 1.8. Области гиперболичности в окрестности Π^s .

вающихся в нуле, значения c в которых соответствуют уровням, где в V_c существует однообходная эллиптическая периодическая траектория.

Напомним, что для случая 1 и достаточно малых отрицательных значений c все траектории в окрестности точки p , проходящие чере одну крышку $D_1(c) = N^s \cap V_c$ заполненного цилиндра, при возрастании t , пересекают и его вторую крышку $D_2(c) = N^u \cap V_c$.

Существование конечного числа трансверсальных гомоклинических траекторий к периодической траектории γ_c почти очевидно и следует из их существования при $c = 0$. Для любого отрицательного значения c , достаточно малого, рассмотрим локальную часть этого заполненного цилиндра в уровне V_c около точки p , крышками которого являются диски $D_1(c), D_2(c)$. Тогда кривая $w_u(c)$ из окрестности $\Pi^u(c)$ (т.е. $v = 0$) отображается с помощью глобального отображения $T_1(c)$ в криволинейный отрезок на $D_1(c)$, проходящий вблизи точки $(0, 0)$ на расстоянии порядка $|c|^l$, $l \geq 1$. То же самое справедливо и для симметричной кривой на $D_2(c)$, являющейся прообразом относительно $T_2(c)$ кривой $w_s(c)$ (т.е. $u = 0$). Вырежем в $D_1(c), D_2(c)$ маленькие диски радиуса порядка $O(\sqrt{|c|})$ с центром в точках $(0, 0)$. Поскольку отображение $T(c)$ сохраняет η , тогда вырезаются по одному интервалу на каждом криволинейном отрезке каждого диска. После вырезания две оставшиеся части кривых остаются на каждом диске. Рассмотрим образы оставшихся частей кривых на $D_2(c)$ при отображении $T_2(c) \circ T(c)$.

Теорема 5. Для достаточно малого $|c|$ образ каждой оставшейся части кривой представляет собой конечную спираль, которая пересекает трансверсально в конечном числе точек кривую $u = 0$ в окрестности $\Pi^s(c)$.

Доказательство. При доказательстве будем рассуждать аналогично случаю

при $c = 0$. Отличие состоит в том, что сначала вырежем диск на $D_1(c)$ радиуса $O(\sqrt{|c|})$, $\eta \leq \eta(c)$, с центром в $(0, 0)$. Образ кривой $v = 0$ в окрестности $\Pi^u(c)$ под действием отображения $T_1(c)$ представляет собой гладкую кривую, проходящую на расстоянии порядка c^l , $l \geq 1$, от точки $(0, 0)$ (не исключен случай, когда эта кривая проходит через точку $(0, 0)$). Следовательно, окружность радиуса $\eta = \eta(c) \sim |c|$ пересекает эту кривую в двух точках, т.е. части этой кривой, лежащие за пределами окружности, представляют собой две гладких кривых, а их образы, относительно отображения $T(c)$, представляют собой две конечные спирали, которые пересекают трансверсально $T_2(c)$ -прообразы кривой $u = 0$ из окрестности $\Pi^s(c)$. Таким образом, получаем конечное число трансверсальных гомоклинических траекторий для γ_c . Очевидно, что чем меньше $|c|$, тем большее число трансверсальных гомоклинических траекторий можно найти. $\square$

Чтобы доказать существование эллиптических точек в некоторой окрестности контура на всем многообразии M , сначала найдем счетное множество значений $c_n < 0$, для которых система на уровне V_{c_n} имеет нетрансверсальную гомоклиническую траекторию с квадратичным касанием для седловой периодической траектории γ_{c_n} . Это позволяет применить результаты о существовании каскадов эллиптических периодических траекторий на уровнях, близких к V_{c_n} (см., например, [26, 18]).

Теорема 6. Предположим, что выполнено неравенство $a'_1(0) \neq 0$. Тогда существует последовательность $c_n \rightarrow -0$ такая, что на уровне V_{c_n} периодическая траектория γ_{c_n} обладает гомоклинической траекторией, вдоль которой устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(\gamma_{c_n})$, $W^u(\gamma_{c_n})$ имеют квадратичное касание. Для каждого такого значения c_n существует счетное множество c -интервалов I_{nm} , $I_{nm} \rightarrow c_n$ при $m \rightarrow \infty$, значения которых $c \in I_{nm}$ представляют уровни, на которых система имеет однообходные эллиптические траектории в том же уровне гамильтониана.

Доказательство. Неравенство $a'_1(0) \neq 0$ является условием общего положения. Это аналог условия С в работе [26]. Оно гарантирует, что для достаточно малого $|c|$ $T_2(c)$ -образ точки $(0, 0)$ в $\Pi^s(c)$ представляет собой аналитическую кривую, пересекающую трансверсально устойчивое многообразие $u = 0$ седловой неподвижной точки. Напомним, что предполагается, что координаты (u, v) не зависят от параметра c , они зависят только от отображения. Как следствие этого неравенства, в силу обратимости, существует $c_0 < 0$ такое, что для $c \in (c_0, 0)$ $T_1(c)$ -образ кривой $v = 0$ является гладкой кривой, не проходящей через точку $(0, 0)$ на $D_1(c)$, а расстояние от $(0, 0)$ до этой кривой имеет порядок $|c|$.

Для доказательства первого утверждения теоремы рассмотрим уровень V_c при малых отрицательных значениях c и найдем образ кривой $v = 0$ из окрестности $\Pi^u(c)$ при отображении $T(c) \circ T_1(c)$. Полученная кривая является анали-

тической кривой на диске $D_2(c)$. Нужно показать, что эта кривая для счетного множества значений c касается $T_2(c)$ -прообраза кривой $u = 0$ из $\Pi^s(c)$.

Запишем представление отображения $T(c)$. Оно аналогично (1.5), но при $c < 0$ функция $\Delta_c(\eta)$ является аналитической и имеет вид

$$\Delta_c(\eta) = a'_c(\eta) \ln \frac{d^2}{a_c(\eta)}, \quad a_c(\eta) = -c + \omega\eta + O_2(c, \eta) > 0.$$

Положительность функции $a_c(\eta)$ означает, что отображение $T(c)$ является локальным аналитическим симплектическим диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки $(x_2, y_2) = (0, 0)$ для всех достаточно малых по модулю отрицательных значений c .

Отображение $T_1(c)$ также является аналитическим, поэтому $T_1(c)$ -образ кривой $v = 0, |u - u_-| \leq \varepsilon$ является аналитическим криволинейным отрезком в $D_1(c)$, проходящим вблизи точки $(x_2, y_2) = (0, 0)$ на расстоянии порядка $|c|$. Это следует из предположения общего положения $a'_1(0) \neq 0$ и симметрии $T_1(c)$ и $T_2(c)$. В силу симметрии, $T_2(c)$ -прообраз кривой $u = 0, |v - v_+| \leq \varepsilon$ является также аналитическим криволинейным отрезком в $D_2(c)$ и является симметричным относительно действия инволюции L к образу отрезка $v = 0, |u - u_-| \leq \varepsilon$ в $D_1(c)$ и проходящим вблизи точки $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (0, 0)$ на том же расстоянии порядка $|c|$.

В полярных координатах на дисках $D_1(c), D_2(c)$ отображение T_c имеет вид

$$\bar{\eta} = \eta, \quad \bar{\theta} = \varphi + \Delta_c(\eta),$$

где $\Delta_c(\eta) = (\omega + \dots) \ln[d^2/(-c + \omega\eta + \dots)]$.

Разложим коэффициенты в формуле отображения $T_1(c)$ по формуле Тейлора с точностью до членов первого порядка по c , $a(c) = ac + \dots$, $a \neq 0$, $b(c) = bc + \dots$. Тогда

$$\Delta_c(\eta) = -\omega \ln \frac{d^2}{-c + \omega[(ac + \alpha(u - u_-))^2 + (bc + \gamma(u - u_-))^2]/2} + O_2(c, \eta).$$

На диске $D_1(c)$ рассматриваемый криволинейный отрезок представляет собой аналитическую гладкую кривую, проходящую на расстоянии порядка $|c|$ от точки $(0, 0)$, поэтому существует окружность $\eta = \eta_c$ такая, что эта окружность и кривая имеют общую точку, и они касаются в этой точке. В частности, эта точка может быть не единственной. Другие точки этой кривой находятся за пределами этой окружности.

Локальное отображение $T(c)$ сохраняет η , поэтому $T(c)$ -образ на $D_2(c)$ этой кривой является спиралевидной кривой, лежащей вне окружности $\eta = \eta_c$ на $D_2(c)$. В силу симметрии, на той же окружности на $D_2(c)$ находятся другие ее касания с кривой, являющейся $T_2(c)$ -прообразом отрезка $u = 0$ из окрестности $\Pi^s(c)$. Важным замечанием является следующее утверждение.

Лемма 3. Для достаточно малого значения c существует единственная точка касания окружности и кривой на диске $D_1(c)$. Касание в этой точке квадратично.

Доказательство. Обозначим через σ_c^s, σ_c^u окружности $\eta = \eta_c$ на дисках $D_1(c), D_2(c)$, соответственно. В силу симметрии, достаточно доказать утверждение для замкнутой кривой $T_2(c)(\sigma_c^u)$, т. е. эта кривая квадратично касается $u = 0$ ровно в одной точке при $|c|$ достаточно малом. Окружность σ_c^u имеет представление в полярных координатах $\bar{x}_2 = \sqrt{2\eta_c} \cos \theta, \bar{y}_2 = \sqrt{2\eta_c} \sin \theta, r(c) = \sqrt{2\eta_c} \sim |c|$. Таким образом из (1.4) следует, что ее $T_2(c)$ -образ имеет представление

$$u_1 = a_1(c) + r(c)[\gamma(c) \cos \theta + \alpha(c) \sin \theta + O(r)],$$

$$v_1 - v_+ = b_1(c) - r(c)[\delta(c) \cos \theta + \beta(c) \sin \theta + O(r)].$$

Сначала найдем точки, в которых касательная к этой кривой коллинеарна вектору $(0, 1)$, т. е. $u'_1(\theta) = 0$. Это условие задается уравнением $-\gamma \sin \theta + \alpha \cos \theta + O(r) = 0$. Оно имеет два корня, определенные с точностью до членов порядка $O(r)$, при $\theta_1 = \rho, \theta_2 = \rho + \pi$, где $\sin \rho = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}, \cos \rho = \gamma / \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$. Приравнявая $u_1(\theta_i) = 0$, приходим к соотношению относительно r : $r(c) = \pm \frac{a_1(c)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} + O(c^2)$, где знак определяется через значения θ_i , для которых $r(c) > 0$. В силу предположения $a'_1(0) \neq 0$, получаем единственный корень, обеспечивающий касание четного порядка.

Чтобы доказать, что касание является квадратичным, нужно проверить, что при достаточно малом значении c производная $u''_1(v_1) \neq 0$ в точке касания. Эта производная в параметрической форме задается как (опускаем нижний индекс 1 в этом вычислении)

$$\begin{aligned} u''(v) &= \frac{u''_\theta v'_\theta - u'_\theta v''_\theta}{v_\theta'^3} = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \frac{[-(\alpha\delta - \beta\gamma) + O(r)]}{\pm r(1 + O(r))} = \\ &= \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} r(c)^{-1} (1 + O(r(c))). \end{aligned}$$

Поскольку $r(c) \sim |c|$ при $|c| \rightarrow 0$, то полученная производная становится больше по модулю, чем меньше $|c|$. Таким образом, заключаем, что касание квадратично. $\square$

Итак, имеем на диске $D_2(c)$ две аналитические кривые: спираль и кривую, обе касаются окружности $\eta = \eta_c$ только в одной точке (вообще говоря в разных). Теперь проследим за взаимным положением этих двух точек на окружности при $c \rightarrow -0$. Точка на кривой стремится к точке $(0, 0)$ при $c \rightarrow -0$, с определенной касательной. Но точка касания спирали, как мы докажем ниже, монотонно вращается при $c \rightarrow -0$, совершая бесконечное число полных оборотов по углу. Отсюда следует, что точки касания спирали бесконечное число раз c_n проходит

точку касания кривой, дающее квадратичное касание спирали и кривой (см. рис. 1.9).

Назовем единственную точку касания окружности и спирали на $D_2(c)$ носом спирали. Вблизи этой точки, в силу квадратичного касания, спираль располагается снаружи диска, ограниченного окружностью. Покажем, что нос спирали монотонно вращается по углу θ при $c \rightarrow -0$.

Координаты носа спирали соответствуют той же точке кривой $v = 0$, где $T_1(c)$ -прообраз окружности $\eta = \eta_c$ на диске $D_1(c)$ касается кривой. Угол $\theta(c)$, соответствующий носу спирали, рассчитывается по формуле $\theta(c) = \varphi(c) + \Delta_c(\eta_c)$, где значения $(\varphi(c), \eta(c))$ необходимо подставить. Как мы видели при доказательстве леммы 3, угол $\varphi(c)$ имеет определенный предел при $c \rightarrow -0$, поскольку точка касания криволинейного отрезка и окружности $\eta = \eta_c$ на $D_1(c)$ и точки касания окружности $\eta = \eta_c$ и криволинейного отрезка на $D_2(c)$ связаны соотношением симметрии $L : (x_2, y_2) \rightarrow (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ $\bar{x}_2 = -x_2, \bar{y}_2 = y_2$. Покажем, что величина $\Delta_c(\eta_c)$ монотонно стремится к бесконечности при $c \rightarrow -0$. Если это так, то это дает необходимый вывод о бесконечном числе полных оборотов по углу θ .

Значение η_c в точке касания равно

$$\eta_c = \frac{1}{2}(x_2^2(c) + y_2^2(c)) = r^2(c)/2 = \frac{a_1^2(c)}{2(\alpha^2(c) + \gamma^2(c))} + O(c^3). \quad (1.7)$$

Таким образом, имеем

$$\Delta_c(\eta_c) = (\omega + O(c^2)) \ln \frac{d^2}{-c + \omega \frac{1}{2(\alpha^2 + \gamma^2)} a_1^2(c) + O(c^3)} \sim -\ln(-c).$$

Тогда, $\theta(c)$ монотонно зависит от c и неограниченно возрастает при $c \rightarrow -0$. Поэтому точка на $D_2(c)$, являющаяся носом спирали, бесконечное число раз c_n совпадает с точкой той же окружности, где прообраз кривой $u = 0$ из $\Pi^s(c)$ касается окружности.

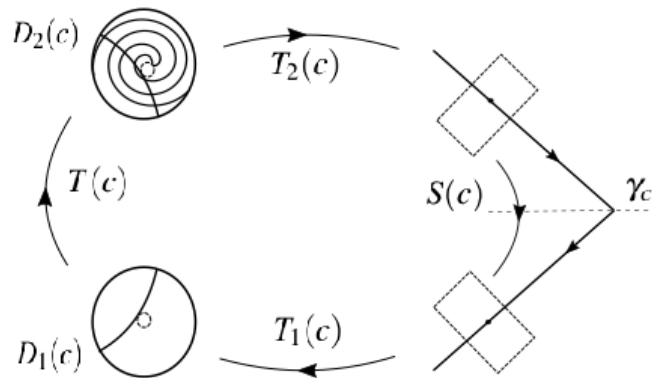


Рис. 1.9. Случай 1: отображение Пуанкаре при $c < 0$, гомоклиническое касание.

Второе утверждение теоремы следует из теоремы о существовании эллиптических точек вблизи гомоклинического касания симплектического отображения (см., например, [26, 18]).

Теорема 7. Пусть f гладкое (не менее C^4) симплектическое отображение, имеющее седловую неподвижную точку p и гомоклиническую траекторию $f^n(q)$, проходящую через точку $q \neq p$. Предположим, что устойчивое и неустойчивое многообразие седловой неподвижной точки p квадратично касаются в точке q . Тогда для любого общего гладкого однопараметрического семейства гладких симплектических отображений f_μ , совпадающего при $\mu = 0$ с f , для любого отрезка значений параметра $[-\mu_0, \mu_0]$, существует целое число $k_0 \in \mathbb{Z}$ и бесконечно много открытых интервалов I_k , $k \geq k_0$, таких, что I_k накапливаются к $\mu = 0$ при $k \rightarrow \infty$, и отображение f_μ , $\mu \in I_k$ имеет однообходную эллиптическую гомоклиническую траекторию (периода $q + k$).

□

1.9 Гиперболичность и эллиптичность на уровнях $c > 0$

Уровень V_c , при достаточно малом $c > 0$, содержит седловую ляпуновскую периодическую траекторию l_c (напомним, что предполагается $\omega > 0$). Ее локальные устойчивое $W^s(l_c)$ и неустойчивое $W^u(l_c)$ многообразия принадлежат V_c , а их продолжение по потоку во всем фазовом многообразии происходит вблизи кривых $W^s(p)$ и $W^u(p)$, соответственно. Следовательно, они будут пересекать секущие $D_1(c)$ и $D_2(c)$ по окружностям $\sigma_s(c)$, $\sigma_u(c)$.

Как было указано выше, все траектории потока, которые пересекают диск $D_1(c)$ внутри окружности $\sigma_s(c)$ покидают окрестность U , не пересекая диск $D_2(c)$. Поэтому мы не отслеживаем эти траектории. Но траектории потока, пересекающие $D_1(c)$ вне $\sigma_s(c)$, с увеличением времени пересекают $D_2(c)$ и далее секущую Σ_c . В этом случае строится гиперболическое множество, которое формируется вблизи гетероклинического контура, включающего пару седловых периодических траекторий l_c , γ_c и четыре трансверсальные гетероклинические траектории, две из которых переходят, по мере увеличения времени, от l_c к γ_c (около Γ_2), а две других - от γ_c к l_c (около Γ_1). Кроме того, существует счетное множество трансверсальных гомоклинических траекторий для каждой периодической траектории l_c и γ_c . Все это является основой для построения гиперболического множества.

Теорема 8. При достаточно малых значениях $c > 0$ $W^s(l_c)$ и $W^u(\gamma_c)$ пересекаются трансверсально по двум гетероклиническим траекториям $\Gamma_{11}(c)$, $\Gamma_{12}(c)$

и, в силу симметрии, $W^u(l_c)$ и $W^s(\gamma_c)$ пересекаются трансверсально по двум гетероклиническим траекториям $\Gamma_{21}(c) = L(\Gamma_{11}(c))$, $\Gamma_{22}(c) = L(\Gamma_{12}(c))$, образуя, тем самым, трансверсальный гетероклинический контур.

След $W^u(\gamma_c)$ в окрестности $\Pi^s(c)$ (образ прямой $v = 0$, локально-неустойчивое многообразие) под действием отображения $T_2(c) \circ T(c) \circ T_1(c)$ состоит из пары аналитических спиралевидных кривых, которые наматываются на замкнутую кривую $T_2(c)(\sigma_u(c))$ и пересекают трансверсально прямую $u = 0$ (локально-неустойчивое многообразие) в счетном множестве точек, являющихся следами трансверсальных гомоклинических траекторий Пуанкаре периодической траектории γ_c .

Согласно λ -лемме Смейла, при достаточно большом n замкнутая кривая $T_2(c)(\sigma_u(c))$ содержит две кривые с конечными точками на прямой $u = 0$, чьи n -итерации при отображении $S(c)$ дают счетное семейство аналитических кривых, гладко накапливающихся, при $n \rightarrow \infty$, к прямой $v = 0$. Существует целое число $n_0(s)$ такое, что для $n > n_0(s)$ эти кривые трансверсально пересекают замкнутую кривую $T_1^{-1}(c)(\sigma_s(c))$. Таким образом, получается счетное множество точек, являющихся следами трансверсальных гомоклинических траекторий для l_c (см. рис. 1.10).

Доказательство. Рассмотрим сначала $T_2(c)$ -образ окружности $\sigma_u(c)$ на диск Σ_c . Напомним, что радиус окружности $\sigma_u(c)$ имеет порядок $\sqrt{c}$, поскольку он определяется корнем уравнения $a_c(\eta) = -c + \omega\eta + O_2(c, \eta) = 0$. Следовательно, получаем $\eta(c) = c/\omega + O(c^2)$. С другой стороны, из-за аналитической зависимости $T_2(c)$ от c , $T_2(c)$ -образ центра $(0, 0)$ аналитически зависит от c . Следовательно, расстояние от точки $(0, 0)$ до кривой, являющейся $T_2(c)$ -прообразом прямой $u = 0$ в $\Pi^s(c)$, имеет порядок c^l , $l \geq 1$. Более того, если при $l = 1$ выполняется неравенство $a'_1(0) \neq 0$ (см. выше). То это означает, что кривая $T_2(c)(\sigma_u(c))$ пересекает, при достаточно малом значении c , прямую $u = 0$ трансверсально в двух точках. Действительно, кривая $T_2(c)(\sigma_u(c))$ может быть записана в параметрической форме, где параметром является θ , в следующем виде

$$u = a_1(c) + r(c)[\gamma(c) \cos \theta + \alpha(c) \sin \theta + O(r)],$$

$$v - v_+ = b_1(c) - r(c)[\delta(c) \cos \theta + \beta(c) \sin \theta + O(r)],$$

где $r(c) = \sqrt{2\eta(c)} = \sqrt{c/\omega + O(c^2)}$. Для того, чтобы найти точки пересечения с прямой $u = 0$ приравняем $u_1 = 0$ и разделим обе части на $r(c)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$, получим уравнению относительно θ

$$A(c) + \cos(\theta - \rho) + O(c) = 0, \quad A(c) = a_1(c)/r(c) \sim \sqrt{c},$$

у которого есть два простых корня для достаточно малого значения c . Эти простые корни соответствуют двум трансверсальным точкам пересечения. Траекториями потока, проходящими через эти точки, являются $\Gamma_{21}(c)$, $\Gamma_{22}(c)$. В силу обратимости отображения замкнутая кривая $T_1^{-1}(c)(\sigma_s(c))$ также пересекает

трансверсально в двух точках прямую $v = 0$ в окрестности $\Pi^u(c)$. Траекториями потока, проходящими через эти точки пересечения, являются $\Gamma_{11}(c)$, $\Gamma_{12}(c)$.

Теперь рассмотрим криволинейный отрезок, являющийся $T_1(c)$ -образом прямой $v = 0$ на диске $D_1(c)$. Как было доказано, эта кривая пересекает трансверсально в двух точках окружность $\sigma_s(c)$, которая делит кривую на три части. Траектории потока, проходящие через среднюю часть, покидают окрестность контура, но две оставшиеся части дают две аналитические кривые, чьи $T(c)$ -образы представляют собой две бесконечные спирали на $D_2(c)$, наматывающиеся на окружность $\sigma_u(c)$. Их $T_2(c)$ -образы задают два счетных семейства трансверсальных гомоклинических траекторий для γ_c .

Чтобы найти трансверсальные гомоклинические траектории для l_c , заметим, что кривая $u = \kappa > 0$, для достаточно малого κ , в окрестности $\Pi^s(c)$ пересекает замкнутую кривую $T_2(c)(\sigma_u(c))$ трансверсально в двух точках. То же самое справедливо для всех частей $T_2(c)$ -образов обеих спиралей, наматывающихся на $\sigma_u(c)$ на $D_2(c)$. Таким образом, имеем два счетных семейства криволинейных отрезков, гладко накапливающих на две части кривой $T_2(c)(\sigma_u(c))$. По λ -лемме Смейла [83], существует целое число $n_0 > 0$ такое, что все $S^n(c)$ -образы кривых обоих счетных семейств пересекают трансверсально замкнутую кривую $T^{-1}(c)(\sigma_s(c))$ в окрестности $\Pi^u(c)$. Таким образом, у нас есть инвариантное гиперболическое множество на каждом уровне V_c , для достаточно малого $c > 0$. $\square$

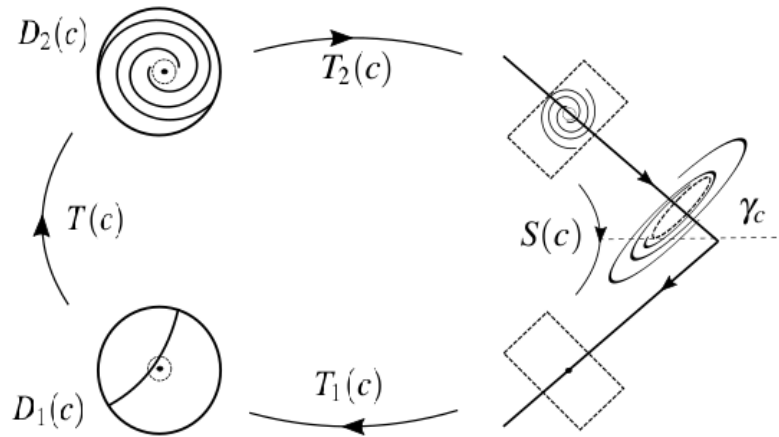


Рис. 1.10. Отображение Пуанкаре при $c > 0$, гиперболическое множество и касание.

Построенное нами гиперболическое множество не исчерпывает инвариантных множеств на уровне V_c . Также можно упомянуть дикие гиперболические множества, существующие вблизи квадратичных гомоклинических касаний [22]. В данном разделе также доказывается существование эллиптических периодических траекторий для интервалов c -значений, стремящихся к $c = 0$. С этой целью сначала докажем следующую теорему

Теорема 9. Существует последовательность значений $c_n \rightarrow 0$ такая, что на уровне V_{c_n} седловая ляпуновская периодическая траектория l_{c_n} обладает гомоклинической траекторией, вдоль которой $W^s(l_{c_n})$ и $W^u(l_{c_n})$ имеют квадратичное касание.

Доказательство. Поскольку система обратима и связанное с ней отображение Пуанкаре также обратимо, то достаточно доказать, что существует такое c_n , что след $W^u(l_{c_n})$ на Σ_{c_n} является выпуклой замкнутой кривой, квадратично касающийся линии $Fix(L)$, т.е. диагонали $u = v$.

Как было доказано выше, для достаточно малого c_0 , при $0 < c \leq c_0$, след $W^u(l_c)$ в $\Pi^s(c)$ является замкнутой кривой, которая пересекает прямую $u = 0$ в двух точках. $S(c)$ -прообразы линии $u = v$ представляют собой последовательность аналитических криволинейных отрезков, заданных как $u = u_k(v, c)$, которые стремятся в $\Pi^s(c)$ к $u = 0$ в C^2 -топологии равномерно по c , при $k \rightarrow \infty$. Действительно, обратные итерации S задаются как $u_{-n} = f^n(\zeta)u_{-n+1}$, $v_{-n} = v_{-n+1}/f^n(\zeta)$, $\zeta = u_0v_0 = u_{-1}v_{-1} = \dots = u_{-n}v_{-n}$. Функция $u_{-n} = g_n(v_{-n})$ находится как решение уравнения $u = vf^{2n}(uv)$ относительно u . Умножив обе части на v , получим уравнение $\zeta = v^2f^{2n}(\zeta)$. Так как $f(\zeta) = \nu + O_1(\zeta)$, получаем оценку $|f| \leq (1 + \nu)/2 < 1$ для достаточно малых $|\zeta|$. Таким образом, для любого фиксированного v , $|v - v_+| \leq \delta$ существует единственное решение уравнения $\zeta_n(v)$. Эта функция является аналитической, и семейство равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Функция имеет вид $u_n(v, c) = vf^{2n}(\zeta_n(v))$. Это семейство стремится к нулю при $[(1 + \nu)/2]^{2n}$. Поскольку они стремятся к нулю в C^2 -топологии (фактически, при любом C^k , $k \geq 2$), это означает, что для n достаточно большого пересечение графика функции $u_n(v, c)$ с замкнутой кривой $T_2(c)(\sigma_u(c))$ осуществляется по двум точкам, аналогично для $u = 0$.

Зафиксируем некоторое $0 < c \leq c_0$. Поскольку c_0 достаточно мало, то замкнутая кривая с точностью до членов третьего порядка представляет собой эллипс в окрестности $\Pi^s(c)$, центр которого приближается к прямой $u = 0$ на расстояние порядка c , а его главные оси имеют длины порядка $\sqrt{c}$ и угол их поворота зависят от c и имеет предел, определяемый матрицей линеаризованного отображения $T_2(0) = T_2$. Это означает, что полученное семейство замкнутых кривых пересекает, при $c \rightarrow 0$, все графики функций $u_n(v, c)$, и это пересечение для отдельной кривой является либо трансверсальным, либо квадратично касается, либо нет точек пересечения. Те значения c , когда соответствующая кривая семейства касается фиксированной $u_n(v, c)$, дают значения c_n , которые мы ищем. $\square$

Теперь снова можно применить теорему 7 о существовании эллиптической периодической точки в общем однопараметрическом семействе двумерных симплектических диффеоморфизмов, содержащем диффеоморфизм с квадратичным гомоклиническим касанием [26, 18]).

1.10 Случай 2 при $c > 0$

Для случая 2 все траектории на уровне V_0 , проходящие через достаточно малую окрестность контура, кроме траекторий самого контура, покидают эту окрестность, и не существует траекторий, которые целиком лежат в этой окрестности. Уровни V_c , при $c < 0$ вообще не содержат траекторий, которые полностью остаются на этих уровнях, поскольку траектории, входящие в заполненный цилиндр через $D_1(c)$, покидают окрестность точки p , не пересекая $D_2(c)$. Именно поэтому рассматриваются уровни V_c для $c > 0$, где возникают траектории, лежащие целиком в непосредственной близости контура. На соответствующем трансверсальном диске $D_1(c)$ эти траектории входят в заполненный цилиндр через точки, лежащие внутри окружности $\sigma_s(c)$ и выходят через диск $D_2(c)$ из другого заполненного цилиндра через точки, лежащие внутри окружности $\sigma_u(c)$ (см. замечание 6).

Рассмотрим образ следа неустойчивого многообразия $W^u(\gamma_c)$ (т.е. прямую $v = 0$ из окрестности $\Pi^u(c)$) при действии композиции отображений $T_2(c) \circ T(c) \circ T_1(c)$. Как обсуждалось выше, в общем случае $T_1(c)$ -образ этой прямой на диске $D_1(c)$ представляет собой аналитический криволинейный отрезок, расстояние которого от центра диска $(0, 0)$ имеет порядок c^l , $l \geq 1$, из-за аналитической зависимости отображения $T_1(c)$ от c . Если выполнено предположение общего положения $a'_1(0) \neq 0$, приведенное выше, то $l = 1$. На диске $D_1(c)$ существует окружность $\sigma_s(c)$, определенная как $\eta = \eta(c) = c/\omega + O(c^2)$, являющаяся следом устойчивого многообразия $W^s(l_c)$. Таким образом, ее радиус имеет порядок $\sim \sqrt{c}$. Это подразумевает, как указано выше, что $\sigma_s(c)$ и криволинейный отрезок (след $W^s(\gamma_c)$) пересекаются трансверсально в двух точках для достаточно малых c .

Рассмотрим теперь ту часть криволинейного отрезка, которая лежит на $D_1(c)$ внутри окружности $\sigma_s(c)$. Имея в виду преобразованную формулы для $\Delta_c(\eta)$ (см. замечание 6), получаем, что эта часть криволинейного отрезка (без двух его крайних точек на окружности $\sigma_s(c)$) преобразуется отображением $T(c)$ на $D_2(c)$ в бесконечную спиралевидную аналитическую кривую, которая обоими концами наматывается на окружность $\sigma_u(c)$ (см. рис. 1.11). На том же диске $D_2(c)$ существует аналитический криволинейный отрезок, являющийся $T_2(c)$ -прообразом прямой $u = 0$ из $\Pi^s(c)$. Криволинейный отрезок пересекает окружность $\sigma_u(c)$ трансверсально, это следует из его симметрии с соответствующей кривой в $D_1(c)$. Поскольку двойная спираль наматывается обоими концами на окружность $\sigma_s(c)$, а криволинейный отрезок трансверсален окружности, получаем, как указано выше, счетное множество точек пересечения, через которые проходят трансверсальные гомоклинические траектории к γ_c .

Здесь также имеется счетное множество интервалов c , на которых существуют эллиптические периодические траектории на уровнях V_c . Их доказательство

проводится точно так же, как и для случая 1 при $c > 0$. Ключевым моментом здесь снова является нахождение последовательности $c_n \rightarrow 0$ такой, что в V_{c_n} существует касательная симметричная к гомоклинической траектории l_c . Снова итерируя отображением $S^n(c)$ на диске $\Sigma(c)$ замкнутую кривую $T_2(c)(\sigma_u(c))$ и находим ее касание с прямой $u = v$ следа $Fix(L)$. Рассмотрение такое же, как и в предыдущем разделе. Таким образом, получаем

Теорема 10. Для случая 2 существует достаточно малое $c_0 > 0$ такое, что на интервале $(0, c_0)$ существует счетное множество интервалов значения c , которые соответствуют уровням V_c , содержащим однообордную эллиптическую периодическую траекторию в четырехмерной окрестности исходного гетероклинического контура.

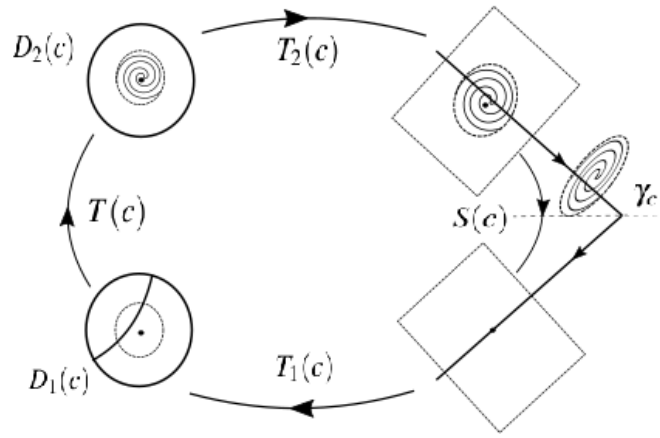


Рис. 1.11. Случай 2: отображение Пуанкаре при $c > 0$, гиперболическое множество и касание.

1.11 1-параметрическое семейство: счетное множество гомоклиник седло-центра

В этом параграфе рассматривается общее 1-параметрическое семейство обратимых гамильтоновых систем X_{H_μ} , являющееся возмущением системы при $\mu = 0$, имеющей гетероклинический контур, рассмотренный в предыдущих разделах. Основным результатом, который будет получен здесь, является теорема о существовании счетного множества значений параметра μ , накапливающихся к $\mu = 0$, при которых соответствующая система имеет гомоклиническую траекторию к седло-центру. Здесь также будет показано, что появляющиеся гомоклинические траектории к седло-центру удовлетворяют условиям общего положения, найденные в [104, 53]. Эти условия гарантируют существование сложной динамики в системе и ее неинтегрируемость [54]. Стоит подчеркнуть, что результат не зависит от того, какой тип контура рассматривается, первый или второй.

Напомним, что в классе C^2 гладких гамильтоновых систем состояние равновесия типа седло-центр является грубым, т.е. оно сохраняется при всех достаточно малых возмущениях в этом классе. Седловая периодическая траектория гамильтоновой системы также является грубым образованием и сохраняется при малых возмущениях. Однако при общих обратимых возмущениях системы гетероклинические траектории, соединяющие седло-центр и периодическую траекторию, могут разрушаться. Мы хотим доказать, что в целом здесь возникают гомоклинические траектории к возмущенному седло-центру. Доказываемая теорема может служить критерием существования гомоклинических траекторий к седло-центру. Стоит отметить что поиск таких траекторий, вообще говоря, является весьма трудной задачей, как теоретически, так и численно. Такая теорема также полезна и в том случае, когда имеется двухпараметрическое семейство обратимых гамильтоновых систем, для которого при некоторых конкретных значениях параметров система имеет контуры, упомянутые выше. Тогда можно найти счетное множество кривых в пространстве параметров таких, что для параметров на этой кривой система имеет гомоклиническую траекторию к седло-центру.

Теорема 11. Пусть X_{H_μ} общее 1-параметрическое семейство обратимых аналитических гамильтоновых систем, которое при $\mu = 0$ имеет гетероклинический контур типа 1 или 2, рассмотренные в предыдущих разделах. Тогда существует последовательность значений параметров μ_n , накапливающихся к $\mu = 0$, при которых соответствующая система семейства имеет гомоклиническую траекторию общего типа к седло-центру. Соответствующие значения μ_n имеют один и тот же знак.

Доказательство. Ввиду обратимости, достаточно доказать существования последовательности значений параметра $\mu_n \rightarrow 0$, для которых неустойчивая сепаратриса седло-центра, соответствующей гамильтоновой системы $X_{H_{\mu_n}}$, пересекает секущую $\Sigma(\mu_n)$ на линии $Fix(L)$.

Напомним, что для случая гладкого однопараметрического семейства обратимых аналитических гамильтоновых систем, являющихся возмущением системы с гетероклиническим контуром, все объекты седло-центр, периодическая траектория в особом уровне гамильтониана, их устойчивые и неустойчивые многообразия гладко зависят от параметра μ . Как было сказано выше, теоремы Мозера справедливы и для систем, гладко зависящих от параметров, поэтому существует гладкая, зависящая от параметра замена координат такая, что в новых координатах (x_1, y_1, x_2, y_2) в окрестности состояния равновесия p_μ гамильтониан является аналитической функцией h_μ от переменных $\xi = x_1 y_1$, $\eta = (x_2^2 + y_2^2)/2$. Отличие от случая без параметров заключается в гладкой зависимости от параметра μ коэффициентов функции h_μ . Далее будем работать в этих координатах, тогда секущие D_1 и D_2 к сепаратрисам на особом уровне гамильтониана (т.е.

содержащем седло-центр) и секущую N для седловой периодической траектории $\gamma(\mu)$ можно считать фиксированными и независимыми от параметра. Но в глобальных отображениях появляются гладко зависящие от μ члены нулевого порядка, так как сепаратрисы возмущенного седло-центра не лежат, вообще говоря, на многообразиях седловой периодической траектории.

Возмущенные глобальные отображения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} T_2(\mu) : \quad & u_1 = a(\mu) + \gamma(\mu)\bar{x}_2 + \alpha(\mu)\bar{y}_2 + \cdots, \\ & v_1 - v_+ = b(\mu) - \delta(\mu)\bar{x}_2 - \beta(\mu)\bar{y}_2 + \cdots, \\ T_1(\mu) : \quad & x_2 = b(\mu) + \alpha(\mu)(u - u_-) + \beta(\mu)v + \cdots, \\ & y_2 = a(\mu) + \gamma(\mu)(u - u_-) + \delta(\mu)v + \cdots, \\ S(\mu) : \quad & u_1 = u/f_\mu(\zeta), \quad v_1 = v f_\mu(\zeta), \quad \zeta = uv, \quad f_\mu = \nu(\mu) + O_1(\zeta). \end{aligned}$$

Условие общего положения для семейства в координатах означает выполнение неравенства $a'(0) \neq 0$. В силу предположений для семейства, получаем, что $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, $\nu(0) = \nu < 1$. Геометрически, условие общего положения означает, что при $\mu \neq 0$ след неустойчивой сепаратрисы седло-центра пересекает след устойчивого многообразия седловой периодической траектории трансверсально при изменении параметра μ . Более наглядно, это можно представить в пространстве (u, v, μ) , где отрезок $(0, 0, \mu)$ представляет однопараметрическое семейство седловых неподвижных точек отображений, прямоугольник $u = 0$ представляет семейство следов устойчивых многообразий неподвижных точек, а $v = 0$ семейство следов неустойчивых многообразий седловых неподвижных точек. Кривая следов на секущей неустойчивой сепаратрисы седло-центра для любых малых значений μ пересекает трансверсально прямоугольник $u = 0$ в единственной точке, где $\mu = 0$.

Рассмотрим точку $(0, 0)$ на диске D_2 , являющейся следом неустойчивой сепаратрисы возмущенного седло-центра. Эта точка при действии отображения $S^n(\mu) \circ T_2(\mu)$ преобразуется в $u_n = a(\mu)/f_\mu^n(\zeta)$, $v_n = (v_+ + b(\mu))f_\mu^n(\zeta)$. Условие, что эта точка лежит на линии неподвижных точек инволюции задается равенством $u_n = v_n$, т.е. $a(\mu)/f_\mu^n(\zeta) = (v_+ + b(\mu))f_\mu^n(\zeta)$, $\zeta = a(\mu)(v_+ + b(\mu))$. Запишем это уравнение относительно μ в следующем виде

$$\frac{a(\mu)}{v_+ + b(\mu)} = f_\mu^{2n}(a(\mu)(v_+ + b(\mu))) > 0.$$

Функция $r(\mu)$ в левой части определена в некоторой окрестности $\mu = 0$, $r(0) = 0$, $r'(0) = a'(0)/v_+ \neq 0$, поэтому это функция строго монотонна. Последовательность функций в правой части при $n \rightarrow \infty$ это последовательность функций определенных в окрестности нуля и равномерно стремящихся к нулю. Таким образом, при достаточно больших n для тех значений μ , где $a(\mu)$ положительно, уравнение для каждого такого n имеет единственное решение $\mu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Асимптотика значений μ_n , для которых существуют гомоклинические

траектории к седло-центру имеет следующий вид

$$\mu_n = \frac{\nu^{2n} v_+}{\alpha'(0)}.$$

Теперь покажем, что для этих значений μ_n гомоклинические траектории к седло-центру, соответствующей гамильтоновой системы удовлетворяют условию общего положения из [104]. В мозеровских координатах в окрестности седло-центра это условие означает, что матрица линеаризации глобального отображения, на следе гомоклинической траектории, отличается от матрицы поворота.

Рассмотрим $\mu = \mu_n$. Глобальное отображение в окрестности гомоклинической траектории представляет собой композицию отображений $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$, т.е.

$$x_2 = [b(\mu) + \nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)a(\mu) - \alpha(\mu)u_- + \beta(\mu)v_+ + \nu^n(\mu)\beta(\mu)b(\mu) + \\ + [\nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n\beta(\mu)\delta(\mu)]\bar{x}_2 + [\nu^{-n}(\mu)\alpha^2(\mu) - \nu^n(\mu)\beta^2(\mu)]\bar{y}_2 + \dots,$$

$$y_2 = [a(\mu) + \nu^{-n}(\mu)\gamma(\mu)a(\mu) - \gamma(\mu)u_- + \delta(\mu)v_+ + \nu^n(\mu)\delta(\mu)b(\mu)] + \\ + [\nu^{-n}\gamma^2(\mu) - \nu^n\delta^2(\mu)]\bar{x}_2 + [\nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n(\mu)\beta(\mu)\delta(\mu)]\bar{y}_2 + \dots$$

Члены нулевого порядка $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ равны нулю. Обозначим $A = \nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n\beta(\mu)\delta(\mu)$, $B = \nu^{-n}(\mu)\alpha^2(\mu) - \nu^n(\mu)\beta^2(\mu)$, $C = \nu^{-n}\gamma^2(\mu) - \nu^n\delta^2(\mu)$, $D = \nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n(\mu)\beta(\mu)\delta(\mu)$. Тогда отображение $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ записывается в следующем виде

$$x_2 = A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + \dots, \quad y_2 = C\bar{x}_2 + D\bar{y}_2 + \dots$$

Поскольку T_1^μ, S^μ, T_2^μ симплектические отображения, следовательно и их композиция $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ также является симплектическим отображением. Покажем, что композиция $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ отлична от отображения поворота. Для этого рассмотрим окружности $S_1 : x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$, $S_2 : \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 = 2\eta$ одинакового радиуса на дисках D_1, D_2 , соответственно, и докажем, что окружность S_2 под действием композиции отображений $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ пересекает S_1 в четырех точках.

Для этого воспользуемся симплектическими полярными координатами:

$$x_2 = \sqrt{2\eta} \cos \theta, \quad y_2 = \sqrt{2\eta} \sin \theta$$

$$\bar{x}_2 = \sqrt{2\eta} \cos \varphi, \quad \bar{y}_2 = \sqrt{2\eta} \sin \varphi$$

Тогда условие пересечения S_1 и $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu(S_2)$ эквивалентно уравнению:

$$1 = (A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (C \cos \varphi + D \sin \varphi)^2 \Leftrightarrow \\ \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} + \frac{A^2 + C^2 - B^2 - D^2}{2} \cos 2\varphi + (AB + CD) \sin 2\varphi = 1 \Leftrightarrow \\ \sin(2\varphi + F) = \frac{2 - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)}{\sqrt{4(AB + CD)^2 + (A^2 + C^2 - B^2 - D^2)^2}} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) имеет четыре решения на отрезке $[0, 2\pi)$, если выполнено неравенство

$$(2 - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2))^2 < 4(AB + CD)^2 + (A^2 + C^2 - B^2 - D^2)^2.$$

Учитывая, что $A = D$, $AD - BC = 1$ получаем $2 - 2A^2 - B^2 - C^2 < 0$. Подставим в последнее неравенство A, B, C $2 - 2(\nu^{-n}\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n\beta(\mu)\delta(\mu))^2 - (\nu^{-n}(\mu)\alpha^2(\mu) - \nu^n(\mu)\beta^2(\mu))^2 - (\nu^{-n}\gamma^2(\mu) - \nu^n\delta^2(\mu))^2 < 0$. После некоторых вычислений получаем $2 - (\alpha^2(\mu) + \gamma^2(\mu))^2\nu^{-2n}(\mu) + 2(\alpha^2(\mu)\beta^2(\mu) - \gamma^2(\mu)\delta^2(\mu))^2 - (\beta^2(\mu) + \delta^2(\mu))^2\nu^{2n}(\mu) < 0$. Последнее неравенство будет выполняться, начиная с некоторого $n > n_0$, так как $(\beta^2(\mu) + \delta^2(\mu))^2\nu^{2n}(\mu) \rightarrow 0$, $(\alpha^2(\mu) + \gamma^2(\mu))^2\nu^{-2n}(\mu) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, доказали, что отображение $T_1 \circ S \circ T_2$ имеет линейную часть, отличную от матрицы поворота. $\square$

Глава 2

Парные гетероклинические контуры в обратимых системах

2.1 Введение

Обратимые динамические системы (как векторные поля, так и диффеоморфизмы) появляются в качестве моделей в различных отраслях науки. В качестве нескольких примеров можно упомянуть модели в гидродинамике [6] нелинейной оптике [85], технике [79], другие примеры можно найти в работах [60, 15]. Поэтому их исследование представляет собой большой интерес как с математической, так и с прикладной точки зрения.

В данной главе изучается поведение траекторий обратимой динамической системы вблизи двух типов гетероклинических контуров. Напомним некоторые необходимые понятия. Пусть M — гладкое (C^∞) многообразие и $L : M \rightarrow M$ — гладкая инволюция, $L^2 = L \circ L = id_M$. Гладкое векторное поле v на M обратимо относительно инволюции L , если выполнено тождество $DL(v) \equiv -v \circ L$. Это означает, что если Φ^t — поток, порожденный векторным полем v , то обратный поток Φ^{-t} сопряжен с прямым потоком:

$$L(\Phi^t(x)) = \Phi^{-t}(L(x)). \quad (2.1)$$

В дальнейшем будем считать, что поток Φ^t является полным, т.е. любая его траектория определена для всех значений $\mathbb{R}$. Кроме того, будем считать, что множество неподвижных точек инволюции L , $\text{Fix}(L) \equiv \{x \in M : L(x) = x\}$ является гладким подмногообразием размерности, равной половине размерности фазового пространства, данное условие может быть выполненным, когда размерность M четная, в частности, для изучаемого здесь четырехмерного случая $\dim \text{Fix}(L) = 2$. Напомним, что траектория γ обратимого векторного поля симметрична, если она инвариантна относительно L : $L(\gamma) = \gamma$. Асимметричные траектории встречаются парами $\{\gamma, L(\gamma)\}$. Симметричными состояниями равновесия называются состояния равновесия, которые принадлежат $\text{Fix}(L)$, симметричными траекториями являются такие траектории, которые пересекают $\text{Fix}(L)$ один раз, а траектории γ , дважды пересекающие множество $\text{Fix}(L)$, являются периодическими, а их период равен удвоенному времени перехода из одной точки пересечения с $\text{Fix}(L)$ в другую [19].

В данной главе нас интересует структура траекторий гладкого обратимого векторного поля в окрестности двух типов парных гетероклинических контуров. Первый из них состоит из пары несимметричных седло-фокусов p_1, p_2 ,

$p_2 = L(p_1)$, и двух симметричных невырожденных гетероклинических траекторий Γ_i , $i = 1, 2$, соединяющих эти два седло-фокуса (см. рис. 2.1, левая часть). Для гладкого четырехмерного векторного поля седло-фокусом называется состояние равновесия p , у которого оператор линеаризация в точке p , действующий в касательном пространстве $T_p M$, имеет четверку собственных значений $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$, $\alpha_i \beta_i \neq 0$, $\alpha_1 \alpha_2 < 0$. Такое состояние равновесия имеет седловой тип, оно обладает локально двумя гладкими двумерными инвариантными многообразиями, устойчивым $W^s(p)$ и неустойчивым $W^u(p)$, трансверсально пересекающимися в точке p . Седловой величиной седло-фокуса является число $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2$. Для несимметричной пары седло-фокусов p_1, p_2 , $p_2 = L(p_1)$, их седловые величины σ_1, σ_2 имеют противоположные знаки: $\sigma_2 = -\sigma_1$. Это следует из соотношений для операторов линеаризации $A_1 = D\Phi^0(p_1)$, $A_2 = D\Phi^0(p_2)$ для p_1, p_2 , $A_2 = -DL(p_2) \circ A_1 \circ DL^{-1}(p_2)$, что означает, что собственные значения оператора линеаризации A_2 равны минус собственным значениям оператора линеаризации A_1 . Для определенности будем считать, что $\sigma_1 < 0$, тогда $\sigma_2 > 0$.

Гетероклинической траекторией векторного поля v является такая его траектория, которая стремится к различным состояниям равновесия при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$. Изучаются и другие типы гетероклинических траекторий, связывающих состояние равновесия и периодические траектории, инвариантные торы, но мы ограничимся лишь рассмотрением состояний равновесия в качестве предельных множеств. В нашем случае это будет траектория, соединяющая p_1 и p_2 . Предположим, кроме того, что обе траектории Γ_1, Γ_2 симметричны ($L(\Gamma_i) = \Gamma_i$) и невырождены (см. ниже). Гетероклиническая траектория принадлежит пересечению устойчивого многообразия одного состояния равновесия и неустойчивого многообразия другого состояния равновесия. Возьмем точку q на этой траектории и выберем некоторую секущую N к потоку, содержащую эту точку. Пересечение N с устойчивым многообразием одного седло-фокуса и с неустойчивым многообразием другого седло-фокуса для четырехмерного случая дает две гладкие кривые, проходящие через q . Невырожденность гетероклинической траектории означает, что полученные две гладкие кривые не касаются в точке q .

Вторым типом парных гетероклинических контуров в обратимой системе являются контура, состоящие из двух *симметричных* седло-фокусов $p_1, p_2 \in \text{Fix}(L)$ и двух несимметричных гетероклинических траекторий Γ_1, Γ_2 , соединяющих p_1, p_2 и переставляемых инволюцией $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$ (см. рис. 2.1, правая часть). В отличие от первого типа парных гетероклинических контуров, которые являются структурно устойчивыми объектами в классе обратимых векторных полей относительно действия инволюции L , второй тип таковым не является, поскольку гетероклиническая траектория Γ_1 (и Γ_2) несимметрична и может быть разрушена обратимым возмущением. Это следует из того, что гомо- и гетероклинические траектории не являются структурно устойчивыми объектами в классе общих векторных полей. Второй тип гетероклинических контуров ранее

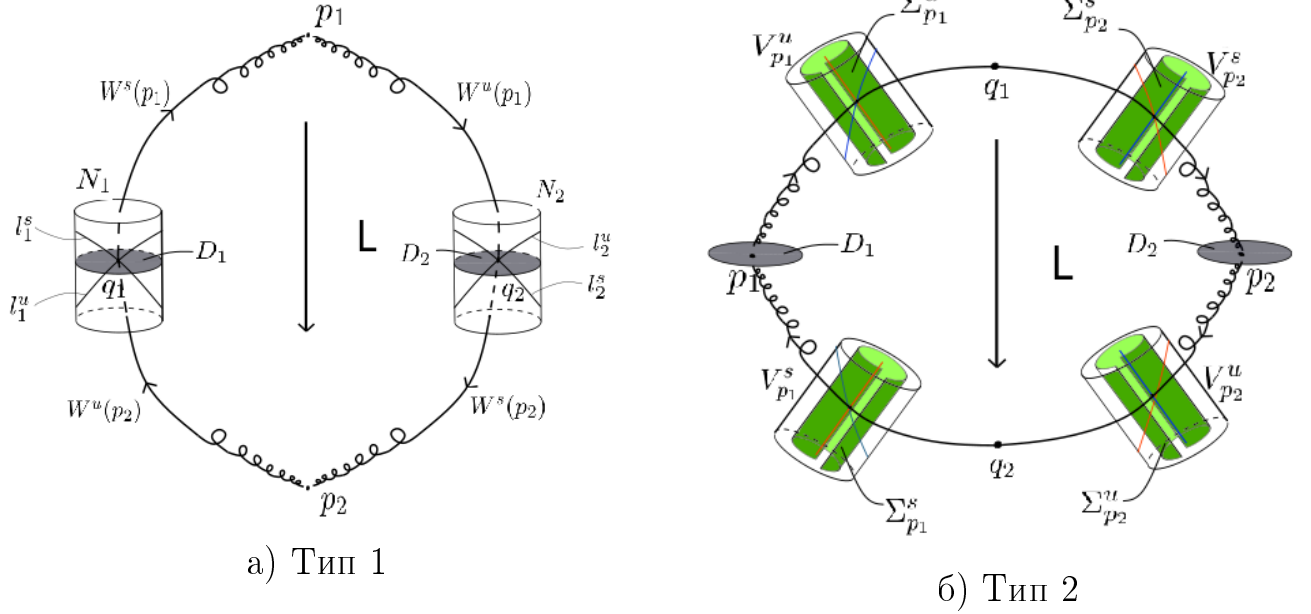


Рис. 2.1. Два типа парных гетероклинических контуров

был исследован в статье [50], где было доказано существование в их окрестности однообходных гомоклинических траекторий к одному из состояний равновесия p_i , $i = 1, 2$.

В случае парного гетероклинического контура первого типа существование двух симметричных гетероклинических траекторий Γ_i , $i = 1, 2$, означает, что локальное неустойчивое многообразие $W^u(p_2)$, продолженное потоком, пересекает устойчивое многообразие $W^s(p_1)$ вдоль Γ_1 , причем симметричность гетероклинических траекторий означает, что $L(\Gamma_1) = \Gamma_1$. То же самое справедливо и для Γ_2 , но $\Gamma_2 \subset W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$. Напомним, что симметрия траектории означает, что эта траектория пересекает множество неподвижных точек инволюции $\text{Fix}(L)$ [19]. Обозначим через $q_i = \Gamma_i \cap \text{Fix}(L)$, $i = 1, 2$. Пусть $\varphi_i(t)$ будут решения поля v , которые начинаются в точках q_i при $t = 0$, $\varphi_i(0) = q_i$. Такое решение обладает свойством симметрии $\varphi_i(t) = L\varphi_i(-t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) = p_1$ при $t \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_1(t) = p_2$ при $t \rightarrow -\infty$, и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_2(t) = p_2$ при $t \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_2(t) = p_1$ при $t \rightarrow -\infty$.

Л.П. Шильников первым обнаружил сложное поведение траекторий вблизи гомоклинической траектории к седло-фокусу с положительной седловой величиной в трехмерной системе [114, 116], позднее эти результаты были распространены на системы большей размерности [117]. Его результаты не могут быть непосредственно перенесены на случай обратимых и гамильтоновых систем, поскольку для таких систем седловые величины состояний равновесия всегда равны нулю из-за симметрии спектра матрицы линеаризации (в обратимой системе – для симметричного состояния равновесия). Девани [20] обнаружил гиперболическое подмножество (надстройку над схемой Бернулли) в окрестности

трансверсальной гомоклинической траектории гамильтоновой системы к седло-фокусу и нашел однопараметрическое семейство симметричных периодических траекторий в четырехмерной обратимой системе вблизи невырожденной гомоклинической траектории к симметричному седло-фокусу [19]. Полное поведение траекторий на особом уровне гамильтониана и бифуркации при изменении уровня гамильтониана вблизи трансверсальной гомоклинической петли седло-фокуса описаны в работах [61, 62]. Гетероклинические контура также хорошо изучены как для общих систем [86], так и для специальных систем, таких как гамильтоновы [63, 90] и обратимые [88, 50]. Много информации об этом можно найти в обзоре [42]. Многие детали поведения траекторий вблизи гомоклинической траектории к седло-фокусу, включая обратимый случай, можно найти в работах [44, 2].

Для полноты напомним изменение мультипликаторов вдоль семейства симметричных периодических траекторий. Пусть γ — некоторая симметричная периодическая траектория семейства. Такая траектория дважды пересекает подмногообразие $\text{Fix}(L)$. Пусть q — точка пересечения $\gamma \cap \text{Fix}(L)$. Напомним, что существует секущая N вблизи точки q , которая является инвариантной относительно действия инволюции L и содержит диск $\text{Fix}(L)$, следовательно, отображение Пуанкаре Φ на N в точке пересечения симметричной периодической траектории обратимо $DL \circ D\Phi = D\Phi^{-1} \circ DL$. Касательный вектор следа симметричной периодической траектории в любой его точке инвариантен относительно $D\Phi$, поэтому единица является корнем характеристического многочлена. Два других корня образуют пару μ, μ^{-1} , через μ обозначим корень, который $|\mu| \leq 1$. Таким образом, характеристический многочлен для этой траектории имеет вид $-(\mu - 1)(\mu^2 - \tau\mu + 1) = 0$. Существуют следующие типы симметричных периодических траекторий

1. *ориентируемые квазигиперболические*, когда $\tau > 2$ и $0 < \mu < 1$, ;
2. *неориентируемые квазигиперболические*, когда $\tau < -2$ и $-1 < \mu < 0$;
3. *квазиэллиптические*, когда $|\tau| < 2$ и $\mu = e^{2\pi i\omega}$, $0 < \omega < \frac{1}{2}$;
4. *параболические*, когда $\tau = \pm 2$ и, соответственно, $\mu = \pm 1$.

Таким образом, как и в случае невырожденной гомоклинической траектории к симметричному седлу-фокусу [19], следует ожидать, что при движении вдоль спирали, значение τ бесконечно много раз пройдет через ± 2 обеспечивающее переход от ориентируемых квази-гиперболических симметричных периодических траекторий к квази-эллиптическим симметричным периодическим траекториям, затем к неориентируемым квази-гиперболическим симметричным периодическим траекториям и снова к квази-эллиптическим симметричным периодическим траекториям. Но в случае гетероклинических контуров ситуация гораздо более сложна и эти задачи до сих пор остаются нерешенными.

2.2 Предварительные сведения и основные результаты

В этом разделе формулируются условия на двойные гетероклинические контура, вблизи которых изучается поведение траекторий. Симметричная гетероклиническая траектория $\Gamma_1 \subset W^s(p_1) \cap W^u(p_2)$ пересекает множество неподвижных точек инволюции $\text{Fix}(L)$ в точке q_1 , следовательно, q_1 принадлежит пересечению $W^s(p_1)$ и $\text{Fix}(L)$. Оба этих множества вблизи $q_1 \in M$ являются гладкими двумерными подмногообразиями, и предполагается, что их пересечение является трансверсальным, такую симметричную гетероклиническую траекторию будем называть *элементарной*, как и в работе [19]. То же самое предполагается и для $\Gamma_2 \subset W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$. В данной главе предполагается более сильное свойство пересечения $W^s(p_1)$ и $W^u(p_2)$ (и для Γ_2 в том числе). Как было сказано выше, существует секущая N_1 , содержащая точку q_1 такая, что N_1 содержит часть D_1 множества неподвижных точек инволюции $\text{Fix}(L)$. Вблизи точки q_1 секущая N_1 инвариантна относительно действия инволюции L . Пересечение $W^s(p_1)$ с N_1 представляет собой гладкую кривую l_1^s , которая может быть трансверсальна D_1 в точке q_1 , но может касаться D_1 в точке q_1 . То же самое справедливо и для пересечения $W^u(p_2)$ и N_1 , это гладкая кривая l_1^u . Ввиду симметрии Γ_1 и инвариантности N_1 под действием L выполняется соотношение $L(l_1^s) = l_1^u$. Итак, если l_1^s трансверсальна D_1 в N_1 , то l_1^u также трансверсальна D_1 в точке q_1 и кривые l_1^s, l_1^u неколлинеарны в точке q_1 в N_1 . В этом случае будем называть гетероклиническую траекторию Γ_1 невырожденной. Предполагается, что это условие выполнено в дальнейшем.

Для парного гетероклинического контура второго типа гетероклиническая траектория Γ_1 соединяет два симметричных седло-фокуса $p_1, p_2 \in \text{Fix}(L)$, она принадлежит множеству $W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$. Поскольку это пересечение содержит кривую Γ_1 , пересечение не может быть трансверсальным в четырехмерном пространстве M , поэтому предполагается, что это пересечение является простейшим вырожденным. Это означает следующее: зафиксируем некоторую точку $q_1 \in \Gamma_1$, тогда в касательном пространстве $T_{q_1}M$ двумерные плоскости $T_{q_1}W^u(p_1), T_{q_1}W^s(p_2)$ пересекаются друг с другом по прямой, которая является касательной к Γ_1 в точке q_1 . Выберем гладкий трехмерный диск секущую $N_1 \ni q_1$ к Γ_1 . Тогда пересечения $W^u(p_1)$ и $W^s(p_2)$ в N_1 представляют собой две гладкие кривые содержащие q_1 , их касательные векторы в точке q_1 считаются неколлинеарными. По симметрии то же самое справедливо и для $\Gamma_2 \subset W^s(p_1) \cap W^u(p_2)$.

Исследование траекторий в окрестности гетероклинического контура U в обоих случаях будет осуществляться посредством исследования связанного с ним отображения Пуанкаре на некоторых секущих для Γ_i $i = 1, 2$. Обычно наиболее технически трудоемкая часть такого исследования связана с иссле-

дованием поведения траекторий вблизи состояний равновесия. Для седлового состояния равновесия используется метод краевых задач Шильникова [81]. Для состояния равновесия типа седло-фокус воспользуемся двумя теоремами о нормальной форме. Для парного контура первого типа, когда оба седло-фокуса несимметричны, применима теорема линеаризации Белицкого, использованная в аналогичной задаче в [34, 14].

Теорема 12. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^2 -гладкий диффеоморфизм в окрестности U начала координат $f(0) = 0$ со спектром собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Если справедливы неравенства

$$|\lambda_i| \neq |\lambda_j||\lambda_k|, \quad (\forall |\lambda_j| \leq 1 \leq |\lambda_k|)$$

для всех $\{i, j, k\}$, то существует C^1 -гладкий диффеоморфизм $h : U \rightarrow U$ такой, что $h^{-1} \circ f \circ h$ — линейное отображение в $\mathbb{R}^n$, определяемое $Df(0)$.

Из теоремы следует, что если векторное поле v имеет состояние равновесия типа седло-фокус в начале координат с локальным потоком φ_t , тогда линеаризация отображения φ_1 в состоянии равновесия имеет в качестве собственных значений числа $\exp[-\alpha_1 \pm i\omega_1]$ и $\exp[\alpha_2 \pm i\omega_2]$, абсолютные значения которых равны $\exp[-\alpha_1] < 1$ и $\exp[\alpha_2] > 1$, поэтому локальный поток φ_1 линеаризуем. Отсюда следует линеаризация потока в окрестности седло-фокуса (см., например, [35]). В силу симметрии линеаризация вблизи состояния равновесия p_1 влечет за собой линеаризацию вблизи состояния равновесия $p_2 = L(p_1)$. Мы используем это позже.

Для случая двух симметричных состояний равновесия типа седло-фокус применима теорема о нормальной форме, которая следует из результатов [99] в аналитическом случае, из результатов [107] для C^∞ -гладкого случая и из результатов [1, 11] для конечно-гладкого случая $C^r, r \geq 12$.

Теорема 13. В M существует окрестность симметричного состояния равновесия и координаты (x_1, x_2, y_1, y_2) такие, что в этих координатах инволюция L действует как $(x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-y_2, -y_1, -x_2, -x_1)$ и система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -H_1(\xi, \eta)x_1 + H_2(\xi, \eta)x_2, & \dot{y}_1 &= H_1(\xi, \eta)y_1 + H_2(\xi, \eta)y_2, \\ \dot{x}_2 &= -H_2(\xi, \eta)x_1 - H_1(\xi, \eta)x_2, & \dot{y}_2 &= -H_2(\xi, \eta)y_1 + H_1(\xi, \eta)y_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $H_i, i = 1, 2$, — две функции от переменных $\xi = x_1y_1 + x_2y_2$ и $\eta = x_1y_2 - x_2y_1$, определенные в окрестности U , $H_1(0, 0) = \alpha$ и $H_2(0, 0) = \beta$. Функции H_i вещественно-аналитические, если M и v аналитичны и C^∞ -гладкие, если таковы M и v . В конечно-дифференцируемом случае функции H_i являются полиномами.

Большим преимуществом этой нормальной формы является ее интегрируемость, позволяющая построить локальное отображение вблизи симметричного седло-фокуса.

Сформулируем результаты, которые будут доказаны в данной главе. Первым результатом является теорема о существовании однопараметрического семейства периодических траекторий для парного гетероклинического контура первого типа, данная теорема была сформулирована без доказательства в работе Девани [19]

Теорема 14. Существует окрестность U гетероклинического контура $C = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ такая, что U содержит гладкое однопараметрическое семейство симметричных периодических траекторий γ_τ , накапливающихся к контуру C . Параметризацией семейства можно считать период γ_τ и γ_τ топологически стремится к контуру C при $\tau \rightarrow \infty$.

Вторым результатом является теорема о существовании счётного множества двухобходных симметричных гетероклинических контуров, содержащих состояния равновесия p_1, p_2 . Обходностью ориентируемой замкнутой кривой γ , лежащей в окрестности данной ориентируемой замкнутой кривой C , называется целое число, выражающее класс свободной гомотопии γ относительно γ т.е. C : $[\gamma] = n[C]$.

Теорема 15. Существует окрестность U гетероклинического контура $C = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ такая, что U содержит счетное множество симметричных двухобходных невырожденных гетероклинических траекторий, идущих от p_2 к p_1 при увеличении времени. Аналогично существует счетное множество симметричных двухобходных невырожденных гетероклинических траекторий, идущих от p_1 к p_2 при увеличении времени. Таким образом, взяв по одной гетероклинической траектории из этих двух семейств, получаем счетное множество гетероклинических контуров первого типа.

Эта теорема позволяет доказать существование 2^n -обходных симметричных невырожденных гетероклинических контуров, существующие в окрестностях исходного парного контура C . Но чтобы доказать существование контуров любой обходности, нужно доказать существование симметричных гетероклинических траекторий нечетной обходности. Для этой цели доказана следующая теорема

Теорема 16. Для любой окрестности контура C существует конечное число симметричных трехобходных гетероклинических траекторий, идущих при увеличении времени от p_2 к p_1 . Аналогично существует еще одно конечное семейство симметричных трехобходных гетероклинических траекторий, идущих при увеличением времени от p_1 к p_2 .

Следующая теорема касается семейства обратимых векторных полей, гладко зависящего от параметра. Пусть v_μ — такое семейство, каждое векторное поле v_μ обратимо относительно гладкой инволюция L того же типа, что и выше.

Предполагается, что векторное поле v_0 при $\mu = 0$ имеет гетероклинический контур первого типа.

Теорема 17. Предположим, что семейство v_μ удовлетворяет некоторому условию общего положения при $\mu = 0$, а именно $[\beta_1(\mu)/\beta_2(\mu)]' \neq 0$. Тогда для любой фиксированной окрестности V гетероклинического контура C при $\mu = 0$ существует последовательность μ_n , накапливающаяся к значению $\mu = 0$, такая, что векторное поле v_μ при $\mu = \mu_n$ имеет симметричную пару несимметричных гомоклинических траекторий одну к p_1 , другую к p_2 . Обе гомоклинические траектории принадлежат окрестности V .

Теорема 17 гласит, что если, кроме того, выполняется неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ то при $\mu = \mu_n$ векторное поле v_{μ_n} удовлетворяет условиям теоремы Шильникова [117] о существовании счетного множества седловых периодических траекторий (в нашем случае несимметричных) в окрестности гомоклинической траектории для p_1 . По симметрии существует аналогичное семейство несимметричных периодических траекторий в окрестности гомоклинической траектории для p_2 . Другой результат, доказанный в работе [110], гласит, что если седловое значение отрицательно для седло-фокуса p_1 , то для типичного двухпараметрического семейства существуют системы, имеющие устойчивые периодические траектории вблизи гомоклинической траектории к p_1 . Ввиду обратимости такая система имеет еще и неустойчивые периодические траектории вблизи симметричной гомоклинической траектории к p_2 , для которых седловая величина положительна. Такая ситуация говорит о том, что в этом случае система имеет смешанную динамику [28], так как фазовое пространство содержит периодические траектории устойчивого, седлового и неустойчивого типов, а также эллиптические симметричные периодические траектории. Например, такой тип гетероклинического контура встречается в одной из моделей кельтского камня [25]. Таким образом, можно действительно утверждать, что в модели кельтского камня существуют устойчивые периодические траектории.

Дальнейшие результаты касаются существования периодических и гомоклинических траекторий для контуров второго типа.

Теорема 18. Для любой окрестности U парного гетероклинического контура второго типа C и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют счетные семейства n -обходных невырожденных симметричных гомоклинических траекторий для p_i , $i = 1, 2$, и счетные однопараметрические семейства симметричных периодических траекторий.

Эта теорема была фактически доказана в статье [50], в данной работе приводится другое геометрическое доказательство.

Следующий результат касается существования двухобходных контуров вблизи первоначального контура C для обратимых семейств общего положения с

контуром второго типа. Контура включают в себя два симметричных седло-фокуса p_1, p_2 , являющихся продолжением исходных седло-фокусов и каждый такой контур содержит две невырожденные несимметричные двухобходные гетероклинические траектории, переставляемые инволюцией L .

Теорема 19. Предположим, что семейство v_μ удовлетворяет условию общего положения при $\mu = 0$. Тогда для любой фиксированной окрестности V гетероклинического контура C при $\mu = 0$ существует последовательность μ_n , накапливающаяся к значению $\mu = 0$ такая, что векторное поле v_{μ_n} имеет гетероклинический контур второго типа, включающий пару симметричных седло-фокусов и две несимметричные невырожденные двухобходные гетероклинические траектории, соединяющие седло-фокусы и переставляемые инволюцией. Обе гетероклинические траектории принадлежат окрестности V .

Условие общего положения, требуемое в теореме, будет сформулировано позже при доказательстве теоремы.

2.3 Локальное и глобальное отображения

В этом разделе используется подход из работы [59] (подраздел 2.1). Сначала уточним линеаризующие координаты в симметрично определенных окрестностях U, U' состояний равновесия p_1, p_2 , $U' = L(U)$. Обозначим через (U, φ) карту вблизи точки p_1 в которой векторное поле v линейно (2.9), поэтому $\varphi : (x, y) \rightarrow U$, (x, y) — координаты Белицкого в $\mathbb{R}^4$. Проинтегрировав векторное поле v в этих координатах получим представление потока $T(t)$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{t\alpha_1}[x_1^0 \cos(\beta_1 t) - x_2^0 \sin(\beta_1 t)], & y_1(t) &= e^{t\alpha_2}[y_1^0 \cos(\beta_2 t) - y_2^0 \sin(\beta_2 t)], \\ x_2(t) &= e^{t\alpha_1}[x_1^0 \sin(\beta_1 t) + x_2^0 \cos(\beta_1 t)], & y_2(t) &= e^{t\alpha_2}[y_1^0 \sin(\beta_2 t) + y_2^0 \cos(\beta_2 t)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим через $\Phi^t : M \rightarrow M$ поток, порожденный векторным полем v на M , тогда $T(t)$ имеет представление $T(t) = \varphi^{-1} \circ \Phi^t \circ \varphi$ для потока в окрестности U в координатах Белицкого. В силу обратимости получаем $L \circ \Phi^t = \Phi^{-t} \circ L$.

Пусть теперь $\varphi_1 : (u, v) \rightarrow U'$ — система координат в симметрично выбранной окрестности $U' = L(U)$ точки p_2 . Будем искать представление φ_1 в следующем виде $\varphi_1 = L \circ \varphi \circ R^{-1}$, где R — некоторый диффеоморфизм $R : (x, y) \rightarrow (u, v)$. Итак, имеем следующее представление:

$$T(t) = \varphi^{-1} \circ \Phi^t \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ L^{-1} \circ \Phi^{-t} \circ L \circ \varphi,$$

или, используя выражение для φ_1 , приходим к следующему выражению

$$T(t) = R^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \Phi^{-t} \circ \varphi_1 \circ R.$$

Обозначим через $T_1(t) = \varphi_1^{-1} \circ \Phi^t \circ \varphi_1$, т.е. представление Φ^t в координатах (u, v) в окрестности U' . Так как R — диффеоморфизм, то $R^{-1} \circ \Phi^{-t} \circ R$ есть не что иное, как представление $T_1(-t)$ в (u, v) -координатах. Тогда получаем связь между $T(t)$ и $T_1(t)$:

$$T(t) = R^{-1} \circ T_1(-t) \circ R. \quad (2.4)$$

До сих пор выбор R был произвольным, но теперь в качестве R возьмем линейное отображение $R(x_1, x_2, y_1, y_2) = (v_1, v_2, u_1, u_2)$. Продифференцируем обе части равенства (2.4) и положим $t = 0$, тогда получим соотношение для связанных векторных полей в координатах (x, y) и (u, v) , соответственно,

$$-\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное соотношение задает матрицу линейного векторного поля в переменных (u, v)

$$\begin{pmatrix} -\alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Напомним, что предполагается $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$, поэтому диффеоморфизм R отображает устойчивое многообразие седло-фокуса p_1 в неустойчивое многообразие седло-фокуса p_2 и наоборот.

Следующим шагом является уточнение вида глобальных отображений. Выберем секущие $\Sigma_i^s, \Sigma_i^u, i = 1, 2$, вблизи состояний равновесия p_1, p_2 как некоторые полнотории. Пересечения гетероклинических траекторий Γ_1, Γ_2 с выбранными секущими являются точки M_{ij} , где j означает номер гетероклинической траектории, а i номер состояния равновесия. В координатах (x, y) возле p_1 координаты точки M_{11} (для стремящейся к p_1 гетероклинической траектории) равны $x = x^*, y = 0$, аналогично для точки M_{12} (для стремящейся к p_1 гетероклинической траектории в обратном времени) $x = 0, y = y^*$. В полярных координатах в окрестности точки p_1 получаем $x_1^* = \rho_s \cos \theta_*, x_2^* = \rho_s \sin \theta_*, r = 0$ и $y_1^* = r_u \cos \varphi_*, y_2^* = r_u \sin \varphi_*, \rho = 0$, соответственно. Применяя инволюцию к точкам M_{11} и M_{12} , действие которой в полученных координатах равно R , получаем точки $M_{21} = R(M_{11}), M_{22} = R(M_{12})$ с координатами $u = 0, v = x^*, v = 0, u = y^*$. Соответствующие полярные координаты в окрестности точки p_2 : $v_1^* = \rho_s \cos \theta_*, v_2^* = \rho_s \sin \theta_*, u_1^* = r_u \cos \varphi_*, u_2^* = r_u \sin \varphi_*$. Для того, чтобы понять свойства глобальных отображений, а затем и свойства отображения Пуанкаре, представим глобальные отображения в некоторой удобной форме. Для этого сначала выберем локальные секущие вблизи точек M_{ij} так, чтобы секущая, содержащая точку M_{11} , была бы L -симметрична секущей, содержащей точку M_{21} и, аналогично, секущая, содержащая точку M_{12} , была L -симметрична секущей,

содержащей точку M_{22} . Это было сделано ранее, нам нужно лишь выбрать достаточно малые окрестности Π_{ij} точек M_{ij} в соответствующих полноториях.

Также напомним, что секущие N_1, N_2 вблизи точек $q_1 = \Gamma_1 \cap \text{Fix}(L)$ и $q_2 = \Gamma_2 \cap \text{Fix}(L)$ также были выбраны инвариантными относительно действия инволюции L и каждая содержит диск из многообразия $\text{Fix}(L)$. Обозначим через F_1 отображение перехода $F_1 : N_1 \rightarrow \Pi_{11}$, порожденное потоком. F_1 является диффеоморфизмом, который определен в достаточно малой окрестности точки q_1 . Выразим отображение перехода $h_1 : \Pi_{21} \rightarrow \Pi_{11}$ через отображения F_1 и L . Для это возьмем точку $b \in \Pi_{21}$ достаточно близкую к точке M_{21} и рассмотрим точку $\Phi^{t_1}(b) \in N_1$ где t_1, t_2 — времена перехода траекторий потока $\Phi^t(b)$ из точки b в N_1 и из N_1 в Π_{11} . Если траектория потока, проходящая через точку b несимметрична, относительно действия инволюции L , то точки $\Phi^{t_1}(b)$ и $L \circ \Phi^{t_1}(b) \in N_1$ порождают симметричные пары траекторий, проходящие через них. Таким образом, имеем $L^{-1}b \in \Pi_{11}$ и в силу обратимости потока и инвариантности N_1 относительно действия инволюции L , получаем

$$h_1(b) = F_1 \circ L \circ F_1^{-1} \circ L^{-1}(b), \quad (2.6)$$

и его обратное отображение $h_1^{-1} : \Pi_{11} \rightarrow N_1$

$$h_1^{-1} = L \circ F_1 \circ L^{-1} \circ F_1^{-1}. \quad (2.7)$$

Выразим полученные отображения в координатной форме. Как было сказано выше, координаты (ξ_1, η_1, ζ_1) в N_1 можно выбрать так, чтобы действие инволюции L имело вид $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \rightarrow (\xi_1, \eta_1, -\zeta_1)$ и след устойчивого многообразия $W^s(p_1)$ в N_1 являлся гладкой кривой, проходящей через точку q_1 , трансверсально к $\text{Fix}(L) = \{\zeta_1 = 0\}$. Итак, в координатах (ξ_1, η_1, ζ_1) на N_1 и (θ_1, y_1, y_2) на Σ_1 вблизи точки M_{11} у нас есть представление для отображения F_1

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_1^* &= g(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \\ y_1 &= f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \\ y_2 &= f_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \end{aligned}$$

где функции f_i, g являются гладкими, $f_1(0, 0, 0) = f_2(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$ и якобиан не обращается в ноль в точке $(0, 0, 0)$, а трансверсальность означает, что в точке $(0, 0, 0)$ справедливо неравенство

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

что геометрически означает, что F_1 -образ диска $\text{Fix}(L) \subset N_1$ в окрестность Π_{11} трансверсален следу устойчивого многообразия $W^s(p_1)$ в Σ_1 . Инволюция L , ограниченная на Σ_1 , действует в координатах следующим образом $R(\theta_1, y_1, y_2) = (u_1, u_2, \varphi_2) = (u_1, u_2, \theta_1)$. В частности, $\varphi_2^* = \theta_1^*$.

Аналогично строится отображение $h_2 : \Pi_{12} \rightarrow \Pi_{22}$. Обозначим через $F_2 : \Pi_{12} \rightarrow N_2$ отображение перехода, порожденное потоком, оно также является диффеоморфизмом. Тогда отображение h_2 выражается через F_2 и L следующим образом

$$h_2 = L \circ F_2^{-1} \circ L \circ F_2.$$

Отображение F_2 в координатах (φ_1, x_1, x_2) в Π_{12} и (ξ_2, η_2, ζ_2) в N_2 выражается следующим образом

$$\begin{aligned}\xi_2 &= A_1(\varphi_1 - \varphi_1^*, x_1, x_2), \\ \eta_2 &= A_2(\varphi_1 - \varphi_1^*, x_1, x_2), \\ \zeta_2 &= B(\varphi_1 - \varphi_1^*, x_1, x_2),\end{aligned}\tag{2.8}$$

с гладкими функциями A_i, B , $A_1(0, 0, 0) = A_2(0, 0, 0) = B(0, 0, 0) = 0$, и якобиан не обращается в нуль в точке $(0, 0, 0)$, а трансверсальность означает, что в точке $(0, 0, 0)$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial B}{\partial \varphi_1} \neq 0 \text{ в точке } (\varphi_1^*, 0, 0).$$

2.4 Доказательства

Начнем с доказательства теоремы 14. Чтобы найти симметричные периодические траектории нужно доказать, что существует траектория, пересекающая множество неподвижных точек инволюции $\text{Fix}(L)$ в двух различных точках. Для этого применим сначала теорему из работы [5]

Теорема 20. Для любой точки $m \in \text{Fix}(L)$ существует окрестность V точки m и гладкие координаты (a_1, a_2, b_1, b_2) в V такие, что окрестность V инвариантна относительно действия инволюции L и инволюция действует следующим образом $L(a_1, a_2, b_1, b_2) = (a_1, a_2, -b_1, -b_2)$. В частности, множество $\text{Fix}(L) \cap V$ задается, как $b_1 = b_2 = 0$.

Предположим, что $m \in \text{Fix}(L)$ точка удовлетворяет условиям теоремы и, что вектор $v(m)$ не принадлежит касательной плоскости $T_m \text{Fix}(L)$. Например, такими точками являются q_1, q_2 . Тогда справедливо утверждение

Лемма 4. Существует секущая $N \ni m$ для потока такая, что N содержит диск $D \subset \text{Fix}(L)$ и N инвариантна относительно действие инволюции L : $L(N) = N$.

Согласно лемме 4 выбираем две L -инвариантных секущих N_1, N_2 для потока таких, что $q_i \in N_i$, $i = 1, 2$, и эти секущие содержат диски $D_i \subset \text{Fix}(L) \cap N_i$, содержащие точки q_i . Покажем, что отображение перехода $G_1 : N_1 \rightarrow N_2$, $G_1 = F_2 \circ T_1 \circ F_1$, порожденное потоком вблизи $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, преобразует диск D_1

трансверсально диску D_2 и их пересечением является спираль $\sigma \subset N_2$, накручивающаяся на точку q_2 , следовательно, через точки спирали σ проходят симметричные периодические траектории.

Напомним, что $W^s(p_1)$ трансверсально $\text{Fix}(L)$ в точке q_1 (аналогично $W^u(p_1)$ трансверсально $\text{Fix}(L)$ в точке q_2). Из предположением о невырожденности Γ_1 следует, что пересечение $W^s(p_1) \cap N_1 = l_1^s$ является гладкой кривой, которая в N_1 трансверсальна диску D_1 в точке q_1 . По симметрии кривая $L(l_1^s) = l_1^u$ след $W^u(p_2)$ в N_1 обладает тем же свойством.

Для построения отображения перехода $G_1 : N_1 \rightarrow N_2$ выберем в окрестности U точки p_1 , в которой работает теорема линеаризации Белицкого, еще две секущие Σ_1^s, Σ_1^u к траекториям на $W^s(p_1), W^u(p_1)$, соответственно. В координатах Белицкого (x_1, x_2, y_1, y_2) система вблизи точки p_1 записывается следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2, & \dot{y}_1 &= \alpha_2 y_1 - \beta_2 y_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta_1 x_1 + \alpha_1 x_2, & \dot{y}_2 &= \beta_2 y_1 + \alpha_2 y_2,\end{aligned}\tag{2.9}$$

напомним, предполагается, что $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$, и $\beta_i > 0, i = 1, 2$.

В окрестности U удобнее работать в полярных координатах: $x_1 = \rho_1 \cos \theta_1$, $x_2 = \rho_1 \sin \theta_1$, $y_1 = r_1 \cos \varphi_1$, $y_2 = r_1 \sin \varphi_1$. В качестве секущих вблизи p_1 возьмем полнотории $\Sigma_1^s : x_1^2 + x_2^2 = \rho_s^2, y_1^2 + y_2^2 \leq \delta_s^2$, и $\Sigma_1^u : y_1^2 + y_2^2 = r_u^2, x_1^2 + x_2^2 \leq \delta_u^2$. Гетероклиническая траектория Γ_1 пересекается с Σ_1^s в точке $M_{11} = (\rho_s \cos \theta_1^*, \rho_s \sin \theta_1^*, 0, 0)$, а гетероклиническая траектория Γ_2 пересекается с Σ_1^u в точке $M_{12} = (0, 0, r_u \cos \varphi_1^*, r_u \sin \varphi_1^*)$. Затем выберем окрестности для этих точек на соответствующих окружностях, определяемых неравенствами $|\theta_1 - \theta_1^*| \leq \varepsilon$ и $|\varphi_1 - \varphi_1^*| \leq \varepsilon$ для достаточно малых положительных ε .

Для парного гетероклинического контура первого типа имеем два несимметричных седло-фокуса p_1, p_2 , переставляемых инволюцией L . Выше были введены линеаризующие координаты в окрестностях U, U' точек p_1, p_2 , согласованные с действием инволюции L . Соответствующие секущие Σ_i^s, Σ_i^u вблизи седло-фокусов p_1, p_2 будем обозначать теми же буквами с индексами 1, 2. Ввиду симметрии гетероклинических траекторий Γ_1, Γ_2 будет удобно представлять отображения перехода $h_1 : \Sigma_2^u \rightarrow \Sigma_1^s$ и $h_2 : \Sigma_1^u \rightarrow \Sigma_2^s$, порожденные потоком, через L и отображения перехода F_1, F_2 из секущей N_1 в Σ_1^s (F_1) и из Σ_1^u в N_2 (F_2). Оба отображения F_1, F_2 являются локальными диффеоморфизмами, определенными вблизи точек $q_1 \in N_1$ и $M_{12} \in \Sigma_1^u$. Отсюда следует, что F_1 -образ диска D_1 является диск $D_1^s \subset \Sigma_1^s$, который является трансверсальным в точке M_{11} к кривой – следу $W^s(p_1)$. Аналогично, F_2 -прообраз диска $D_2 \subset \text{Fix}(L) \cap N_2$ является диск $D_1^u \subset \Sigma_1^u$ трансверсальный в точке M_{12} к кривой – следу $W^u(p_1)$. Это означает, что диск D_1^s можно записать в виде графика гладкой функции $\theta_1 = h_s(r_1 \cos \varphi_1, r_1 \sin \varphi_1)$, $h_s(0, 0) = \theta_1^*$. Аналогично, у нас есть представление для $D_1^u : \varphi_1 = h_u(\rho_1 \cos \theta_1, \rho_1 \sin \theta_1)$, $h_u(0, 0) = \varphi_1^*$.

Интегрирование уравнений (2.9) в полярных координатах

$$\begin{aligned}\rho_1(t) &= \rho_s \exp[-\alpha_1 t], \quad \theta_1(t) = \theta_1^0 + \beta_1 t, \\ r_1(t) &= r_1^0 \exp[\alpha_2 t], \quad \varphi_1(t) = \varphi_1^0 + \beta_2 t.\end{aligned}\tag{2.10}$$

задает представление отображения $T_1 : \Sigma_1^s \rightarrow \Sigma_1^u$, порожденное потоком. Чтобы найти время перехода t_p траекторий из Σ_1^s в Σ_1^u , решим уравнение $r_u = r_1^0 \exp[\alpha_2 t_p]$. После подстановки времени перехода в (2.10) получим

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_s \left(\frac{r_0}{r_u}\right)^{-\alpha_1/\alpha_2} = C r_0^{\nu_1}, \quad \theta_1 = \theta_0 + \gamma_1 \ln(r_u/r_0) \pmod{2\pi}, \\ \nu_1 &= -\alpha_1/\alpha_2, \quad \gamma_1 = \beta_1/\alpha_2,\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \gamma_2 \ln(r_u/r_0) \pmod{2\pi}, \quad C = \rho_s r_u^{-\alpha_1/\alpha_2}, \quad \gamma_2 = \beta_2/\alpha_2,$$

где $(\theta_0, r_0, \varphi_0)$ — начальная точка в Σ_1^s , и $(\varphi_1, \rho_1, \theta_1)$ — точка попадания в Σ_1^u для траектории потока, проходящей через начальную точку, и остается только выбрать те начальные точки, где $|\theta_0 - \theta_0^*| \leq \varepsilon$.

В дальнейшем нам понадобится лемма, которая используется для доказательства существования многообходных гетероклинических траекторий. Заметим, что неколлинеарность в точке M_{11} некоторой гладкой кривой и части $W^s(p_1) \cap \Pi_{11}$ позволяют представить эту гладкую кривую, точнее, обе ее половины без точки M_{11} , как гладкую функцию от переменной r_0 .

Лемма 5. Пусть $\theta_0 = a(r_0), \varphi_0 = b(r_0)$, $0 \leq r_0 < r_0^*$ является гладкой кривой в Σ_1^s и $a(0) = \theta_0^*, b(0) = \varphi_0^*$, касательный вектор $(a'(0), 1, b'(0))$ к этой кривой в точке $r_0 = 0$ неколлинеарен вектору $(1, 0, 0)$ (касательный вектор к следу $W^s(p_1)$). Тогда T_1 -образ этой кривой в Σ_1^u является бесконечной спиралью такой, что пересечение полученной спирали с окрестностью точки M_{12} , определенной неравенством $|\varphi_1 - \varphi_1^*| \leq \varepsilon$, является счетным множеством отрезков J_n , которые накапливаются в C^1 -топологии при $n \rightarrow \infty$ к кривой $\rho_1 = 0$ — следу $W^u(p_1)$ в Σ_1^u .

Доказательство. T_1 -образ кривой задается в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= a(r_0) + \gamma_1 \ln(r_u/r_0) \pmod{2\pi}, \\ \rho_1 &= C r_0^{\nu_1}, \\ \varphi_1 &= b(r_0) + \gamma_2 \ln(r_u/r_0) \pmod{2\pi}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Будем считать координату φ_1 бесконечной (накрытием полнотория Σ_1^u будет бесконечный заполненный цилиндр) и выразим r_0 как функцию от φ_1 из последнего уравнения. Поскольку функция b гладкая с ограниченной производной, то производная $d\varphi_1/dr_0 = b'(r_0) - \gamma_2/r_0$ достаточно большая по модулю при достаточно малом r_0^* , поэтому не обращается в ноль и существует обратная функция

$r_0 = \Phi(\varphi_1)$, определенная для $\varphi_1 \geq \varphi_1^0$ или $\varphi_1 \leq \varphi_1^0$ в зависимости от знака γ_2 . Эта функция стремится к нулю при $\varphi_1 \rightarrow \infty$ или $\varphi_1 \rightarrow -\infty$ с экспоненциальной оценкой $\Phi(\varphi_1) \leq \kappa \exp[-\varphi_1/\gamma_2]$, $\kappa > 0$. Ниже предполагается, что $\varphi_1 \geq \varphi_1^0$, для определенности. Дифференцируя тождество $\varphi_1 = b(\Phi) + \gamma_2 \ln(r_u/\Phi)$, приходим к равенству

$$\Phi'(\varphi_1) = \frac{-r_u}{\gamma_2 - b'(\Phi)\Phi} \exp[(b(\Phi) - \varphi_1)/\gamma_2].$$

Полученное выражение дает экспоненциальную оценку и для Φ' . Итак, упаковывая кривую $(\rho_1(\varphi_1), \theta_1(\varphi_1))$ в полноторий и пересекая полученную спираль с окрестностью Π_{12} , где $|\varphi_1 - \varphi_1^*| \leq \varepsilon$, приходим к утверждению леммы. Действительно, выражение для θ_1 имеет вид: $\theta_1 = a(\Phi) - \frac{\beta_1}{\beta_2}b(\Phi) + \frac{\beta_1}{\beta_2}\varphi_1$ с ограниченной функцией $c(\Phi) = a(\Phi) - \frac{\beta_1}{\beta_2}b(\Phi)$. Возвращаясь к декартовым координатам $x_1 = \rho_1 \cos \theta_1$, $x_2 = \rho_1 \sin \theta_1$, в которых получаем выражения

$$x_1 = C\Phi^{\nu_1} \cos[c(\Phi) + \frac{\beta_1}{\beta_2}\varphi_1], \quad x_2 = C\Phi^{\nu_1} \sin[c(\Phi) + \frac{\beta_1}{\beta_2}\varphi_1],$$

с экспоненциально малыми оценками для $dx_1/d\varphi_1$ и для $dx_2/d\varphi_1$. $\square$

Чтобы найти симметричные периодические траектории, нужно доказать, что T_1 -образ диска D_1^s пересекает диск D_2^u , тогда симметричные периодические траектории будут проходить через любую точку пересечения этих дисков. T_1 -образ диска D_1^s выражается в параметрической форме через параметры (r, φ) следующим образом

$$\begin{aligned} \theta_1 &= h_s(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \gamma_1 \ln(r_u/r) \pmod{2\pi}, \\ \rho_1 &= Cr^{\nu_1}, \quad \nu_1 > 0, \\ \varphi_1 &= \varphi + \gamma_2 \ln(r_u/r) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Чтобы понять форму этого множества и его положение относительно диска D_1^u , зафиксируем значение $r = r_0$ при условии, что r_0 достаточно мало. В Σ_1^s это равенство выделяет тонкий цилиндр $r = r_0, 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi, |\theta_0 - \theta_1^*| \leq \varepsilon$, точки которого близки к кривой $r_0 = 0$. В силу трансверсальности диска D_1^s и кривой $r_0 = 0$, след $W^s(p_1)$, пересечение тонкого цилиндра с диском D_1^s задается гладкой замкнутой кривой $\theta_0 = h_s(r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$, для достаточно малого r_0 эта кривая близка к точке $r_0 = 0, \theta_0 = \theta_1^*$. T_1 -образ полученной гладкой замкнутой кривой на секущей Σ_1^u является замкнутой кривой на торе $\rho_1 = Cr_0^{\nu_1}$, близкая к замкнутой кривой $\rho_1 = 0$. Полученная замкнутая кривая на этом торе совершает полный обход за φ_1 и почти постоянна по переменной θ_1 , поскольку $h_s(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ близко к θ_1^* , а второй член в выражении для θ_1 является постоянным. Это следует из первого и третьего соотношений в (2.13).

Ограничение полученной замкнутой кривой на цилиндр $|\varphi_1 - \varphi_1^*| \leq \varepsilon$, задает кривую. Получаем, что при $r_0 \rightarrow 0$ объединение этих кривых в Σ_1^u образуют гладкую двумерную поверхность в форме свитка, которая наматывается на

центральную кривую $\rho_1 = 0$ в Σ_1^u . При этом каждая кривая этой поверхности, соответствующая фиксированному r_0 , C^1 -близка к кривой $\rho_1 = 0$. Это означает, что при достаточно малом r_0 каждая кривая пересекает диск D_1^u трансверсально только в одной точке. Объединение этих точек пересечения образует гладкую спираль σ на D_1^u , накручивающуюся на точку M_{12} . T_1 -прообраз этой гладкой спирали также является спиралью в D_1^s , накручивающейся на точку M_{11} . Итак, теорема 14 доказана. ■

Для доказательства теоремы 15 рассмотрим еще раз гладкую кривую l_1^s , являющуюся следом устойчивого многообразия $W^s(p_1)$ на секущей N_1 и найдём её след в окрестности N_2 после одного обхода вблизи нижних половин $\Gamma_1 \cup \{p_2\} \cup \Gamma_2$ (см. рис. 2.1, левая часть) при продолжении по потоку (в обратном направлении времени). Если докажем, что некоторая траектория, проходящая через точку на $l_1^s \setminus q_1$, пересекается в некоторой точке m диск $D_2 \subset \text{Fix}(L)$, то вторая половина этой траектории при изменении времени в обратном направлении, после прохождения через точку m и при $t \rightarrow -\infty$, образует по симметрии двухобходную гетероклиническую траекторию, соединяющую p_2 и p_1 . Аналогично находятся гетероклинические траектории, идущие от p_1 к p_2 , при возрастании времени, начиная с гладкой кривой l_2^s – след устойчивого многообразия $W^s(p_2)$ на секущей N_2 .

Итак, рассмотрим кривую l_1^s . Точка q_1 делит данную кривую на две части, каждая часть которой имеет представление в координатах (ξ_1, η_1, ζ_1) на N_1 , в которых $q_1 = (0, 0, 0)$, $L(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (\xi_1, \eta_1, -\zeta_1)$: $\xi_1 = a(\zeta_1)$, $\eta_1 = b(\zeta_1)$, с гладкими функциями a, b , в силу трансверсальности этой кривой с диском D_1 $a(0) = b(0) = 0$. Согласно действию инволюции L в этих координатах кривая l_1^u (след неустойчивого многообразия $W^u(p_2)$ на N_1) имеет представление $\xi_1 = a(-\zeta_1)$, $\eta_1 = b(-\zeta_1)$. Эти две кривые l_1^s , l_1^u неколлинеарны друг другу в точке q_1 , так как Γ_1 является невырожденной и обе кривые трансверсальны на D_1 . Отсюда следует, что для отображения перехода $\tilde{F}_1 : \Pi_{21} \rightarrow N_1$ порожденного потоком, $\tilde{F}_1$ -прообразы этих двух кривых l_1^s , l_1^u являются двумя гладкими кривыми в Π_{21} , одна из которых является частью следа $W^s(p_1) \cap \Sigma_2^u$, а другая частью следа $W^u(p_2) \cap \Sigma_2^u$ вблизи точки M_{21} . Так как $\tilde{F}_1$ является диффеоморфизмом, то эти две гладкие кривые также являются неколлинеарными. Итак, каждая половина гладкой кривой $W^s(p_1) \cap \Pi_{21}$ вблизи точки M_{21} записывается в координатах, как $\varphi_2 = g(\rho_2)$, $\theta_2 = h(\rho_2)$, $g(0) = \varphi_2^*$, $h(0) = \theta_2^0$ с гладкими функциями g, h , определенными на некотором отрезке $[0, \rho_*]$, $\rho_* > 0$. Здесь воспользуемся утверждением леммы 5 для отображения T_2^{-1} (аналогично (2.11)) тогда T_2 -прообразы в Σ_2^s двух половин кривой являются двумя бесконечными спиралями, наматывающимися на замкнутую кривую – след $W^s(p_2) \cap \Sigma_2^s$.

Следовательно, в окрестности Π_{22} получаем два счетных множества гладких кривых, накапливающихся в C^1 -топологии к кривой $r_2 = 0$. Следовательно, в N_2 получаем аналогичные множества кривых, накапливающихся в C^1 -топологии к кривой l_2^s – след $W^s(p_2)$. Кривая l_2^s пересекает трансверсально диск D_2 , поэтому

при достаточно малом ρ_* кривые обоих счетных множеств пересекают трансверсально диск D_2 , таким образом, получаем два счетных множества точек с предельной точкой q_2 для обоих множеств. Каждая такая точка пересечения является следом симметричной гетероклинической траектории, дважды обходящей гетероклинический контур C . Все эти гетероклинические траектории при возрастании времени идут от p_2 к p_1 .

Аналогично, начиная с кривой l_2^s , являющейся частью $W^s(p_2) \cap N_2$, находим счетное множество симметричных гетероклинических траекторий, дважды обходящих гетероклинический контур C , при возрастании времени идущие от p_1 к p_2 . Взяв по одной симметричной двухобходной гетероклинической траектории из каждого счетного множества, получим счетное множество гетероклинических контуров первого типа. Это доказывает теорему 15.

Замечание 7. Полученный метод можно итерировать, так как на каждом шаге имеется гетероклинический контур, содержащий невырожденные симметричные гетероклинические траектории. Следовательно, можно найти гетероклинические контура обходности 2^n для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теперь докажем теорему 16 о существовании трехобходных симметричных невырожденных гетероклинических траекторий. Здесь мы можем доказать существование только конечного числа таких траекторий в отличие от двухобходных. Снова начнем с гладкой кривой l_1^s . Как и выше, две половины $l_1^s \setminus \{q_1\}$ преобразуются при отображении $G_2^{-1} \circ T_2^{-1} \circ G_1^{-1} : N_1 \rightarrow N_2$ в два счетных множества гладких кривых, которые C^1 -гладко стремятся к кривой l_2^s . Кривые обоих множеств, будучи C^1 -близкими к l_2^s , пересекают трансверсально диск D_2 и через точки пересечения проходят двухобходные гетероклинические траектории. Нас интересуют такие траектории на этих кривых, не принадлежащие диску D_2 , и идущие дальше в обратном направлении времени до попадания на диск D_1 . Такая траектория будет трехобходной симметричной гетероклинической траекторией, поскольку по симметрии ее вторая часть составляет такую же траекторию. Чтобы найти такую траекторию, рассмотрим образ диска D_1 при отображении $F_2 \circ T_1 \circ F_1$. Как было доказано выше, этот образ представляет собой свиток, который бесконечно наматывается на кривую l_2^u , являющуюся его топологическим пределом. Этот свиток состоит из гладких кривых, они стремятся к l_2^u в C^1 -топологии. Кривая l_2^s не коллинеарна l_2^u и пересекает ее в точке q_2 . Это означает, что l_2^s пересекает свиток трансверсально (кроме точки q_2) в бесконечном числе точек. Итак, каждая кривая из двух счетных множеств, C^1 -близка к l_2^s и пересекает свиток трансверсально только в конечном числе точек. В принципе, среди кривых обоих счетных множеств могут существовать кривые, касающиеся свитка (или можно найти такое касание, если рассматривать семейство общего положения обратимых векторных полей). Таким образом, получаем конечное число трехобходных симметричных невырожденных гетероклинических траекторий, идущих от p_2 к p_1 . Аналогично доказывается существование конечного

числа трехобходных симметричных невырожденных гетероклинических траекторий, идущих из p_1 к p_2 . Теорема 16 доказана.

Последней задачей для контура первого типа является доказательство теоремы 17. Рассмотрим семейство v_μ обратимых векторных полей на M , которое при предельном значении параметра $\mu = 0$ имеет векторное поле v_0 , удовлетворяющее указанным выше условиям существования гетероклинического контура C первого типа. Теорема Белицкого работает и для всех достаточно малых значений $|\mu|$, единственное отличие от случая без параметра является гладкая зависимость $\alpha_i(\mu), \beta_i(\mu)$, $i = 1, 2$. Без ограничения общности можно предположить, что состояния равновесия p_i неподвижны, мы будем предполагать это позже и поэтому опускаем явную их зависимость от μ . Итак, можно считать, что все секущие для контура C , построенные выше, остаются секущими и для всех векторных полей семейства при μ достаточно близких к предельному значению $\mu = 0$. Также следы устойчивых и неустойчивых многообразий седло-фокусов в этих координатах будут выражаться одинаково. Ниже предполагается, что эти условия выполнены.

Таким образом, для всех достаточно малых $|\mu|$ векторные поля v_μ имеют два седло-фокуса p_1 и p_2 , переставляемые инволюцией, и их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются друг с другом по двум симметричным невырожденным гетероклиническим траекториям $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ для любого достаточно малого $|\mu|$. Эти траектории пересекают секущие N_1, N_2 в точках $q_1(\mu), q_2(\mu)$, принадлежащие дискам $D_1 \subset \text{Fix}(L)$ и $D_2 \subset \text{Fix}(L)$. Докажем существование несимметричных гомоклинических траекторий для p_2 , предполагая, что седловое значение для p_2 является положительным ($0 < \nu_2(0) < 1$). По симметрии парные гомоклинические траектории будут существовать и для p_1 , единственное отличие состоит в том, что седловое значение для p_1 должно быть отрицательным ($\nu_1(\mu) > 1$).

С этой целью для некоторых малых значений $|\mu|$ найдем пересечения $W^u(p_2)$ с $W^s(p_2)$. Для векторного поля v_0 знаем, что след неустойчивого многообразия $W^u(p_2)$ на секущей N_1 является гладкой кривой l_1^u , проходящей через точку q_1 , а след устойчивого многообразия $W^s(p_1) \cap N_1$ является гладкой кривой l_1^s и $L(l_1^u) = l_1^s$. Аналогично кривые $l_2^s = W^s(p_2) \cap N_2$ и $l_2^u = L(l_2^s)$ определены на секущей N_2 , в обоих случаях они пересекаются неколлинеарно в точках q_1 и q_2 , соответственно.

Отобразим кривую l_2^s в обратном направлении времени в окрестность точки p_1 , т.е. на секущую Π_{12} , которая отобразится в гладкую кривую $\tilde{w}_2^s$. Последняя кривая неколлинеарна кривой $w_1^u = W^u(p_1) \cap \Pi_{12}$. Аналогично, кривую l_1^u отобразим в прямом направлении времени до секущей Π_{11} и получим гладкую кривую $\tilde{w}_2^u$ – след $W^u(p_2)$. Полученная кривая пересекает кривую $w_1^s = W^s(p_1) \cap \Pi_{11}$ в точке M_{11} неколлинеарно. Продолжая с помощью потока при возрастании времени, через окрестность седло-фокуса p_1 , траектории проходящие через точки $\tilde{w}_2^u$, получим в Π_{12} два счетных множества гладких кривых, накапливающих-

ся в C^1 -топологии к кривой w_1^u . Для семейства v_μ соответствующая кривая $\tilde{w}_2^u$ будет гладко зависеть от μ (т.е. гладкая зависимость $W^u(p_2)$ от μ) и аналогично кривая $\tilde{w}_2^s$ также гладко зависит от μ . Теперь нам нужно доказать, что при изменении параметра μ можно найти пересечение счетного множества кривых с $\tilde{w}_2^s$. Переход от Π_{11} к Π_{12} задается отображением (2.12), все коэффициенты которого гладко зависят от μ . Имеет место следующая лемма

Лемма 6. Рассмотрим отображение (2.12) и две гладкие кривые в окрестности седло-фокуса p_1 одна из которых $\tilde{w}_2^u$, неколлинеарно пересекается с w_1^s в точке M_{11} , а другая $\tilde{w}_2^s$, неколлинеарно пересекается с w_1^u в точке M_{12} . Тогда существуют две последовательности $\mu_n^{(\sigma)} \rightarrow 0$, $\sigma = \pm 1$, такие, что при $\mu = \mu_n^{(\sigma)}$ векторное поле $v_{\mu_n^{(\sigma)}}$ имеет две траектории, которые начинаются на кривой $\tilde{w}_2^u(\mu_n^{(\sigma)})$ и проходят через кривую $\tilde{w}_2^s(\mu_n^{(\sigma)})$.

Доказательство. Приведем доказательство, опуская некоторые детали расчета. Начало доказательства данной леммы напоминает начало доказательства леммы 5. В координатах $(\theta_0, r_0, \varphi_0)$ в Π_{11} кривая $\tilde{w}_2^u$ в силу ее неколлинеарности в точке M_{11} с кривой $w_1^s = \{r_0 \equiv 0\}$ имеет представление $\theta_0 = a_\pm(r_0, \mu)$, $\varphi_0 = b_\pm(r_0, \mu)$, $0 \leq r_0 \leq \delta$. Здесь гладкая кривая $\tilde{w}_2^u$ представляется как объединение двух ее частей с общей точкой M_{11} . Эти части задаются дифференцируемыми функциями $a_\pm, b_\pm$, где $a_\pm(0, \mu) = \theta_1^*(\mu)$, $(a'_+(0, \mu), b'_+(0, \mu)) = -(a'_-(0, \mu), b'_-(0, \mu))$. Докажем утверждения для одной части кривой, поэтому ниже опускаем индексы $\pm$. Как и в лемме 5, образ кривой $\tilde{w}_2^u$ в Π_{12} при локальной отображении $T_1(\mu)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\theta_1 &= a(r_0, \mu) + \gamma_1(\mu) \ln(r_u/r_0) \pmod{2\pi}, \\ \rho_1 &= Cr_0^{\nu_1(\mu)}, \\ \varphi_1 &= b(r_0, \mu) + \gamma_2(\mu) \ln(r_u/r_0) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Снова решим третье уравнение относительно r_0 , рассматривая μ как параметр, а φ_1 как бесконечную координату в универсальном накрытии полнотория Σ_1^u . Получаем обратную функцию $r_0 = \Phi(\varphi_1, \mu)$, определенную в области $\varphi_1 \geq \varphi_1^0$, $|\mu| \leq \kappa$. Эта функция экспоненциально быстро убывает до нуля при $\varphi_1 \rightarrow \infty$. Подставляя эту функцию в первое и второе соотношения получим представление кривой в заполненном цилиндре, представляющем половину ($\varphi_1 \geq \varphi_1^0$) накрытия полнотория Σ_1^u

$$\begin{aligned}\rho_1 &= C\Phi^{\nu_1(\mu)}(\varphi_1, \mu), \quad \nu_1(0) > 1, \\ \theta_1 &= \Theta(\varphi_1, \mu) = a(\Phi, \mu) + \gamma_1(\mu) \ln(r_u/\Phi) = c(\Phi(\varphi_1, \mu), \mu) + \frac{\beta_1(\mu)}{\beta_2(\mu)}\varphi_1,\end{aligned}$$

где $c(\Phi(\varphi_1, \mu), \mu) = a(\Phi, \mu) - (\beta_1(\mu)/\beta_2(\mu))b(\Phi, \mu)$. Функция $C\Phi^{\nu_1(\mu)}$ и ее производная по φ_1 удовлетворяют экспоненциальной оценке равномерно по μ . В

частности, для любого фиксированного параметра μ эта функция стремится к нулю экспоненциально быстро, поскольку φ_1 стремится к бесконечности. Следовательно, если ограничить график вектор-функции (ρ_1, θ_1) на множестве $|\varphi_1 - \varphi_1^*(\mu)| \leq \varepsilon$ в полнотории Σ_1^u , то получаем в Π_{12} , как и в лемме 5, счетное множество гладких кривых, каждая из которых соответствует интервалу $2\pi n + \varphi_1^* - \varepsilon \leq \varphi_1 \leq 2\pi n + \varphi_1^* + \varepsilon$. В Π_{12} полученное счетное множество криволинейных отрезков накапливается в C^1 -топологии, при $n \rightarrow \infty$, к кривой $\rho_1 = 0$. Зависимость любой такой кривой от угловой переменной θ_1 описывается функцией $\Theta(\varphi_1, \mu)$ при фиксированном n .

Вторая кривая $\tilde{w}_2^s$ имеет аналогичное представление в Π_{12} $\theta_1 = A_{\pm}(\rho_1, \mu)$, $\varphi_1 = B_{\pm}(\rho_1, \mu)$ с ограниченными дифференцируемыми функциями $A_{\pm}, B_{\pm}$, $A_+(0, \mu) = \theta_2^1(\mu)$, $A_-(0, \mu) = \theta_2^1(\mu) + \pi$, $B_{\pm}(0, \mu) = \varphi_1^*(\mu)$ и связанные с ними равенствами для их производных, выражающие гладкость всей кривой $\tilde{w}_2^s$ в точке M_{12} . Снова работаем только с одной из частей этой кривой и поэтому опускаем индексы $\pm$.

Для того чтобы понять, как каждая кривая из счетного множества в Π_{12} движется в угловом направлении θ_1 при изменении параметра μ . Для этого вычислим производную Θ по μ , используя обозначения $b_{\mu}, b_{r_0}, c_{\mu}, c_{r_0}$ для частных производных соответствующих переменных

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mu} = c_{r_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + c_{\mu} + \frac{\beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2'}{\beta_2^2} \varphi_1 = c_{r_0} \frac{\Phi b_{\mu} + \gamma_2' \Phi \ln(r_u / \Phi)}{\gamma_2 - \Phi b_{r_0}} + c_{\mu} + \frac{\beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2'}{\beta_2^2} \varphi_1. \quad (2.14)$$

Функции $c_{r_0}, c_{\mu}, b_{r_0}, b_{\mu}$ ограничены и непрерывны, Φ как функция от φ_1 стремится к нулю экспоненциально быстро, равномерно по μ , при $\varphi_1 \rightarrow \infty$. Таким образом, если величина $(\beta_1 / \beta_2)'(0)$ не обращается в ноль (данное условие является условием общего положения для семейства), то при достаточно больших φ_1 , т.е. для кривых семейства с большими номерами n , производная велика по модулю (т.е. они быстро вращаются по направлению θ_1 при изменении μ) или обратные функции $\mu = M_n(\theta_1, \varphi_1)$ существуют и их производные $\partial M_n / \partial \theta_1$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по φ_1 для любого n .

Теперь зафиксируем некоторое достаточно малое $\kappa > 0$ и рассмотрим прямое произведение $\Sigma_1^u \times (-\kappa, \kappa)$. Для любого $\mu \in (-\kappa, \kappa)$ имеем гладкую кривую в Σ_1^u , заданную как $\theta_1 = A(\rho_1, \mu)$, $\varphi_1 = B(\rho_1, \mu)$, пересекающую неколлинеарно след $\rho_1 = 0$, $W^u(p_1)$ в точке $\varphi_1 = \varphi_1^*(\mu)$, $\varphi_1^*(0) \in (\varphi_1^* - \varepsilon, \varphi_1^* + \varepsilon)$. Теперь нужно найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} A(\rho_1, \mu) = \Theta(\varphi_1, \mu), \\ \varphi_1 - 2\pi n = B(\rho_1, \mu), \\ \rho_1 = C\Phi^{\nu_1(\mu)}(\varphi_1, \mu), \end{cases}$$

где $\mu \in (-\kappa, \kappa)$ и при фиксированном достаточно большом $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\varphi_1 \in (2\pi n + \varphi_1^* - \varepsilon, 2\pi n + \varphi_1^* + \varepsilon)$. Подставляя φ_1 из второго уравнения в третье

уравнение, задает уравнение, зависящее от μ , относительно неизвестной переменной ρ_1 , откуда находим ρ_1 как функцию от μ : $\rho_1 = h_n(\mu)$. Так, как функция Φ экспоненциально убывает при достаточно больших n . Наконец, подставляем φ_1 в первое уравнение и после этого подставляем туда функцию h_n вместо ρ_1 . Тогда получается уравнение относительно параметра μ , которое решается с использованием большой производной Θ по переменной μ в силу (2.14). Здесь условие общего положения подразумевает, что при изменении параметра μ кривая $l_2^u(\mu)$ будет двигаться так, что она пересекает в счетном числе значений μ_n кривые счетных семейств неколлинеарно, каждая точка пересечения дает пересечение устойчивого и неустойчивого многообразия точки $p_2(\mu)$. Это завершает доказательство. $\square$

2.5 Второй тип парного гетероклинического контура

В данном разделе изучаются гомоклинические траектории и семейства симметричных периодических траекторий вблизи парного гетероклинического контура второго типа, состоящего из пары симметричных состояний равновесия типа седло-фокус $p_1, p_2 \in \text{Fix}(L)$ и пары соединяющих их несимметричных гетероклинических траекторий Γ_1, Γ_2 , переставляемых инволюцией: $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$. Также в этом разделе представлено доказательство существования 2-обходных гетероклинических контуров второго типа для общего однопараметрического семейства обратимых систем с контуром второго типа.

В окрестностях симметричных седло-фокусов $p_i, i = 1, 2$, используются координаты (2.2), где функции ξ и η являются локальными интегралами векторного поля. До сих пор мы работали в окрестности симметричного седло-фокуса p_1 , но то же самое справедливо и вблизи седло-фокуса p_2 . Для упрощения обозначений в этом разделе опускаются подиндексы 1, 2.

Замечание 8. На самом деле, можно также использовать линеаризующие координаты Белицкого, как это было сделано в [34, 50, 44, 2], этого достаточно для получения результатов в этом разделе, но этот инструмент не очень подходит для бифукарционных целей, которые мы намерены развивать в дальнейших исследованиях. Поэтому мы хотим использовать другой инструмент нормальной формы, который работает для этого случая при любом предположении гладкости.

Поскольку H_1 и H_2 зависят только от инвариантов ξ, η , то они постоянны вдоль траекторий, и выражение (2.2) фактически является линейной системой с постоянными коэффициентами и поэтому может быть проинтегрировано

$$x(t) = e^{-tH_1} R_{tH_2} x(0), \quad y(t) = e^{tH_1} R_{tH_2} y(0), \quad (2.15)$$

где H_1 и H_2 оцениваются при постоянных значениях инвариантов ξ, η в начальной точке $x(0), y(0)$, а R_θ — матрица поворота на угол θ . Будем считать далее, без потери общности, что $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, этого всегда можно добиться линейной заменой переменных.

Устойчивое и неустойчивое многообразия точки p задаются в следующем виде:

$$W^s = \{y_1 = y_2 = 0\}, \quad W^u = \{x_1 = x_2 = 0\},$$

а действие инволюции определяется как

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-y_2, -y_1, -x_2, -x_1).$$

Итак, плоскость неподвижных точек инволюции (фактически это двумерный диск) определяется равенствами:

$$\text{Fix}(L) = \{x_1 + y_2 = 0, x_2 + y_1 = 0\}.$$

Форма (2.15) позволяет построить локальное отображение. Для этого определим две трехмерные секущие N^s и N^u к устойчивому и неустойчивому многообразиям, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} N^s &= \{x_1^2 + x_2^2 = \rho^2, y_1^2 + y_2^2 \leq \delta^2\}, \\ N^u &= \{y_1^2 + y_2^2 = \rho^2, x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2\}. \end{aligned}$$

Каждая из этих секущих представляет собой полноторий. Мы выбрали их так, чтобы они были симметричны друг другу, так что $L(N^s) = N^u$, и наоборот.

Поскольку устойчивое многообразие седло-фокуса p соответствует множеству $y = 0$, его пересечение с N^s является окружностью $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2, y_1 = y_2 = 0$, и пересечение гетероклинической траектории Γ_2 (в дальнейшем это будет $p_1, p_2, \Gamma_1, \Gamma_2, N_1^s, N_1^u$, и т.д.) с N^s является точкой с координатами $(x_1^*, x_2^*, 0, 0)$. Так как секущие переставляются инволюцией L , следовательно след W^u на N^u является окружностью $y_1^2 + y_2^2 = \rho^2, x_1 = 0, x_2 = 0$, а след $\Gamma_1 \cap N_1^u$ соответствует точке с координатами $(0, 0, -x_2^*, -x_1^*)$ в соответствии с действием L .

Для построения локального отображения удобно использовать локальные интегралы (ξ, η) как координат на N^s и N^u вместе с угловыми координатами θ, φ . Обозначим через θ^* угол на окружности, соответствующий следу Γ_1 , определенный соотношениями $x_1^* = \rho \cos \theta^*, x_2^* = \rho \sin \theta^*$. Тогда на N^s имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos(\theta + \theta^*), & y_1 &= \rho^{-1}(\xi \cos(\theta + \theta^*) - \eta \sin(\theta + \theta^*)), \\ x_2 &= \rho \sin(\theta + \theta^*), & y_2 &= \rho^{-1}(\xi \sin(\theta + \theta^*) + \eta \cos(\theta + \theta^*)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

так, что

$$N^s = \{(\xi, \eta, \theta) : \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \rho\delta, \theta \in S^1\}.$$

Заметим, что в этих координатах $W^s \cap N^s$ является окружностью $\xi = \eta = 0$, а $\Gamma_1 \cap N^s = (0, 0, 0)$.

Аналогично определим угол φ на N^u так, что $\varphi = 0$ соответствует $L(\Gamma_2) \cap N^u$. Из симметрии следует, что $\varphi^* = 3\pi/2 - \theta^*$, поскольку тогда $-\rho \sin \theta^* = \rho \cos \varphi^*$, $-\rho \cos \theta^* = \rho \sin \varphi^*$. Таким образом, на N^u имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho^{-1}(\xi \sin(\varphi - \theta^*) - \eta \cos(\varphi - \theta^*)), & y_1 &= \rho \sin(\varphi - \theta^*), \\ x_2 &= \rho^{-1}(-\xi \cos(\varphi - \theta^*) - \eta \sin(\varphi - \theta^*)), & y_2 &= -\rho \cos(\varphi - \theta^*), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$N^u = \{(\xi, \eta, \varphi) : \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \rho\delta, \varphi \in S^1\}.$$

Как и раньше, $W^u \cap N^u$ является окружностью $\xi = \eta = 0$, а пересечение $\Gamma_2 \cap N^u$ является началом координат $(0, 0, 0)$.

Наконец, в новых системах координат ограничение инволюции $L : N^s \rightarrow N^u$ представляется в следующем виде

$$L(\xi, \eta, \theta) = (\xi, \eta, \varphi) = (\xi, \eta, -\theta). \quad (2.18)$$

Теперь можно построить локальное отображение $T : N^s \rightarrow N^u$, порожденное потоком (2.15). Время перехода t_p из N^s в N^u определяется из уравнения $\|y(t_p)\|^2 = \rho^2$ и равно

$$t_p = \frac{1}{H_1(\xi, \eta)} \ln \frac{\rho}{\|y(0)\|}.$$

Поскольку ξ, η — локальные интегралы, локальное отображение в этих координатах задается формулой

$$(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \varphi) = T(\xi, \eta, \theta) = (\xi, \eta, s(\xi, \eta, \theta)), \quad (2.19)$$

где $s(\xi, \eta, \theta)$ — отображение окружности от переменной θ . Чтобы найти вид s , подставим время перехода t_p в уравнения для $y(t)$ в (2.15). Воспользуемся выражением $\|y(0)\|^2 = (\xi^2 + \eta^2)/\rho^2$ и (2.17), после несложных вычислений получаем

$$\varphi = s(\xi, \eta, \theta) = \theta + 2\theta^* + \pi/2 - \Delta(\xi, \eta) + \Phi(\xi, \eta) \pmod{2\pi}, \quad (2.20)$$

где полярный угол $\Phi(\xi, \eta)$ определяется в плоскости (ξ, η) , следующим образом

$$\xi = d \cos \Phi, \quad \eta = d \sin \Phi,$$

и сдвиг

$$\Delta(\xi, \eta) \equiv H_2 t_p = \frac{H_2}{H_1} \ln \frac{\rho^2}{d}.$$

Теперь докажем существование невырожденных симметричных гомоклинических траекторий. Для этого нужно найти пересечение неустойчивого многообразия $W^u(p_2)$ с диском $D_1 \subset \text{Fix}(L)$ вблизи седло-фокуса p_1 и аналогично $W^u(p_1)$ с диском $D_2 \subset \text{Fix}(L)$ вблизи седло-фокуса p_2 . По симметрии получим вторые половины соответствующих гомоклинических траекторий.

Для этого докажем сначала вспомогательную лемму

Лемма 7. Образ локального диска $D_1 \subset \text{Fix}(L)$ вблизи седло-фокуса p_1 на секущей N_1^u при локальном отображении T_1 представляет собой свиток Sc_1^u , бесконечно много раз наматывающийся на окружность $W_1^u \cap N_1^u$. Свиток трансверсален любому диску $\varphi_1 = \text{const}$ для любого значения φ_1 из отрезка $[0, 2\pi]$, задающий в пересечении спираль с предельной точкой $\xi = \eta = 0$ этого диска.

Доказательство. Выберем локальный диск $D_1 \subset \text{Fix}(L)$ вблизи седло-фокуса p_1 и найдем его образ на секущей N_1^u . В координатах (x, y) (2.2) получаем, что множество неподвижных точек инволюции имеет вид $\text{Fix}(L) = \{x_1 = -y_2, x_2 = -y_1\}$. Следовательно, мы можем использовать y в качестве локальных координат на D_1 . Воспользуемся полярными координатами для y , $(y_1, y_2) = (d_1 \cos \chi_1, d_1 \sin \chi_1)$, так что D_1 соответствует множеству $0 \leq d_1 \leq \rho_1/2$, $0 \leq \chi_1 \leq 2\pi$.

В соответствии с действием локального потока (2.15), время перехода точки $y(0) \in D_1$ на N_1^u равно

$$\tau_p = \frac{1}{H_1^1(\xi_1, \eta_1)} \ln \frac{\rho_1}{d_1} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + O(d_1^2) \right) \ln \frac{\rho_1}{d_1},$$

так как $\xi_1 = -d_1^2 \sin 2\chi_1$ и $\eta_1 = d_1^2 \cos 2\chi_1$. Используя координаты $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1)$ на N_1^u (см. (2.17)), из уравнений в (2.15) для y_1 получаем отображение окружности $\chi_1 \rightarrow \varphi_1$:

$$\varphi_1 = \chi_1 + \pi/2 + \theta_1^* - (\beta_1/\alpha_1 + O(d_1^2)) \ln(d_1/\rho_1) \pmod{2\pi}. \quad (2.21)$$

Это означает, что каждая окружность $\|y^1(0)\| = d_1$ на диске D_1 преобразуется в замкнутую кривую на N_1^u , лежащую на торе $\xi_1^2 + \eta_1^2 = d_1^4$ и имеющую гомологию $(1, 1)$ относительно стандартных образующих φ_1 и $\varphi_1 = \text{const}$. Таким образом, только часть этой кривой $|\varphi_1| \leq \varepsilon_1$ принадлежит окрестности $V_1^u \subset N_1^u$:

$$V_1^u = \{(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \in N_1^u : |\varphi_1| \leq \varepsilon_1\}.$$

Прообраз этой кривой на диске D_1 представляет собой дугу исходной окружности. Из (2.20) следует, что крайними точками дуги являются точки $\chi_1^\pm(d_1) = \pm\varepsilon_1 - \pi/2 - \theta_1^* + (\beta_1/\alpha_1 + O(d_1^2)) \ln(\rho_1/d_1)$. Таким образом, при $d_1 \rightarrow 0$ получаем два бесконечных луча, проходящих через эти крайние точки, которые бесконечно много раз вращаются по спирали вокруг точки $(0, 0)$ в D_1 . Эти две спирали вместе с граничной дугой на окружности $d_1 = \rho_1/2$, образуют толстую спираль, которая представляет все точки на D_1 , которые отображаются в V_1^u локальным потоком. Образ толстой спирали под действием отображения, заданного траекториями потока, представляет собой свиток $\Sigma_1^u \subset V_1^u$, который бесконечно много раз наматывается на кривую $W^u(p_1) \cap V_1^u$. $\square$

Аналогично, если выбрать локальный диск $D_2 \subset \text{Fix}(L)$ вблизи точки p_2 и найти его прообраз под действием отображения, заданного траекториями потока, в N_2^u , то, рассуждая так же, как и выше, получим свиток $\Sigma_2^s \subset V_2^s$, который бесконечно много раз наматывается на след $W^s(p_2) \cap V_2^s$.

Рассмотрим теперь глобальное отображение $S_1 : N_1^u \rightarrow N_2^s$, определенное вблизи точки $q_1^u = \Gamma_1 \cap N_1^u$. Это отображение является диффеоморфизмом, оно принимает значения вблизи точки $q_1^s = \Gamma_1 \cap N_2^s$. Для S_1 выполняется равенство $S_1(q_1^u) = q_1^s$ и S_1 отображает след неустойчивого многообразия $W^u(p_1)$ – гладкую кривую, проходящую через точку q_1^u в гладкую кривую, проходящую через точку q_1^s , неколлинеарную в точке q_1^s к кривой $W^s(p_2) \cap N_2^s$. Покажем, что две поверхности Σ_1^u и $S_1^{-1}(\Sigma_2^s)$ пересекаются в счетном множестве спиралевидных кривых, размеры которых уменьшаются при приближении к точке пересечения q_1^u двух неколлинеарных гладких кривых – следов неустойчивых $W^u(p_1)$ и устойчивых $W^s(p_2)$ многообразий. То есть, пересечение двух свитков дает последовательность кривых, стремящихся к пересечению точек следов $W^u(p_1)$ и $W^s(p_2)$. Каждой такой спиралевидной кривой будет соответствовать однопараметрическое семейство симметричных периодических траекторий, целиком лежащих в окрестности гетероклинического контура C .

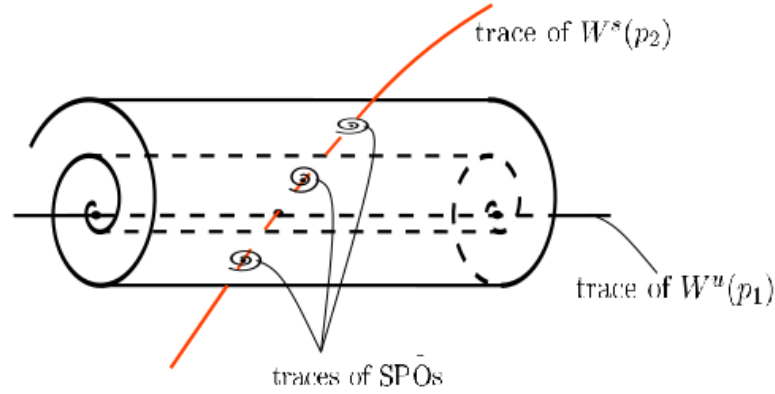


Рис. 2.2. Пересечение Σ_1^u и Σ_1^s со следами симметричных периодических траекторий.

Как было сказано выше, координатами на N_1^u являются $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1)$. След устойчивого многообразия $W^s(p_2)$ на N_1^u является гладкой кривой l_1^s , заданной параметрически следующим образом $(\xi_1(\gamma), \eta_1(\gamma), \varphi_1(\gamma))$ с гладкими функциями ξ_1, η_1, φ_1 , где γ — параметр кривой. Например, используя отображение S_1 , можно принять θ_2 , изменяющуюся вблизи θ_2^* , за γ . Предполагается, что $\gamma = 0$ соответствует точке пересечения $q_1^s = (0, 0, \varphi_1^*)$, следовательно, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \varphi_1(\gamma) = \varphi_1^*$, при $\gamma \rightarrow 0$. Предположение о невырожденности Γ_1 означает, что касательный вектор $(\xi_1'(0), \eta_1'(0), \varphi_1'(0))$ не коллинеарен касательному вектору $(0, 0, 1)$ к следу $W^u(p_1)$, т.е. $[\xi_1'(0)]^2 + [\eta_1'(0)]^2 \neq 0$.

Теперь найдем сначала точки пересечения Σ_1^u с l_1^s . Они соответствуют следам симметричных гомоклинических траекторий к p_2 . Как известно из теоремы Девани [19], для каждой симметричной гомоклинической траектории к симметричному седло-фокусу (здесь это p_2) существует однопараметрическое семейство симметричных периодических траекторий, накапливающихся к этой гомокли-

нической траектории. Здесь мы доказываем существование счетного множества симметричных гомоклинических траекторий для p_2 и связанных с ними множеств симметричных периодических траекторий.

Свиток Σ_1^u в параметрической форме с параметрами (d_1, χ_1) , изменяющимися на D_1 , задается следующим образом, аналогично (2.21),

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -d_1^2 \sin(2\chi_1), \\ \eta_1 &= d_1^2 \cos(2\chi_1), \\ \varphi_1 &= \chi_1 + \frac{\pi}{2} + \theta_1^* - \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + O(d_1^2)\right) \ln \frac{d_1}{\rho_1} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Таким образом, точки пересечения свитка Σ_1^u и l_1^s определяются решениями системы

$$\begin{cases} \xi_1(\gamma) = -d_1^2 \sin(2\chi_1), \\ \eta_1(\gamma) = d_1^2 \cos(2\chi_1), \\ \varphi_1(\gamma) = \chi_1 + \frac{\pi}{2} + \theta_1^* - \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + O(d_1^2)\right) \ln \frac{d_1}{\rho_1} \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Лемма 8. Существует достаточно малое d_1^0 , такое что для $0 < d_1 \leq d_1^0$ система (2.22) имеет счетное множество решений $(\gamma_n, d_1^{(n)}, \chi_1^{(n)})$, где следующие пределы имеют место при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim \gamma_n = 0, \quad \lim d_1^{(n)} = 0.$$

В точках пересечения Σ_1^u с l_1^s пересечение является трансверсальным.

Доказательство. Так как $[\xi_1'(0)]^2 + [\eta_1'(0)]^2 \neq 0$, то по крайней мере, одна из производных $\xi_1'(0)$ или $\eta_1'(0)$ не обращается в ноль. Предположим, для определенности, что $\xi_1'(0) \neq 0$. Тогда из первых двух уравнений из (2.22) можем выразить $\xi_1(\gamma)\sqrt{1 + [\beta_1(\gamma)/\xi(\gamma)]^2} = d_1^2$. Применяя правило Лопиталя для выражения под квадратным корнем, приходим к выводу о существовании предела $\tau_0 = \lim \eta_1(\gamma)/\xi_1(\gamma)$, при $\gamma \rightarrow 0$. Обозначим через $\tau(\gamma) = \eta_1(\gamma)/\xi_1(\gamma)$. Тогда из уравнения $\xi_1(\gamma)\sqrt{1 + \tau^2(\gamma)} = R$, $R = d_1^2$, по теореме о неявной функции получаем единственное решение $\gamma = b(R)$, $b(0) = 0$, $b'(0) = 1/\xi_1'(0)\sqrt{1 + \tau_0^2}$.

Теперь из первого уравнения из (2.22) получаем $\sin(2\chi_1) = -\xi_1(b(R))/R$. Функция в правой части имеет предел при $R \rightarrow 0$ равный $-1/\sqrt{1 + \tau_0^2}$. Итак, уравнение имеет два решения $c(R) = \pm \frac{1}{2} \arcsin(\xi_1(b(R))/R)$ на каждом отрезке $[-\pi/2 + n\pi, -\pi/2 + n\pi]$.

Наконец, рассмотрим последнее уравнение системы, где вместо γ и χ_1 подставим соответствующие функции $b(d_1^2)$ и $c(d_1^2) + n\pi/2$. Запишем его в следующем виде

$$\varphi_1(b(d_1^2)) - c(d_1^2) - \theta_1^* - (n+1)\frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + O(d_1^2)\right) \ln \frac{d_1}{\rho_1} \pmod{2\pi}.$$

Принимая во внимание, что функция в правой части монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $d_1 \rightarrow +0$, а функция в левой части является конечно-гладкой, приходим к выводу, что для достаточно малого положительного d_1 , существуют два решения $d_1^{(k)}, \tilde{d}_1^{(k)}$ системы на каждом 2π -периоде.

Полученное счетное множество точек на l_1^s – это те точки, через которые проходят симметричные гомоклинические траектории к p_2 , поскольку эти траектории $W^s(p_2)$ пересекаются $\text{Fix}(L)$ и, в силу симметрии, они возвращаются в обратном времени к состоянию равновесия p_2 .

Теперь покажем, что в каждой точке пересечения кривая l_2^s трансверсальна свитку Σ_1^u . Изменяя параметр $d_1^2 = R$ и вычисляя в точке пересечения определитель, составленный из трех касательных векторов: $(\xi_1', \eta_1', \varphi_1')$ к кривой $l_1^s, (\partial\xi_1/\partial R, \partial\eta_1/\partial R, \partial\varphi_1/\partial R)$ и $(\partial\xi_1/\partial\chi, \partial\eta_1/\partial\chi, \partial\varphi_1/\partial\chi)$ – к свитку Σ_1^u . Получаем

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & -\sin(2\chi_1) & -2R\cos(2\chi_1) \\ \eta_1' & \cos(2\chi_1) & -2R\sin(2\chi_1) \\ \varphi_1' & -C\ln\frac{\sqrt{R}}{\rho_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + O(R)\right)\frac{1}{R} & 1 \end{vmatrix},$$

Для оценки полученного определителя учтем, что в точке пересечения справедливы равенства: $\sin(2\chi_1) = -\xi_1/R$, $\cos(2\chi_1) = \eta_1/R$. Подставив их в определитель, придем к выражению

$$-\frac{\xi_1^2}{R} \left(\frac{\eta_1}{\xi_1}\right)' + 2R^2\varphi_1' + (\xi_1^2 + \eta_1^2)' \left(C\ln\frac{\sqrt{R}}{\rho_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + O(R)\right)\frac{1}{R}\right).$$

Поскольку $\eta_1/\xi_1 = -\cot(2\chi_1)$ из (2.22), первое слагаемое в равенстве выше, равно $-2R$. Итак, главным членом равенства является выражение $(\xi_1^2 + \eta_1^2)'((\frac{\beta_1}{\alpha_1} + O(R))\frac{1}{R})$, поскольку $R_k \rightarrow 0$. Таким образом, приходим к выводу, что определитель не обращается в ноль при всех достаточно больших k . Итак, все найденные симметричные гомоклинические траектории к p_2 являются элементарными и невырожденными.

Поскольку свиток $\Sigma_{p_2}^s$ наматывается и стремится к следу $W^s(p_2)$ на N_2^s , две поверхности – свитки $\Sigma_{p_1}^u$ и $\Sigma_{p_2}^s$ пересекаются по кривым, которые доходят до найденных выше точек пересечения следа устойчивого многообразия $W_{p_2}^s$ и свитка $\Sigma_{p_1}^u$. Их пересечение представляет собой все симметричные периодические траектории, существующие вблизи контура, но мы выделили только ее часть, состоящую из счетного множества спиралей вблизи точек, соответствующих следам симметричных гомоклинических траекторий к p_1 и p_2 .

Аналогично, рассматривая пересечение следа неустойчивого многообразия $W^u(p_1)$ и свитка Σ_2^s получим счетное множество точек, через которые проходят симметричные гомоклинические точки к p_1 . $\square$

Каждая найденная симметричная гомоклиническая траектория для соответствующего седло-фокуса невырождена ввиду конструкции. Поэтому можно

применить результат Девани [19], который говорит о существовании однопараметрического семейства симметричных периодических траекторий для любой такой гомоклинической траектории Γ . Следы семейства симметричных периодических траекторий на диске вблизи точки $q = \Gamma \cap \text{Fix}(L)$ образуют спиралевидную обмотку в точке q . Более того, если пойти по этой спирали и посчитать мультипликаторы для каждой симметричной периодической траектории, то типы этих симметричных периодических траекторий изменяются от ориентируемых квазигиперболических к квазиэллиптическим, затем через двойной мультипликатор равный -1 к неориентируемым квазигиперболическим и снова через четырехкратный мультипликатор равный $+1$. Кроме того, для каждого невырожденной симметричной гомоклинической траектории могут быть применимы результаты Хартериха [34] и Чамписса [14], которые гарантируют существование многообходных невырожденных гомоклинических траекторий вблизи исходной гомоклинической траектории и, соответственно, семейств многообходных симметричных периодических траекторий.

Применяя эти результаты к нашему случаю, мы можем утверждать, что вблизи любой невырожденной симметричной гомоклинической траектории существует семейство симметричных периодических траекторий, стремящихся к этой гомоклинической траектории. Диаметр окрестности точки пересечения свитка Σ_1^u и кривой l_2^s стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Аналогично, рассматривая пересечение следа неустойчивого многообразия $W^u(p_1)$ и свитка Σ_2^s получим второе семейство кривых размеры которых также уменьшаются по мере приближения к точке пересечения следов $W_{p_1}^u$ и $W_{p_2}^s$. Полученные семейства представляют собой многообходные симметричные периодические траектории.

Теперь обсудим доказательство теоремы 19. Прежде всего определим условие общего положения семейства. Пусть v_μ — обратимое возмущение векторного поля v_0 , содержащего контур C второго типа. Все векторные поля v_μ обратимы относительно одной и той же инволюция L (аналогично можно рассмотреть инволюция L_μ гладко зависящую от параметра μ). Контур C содержит гетероклиническую траекторию Γ_1 , идущую при возрастании времени от p_1 к p_2 . Возьмем точку $q \in \Gamma_1$ и секущую $N \ni q$ для траекторий потока. При достаточно малых $|\mu|$ все v_μ имеют два симметричных седло-фокуса с их инвариантными устойчивым и неустойчивым многообразиями, они гладко зависят от параметра [34, 81]. Для всех v_μ подмногообразие N остаётся секущей для соответствующего потока. Рассмотрим четырехмерное многообразие $N \times \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Продолжения $W^u(p_1)$ и $W^s(p_2)$ имеют свои следы в $N \times \mathbb{R}$, дающие два гладких двумерных подмногообразия, пересекающиеся в точке $(q, 0) \in N \times \mathbb{R}$. Предположим, что эти два подмногообразия пересекаются трансверсально в точке $(q, 0)$. Это условие является условием общего положения для теоремы 19. Геометрически это условие означает, что две гладкие кривые в N гладко зависящие от параметра пересекаются неколлинеарно при $\mu = 0$ и расходятся друг от друга при $\mu \neq 0$ с

ненулевой скоростью.

Вновь, как и выше, заметим, что все секущие для контура C , построенные выше, остаются секущими для всех векторных полей семейства для μ достаточно близких к $\mu = 0$. Для доказательства теоремы нужно для заданной окрестности V исходного контура C найти множество параметров μ_n таких, что векторное поле v_{μ_n} имеет гетероклинический контур C_n , содержащий седло-фокусы p_1, p_2 и две несимметричные невырожденные гетероклинические траектории $G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, G_2^{(n)} = L(G_1^{(n)})$, принадлежащие V и чтобы замкнутый контур $\overline{G_1^{(n)} \cup G_2^{(n)}}$ имел класс гомотопии в два раза больше класса гомотопии исходного замкнутого контура $\bar{C}$.

Чтобы найти такие μ_n , рассмотрим секущую N_1^u (см. рис.2.1, правая часть, где $V_1^u \subset N_1^u$), содержащую след l_1^u неустойчивого многообразия $W^u(p_1)$ (часть замкнутой кривой $\xi_1 = \eta_1 = 0$ вблизи точки $q_1(\mu) = \Gamma_1(\mu) \cap N_1^u$). След $W^s(p_2)$ на секущей N_1^u является гладкой кривой $l_1^s(\mu)$, пересекающей при $\mu = 0$ кривую $l_1^u(\mu)$ неколлинеарно в точке $q_1(\mu)$. В силу условия общего положения для семейства при $\mu \neq 0$ эти кривые расходятся на расстоянии порядка $|\mu|$. Используя отображения перехода $S_1(\mu) : N_1^u \rightarrow N_2^s$, определенное вблизи точки $q_1(\mu)$, отображим кривые $l_1^u(\mu), l_1^s(\mu)$ на секущую N_2^s . Здесь кривая $l_1^s(\mu)$ переходит в кусок замкнутой кривой $W^s(p_2) \cap N_2^s$, но $l_1^u(\mu)$ переходит в кривую $l_2^u(\mu)$, неколлинеарно следу $W^s(p_2)$ в точке $\mu = 0$, но эти две кривые расходятся при $\mu \neq 0$.

Опишем сначала картину для $\mu = 0$. Кривая $l_2^u(0)$ разделена точкой $q_2 = \Gamma_1(0) \cap N_2^s$ на две половины, к которым применима Лемма 5. Таким образом, получаем на секущей $N_2^u = L(N_2^s)$ две бесконечные спирали, наматывающиеся на замкнутую кривую $W^u(p_2) \cap N_2^u$. Пересечение этих спиралей с окрестностью $V_2^u \subset N_2^u$ точки $q_2' = L(q_2)$ (см. рис. 2.1, правая часть) задает два бесконечных множества кривых, стремящихся в C^1 -топологии к кривой $W^u(p_2) \cap V_2^u$. Используя отображения перехода $S_2 : N_2^u \rightarrow N_1^s, S_2 = L \circ S_1^{-1} \circ L^{-1}$, отображим эти множества кривых на секущую N_1^s . На N_1^s эти кривые стремятся к гладкой кривой $W^u(p_2) \cap V_1^s$, которая неколлинеарна следу гладкой кривой $W^s(p_1) \cap V_1^s$. Опять же, по Лемме 5, T_1 -прообраз кривой $l_1^s = W^s(p_2) \cap V_1^u$ дает две бесконечные спирали на N_1^s , наматывающиеся на замкнутую кривую $W_1^s \cap N_1^s$, а их пересечение с V_1^s задает бесконечное множество кривых, стремящихся в C^1 -топологии к кривой $W^s(p_1) \cap V_1^s$. Пересечения кривых этих двух бесконечных семейств задают (если они существуют) гетероклинические траектории, идущую от p_1 к p_2 , при увеличении времени, но, вообще говоря, эти два множества кривых не пересекаются, так как их основные кривые неколлинеарны.

Теперь будем изменять параметр μ вблизи нуля. Как седло-фокусы, так и их устойчивое/неустойчивое многообразия гладко зависят от параметра, если векторное поле v_μ гладко зависит от параметра μ . Но след $l_1^s(\mu) \subset V_1^u$ при $\mu \neq 0$ не пересекает кривую $l_1^u(\mu)$ из-за условия общего положения. Следовательно, про-

образ $l_1^s(\mu)$ при отображении $T_1(\mu)$ при достаточно малом μ является гладкой кривой, совершающей много оборотов вокруг замкнутой кривой $W^s(p_1) \cap N_1^s$ и приближается к ней, но после большого числа оборотов (их число зависит от малости $|\mu|$: чем меньше μ , тем больше число оборотов и чем ближе острый кончик кривой к следу $W^s(p_2) \cap N_1^s$), он делает резкий разворот и раскручивается назад по координате θ_1 в N_1^s .

Замечание 9. Описанная здесь ситуация очень похожа на ту, которая встречается в гамильтоновых системах вблизи трансверсальной гомоклинической траектории [62] к седло-фокусу или в гамильтоновых системах с гетероклиническим контуром с двумя седло-фокусами [63], когда оба седло-фокуса принадлежат одному и тому же уровню гамильтониана. При переходе через особый уровень гамильтониана, локальное отображение имеет разрыв и следы устойчивого многообразия ведут себя аналогично тому, что мы наблюдаем в обратимом случае. Там роль параметра играет значение гамильтониана для случае гомоклинической траектории или параметра отстройки μ , который переводит седло-фокусы на разные уровни гамильтониана.

Такое же поведение справедливо и для кривой $l_1^u(\mu)$. А именно, при $\mu \neq 0$ данная кривая преобразуется отображением $S_1(\mu)$ в кривую $l_2^u(\mu) \subset N_2^s$ которая не пересекает след $W^s(p_2)$ и после действия отображения $T_2(\mu)$ преобразуется в гладкую кривую в N_2^u , которая ведет себя аналогично рассмотренному случаю выше. Рассматриваются части этой кривой, принадлежащие окрестности V_2^u . Отображение перехода $S_2(\mu)$ преобразует эти кривые в V_1^s . Итак, у нас снова есть два множества кривых. Одно множество состоит из конечного числа (хотя и достаточно большого) кривых, C^1 -близких к кривой $l_1^s : \xi_1 = \eta_1 = 0$, другое множество состоит из конечного числа (хотя и тоже достаточно большого) кривых, C^1 -близких к кривой $W^u(p_2) \cap V_1^s$. При изменении μ от $-\mu_0$ до μ_0 , ввиду условия общего положения, для некоторых μ_n некоторые пары кривых из разных семейств обязательно пересекаются, образуя для соответствующего значения параметра μ_n гетероклиническую траекторию $G_1(\mu_n)$, идущую от p_1 к p_2 . По симметрии получаем парную гетероклиническую траекторию $G_2(\mu_n)$. Эти две гетероклинические траектории вместе образуют гетероклинический контур, который является двухобходным по отношению к изначальному контуру C . Это завершает доказательство теоремы 19.

2.5.1 Пример

В качестве примера обратимой системы рассмотрим уравнение в частных производных, имеющее обратимую редукцию к ОДУ для своего стационарного уравнения. Это вариант уравнения Свифта-Хоэнберга [84]. Некоторые варианты этого уравнения получены из вариационных принципов, а их ограничения являются гамильтоновыми [24, 3, 10]; однако существуют и негамильтоновые

версии [55]. Один из таких случаев имеет стационарные решения $u(x)$, удовлетворяющие ОДУ

$$(1 + \partial_x^2)^2 u - \alpha u - \beta u \partial_x u + u^3 = 0,$$

где параметр α может быть произвольным, а β можно считать положительным, так как заменой $u \rightarrow -u$ можно сделать его положительным, если $\beta < 0$. После определения переменных $q_1 = u$, $q_2 = u'$, $p_1 = -u' - u'''$ и $p_2 = u + u''$, это уравнение преобразуется в четырехмерную систему первого порядка

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2, & q_2' &= p_2 - q_1, \\ p_1' &= p_2 - \alpha q_1 - \beta q_1 q_2 + q_1^3, & p_2' &= -p_1. \end{aligned}$$

Полученная система обратима относительно линейной инволюции $L : (q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (-q_1, q_2, p_1, -p_2)$. Она имеет до трёх состояний равновесия: начало координат, которое является симметричным, и (при $\alpha > 1$) несимметричную пару $(\pm\sqrt{\alpha-1}, 0, 0, \pm\sqrt{\alpha-1})$, которая возникает при $\alpha = 1$ из симметричного состояния равновесия. Эта система не является гамильтоновой, в чем можно убедиться, вычислив собственные значения несимметричной пары. Действительно, характеристическим многочленом в этих состояниях равновесия является многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 \mp \beta\sqrt{\alpha-1}\lambda + 2(\alpha-1),$$

который не является четным, как это должно было бы быть, если бы система была гамильтоновой. Напротив, характеристический многочлен для симметричного состояния равновесия в начале координат имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - \alpha,$$

при $\alpha < 0$ это состояние равновесия является седло-фокусом. Можно показать, что это состояние равновесия имеет симметричные гомоклинические траектории. Действительно, когда α проходит ноль происходит обратимая бифуркация Хопфа, так как при $\alpha = 0$ состояние равновесия имеет два двукратных чисто мнимых собственных значения с двумерными жордановыми клетками для каждого из них. При $\alpha < 0$ состояние равновесия является седлом-фокусом и является эллиптической точкой при положительных $0 < \alpha < 1$. В общем случае существует два типа этой бифуркации в зависимости от знака некоторого коэффициента нормальной формы третьего порядка в правой части, которые вычисляются через члены второго и третьего порядка при $\alpha = 0$ (если линейная форма уже преобразована к стандартной жордановой форме). Для приведенного выше уравнения этот коэффициент равен $27 - \beta^2$, аналогично гамильтонову случаю для обычного уравнения Свифта-Хоэнберга [24]. Это означает, что для $|\beta| < 3\sqrt{3}$ бифуркация субкритическая и в этом случае существуют две симметричные однообходные гомоклинические траектории [66].

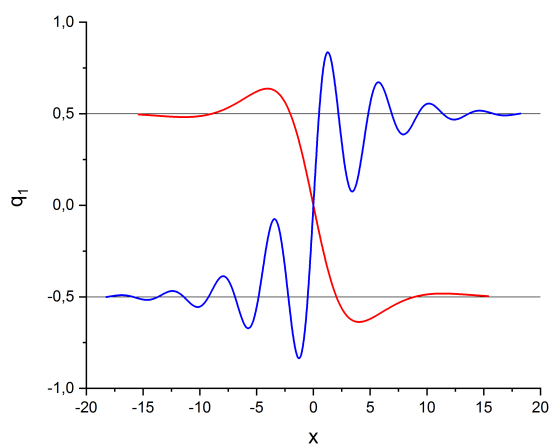
Пара несимметричных состояний равновесия, возникающая при $\alpha > 1$, является седлами для достаточно малых $\mu = \sqrt{\alpha - 1}$, так как при $\alpha = 0$ вырожденное симметричное состояние равновесие имеет два простых собственных значения $\pm i\sqrt{2}$ и двойное нулевое собственное значение. Простые собственные значения изменяются следующим образом: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2} - \beta\mu/4 + O(\mu^2)$, они дают устойчивый фокус на устойчивом многообразии. Нулевые собственные значения становятся двумя действительными положительными собственными значениями, при $\alpha > 1$, малом $\mu > 0$ и $\beta^2 > 8$ их разложение по μ выглядит следующим образом

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{4}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8})\mu + O(\mu^2).$$

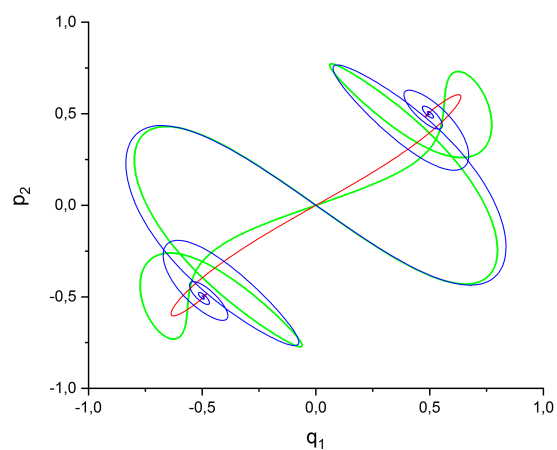
При $0 < \beta^2 < 8$ имеем комплексно-сопряженные собственные значения, их разложение по μ выглядит следующим образом

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{4}(\beta \pm i\sqrt{8 - \beta^2})\mu + O(\mu^2).$$

Например, при $\alpha = 1,25$ и $\beta = 2$ собственные значения для верхнего состояния равновесия равны $\lambda_{1,2} \approx -0,2751 \pm 1,4087i$, $\lambda_{3,4} \approx 0,2751 \pm 0,4087i$, т.е. имеем седло-фокусы типа $(2, 2)$ в двух симметрично связанных точках. Но если взять $\alpha = 1.25$, а $\beta = 5$, то эти точки являются седлами типа $(2, 2)$ с одним седлом, имеющим устойчивое многообразие с фокусом на нем ($\lambda_{1,2} \approx -0,4849 \pm 1,5887i$) и неустойчивый узел на двумерном неустойчивом многообразии ($\lambda_{3,4} \approx 0,7170, 0,2527$) соответственно с противоположными знаками собственных значений симметричного состояния равновесия. На рисунках показаны графики $u(x) = q_1(x)$ как для гетероклинических траекторий, так и для проекций этих траекторий на плоскость (q_1, p_2) для параметров $\mu = \sqrt{\alpha - 1} = 0.5$, $\beta = 2$ на рис. 2.3, и для $\mu = 0.5$, $\beta = 5$ на рис. 2.4.

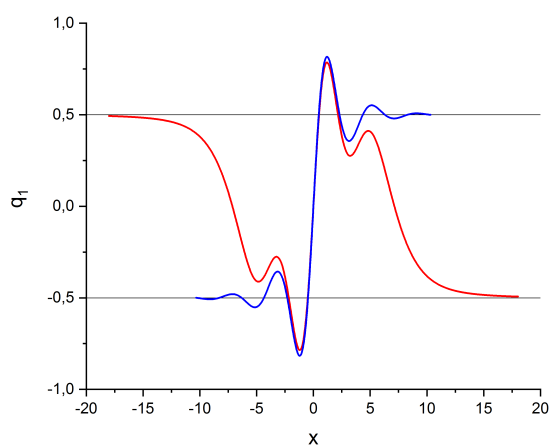


а) График $q_1(x)$ для Γ_1, Γ_2

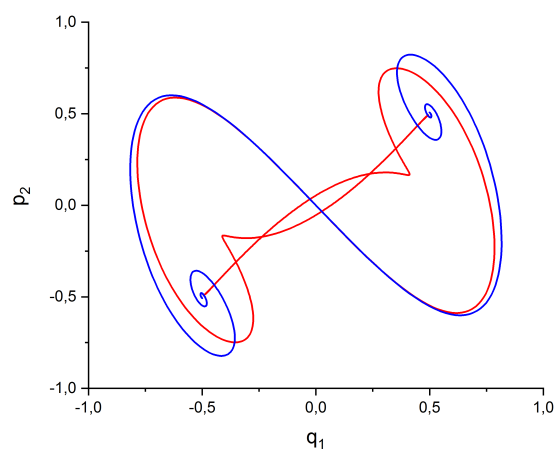


б) Проекция контура и симметричных периодических траекторий на плоскость (q_1, p_2)

Рис. 2.3. $\mu = 0.5, \beta = 2$



а) График $q_1(x)$ для Γ_1, Γ_2



б) Проекция контура на плоскость (q_1, p_2)

Рис. 2.4. $\mu = 0.5, \beta = 5$

Глава 3

Частично гиперболические симплектические автоморфизмы 6-мерного тора

3.1 Предварительные сведения

Рассмотрим стандартный тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ как факторгруппу абелевой группы $\mathbb{R}^n$ по ее дискретной подгруппе $\mathbb{Z}^n$ целочисленных векторов. Обозначим через $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ соответствующий гомоморфизм групп, который в тоже время является гладким накрытием. Стандартные координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ будут обозначаться через $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ (вектор-столбец). Пусть A унимодулярная матрица с целочисленными элементами. Поскольку линейное отображение $L_A : x \rightarrow Ax$, задаваемое матрицей A , преобразует подгруппу $\mathbb{Z}^n$ в себя, такая матрица порождает диффеоморфизм f_A тора $\mathbb{T}^n$, который называется автоморфизмом тора [92, 93, 23]. Топологические свойства таких отображений являются классическим объектом исследования (см., например, [92, 23, 103, 67]). Автоморфизм тора сохраняет стандартный элемент объема $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ на торе, перенесенный из пространства $\mathbb{R}^n$, поэтому эргодические свойства автоморфизма f_A также были предметом исследования во многих работах [7, 31, 112]. Для автоморфизма тора справедлива следующая классическая теорема [31].

Теорема 21 (Халмош). Непрерывный автоморфизм f компактной абелевой группы G является эргодическим (или перемешивающим) тогда и только тогда, когда индуцированный им автоморфизм группы характеров G^* не имеет конечных орбит.

В случае абелевой группы $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, теорема Халмоша эквивалентна следующему утверждению: автоморфизм L_A является эргодическим тогда и только тогда, когда матрица A не имеет собственных значений, равных корням из единицы [31]. Это означает, в частности, что ановские автоморфизмы эргодичны, так как все собственные значения матрицы A расположены вне единичной окружности.

Фактически следующие утверждения эквивалентны [46]:

- автоморфизм f_A является эргодическим относительно меры Лебега;
- множество периодических точек автоморфизма f_A совпадает с множеством точек на торе $\mathbb{T}^n$ с рациональными координатами;
- ни одно из собственных значений матрицы A не равно корню из единицы;

- матрица A имеет по крайней мере одно собственное значение по модулю больше единицы и не имеет собственных векторов с рациональными координатами;
- все орбиты двойственного отображения $A^* : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, кроме тривиальной нулевой орбиты, бесконечны.

Ещё один результат об автоморфизмах тора принадлежит Боуэну [7] и позволяет вычислить топологическую энтропию h_d .

Теорема 22 (Боуэн). Если $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является линейным отображением, задаваемым унимодулярной матрицей A с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то

$$h_d(f_A) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|.$$

В случае четной размерности тора $n = 2m$ можно ввести на $\mathbb{T}^{2m}$ стандартную симплектическую структуру $\Omega = dx_1 \wedge dx_{m+1} + \dots + dx_m \wedge dx_{2m}$, используя координаты в $\mathbb{R}^{2m}$ и рассматривать симплектические автоморфизмы тора, которые сохраняют эту симплектическую структуру. Тогда симплектический автоморфизм f_A задается симплектической матрицей A с целочисленными элементами. Такие матрицы удовлетворяют тождеству $A^\top J A = J$, где кососимметрическая матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

с единичной $m \times m$ -матрицей E . Из тождества $A^\top J A = J$ следует, что произведение двух симплектических матриц и обратная к симплектической матрице также являются симплектическими, т.е. симплектические матрицы образуют подгруппу в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, относительно операции матричного умножения, которая обозначается $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Эта группа представляет собой одну из стандартных матричных групп Ли [16].

Можно определить нестандартную симплектическую структуру на торе $\mathbb{T}^{2m}$. Для этого выберем невырожденную кососимметрическую $2m \times 2m$ матрицу J : $J^\top = -J$. Такая матрица задает в $\mathbb{R}^{2m}$ билинейную 2-форму $[x, y] = (Jx, y)$, где $(\cdot, \cdot)$ – стандартное скалярное произведение в координатах. Эту форму также называют кососкалярным произведением [94]. Тогда линейное отображение $S : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ называется симплектическим, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$ выполнено равенство $[Sx, Sy] = [x, y]$. Используя представление кососкалярного произведения через матрицу J и свойства скалярного произведения, получим следующее тождество для матрицы S симплектического отображения: $S^\top J S = J$. Эта конструкция позволяет также определить симплектическую структуру на торе, если матрицы J и S имеют целочисленные элементы. Унимодулярность S следует из симплектичности. Далее на торе задается симплектическая 2-форма,

и отображение S определяет симплектический автоморфизм, относительно этой симплектической формы. Например, пусть B любая невырожденная целочисленная матрица. Имея стандартное кососкалярное произведение (Jx, y) в $\mathbb{R}^{2m}$ с матрицей J , как в (3.1), мы можем определить новое кососкалярное произведение $[x, y] = (JBx, By) = (B^\top JBx, y)$. Поскольку матрица $B^\top JB$ имеет целочисленные элементы, невырождена и кососимметрична, то новое кососкалярное произведение порождает симплектическую 2-форму на торе. Ниже, изучается случай $n = 6$, т.е. $\mathbb{T}^6$.

Пусть теперь $P(x) = \lambda^6 + a\lambda^5 + b\lambda^4 + c\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1$ целочисленный возвратный многочлен, неприводимый над полем $\mathbb{Q}$. Сопровождающая матрица этого многочлена P [43] имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & -b & -c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Эта матрица является унимодулярной ($\det A = 1$), но не является вообще говоря симплектической относительно стандартной симплектической 2-формы $[x, y] = (Ix, y)$ для $x, y \in \mathbb{R}^6$, поскольку $A^\top J_0 A \neq J_0$, где матрица J_0 имеет вид (3.1). Однако можно показать, что матрица A симплектическая относительно нестандартной симплектической структуры на $\mathbb{R}^6$, определенной как $[x, y] = (Jx, y)$ для $x, y \in \mathbb{R}^6$, с некоторой целочисленной, невырожденной, кососимметрической матрицей J . Для этого перепишем тождество $A^\top J A = J$ в следующем виде $A^\top J - J A^{-1} = 0$, рассматривая его как систему алгебраических уравнений для элементов матрицы J . Решением этого матричного уравнения является матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & a+1 & a+1 & 1 \\ -1 & -a & 0 & a+b-c & a+1 & 1 \\ -1 & -a-1 & -a-b+c & 0 & a & 1 \\ -1 & -a-1 & -a-1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Если $a + b - c \neq 2$, то матрица J невырожденная, $\det J = (a + b - c - 2)^2$, следовательно, A является симплектической относительно этой нестандартной симплектической структуры. Этот факт используется ниже.

Напомним понятие частичной гиперболичности диффеоморфизма гладкого многообразия M , впервые введенное и изученное в [98]. Здесь используется вариант этого определения из работы [37]. Пусть L линейное преобразование в

линейном нормированном пространстве H . Норма и конорма для L определяются, соответственно, как

$$\|L\| := \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|, \quad m(L) := \inf_{\|v\|=1} \|Lv\|.$$

Пусть теперь $f : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм гладкого компактного многообразия M .

Определение 1. Диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ называется *частично гиперболическим*, если существует непрерывное Df -инвариантное разложение касательного пространства $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, в котором E^u и E^s нетривиальные подрасслоения и

$$m(D^u f) > \|D^c f\| \geq m(D^c f) > \|d^s f\|, \quad m(D^u f) > 1 > \|D^s f\|,$$

где $D^\sigma f$ ограничение дифференциала Df на E^σ для $\sigma = s, c$ или u .

В работе [64], была получена классификация автоморфизмов f_A четырехмерного тора $\mathbb{T}^4$, порожденных целочисленными симплектическими матрицами $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{Z})$. Такие автоморфизмы могут быть транзитивными или разложимыми. Как было доказано в работе [64], в первом случае два таких транзитивных автоморфизма являются (топологически) сопряженными тогда и только тогда, когда матрицы, порождающие эти автоморфизмы, целочисленно подобны (подобны в $M_n(\mathbb{Z})$), т.е. подобие осуществляется с помощью некоторой целочисленной унимодулярной матрицы. Во втором случае, разложимый автоморфизм f_A сопряжен прямому произведению двух 2-мерных автоморфизмов, действующих на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, один из которых является автоморфизмом Аносова двумерного тора, а другой периодическим на двумерном торе с периодами 3, 4, 6.

Возникает естественная задача распространения этих результатов на многомерный случай. Эта задача более сложная, потому что возникают несколько различных возможностей: размерности центрального подрасслоения и устойчивого/неустойчивого подрасслоения могут варьироваться даже при фиксированной размерности тора. Симплектические автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$, которые изучаются в этой главе, порождены симплектическими частично гиперболическими целочисленными матрицами, у которых

- $\dim W^c = 4, \quad \dim W^s, W^u = 1;$

или

- $\dim W^c = 2, \quad \dim W^s, W^u = 2.$

Здесь W^s – устойчивая плоскость неподвижной точки линейного отображения L_A в начале координат, а W^u – ее неустойчивая плоскость, W^c – центральная плоскость, соответствующая собственным значениям на единичной окружности. Симплектическая целочисленная матрица порождает частично гиперболический автоморфизм тора, если ее собственные значения находятся как вне

единичной окружности, так и на единичной окружности. Топологическая классификация таких автоморфизмов определяется в первую очередь топологией слоений, порожденных неустойчивыми (устойчивыми) слоями автоморфизма, так как эти слоения инвариантны относительно действия автоморфизма f , а также действием f на локальном центральном подмногообразии и его расширении. Следовательно, для решения проблемы классификации сначала нужно исследовать структуру устойчивого и неустойчивого слоения на торе.

Напомним, как устойчивые, неустойчивые и центральные слоения порождаются для случая симплектических автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$. Спектр симплектической 6×6 матрицы A разлагается на три части: $Sp(A) = \sigma_s \cup \sigma_c \cup \sigma_u$, где собственные значения σ_s – лежат внутри единичной окружности, σ_c на единичной окружности и σ_u – вне единичной окружности. В дальнейшем будем предполагать, что все собственные значения простые. Следовательно, в первом случае, когда неустойчивое (устойчивое) слоение одномерно, проекция подпространства $W^u \subset \mathbb{R}^6$ на тор $\mathbb{T}^6$ задает вложение прямой. Подпространство W^u также является однопараметрической подгруппой в $\mathbb{R}^6$, следовательно, ее сдвиги на вектора из $\mathbb{R}^6$ задают другие аффинные линии, представляющие другие классы факторгруппы $\mathbb{R}^6/W^u$. Их проекции на торе задают неустойчивое слоение автоморфизма f_A , его слои представляют собой вложенные бесконечные прямые. Аналогичная конструкция задает устойчивое слоение и центральное слоение. Более подробная информация о структуре таких слоений будет представлена в разделе 3.2.

Во втором случае, когда неустойчивое (устойчивое) слоение двумерно, неустойчивое подпространство W^u является двумерным, и соответствующая коммутативная подгруппа имеет две образующих. Здесь возможны два различных случая: 1) σ_u состоит из двух простых вещественных собственных значений $\lambda_{1,2}$, $|\lambda_i| > 1$, с соответствующими независимыми вещественными собственными векторами; 2) σ_u состоит из двух комплексно-сопряженных собственных значений λ, λ^* $|\lambda| > 1$, а W^u – инвариантное подпространство относительно действия L_A , в качестве образующих этой подгруппы можно выбрать действительную и мнимую части комплексного собственного вектора матрицы A .

Проекция W^u на тор задает вложенную плоскость (неустойчивое многообразие неподвижной точки $\hat{O}$), остальные классы $\mathbb{R}^6/W^u$ являются аффинными двумерными плоскостями, их проекции задают неустойчивое слоение f_A . Аналогично получается устойчивое слоение и центральное слоение. Более подробная информация о структуре этих слоений будет представлена в разделе 3.3.

Автоморфизм f_A является изоморфизмом абелевой группы $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Каждый изоморфизм топологической группы $\mathbb{T}^n$ в стандартных угловых координатах задается целочисленной унимодулярной матрицей. Топологическая классификация автоморфизмов группы $\mathbb{T}^n$ определяется подобием матриц, порождающих эти автоморфизмы, в силу теоремы [95].

Теорема 23 (Аров). Два эргодических автоморфизма T и P компактной абелевой группы G топологически сопряжены, если и только если они изоморфны, т.е. существует изоморфизм $Q : G \rightarrow G$, такой что $Q \circ T = P \circ Q$.

Проверка подобия двух целочисленных матриц с помощью унимодулярной целочисленной матрицы является непростой задачей. В случае абелевой группы $\mathbb{T}^n$ необходимость унимодулярности сопрягающей матрицы приводит к тому, что две целочисленные матрицы могут быть подобны над полем $\mathbb{Q}$, но не над $\mathbb{Z}$. Это верно даже для случая автоморфизмов Аносова на двумерном торе. Например, рассмотрим два автоморфизма $\mathbb{T}^2$, порожденные матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$

где C сопровождающая матрица характеристического многочлена $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 1$ матрицы A . Две матрицы A, C рационально подобны $TA = CT$ (поскольку их минимальный и характеристический многочлены равны), но не целочисленно подобны. Избавление от общего знаменателя сопрягающей рациональной матрицы, позволяет получить множество целочисленных матриц

$$P = \begin{pmatrix} m & n \\ 4m + 5n & 3m + 4n \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

для которых $\det P = 3m^2 - 5n^2 \neq 0$. Так как определитель этой матрицы не равен ± 1 , она не порождает изоморфизм групп, но порождает мономорфизм групп $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, образом которой является некоторая подгруппа G группы $\mathbb{Z}^2$ с двумя целочисленными векторами в качестве образующих. Параллелограмм, образованный этими образующими, является фундаментальной областью с площадью $|\det P|$ для фактор-группы $\mathbb{R}^2/G$, являющейся тором. Количество целочисленных точек в фундаментальной области так же равно $|\det P|$. Топологически это означает, что выполняется топологическая полусопряженность: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{T}^2 \\ P \downarrow & & P \downarrow \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{f_C} & \mathbb{T}^2 \end{array}.$$

коммутативна, но P не является изоморфизмом тора $\mathbb{T}^2$, так как $|\det P|$ -кратное накрытие $\mathbb{T}^2$. Общее утверждение в этом случае состоит в следующем

Предложение 2. Предположим, что A — целочисленная унимодулярная матрица с простыми собственными значениями. Тогда эта матрица рационально подобна сопровождающей матрице C своего характеристического многочлена.

Автоморфизмы f_A, f_C тора $\mathbb{T}^n$, порожденные этими матрицами, полусопряжены, т.е. существует целочисленная невырожденная матрица T такая, что выполняется соотношение $TA = CT$ и $f_T \circ f_A = f_C \circ f_T$. Отображение f_T является k -кратным накрывающим отображением $f_T : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, где k равно определителю $|\det T|$.

В следующих разделах приводятся автоморфизмы, имеющие транзитивное неустойчивое (и устойчивое) слоение, т.е. все его слои плотны на $\mathbb{T}^6$. Тогда возникает естественный вопрос: пусть неустойчивое слоение автоморфизма f_A транзитивно независимо от того, является ли сам автоморфизм f_A транзитивен, тогда существует ли плотная орбита для f_A ? Справедливо следующее утверждение

Предложение 3. Автоморфизм f_A с транзитивным неустойчивым слоением, транзитивен как диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^6$.

Доказательство. Поскольку слой, проходящий через неподвижную точку $\hat{O}$ транзитивен, то все слои транзитивны, так как получаются сдвигами в группе $\mathbb{T}^6$. Чтобы доказать транзитивность f_A , нам нужно для любых двух открытых множеств U, V в $\mathbb{T}^6$ найти некоторое $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $f_A^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Так как A не имеет собственных значений, являющихся корнями из единицы, периодические орбиты f_A совпадают с $\mathbb{Q}^n$ (множество точек на $\mathbb{T}^6$ с рациональными координатами) и поэтому образуют плотное множество. Следовательно периодическая точка $s \in U$ и пусть k — ее период. Неустойчивый слой $W^u(s)$ плотен в $\mathbb{T}^6$ и поэтому пересекается с V . Пусть $q \in V \cap W^u(s)$, тогда последовательность $f_A^{-kn}(q)$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к s , поскольку $n \rightarrow \infty$, и $f_A^{-kN}(q) \in U$ для достаточно больших N , так что $f_A^{kN}(U) \cap V \neq \emptyset$, мы можем считать $m = kN$. $\square$

Замечание 10. Стоит отметить, что доказательство работает для любых частично гиперболических автоморфизм $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$, с транзитивным неустойчивым слоением.

Структура главы следующая. В разделе 3.2 описываются инвариантные слоения, связанные с автоморфизмами с одномерным неустойчивым слоением, как транзитивными, так и разложимыми. В разделе 3.2.1 показано существование частично гиперболических симплектических автоморфизмов с транзитивными неустойчивыми слоениями. В разделе 3.3 описывается случай автоморфизмов с двумерными неустойчивыми (и устойчивыми) слоениями. В разделе 3.4 обсуждаются проблема классификации.

3.2 Частично гиперболические автоморфизмы с одномерным неустойчивым слоением

В этом разделе изучаются симплектические частично гиперболические автоморфизмы, определяемые симплектическими матрицами с двумя (простыми) вещественными собственными значениями λ, λ^{-1} , $|\lambda| > 1$, лежащими вне единичной окружности, и двумя парами комплексно-сопряженных собственных значений на единичной окружности. Соответствующие собственные пространства $l^s, l^u \subset \mathbb{R}^6$ и центральное подпространство W^c , при проецировании на тор $\mathbb{T}^6$ и сдвиге их в любую точку тора дают необходимое разложение из определения 1 и вместе с этим соответствующие инвариантные слоения — устойчивое, неустойчивое и центральное.

Исследуем возможное поведение проекций на тор собственных пространств l^s, l^u . В дальнейшем будем предполагать, что λ положительно, иначе можно рассматривать A^2 . В пространстве $\mathbb{R}^6$ имеем следующую структуру орбит линейного отображения L_A , порожденного матрицей A . Напомним, что в случае симплектического линейного отображения с 2-эллиптической неподвижной точкой O (две пары простых собственных значений на единичной окружности и пара действительных чисел), существует четырехмерное центральное инвариантное подпространство W^c , соответствующее двум парам собственных значений на единичной окружности $\nu_1, \nu_2, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$, $\nu_1 = \exp[i\alpha_1]$, $\nu_2 = \exp[i\alpha_2]$. Если $\alpha_i/2\pi \notin \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$ (это условие эквивалентно $\nu_i^n \neq 1$ для любого $n \in \mathbb{Z}$) то подпространство W^c расслоено на инвариантные двумерные торы везде, кроме двух инвариантных двумерных плоскостей, соответствующих парам $\nu_1, \bar{\nu}_1$ и $\nu_2, \bar{\nu}_2$ которые расслаиваются на замкнутые инвариантные кривые. Это следует из того, что ограничение отображения L_A на W^c имеет две квадратичные положительно определенные инвариантные функции (интегралы), совместные уровни которых являются инвариантными торами. Ограничение отображения L_A на любой такой тор сопряжено со сдвигом $\theta_1 = \theta + \alpha_1 \pmod{2\pi}$, $\theta_2 = \theta + \alpha_2 \pmod{2\pi}$. Если $m\alpha_1 + n\alpha_2 \neq k$ для любого целого (m, n, k) , то сдвиг на торе транзитивен, но если существует единственная целочисленная тройка (с точностью до множителя), что задает равенство, то сам тор расслаивается на замкнутые инвариантные кривые. В случае, если ни одно ν_i не является корнем из единицы, эти инвариантные кривые определены корректно и сдвиг на каждой такой кривой транзитивен.

В дополнении к инвариантным собственным устойчивым/неустойчивым прямым l^s, l^u и центральному подпространству W^c , существуют еще два пятимерных инвариантных подпространства в $\mathbb{R}^6$, натянутых, соответственно, на вектора из подпространств W^c и l^s (центрально-устойчивая пятимерная плоскость W^{cs}) и вектора из W^c и l^u (центрально-неустойчивая пятимерная плоскость W^{cu}). Факторклассы $\mathbb{R}^6/W^{cu}$ и $\mathbb{R}^6/W^{cs}$ определяют два инвариантных слоения в

$\mathbb{R}^6$, являющихся пятимерными аффинными плоскостями. Здесь инвариантность понимается в следующем смысле: при действии L_A образ слоя слоения совпадает с некоторым (возможно, другим) слоем того же слоения. Все орбиты отображения L_A , не лежащие в объединении $W^{cs} \cup W^{cu}$, уходят на бесконечность как для прямых, так и для обратных итераций отображения L_A . В частности, отображение L_A не имеет никаких других пятимерных инвариантных подпространств, кроме этих двух W^{cs} и W^{cu} . Если собственные значения $\exp[i\alpha_1], \exp[i\alpha_2]$ не являются корнями из единицы, то подпространства W^{cs}, W^{cu} расслаиваются на трехмерные подмногообразия $T^2 \times \mathbb{R}$, являющиеся, соответственно, устойчивыми и неустойчивыми инвариантными многообразиями инвариантных торов на центральной четырехмерной плоскости W^c .

Проекция собственных прямых l^s, l^u на тор может привести к различным ситуациям. Чтобы понять это, необходимо уточнить, что такое проекция подпространства пространства $\mathbb{R}^6$ на тор $\mathbb{T}^6 = \mathbb{R}^6/\mathbb{Z}^6$. Поскольку $\mathbb{T}^6$ является коммутативной группой Ли, касательное пространство в нуле обладает структурой коммутативной алгебры Ли, она отождествляется с $\mathbb{R}^6$ стандартным способом. Тогда проекция $p : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{T}^6$ является экспоненциальным отображением алгебры Ли на группу Ли. Одномерное подпространство l^u (или подпространство l^s) совпадает с однопараметрической подгруппой $t\gamma^u$ (соответственно $t\gamma^s$), порожденной вектором γ^u (соответственно γ^s) матрицы A , и проекция этого подпространства на $\mathbb{T}^6$ является образом при экспоненциальном отображении алгебры в группу. Данная подгруппа включена в орбиты постоянного векторного поля на $\mathbb{T}^6$, инвариантного относительно групповых сдвигов. В угловых координатах $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_6)$ на $\mathbb{T}^6$, индуцированных координатами в $\mathbb{R}^6$, мы получаем векторное поле $\dot{\theta} = \gamma^u$ (соответственно $\dot{\theta} = \gamma^s$). Любая траектория этого векторного поля совпадает со слоем неустойчивого (соответственно устойчивого) инвариантного слоения на торе, состоящее из проекций всех прямых, соответствующих факторклассам $\mathbb{R}^6/l^u$ (соответственно $\mathbb{R}^6/l^s$). Структура его орбиты зависит от числа рационально независимых целочисленных решений уравнения $(m, \gamma^u) = 0$, $m \in \mathbb{Z}^6$ (соответственно $(m, \gamma^s) = 0$). Это число может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. В первом случае, как известно, когда число решений равно нулю, соответствующие орбиты постоянного векторного поля транзитивны на $\mathbb{T}^6$ (это частный случай теоремы Кронекера, см., например, [8] и раздел 3.3).

Однопараметрическая подгруппа в $\mathbb{T}^6$, порожденная собственным вектором γ^u , является инвариантным подмножеством относительно автоморфизма f_A (одновременно это сильно неустойчивая кривая неподвижной точки $\hat{O} = p(O)$). Следовательно, ее замыкание также является инвариантным подмножеством в $\mathbb{T}^6$, являющееся гладким инвариантным тором некоторой размерности в $\mathbb{T}^6$ [8]. Как было сказано выше, размерность этого тора зависит от числа целочисленных линейно независимых соотношений вида $(m, \gamma^u) = 0$. При наличии таких соотношений, вектор γ^u называется резонансным.

В случае существования единственного целочисленного соотношения $(m, \gamma^u) = 0$ линейное пятимерное подпространство в $\mathbb{R}^6$, определяющееся уравнением $(m, x) = 0$, проектируется в пятимерный тор в $\mathbb{T}^6$, а прямая, натянутая на вектор γ^u , не проходит через точки целочисленной подрешетки этого подпространства. Следовательно, эта линия проектируется в транзитивно-погруженную прямую в этом пятимерном торе.

Аналогично для случая двух рационально независимых целочисленных соотношений соответствующее подпространство четырехмерно, оно проектируется в четырехмерный тор в $\mathbb{T}^6$. Прямая, натянутая на вектор γ^u , проектируется в транзитивно-погруженную прямую в этом четырехмерном торе и т.д. В случае, когда существует пять линейно-независимых целочисленных соотношений, соответствующая прямая $t\gamma^u$ обязательно проходит через целочисленную точку в $\mathbb{R}^6$ и, следовательно, ее проекция представляет собой простую замкнутую кривую в $\mathbb{T}^6$. Очевидно, собственная прямая l^u , соответствующая собственному значению $\lambda > 1$ (прямая l^s , соответственно, для собственного значения $\lambda < 1$), не может пересекать целочисленную решетку $\mathbb{Z}^6$. Если предположить, что она пересекает целочисленную решетку $\mathbb{Z}^6$, то проекция на торе этой прямой является замкнутой инвариантной кривой для отображения f_A , и ограничение этого отображения на эту кривую задает диффеоморфизм окружности с единственной неустойчивой (соответственно, устойчивой) неподвижной точкой, что невозможно.

Таким образом, замыкание любой траектории постоянного векторного поля на торе $\mathbb{T}^6$ является гладким тором некоторой размерности, его размерность равна $6 - r$, где r — число рационально независимых линейных соотношения для компонент вектора $\gamma^u : (m, \gamma^u) = 0, m \in \mathbb{Z}^6$. Если такие соотношения отсутствуют, то компоненты вектора γ^u несоизмеримы и каждая траектория векторного поля по теореме Кронекера плотна на торе. Если такие соотношения существуют, то $\mathbb{T}^6$ расслаивается на инвариантные торы меньшей размерности, на каждом из которых любая траектория постоянного векторного поля всюду плотна. Теперь докажем следующее предложение

Предложение 4. Для автоморфизма f_A замыкание неустойчивого слоя неподвижной точки $\hat{O}$ может быть либо четырехмерным тором, либо двумерным тором, либо всем тором $\mathbb{T}^6$, в последнем случае слоение является транзитивным.

Доказательство. Для доказательства предложения нужно исключить возможные случаи, когда пяти- и трехмерные торы являются замыканием инвариантной прямой $p(t\gamma^u)$ и одновременно неустойчивым многообразием неподвижной точки $\hat{O}$ на $\mathbb{T}^6$. Предположим, что замыкание неустойчивого многообразия неподвижной точки $\hat{O}$ на $\mathbb{T}^6$ образует пятимерный тор $\mathbb{T}^5$. Это означает, что собственный вектор γ^u удовлетворяет единственному целочисленному соотношению $(m, \gamma^u) = 0, m \in \mathbb{Z}^6$. Рассмотрим пятимерную гиперплоскость в $\mathbb{R}^6$,

определенную ковектором m : $(m, x) = 0$, $\mathbb{T}^5$ является проекцией этой гиперплоскости.

Покажем, что в этом случае устойчивое одномерное многообразие неподвижной точки $\hat{O}$ трансверсально тору $\mathbb{T}^5$. Тор $\mathbb{T}^5$ содержит неподвижную точку $\hat{O}$ отображения f_A . Поскольку данный тор является гладким инвариантным многообразием, относительно отображения f_A (как замыкание его инвариантного множества), касательное пространство к тору в неподвижной точке, инвариантно относительно дифференциала $Df_A = L_A$. Тор $\mathbb{T}^5$ задается проекцией гиперплоскости в $\mathbb{R}^6$, проходящей через неподвижную точку O отображения L_A . Эта плоскость инвариантна относительно L_A , но линейное частично гиперболическое отображение L_A не имеет других инвариантных пятимерных плоскостей, проходящих через точку O , кроме W^{cs}, W^{cu} . Только вторая из них содержит собственную прямую, натянутую на вектор γ^u . Итак, тор $\mathbb{T}^5$ является проекцией центрально-неустойчивой плоскости W^{cu} . Но тогда устойчивый собственный вектор γ_s трансверсален этой плоскости, поэтому проекция устойчивой собственной прямой на $\mathbb{T}^6$ является гладкой кривой трансверсальной тору $\mathbb{T}^5$ в точке $\hat{O}$. Так как тор $\mathbb{T}^5$ является гладко вложенным подмногообразием в $\mathbb{T}^6$, то существует окрестность V точки $\hat{O}$, такая что все точки в V , лежащие на устойчивой кривой $W^s(\hat{O})$, не принадлежат $\mathbb{T}^5$.

В силу трансверсальности тора $\mathbb{T}^5$ и устойчивой кривой $W^s(\hat{O})$, проходящей через точку $\hat{O}$, они должны пересекаться друг с другом более чем в одной точке тора $\mathbb{T}^6$ (на самом деле, в бесконечном числе точек), так как собственная прямая, являющаяся накрытием этой кривой, пересекает в $\mathbb{R}^6$ бесконечно много пятимерных плоскостей, получающихся из W^{cu} целочисленными сдвигами. Устойчивая инвариантная кривая задается как $t\gamma^s \pmod{1}$, она содержит точку z , отличную от $\hat{O}$ и принадлежащую $\mathbb{T}^5$. Поскольку z принадлежит $W^s(\hat{O})$, то ее прямые итерации $f_A^n(z)$ должны лежать на устойчивой кривой вблизи точки $\hat{O}$ при достаточно больших положительных n . Как следствие, образы при таких итерациях не принадлежат $\mathbb{T}^5$. С другой стороны, тор $\mathbb{T}^5$ инвариантен относительно f_A , поэтому все итерации точки z должны лежать на нем. Это противоречие доказывает, что замыкание неустойчивой кривой не может быть пятимерным тором.

Предположим теперь, что замыкание неустойчивого многообразия неподвижной точки $\hat{O}$ на $\mathbb{T}^6$ является трехмерным тором $\mathbb{T}^3$. Это означает, что собственный вектор γ^u удовлетворяет трем рационально независимым соотношениям $(n, \gamma^u) = 0, (m, \gamma^u) = 0, (l, \gamma^u) = 0$, где целочисленные векторы $n, m, l \in \mathbb{Z}^6$ линейно независимы в $\mathbb{Q}$.

Тор $\mathbb{T}^3$ также является гладким инвариантным многообразием для f_A , содержащим неподвижную точку $\hat{O}$. Касательная плоскость к $\mathbb{T}^3$ в точке $\hat{O}$ является инвариантной трехмерной плоскостью относительно дифференциала Df_A . В накрывающем пространстве $\mathbb{R}^6$ прообраз этой трехмерной плоскости при про-

екции p , проходящий через начало координат O , является инвариантной трехмерной плоскостью относительно L_A . Существует только четыре таких инвариантных трехмерных плоскости: 1) W_1^* , натянутая на подпространства l^u (для λ) и двумерную плоскость, соответствующую собственным значениям $\exp[\pm i\alpha_1]$; 2) W_2^* , натянутая на подпространства l^u и двумерную плоскость, соответствующую собственным значениям $\exp[\pm i\alpha_2]$; 3) W_3^* , натянутая на подпространства l^s (для λ^{-1}) и двумерную плоскость, соответствующую собственным значениям $\exp[\pm i\alpha_1]$; 4) W_4^* , натянутая на подпространства l^s и двумерную плоскость, соответствующую собственным значениям $\exp[\pm i\alpha_2]$. Только первые две из них содержат γ^u , так что W_1^*, W_2^* могут быть такими плоскостями. Таким образом, получаем два возможных случая разбиения пространства $\mathbb{R}^6$ на два трехмерных инвариантных подпространства: 1) $W_1^* \oplus W_4^*$; 2) $W_2^* \oplus W_3^*$. Поскольку эти случаи аналогичны, достаточно рассмотреть только первый случай. p -проекция плоскости W_1^* на $\mathbb{T}^6$ является трехмерным тором $\mathbb{T}^3$, поэтому в W_1^* существует три линейно независимых целочисленных вектора. Решетка, порожденная этими тремя целочисленными векторами, не пересекает собственную прямую l^u , так как проекция этой собственной прямой всюду плотна на торе $\mathbb{T}^3$. Отсюда следует, что ограничение отображения f_A на этот инвариантный тор является отображением, которое порождается ограничением отображения L_A на инвариантную трехмерную плоскость W_1^* .

В пространстве $\mathbb{R}^6$ линейное отображение L_A порождается целочисленной унимодулярной матрицей A . Поскольку W_1^* является инвариантным подпространством, рассмотрим линейное преобразование L_B , индуцированное преобразованием L_A , на это инвариантное подпространство. Это преобразование задается 3×3 -матрицей B в базисе, состоящем из трех целочисленных векторов. Таким образом, матрица B имеет рациональные коэффициенты, и характеристический многочлен Q матрицы B также будет иметь рациональные коэффициенты. Пространство $\mathbb{R}^6$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathbb{R}^6 = W_1^* \oplus W_4^*$. Тем самым выполняется следующее утверждение [109]: *Если пространство разлагается в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно линейного преобразования L_A , то характеристический многочлен для L_A равен произведению характеристических многочленов, индуцированных преобразованием L_A в инвариантных подпространствах.* Таким образом, получаем, что характеристический многочлен P преобразования L_A , равный произведению двух многочленов третьей степени $P = QS$, где Q соответствует индуцированному преобразованию в инвариантном подпространстве W_1^* , а S , соответственно, W_4^* . Поскольку многочлен P имеет целочисленные коэффициенты, а Q имеет рациональные коэффициенты, то с помощью алгоритма Евклида получаем, что S также имеет рациональные коэффициенты.

С другой стороны, собственными значениями матрицы B являются λ , $\exp[\pm i\alpha_1]$. Тогда характеристический многочлен Q матрицы B представляет-

ся в виде

$$Q = (x - \lambda)(x - \exp[i\alpha_1])(x - \exp[-i\alpha_1]) = (x - \lambda)(x^2 + 2x \cos \alpha_1 + 1) = x^3 + (2 \cos \alpha_1 - \lambda)x^2 + (1 - 2\lambda \cos \alpha_1)x - \lambda.$$

Отсюда получаем, что λ является рациональным числом, следовательно, собственный вектор γ^u имеет рациональные координаты, соответственно, он может быть целочисленным вектором, но прямая l^u не может проходить через целочисленную точку, поскольку ее проекция всюду плотна на торе $\mathbb{T}^3$. $\square$

Случаи двух и четырех рационально независимых соотношений для частично гиперболической матрицы действительно возможны. Соответствующие примеры представлены в конце этого раздела. Обратите внимание, что в этих случаях характеристический многочлен такой матрицы является произведением двух монических многочленов, один из которых второй степени, а другой четвертой степени с целыми коэффициентами.

3.2.1 Примеры автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с транзитивным одномерным неустойчивым слоением

Чтобы построить примеры симплектических частично гиперболических автоморфизмов шестимерного тора с одномерным неустойчивым слоением, обладающим различными динамическими свойствами, нужно найти матрицу в $\text{Sp}(6, \mathbb{Z})$, которая имеет две пары комплексно-сопряженных собственных значений и два действительных собственных значения λ и λ^{-1} , $|\lambda| > 1$. Более того, мы хотели бы получить автоморфизм тора, одномерное неустойчивое слоение которого является транзитивным. Чтобы найти такую матрицу, начнем построение такого автоморфизма, следуя [47], с неприводимого над полем рациональных чисел кубического многочлена $P(z)$ с целыми коэффициентами, имеющего три корня, один из которых больше 2, а два других меньше 2 по модулю. После замены переменных $z = x + x^{-1}$ в этом многочлене, получаем возвратный многочлен шестой степени, который служит характеристическим многочленом матрицы с искомыми свойствами [47]. Этот многочлен также неприводим над $\mathbb{Q}$.

Для примера, начнем с кубического многочлена $P(z) = z^3 - 2z^2 - z + 1$, который после подстановки и умножения x^3 принимает вид $Q(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1$. Согласно работе [47] многочлен Q неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Тогда сопровождающая матрица для $Q(x)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы обладают требуемыми свойствами. Однако матрица A не является симплектической относительно стандартной симплектической 2-формы $[x, y] = (Ix, y)$ в $\mathbb{R}^6$ (см. (3.1): $A^\top I A \neq I$). Действуя, как и прежде, найдем кососимметричную целочисленную невырожденную матрицу J , которая задает такую структуру, определенную как $[x, y] = (Jx, y)$ для $x, y \in \mathbb{R}^6$. Матрица J имеет следующий вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вещественные собственные значения матрицы A равны

$$\lambda \approx 1.6355, \quad \lambda^{-1} \approx 0.6114.$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ имеет вид $\gamma^u = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5)^\top$. Факторклассы $\mathbb{R}^6/l^u$, порожденные собственным пространством l^u , образуют расслоение на аффинные прямые, инвариантные относительно L_A . Эти прямые проектируются на $\mathbb{T}^6$, как траектории векторного поля

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = \lambda, \quad \dot{x}_3 = \lambda^2, \quad \dot{y}_1 = \lambda^3, \quad \dot{y}_2 = \lambda^4, \quad \dot{y}_3 = \lambda^5.$$

Чтобы доказать, что траектория этого векторного поля транзитивна на $\mathbb{T}^6$, нужно проверить, что вектор γ^u несоизмерим, т.е. $(m, \gamma^u) \neq 0$ для любого ненулевого целочисленного вектора $m \in \mathbb{Z}^6$. Число λ является алгебраическим числом шестой степени, являющимся корнем неприводимого многочлена шестой степени с целыми коэффициентами.

Напомним, что число $\xi \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим числом*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами, и оно называется *алгебраическим целым числом*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен единице (монический многочлен). *Степенью* алгебраического целого числа ξ называется степень его *минимального* многочлена от ξ (монический многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, для которого ξ является корнем).

Приведенный выше многочлен $Q(x)$ имеет шестую степень в силу следующей теоремы.

Теорема 24. Пусть ξ - алгебраическое число над полем $\mathbb{Q}$ и $p(x)$ его минимальный монический многочлен. Тогда

1. многочлен $p(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$;

2. многочлен $p(x)$ единствен;
3. если ξ корень многочлена f над полем $\mathbb{Q}$, тогда f делится на p .

Из последнего утверждения теоремы следует, что число λ , являющееся корнем неприводимого многочлена $Q(x)$ шестой степени, не может быть корнем многочлена меньшей степени с рациональными (целыми) коэффициентами.

Теперь мы можем доказать следующую лемму

Лемма 9. Вектор γ несоизмерим.

Доказательство. Предположим противное, вектор γ соизмерим. Тогда существует целочисленный вектор $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$, такой что выполняется равенство $m_1 + m_2\lambda + m_3\lambda^2 + m_4\lambda^3 + m_5\lambda^4 + m_6\lambda^5 = 0$, т.е. λ является корнем многочлена P пятой (или меньшей) степени с целыми коэффициентами. Поэтому Q делится на P и Q -приводимый многочлен. $\square$

3.2.2 Разложимые автоморфизмы с одномерным неустойчивым слоением

В данном подразделе представлены автоморфизмы с одномерными неустойчивыми и устойчивыми слоениями, которые называются разложимыми. Они характеризуются следующим свойством: замыканием их неустойчивых (устойчивых) слоений являются тором размерности меньше шести. Из предложения 4 следует, что в разложимом случае замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой либо двумерный, либо четырехмерный тор.

Случай, когда замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой четырехмерный тор, действительно возможен. Достаточно выбрать, например, блочно-диагональную целочисленную матрицу S_1 , состоящую из двух целочисленных блоков, один из которых (4×4) -блок имеет собственные значения $\lambda, \lambda^{-1}, \exp[i\alpha_1], \exp[-i\alpha_1]$, $\lambda > 1$, который порождает частично гиперболический транзитивный автоморфизм тора $\mathbb{T}^4$, а второй (2×2) -блок имеет два комплексно-сопряженных собственных значения $\exp[i\alpha_2], \exp[-i\alpha_2]$ (тогда $\alpha_2/2\pi = 1/3, 1/4, 1/6$, следует из работы [64]). В качестве примера можно взять матрицу

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приводимый характеристический многочлен $\chi_1(\lambda) = (\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$, соответствующий симплектической матрице S_1 , имеет корни:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\sqrt{5} - 5}}{2}, \quad \lambda_{5,6} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Случай, когда замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой двумерный тор, также возможен. Здесь возможны два различных случая. В первом случае достаточно выбрать, например, блочно-диагональную целочисленную матрицу S_2 , состоящую из двух целочисленных блоков, один из которых (2×2) -блок порождает автоморфизм Аносова, а второй (4×4) -блок имеет две пары комплексно-сопряженных собственных значений $\exp[i\alpha_1]$, $\exp[-i\alpha_1]$, $\exp[i\alpha_2]$, $\exp[-i\alpha_2]$ на единичной окружности. Поскольку характеристический многочлен этой (4×4) -матрицы имеет целочисленные коэффициенты и является моническим, его собственные значения являются корнями из единицы [57]. Примером может служить матрица

$$S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Характеристический многочлен $\chi_2(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1)$, соответствующий симплектической матрице S_2 , приводим и имеет следующие корни:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \pm i \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \pm i \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}, \quad \lambda_{5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

собственные значения $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{3,4}$ лежат на единичной окружности и являются корнями из единицы степени 10.

Во втором случае выберем блочно-диагональную целочисленную матрицу S_3 , состоящую из трех целочисленных блоков, один из которых (2×2) -блок порождает автоморфизм Аносова, а второй и третий (2×2) -блоки имеют пары комплексно-сопряженных собственных значений $\exp[i\alpha_1]$, $\exp[-i\alpha_1]$ и $\exp[i\alpha_2]$, $\exp[-i\alpha_2]$ на единичной окружности, соответственно, (тогда $\alpha_i/2\pi = 1/3, 1/4, 1/6$, $i = 1, 2$ [64]) при условии, что $\alpha_1/2\pi \neq \alpha_2/2\pi$. Этот случай почти такой же, как и предыдущий, только разница в том, что корни из единицы здесь могут быть только степени $\{3, 4, 6\}$. Это приводит к другой структуре периодического преобразования на центральном многообразии $\mathbb{T}^4 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ неподвижной точки $\hat{O}$.

Примером может служить матрица

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_3(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ симплектической матрицы S_3 приводим и имеет корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_{5,6} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.3 Частично гиперболические автоморфизмы с двумерным неустойчивым слоением

В этом разделе изучается случай, когда размерность W^u (и W^s) равна двум. Это соответствует тем симплектическим (6×6) -матрицам, которые имеют два собственных значения λ_1, λ_2 за пределами единичной окружности в $\mathbb{C}$, два собственных значения $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$ внутри единичной окружности и два комплексно-сопряженных собственных значения на единичной окружности. В свою очередь, λ_1, λ_2 могут быть либо двумя различными вещественными числами, либо парой комплексно-сопряженных чисел. Соответственно, W^u натянута либо на два линейно независимых вещественных собственных вектора γ_1^u, γ_2^u вещественных собственных значений, либо это инвариантное двумерное вещественное подпространство, соответствующее комплексно-сопряженным собственным значениям. В последнем случае инвариантное подпространство порождается вещественной и мнимой частями γ_r^u, γ_i^u комплексного собственного вектора $\gamma_r^u + i\gamma_i^u$, они являются линейно независимыми вещественными векторами.

Проекция p подпространства W^u на $\mathbb{T}^6$ порождает соответствующее неустойчивое слоение на $\mathbb{T}^6$. Чтобы определить, как ведут себя слои этого слоения на $\mathbb{T}^6$, заметим, что это слоение образуется орбитами действия группы $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{T}^6$, порожденными двумя коммутирующими постоянными векторными полями на $\mathbb{T}^6$, заданными как $\gamma_1^u \cdot \partial/\partial\theta$ и $\gamma_2^u \cdot \partial/\partial\theta$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_6)$. Соответствующие орбиты задаются как

$$\theta(t_1, t_2) = t_1\gamma_1^u + t_2\gamma_2^u + \theta_0 \pmod{1}.$$

В частности, для $\theta_0 = \hat{O}$ мы имеем орбиту, проходящую через неподвижную точку $\hat{O}$ автоморфизма. Действие и сдвиг на торе коммутирует.

Напомним теорему Кронекера [56] (см. также [8], глава VII-1 и [30]) и ее следствие. В их формулировках используются общепринятые обозначения: $(\cdot, \cdot)$

стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ и $\|\cdot\|$ максимум нормы вектора в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 25 (Кronecker). Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы m векторов $\mathbf{a}_i$, $1 \leq i \leq m$ и вектор $\mathbf{b}$. Для того чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало m чисел $t_i \in \mathbb{R}$ и целочисленный вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ такой, что

$$\left\| \sum_{i=1}^m t_i \mathbf{a}_i - \mathbf{p} - \mathbf{b} \right\| \leq \varepsilon,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого целочисленного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$ для которого выполнены все m равенств $(\mathbf{r}, \mathbf{a}_i) = 0$, также выполнялось соотношение $(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = 0$.

Кратко обсудим геометрический смысл этой теоремы. Чтобы быть ближе к рассматриваемому случаю, мы предполагаем, что вектора $\mathbf{a}_i$ независимы, в частности, $m \leq n$. Линейная комбинация $\sum_i t_i \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ с вещественными t_i , $1 \leq i \leq m$, принадлежит линейному подпространству в $\mathbb{R}^n$, порожденному векторами $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Когда m -чисел $t = (t_1, \dots, t_m)$ пробегает все $\mathbb{R}^m$, мы получаем все подпространство. Сложение (или вычитание) векторов $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ сдвигает это подпространство в любую точку решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Когда $\mathbf{p}$ пробегает все $\mathbb{Z}^n$, он задает некоторое множество $\mathcal{L}_a$ в $\mathbb{R}^n$ и вопрос в следующем: аппроксимируют ли векторы $\mathcal{L}_a$ заданный вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ с произвольной точностью? Или, другими словами, когда $\mathbf{b}$ принадлежит замыканию $\overline{\mathcal{L}_a}$? Теорема Кронекера дает исчерпывающий ответ на этот вопрос: если существует целочисленный вектор $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$ такой, что все соотношения $(\mathbf{r}, \mathbf{a}_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, то $\mathbf{b}$ должен принадлежать плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$. Если существует несколько таких линейно независимых векторов $\mathbf{r}$, то все они должны принадлежать $\mathbf{b}$.

Заметим, что равенство $(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$, с целочисленным вектором $\mathbf{r}$ определяет пятимерный тор $\mathbb{T}^5 \subset \mathbb{T}^6$. Итак, любое такое равенство определяет тор. Если существуют два таких равенства с линейно независимыми $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ над $\mathbb{Q}$, то две пятимерные плоскости в $\mathbb{R}^6$ пересекаются трансверсально вдоль четырехмерной плоскости, поэтому связанные пятимерные торы в $\mathbb{T}^6$ пересекаются трансверсально и образуют четырехмерный тор. Орбиты действия $\mathbb{R}^2$ лежат на этом четырехмерном торе.

Если такой целочисленный вектор $\mathbf{r}$ существует, то равенство называется *резонансным соотношением* для множества $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Число линейно независимых (над $\mathbb{Q}$) таких соотношений называется степенью вырождения резонанса. Итак, если таких отношений не существует, можно взять любой $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ и справедливо следующее утверждение

Следствие 26. Для того чтобы для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существовало m действительных чисел $t_1, \dots, t_m$ и целочисленный вектор $\mathbf{p}$ такой,

что

$$\left\| \sum_{i=1}^m t_i \mathbf{a}_i - \mathbf{p} - \mathbf{x} \right\| \leq \varepsilon,$$

необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одного ненулевого целочисленного вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$ такого, что $(\mathbf{r}, \mathbf{a}_i) = 0$ для всех i .

Это следствие одновременно дает критерий, когда слои неустойчивого слоения транзитивны на $\mathbb{T}^6$. Действительно, предположим, что условия следствия справедливо для двух линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ в W^u . Тогда подпространство в $\mathbb{R}^6$, порожденное этими двумя векторами, вместе со всеми его сдвигами на $\mathbb{Z}^6$ плотно в $\mathbb{R}^6$ и, следовательно, $p(W^u)$ плотно при проектировании на $\mathbb{T}^6$.

Для решения проблемы классификации нам нужно доказать аналог предложения 4. Как известно, слои неустойчивого слоения одновременно являются орбитами действия группы $\mathbb{R}^2$, порожденной двумя коммутирующими векторными полями, соответствующими либо собственным векторам двух действительных собственных значений больше единицы, либо действительной и мнимой части комплексного собственного вектора собственного значения больше единицы по модулю.

Предложение 5. Для автоморфизма f_A замыкание неустойчивого слоя неподвижной точки $\hat{O}$ может быть либо четырехмерным тором, либо всем тором $\mathbb{T}^6$, в последнем случае слоение является транзитивным.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай комплексно-сопряженных собственных значений по модулю больше единицы. В этом случае замыкание слоя неподвижной точки $\hat{O}$ для f_A не может быть ни трёхмерным, ни пятимерным тором, поскольку линейное отображение L_A в $\mathbb{R}^6$ не имеет ни пятимерных, ни трехмерных инвариантных подпространств.

В случае двух действительных собственных значений, больших единицы, доказательство факта, что замыкание неподвижной точки $\hat{O}$ для f_A не может быть ни трёхмерным тором, ни пятимерным тором аналогично доказательству предложения 4. $\square$

3.3.1 Примеры автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с транзитивным двумерным неустойчивым слоением

Следующие два подраздела посвящены построению примеров как транзитивных, так и разложимых автоморфизмов с двумерным неустойчивым слоением. Снова, как и для случая с одномерным неустойчивым слоением начнем с вещественного многочлена третьей степени с целыми коэффициентами a, b, c ,

неприводимыми над полем $\mathbb{Q}$: $P = z^3 + az^2 + bz + c$. Рассматриваются два различных случая. В первом случае этот многочлен должен иметь один действительный корень z_1 меньше двух по модулю и пару различных действительных корней z_2, z_3 больше двух по модулю. Во втором случае многочлен должен иметь один действительный корень z_1 меньше 2 по модулю и пару комплексно-сопряженных корней z_2, z_2^* с $|z_2| > 2$.

Имея такой многочлен третьей степени, сделаем замену $z = x + x^{-1}$ и умножим полученный многочлен на x^3 , следовательно, получаем целочисленный многочлен шестой степени

$$Q = x^6 + ax^5 + (3 + b)x^4 + (2a + c)x^3 + (3 + b)x^2 + ax + 1,$$

соответственно. Его корнями являются два комплексно-сопряженных числа $x_{1,2}$, являющихся корнями квадратного многочлена $x^2 - z_1x + 1$, они принадлежат единичной окружности в $\mathbb{C}$. Четыре других корня для первого случая – это четыре действительных корня $x_3, x_3^{-1}, x_4, x_4^{-1}$, являющихся корнями квадратных уравнений $x^2 - z_2x + 1 = 0$ и $x^2 - z_3x + 1 = 0$. Поскольку $|z_i| > 2$, абсолютные значения $x_j, j = 3, 4$, больше единицы. В качестве примера возьмем неприводимый многочлен третьей степени $P = z^3 - 2z^2 - 8z + 1$ [47]. Он имеет два действительных корня больше двух по модулю, и действительный корень меньше двух по модулю. Его возвратный многочлен равен

$$Q(x) = x^6 - 2x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x + 1, \quad (3.4)$$

который неприводим над полем $\mathbb{Q}$ и имеет четыре действительных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$, $|\lambda_{1,2}| > 1$, и пару комплексно-сопряженных корней, лежащих на единичной окружности. Все эти числа являются алгебраическими, и Q – их минимальный многочлен. Его сопровождающая матрица A имеет двумерные подпространства W^u, W^s и порождает частично гиперболическое преобразование на $\mathbb{T}^6$ с двумерным устойчивым и неустойчивым слоениями и двумерным центральным слоением. Матрицу A можно сделать симплектической с использованием нестандартной симплектической структуры, порожденной кососимметричной невырожденной матрицей J в (3.2) с $a = -2, b = -5, c = -3$ и $\det J = 36$.

Для второго случая комплексный корень $z_2 = u + iv$, $uv \neq 0$, может быть записан как $u = (\rho + \rho^{-1}) \cos \alpha$, $v = (\rho - \rho^{-1}) \sin \alpha$, где $x_{3,4} = \rho \exp[\pm i\alpha]$, $\rho > 1$, $x_{3,4}^{-1} = \rho^{-1} \exp[\mp i\alpha]$. Из этих выражений получаем систему для нахождения ρ, α при заданных u, v :

$$\frac{u^2}{\rho^2 + \rho^{-2} + 2} + \frac{v^2}{\rho^2 + \rho^{-2} - 2} = 1, \quad \tan \alpha = \frac{u(\rho^2 + 1)}{v(\rho^2 - 1)}.$$

Вводя переменную $s = \rho^2 + \rho^{-2} > 2$, приходим к квадратному уравнению для s

$$s^2 - (u^2 + v^2)s - 4 + 2(u^2 - v^2) = 0.$$

Монический многочлен $P = z^3 + az^2 + bz + c$ имеет единственный вещественный корень меньше 2 по модулю, а два других корня должны быть комплексно-сопряженными. В качестве примера можно рассмотреть многочлен $P = z^3 - 3z^2 + 6z - 1$ с $z_1 \approx 0.182$, $z_{2,3} \approx 1.409 \pm 1.871i$ или $P = z^3 - z - 1$ с $z_1 \approx 1.325$, $z_{2,3} \approx -0.662 \pm 0.562i$. Они задают два возвратных, неприводимых многочлена шестой степени

$$x^6 - 3x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 3x + 1 \text{ и } x^6 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 \quad (3.5)$$

Рассмотрим автоморфизм в $\mathbb{R}^6$, порожденный сопровождающей матрицей многочлена (3.4). Его собственные вектора действительных собственных значений имеют вид

$$\mathbf{f}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5)^\top, \quad \lambda = \lambda_{1,2}.$$

Таким образом, не существует никаких целочисленных векторов $\mathbf{n}$ таких, что $(\mathbf{n}, \mathbf{f}_{\lambda_k}) = 0$, $k = 1, 2$, в противном случае, по крайней мере, один из λ_k является корнем монического целочисленного многочлена пятой степени или меньше.

Для случая многочлена (3.5) его сопровождающая матрица имеет комплексно-сопряженные собственные значения λ, λ^* с $|\lambda| > 1$, которым соответствуют два комплексно-сопряженных собственных вектора

$$\mathbf{f}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5)^\top, \quad \mathbf{f}_\lambda^*.$$

Их действительная и мнимая части задают два действительных линейно независимых вектора $\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_i$, $\mathbf{f}_\lambda = \mathbf{g}_r + i\mathbf{g}_i$. Предположим, что существует целочисленный ненулевой вектор $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^6$ такой, что $(\mathbf{n}, \mathbf{g}_r) = 0$ и $(\mathbf{n}, \mathbf{g}_i) = 0$. Это равенство равносильно

$$(\mathbf{n}, \mathbf{g}_r + i\mathbf{g}_i) = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\lambda + \mathbf{n}_3\lambda^2 + \mathbf{n}_4\lambda^3 + \mathbf{n}_5\lambda^4 + \mathbf{n}_6\lambda^5 = 0,$$

т.е. λ является алгебраическим числом пятой степени или меньше. Мы приходим к противоречию. Итак, в обоих случаях слои неустойчивого слоения плотны на $\mathbb{T}^6$.

Ниже приведен еще один пример автоморфизма на $\mathbb{T}^6$ с транзитивным неустойчивым двумерным слоением. Возьмем блочно-диагональную целочисленную матрицу S_4 , состоящую из двух целочисленных блоков, один из которых (4×4) -блок имеет собственные значения $\lambda, \lambda^{-1}, \exp[i\alpha_1], \exp[-i\alpha_1]$, $\lambda > 1$, который порождает частично гиперболический транзитивный автоморфизм на $\mathbb{T}^4$, и второй (2×2) -блок, который порождает автоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^2$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_4(\lambda) = (\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$, соответствующей симплектической матрицы S_4 приводим над полем $\mathbb{Q}$ и имеет следующие корни

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\sqrt{5} - 5}}{2}, \quad \lambda_{5,6} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Здесь двумерное неустойчивое слоение порождается вещественными собственными векторами вещественных собственных значений λ_1 и λ_5 . Проверим, что здесь выполняется следствие 26. Действительно, собственные вектора этих собственных значений имеют вид: $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^\top$ и $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$. Предположим противное, что существует целочисленный вектор $\mathbf{r}$ такой, что оба равенства $(\mathbf{r}, \mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$ выполняются. Тогда второй из них дает $r_5 f + r_6 g = 0$, что говорит о рациональности соотношения f/g . Но это невозможно для автоморфизма Аносова на $\mathbb{T}^2$ [47]. Следовательно, неустойчивое слоение является транзитивным.

3.3.2 Разложимые автоморфизмы с двумерным неустойчивым слоением

В этом подразделе представлены автоморфизмы с двумерными неустойчивыми и устойчивыми слоениями, которые называются разложимыми. Они характеризуются тем, что замыкания их неустойчивых (устойчивых) слоев являются торами размерности меньше шести. Как было доказано в предложении 3.3, замыкание слоя неустойчивого слоения может быть четырехмерным тором. Построим соответствующие примеры.

Здесь возможны три различных случая. В первом случае выберем блочно-диагональную целочисленную матрицу S_5 , состоящую из двух целочисленных блоков, один из которых (4×4) -блок имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}$, $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2$, порождающий автоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^4$ с транзитивным двумерным неустойчивым слоением, а второй (2×2) -блок имеет два комплексно-сопряженных собственных значения $\exp[i\alpha], \exp[-i\alpha]$ (тогда $\alpha/2\pi = 1/3, 1/4, 1/6$, следует из работы [64]). Например, подходит следующая матрица

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 12 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_5(\lambda) = (\lambda^4 + 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 4\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$,

соответствующий матрице S_5 , приводим и имеет корни

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2} \approx 1.629, \quad \lambda_2 = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2} \approx 0.614, \\ \lambda_3 &= -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \approx -0.165, \quad \lambda_4 = -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \approx -6.078, \\ \lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Эта матрица имеет пару отрицательных собственных значений $\lambda_{3,4}$. Чтобы получить случай, когда все собственные значения вне единичной окружности положительны, нужно взять квадрат данного (4×4) -блока.

Во втором случае достаточно выбрать, например, блочно-диагональную целочисленную матрицу S_6 , состоящую из двух целочисленных блоков, один из которых (4×4) -блок имеет две пары комплексно-сопряженных собственных значений $\rho \exp[i\alpha], \rho \exp[-i\alpha], \rho^{-1} \exp[i\alpha], \rho^{-1} \exp[-i\alpha]$ вне единичной окружности (это также автоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^4$ с двумерными неустойчивым и устойчивым слоением) и еще один (2×2) -блок имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\exp[i\alpha], \exp[-i\alpha]$ на единичной окружности (тогда $\alpha/2\pi = 1/3, 1/4, 1/6$, следует из работы [64]).

$$S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -9 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_6(\lambda) = (\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 5\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$, соответствующий матрице S_6 , приводим и имеет корни

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{5}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{3-i5\sqrt{3}}}{4} \approx 0.378 \pm i0.188, \\ \lambda_{3,4} &= \frac{5}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+i5\sqrt{3}}}{4} \approx 2.122 \pm i1.054, \\ \lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Первый множитель представляет собой неприводимый многочлен, который получается из многочлена второго порядка $z^2 - 5z + 7$ заменой $z = \lambda + 1/\lambda$. Оба корня $(5 \pm i\sqrt{3})/2$ по модулю больше двух.

Третий случай порождается блочно-диагональной целочисленной матрицей S_7 , состоящей из трех целочисленных блоков, два из которых (2×2) -блоки порождают автоморфизмы Аносова на $\mathbb{T}^2$, и третий блок имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\exp[i\alpha], \exp[-i\alpha]$ на единичной окружности

(также как и выше $\alpha/2\pi = 1/3, 1/4, 1/6$, [64]):

$$S_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_7(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$, соответствующий матрице S_6 , приводим и имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{7}{2} \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{5,6} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Этот случай в некотором смысле аналогичен первому и второму, поскольку неустойчивое слоение для f_{S_7} двумерно и транзитивно на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$. Действительно, собственные векторы вещественных собственных значений которые больше единицы, удовлетворяют условиям следствия 26. Тем не менее мы выделяем этот случай, поскольку такие автоморфизмы топологически не сопряжены с любым автоморфизмом первого или второго случая.

3.4 Классификация частично гиперболических автоморфизмов

При изучении частично гиперболических симплектических автоморфизмов возникает естественный вопрос: в каком случае два таких автоморфизма топологически сопряжены. Напомним, что два гомеоморфизма f_1, f_2 метрического пространства M называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h : M \rightarrow M$ такой, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

Заметим, что классификация эргодических автоморфизмов тора с точки зрения теории меры определяется их энтропией [48], которая равна сумме логарифмов модулей собственных значений, больших единицы по модулю матрицы A . Это следует из теоремы Орнштейна об изоморфизме [75] и того факта, что каждый эргодический автоморфизм тора является автоморфизмом Бернулли относительно меры Лебега [48].

Теорема Арова (см. выше) обеспечивает топологическое сопряжение двух автоморфизмов f_A, f_B на $\mathbb{T}^n$. Любой изоморфизм группы $\mathbb{T}^n$ в циклических координатах θ задается целочисленной унимодулярной матрицей. Существование сопрягающего гомеоморфизма $h : \mathbb{T}^6 \rightarrow \mathbb{T}^6$ для двух автоморфизмов f_A, f_B , т.е. $h \circ f_A = f_B \circ h$, влечет соотношение $H \circ A = B \circ H$ в фундаментальной группе $\mathbb{Z}^6$ тора, где H — линейный изоморфизм в $\mathbb{Z}^6$, порождённый h . Таким образом,

матрицы A, B целочисленно подобны по H . Обратно, если две целочисленные унимодулярные матрицы A, A' целочисленно подобны, т.е. существует целочисленная унимодулярная матрица H такая, что $HA = A'H$, тогда H индуцирует автоморфизм $h = f_H$ тора $\mathbb{T}^6$. Накрывающее отображение для $h \circ f_A$ имеет вид $L_H L_A = L_{HA}$, а $L_{A'} L_H = L_{A'H}$ для $f_{A'} \circ h$. Следовательно, $L_H L_A = L_{A'} L_H$ и справедливо соотношение $h \circ f_A = f_{A'} \circ h$. Итак, для классификации частично гиперболических автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ справедлива следующая теорема, являющаяся переформулировкой теоремы Арова

Теорема 27. Два симплектических частично гиперболических автоморфизма f_A, f_B на $\mathbb{T}^6$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их матрицы A, B целочисленно подобны.

Подобные матрицы A, B имеют один и тот же целочисленный характеристический многочлен. Как мы видели выше, построение примеров автоморфизмов проще с использованием сопровождающих матриц характеристических многочленов. Предположим теперь, что существуют две целочисленные симплектические частично гиперболические матрицы A, B , имеющие один и тот же характеристический многочлен. Когда два автоморфизма f_A, f_B топологически сопряжены? На приведенных выше примерах мы видели, что такие два автоморфизма могут быть не сопряжены, поскольку их матрицы не являются целочисленно подобными, хотя рационально подобны. Итак, нам нужно определить, являются ли такие две целочисленные матрицы целочисленно подобны, соответствующее обсуждение мы отложим до раздела 3.5.

В частности, как было показано выше, существует два случая автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с транзитивным неустойчивым двумерным слоением. В первом случае характеристический многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$, а во втором случае он приводим над $\mathbb{Z}$ в произведение двух монотических целочисленных многочленов четвертого и второго порядка. Автоморфизмы первого и второго случая являются несопряженными, поскольку они имеют разные характеристические многочлены.

Чтобы различать автоморфизмы, не являющиеся топологически сопряженными, полезно иметь несколько простых признаков, которые гарантируют это. Следующее утверждение является таковым.

Предложение 6. Пусть f_A — симплектический частично гиперболический автоморфизм 6-мерного тора $\mathbb{T}^6$ с транзитивным одномерным неустойчивым слоением. Тогда характеристический многочлен матрицы A неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Предположим обратное, что характеристический многочлен приводим над полем $\mathbb{Q}$ и представляет собой произведение двух вещественных многочленов с рациональными коэффициентами. Возможны четыре случая.

- Характеристический многочлен разлагается в произведение двух многочленов, первой степени, соответствующий собственному значению λ , и пятой степени, соответствующий четырем собственным значениям, лежащим на единичной окружности и λ^{-1} . Отсюда следует, что $\lambda \in \mathbb{Q}$. В этом случае существует собственный вектор γ для λ с рациональными координатами, что невозможно: при умножении на наименьший общий знаменатель этот вектор становится целочисленным, а проекция $p(t\gamma)$ представляет собой замкнутую инвариантную кривую с единственной неустойчивой точкой. То же самое справедливо, если линейному множителю соответствует λ^{-1} .
- Характеристический многочлен является произведением двух многочленов: второй степени, соответствующий собственным значениям λ, λ^{-1} , и четвертой степени, соответствующий четырем собственным значениям на единичной окружности. Характеристический многочлен имеет вид $P = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1)$ с рациональными коэффициентами a, b, c . Тогда λ является корнем многочлена второй степени $x^2 + ax + 1$ с рациональным коэффициентом a . Поскольку все собственные значения матрицы A просты, минимальный и характеристический многочлены матрицы A совпадают, и A сопряжено посредством рациональной невырожденной матрицы T с сопровождающей матрицей B характеристического многочлена матрицы A , $A = T^{-1}BT$. Собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному значению λ , равен $\rho = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5)^\top$. Поскольку λ является корнем многочлена второй степени, существуют четыре рациональных линейно независимых соотношения для соответствующего вектора ρ : $(m_i, \rho) = 0$, где $i = 1, 2, 3, 4$, а именно $m_1 = (1, a, 1, 0, 0, 0)^\top$, $m_2 = (0, 1, a, 1, 0, 0)^\top$, $m_3 = (0, 0, 1, a, 1, 0)^\top$, $m_4 = (0, 0, 0, 1, a, 1)^\top$. Если $a = p/q$ с взаимно простыми целыми числами p, q , то получаем четыре линейно независимых целочисленных вектора.

Имеем $TA = BT$ с рациональной невырожденной матрицей T , следовательно умножение на общий знаменатель элементов T задает целочисленную невырожденную матрицу T_1 , удовлетворяющую соотношению $T_1A = BT_1$. Вектор $T_1\gamma^u$ является собственным вектором для матрицы B с собственным значением λ : $BT_1\gamma^u = T_1A\gamma^u = \lambda T_1\gamma^u$. Так как λ является простым собственным значением, то $T_1\gamma^u = c\rho$. Тогда мы получаем четыре линейно независимых целочисленных вектора $T_1^*m_i$, $i = 1 - 4$, удовлетворяющих соотношениям $(T_1^*m_i, \gamma^u) = (m_i, T_1\gamma^u) = c(m_i, \rho) = 0$. Таким образом, получаем, что замыканием неустойчивого многообразия представляет тор меньшей размерности, а именно двумерный. Это противоречит транзитивности автоморфизма f_A на $\mathbb{T}^6$.

- Предположим, что характеристический многочлен является произведением двух многочленов третьей степени, соответствующих собственным зна-

чениям $\lambda, \exp[\pm i\alpha_k]$ и $\lambda^{-1}, \exp[\pm i\alpha_j]$, где $i, j = 1, 2$ и $i \neq j$. Тогда многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами имеет вид

$$(x - \lambda)(x - \exp[i\alpha_1])(x - \exp[-i\alpha_1]) = (x - \lambda)(x^2 + 2x \cos \alpha_1 + 1) = x^3 + (2 \cos \alpha_1 - \lambda)x^2 + (1 - 2\lambda \cos \alpha_1)x - \lambda.$$

Отсюда заключаем, что λ - рациональное число. Но тогда снова существует собственный вектор с рациональным коэффициентом, отсюда снова получаем противоречие.

- Предположим, что характеристический многочлен разлагается в произведение двух многочленов, один из которых является многочленом четвертой степени, соответствующий собственным значениям $\lambda, \lambda^{-1}, \exp[\pm i\alpha_k]$ и второй степени, соответствующий собственным значениям $\exp[\pm i\alpha_j]$, $j \neq k$. Характеристический многочлен имеет вид $P = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + 1)$. Так как $a, b_l \in \mathbb{Q}$, $l = 1, 2$, то $b_l = \frac{p_l}{q_l}$, где p_l, q_l взаимно простые целые числа. Обозначим через N общий знаменатель для $b_l, l = 1, 2$. Таким образом, λ — корень многочлена четвертой степени с рациональными коэффициентами. Рассуждая так же, как и в пункте 2, приходим к выводу, что существует два целочисленных соотношения для собственного вектора $\gamma^u : (m_i, \gamma^u) = 0$, где $i = 1, 2$, а именно $m_1 = N(1, b_1, b_2, b_1, 1, 0)^\top, m_2 = N(0, 0, 0, 0, b_1, 1)^\top$. Таким образом, получаем, что замыканием неустойчивого многообразия является тором меньшей размерности, а именно четырехмерный. Это противоречит транзитивности.

Итак предложение доказано. □

Теперь докажем следующее утверждение

Предложение 7. Если f_A — симплектический частично гиперболический автоморфизм тора $\mathbb{T}^6$ с транзитивным неустойчивым одномерным слоением, то его слои устойчивого и центрального слоений также плотны.

Доказательство. Пусть γ^u, γ^s — собственные вектора для собственных значений λ, λ^{-1} , и проекция прямой $t\gamma^u$ на $\mathbb{T}^6$ плотна. Тогда характеристический многочлен матрицы A неприводим. Предположим, что замыкание проекции $t\gamma^s$ на $\mathbb{T}^6$ либо двумерный тор, либо четырехмерный тор. Это влечет, что характеристический многочлен матрицы A приводим. Противоречие.

Теперь покажем, если неустойчивое слоение плотно, то центральное слоение также является плотным на $\mathbb{T}^6$. Характеристический многочлен матрицы A неприводим. Предположим, что замыкание проекции центрального подпространства W^s не является плотным и, будучи тором, образует четырехмерный

тор на $\mathbb{T}^6$. Этот тор является гладким инвариантным многообразием относительно f_A (как замыкания инвариантного множества), содержащего неподвижную точку $\hat{O}$. Касательная плоскость к $\mathbb{T}^4$ в точке $\hat{O}$ является инвариантной четырехмерной плоскостью относительно дифференциала Df_A . В накрывающем пространстве $\mathbb{R}^6$ p -прообраз этой четырехмерной плоскости, проходящей через начало координат O , является инвариантной четырехмерной плоскостью, относительно L_A . Существует единственная такая четырехмерная плоскость W^c , для которой ограничение L_A на эту инвариантную плоскость имеет собственные значения $\exp[\pm i\alpha_1], \exp[\pm i\alpha_2]$. Поскольку проекция этой плоскости на $\mathbb{T}^6$ представляет собой инвариантный четырехмерный тор $\mathbb{T}^4$, существуют четыре линейно независимых целочисленных вектора в W^c .

Поскольку W^c является инвариантным подпространством, рассмотрим индуцированное линейным преобразованием L_A линейное преобразование L_B в это инвариантное подпространство, которое задается (4×4) -матрицей B в базисе из целочисленных векторов. Таким образом, матрица B имеет рациональные коэффициенты. Следовательно, характеристический многочлен Q матрицы B также имеет рациональные коэффициенты. Пространство $\mathbb{R}^6$ разлагается в прямую сумму двух инвариантных подпространств, относительно линейного преобразования L_A . Тогда характеристический многочлен равен произведению характеристических многочленов, индуцированных преобразованием L_A в инвариантных подпространствах. Таким образом, характеристический многочлен преобразования L_A приводим, приходим к противоречию.

Теперь предположим, что замыканием $p(W^c)$ является пятимерным тором $\mathbb{T}^5$ в $\mathbb{T}^6$. Этот тор также является гладким инвариантным многообразием для f_A , содержащим неподвижную точку $\hat{O}$. Касательная плоскость к $\mathbb{T}^5$ в точке $\hat{O}$ является инвариантной пятимерной плоскостью относительно дифференциала $Df_A = L_A$. В накрывающем пространстве $\mathbb{R}^6$ прообраз этой пятимерной плоскости, относительно проекции p , проходящей через начало координат O , является инвариантной пятимерной плоскостью, относительно L_A . Существуют только две такие инвариантные пятимерные плоскости W^{cs}, W^{cu} , для которых ограничение L_A на инвариантную плоскость имеет собственные значения $\exp[\pm i\alpha_1], \exp[\pm i\alpha_2]$. Но плоскость W^{cu} содержит γ^u , отсюда получаем, что замыкание проекции $t\gamma^u$ принадлежит $\mathbb{T}^5$, но этого не может быть, поскольку это противоречит условию транзитивности $t\gamma^u$. Аналогичные рассуждения для W^{cs} также дают противоречие, так как выше мы показали, что замыкание γ^s является плотным в $\mathbb{T}^6$. $\square$

Теперь вернемся к классификации автоморфизмов f_A на $\mathbb{T}^6$, которые являются разложимыми. На самом деле, теорема Арова работает и в этом случае. Тем не менее, в этом случае можно сказать о сопрягающем автоморфизме больше. Напомним, что автоморфизм f_A и автоморфизм f_C , порожденный сопровождающей матрицей C его характеристического многочлена связаны полусо-

пряжением Предложение 2.

Рассмотрим сначала случай, когда f_A имеет одномерное неустойчивое слоение. Пусть f_A разложимый автоморфизм, порожденный матрицей A (симплектической относительно стандартной или нестандартной симплектической структуры) с одномерным неустойчивым слоением. Это означает, что замыкание любого неустойчивого слоя является тором размерности меньше шести. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 8. Если f_A разложимый автоморфизм с одномерным неустойчивым слоением, то целочисленный характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ матрицы A приводим над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Поскольку замыкание бесконечной прямой $p(t\gamma^u)$ образует тор размерности меньше чем шесть (четырёхмерный или двумерный), то собственный вектор γ^u для собственного значения $\lambda_u > 1$ матрицы A является резонансным, т.е. существуют нетривиальные целочисленные соотношения $(m, \gamma^u) = 0$ с ненулевым вектором $m \in \mathbb{Z}$. Предположим, от противного, что многочлен $\chi(\lambda)$ матрицы A неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Отсюда следует, что λ_u является алгебраическим числом не меньше чем шестой степени. Поскольку все собственные значения матрицы A простые и A целочисленная матрица, то она рационально подобна сопровождающей матрице C : $AT = TC$ с невырожденной рациональной матрицей T . Как известно, собственный вектор ρ матрицы C , соответствующий вещественному собственному значению λ_u имеет вид $(1, \lambda_u, \dots, \lambda_u^5)^\top$: $C\rho = \lambda_u\rho$. Следовательно, вектор $T\rho$ является собственным вектором матрицы A : $AT\rho = TC\rho = \lambda_u T\rho$. Поскольку λ_u — простое собственное значение, то $T\rho = c\gamma^u$. Таким образом, для целочисленного вектора $m \in \mathbb{Z}^6$ получаем: $(m, T\rho) = c(m, \gamma^u) = 0$. Итак, для целочисленного невырожденного вектора T^*m имеем $(T^*m, \rho) = 0$. Таким образом, существует ненулевой многочлен пятой или меньшей степени с целыми коэффициентами такой, что λ_u является его корнем. Это противоречит тому, что λ_u — алгебраическое число шестой степени. Итак, характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ приводим над $\mathbb{Q}$. $\square$

Многочлен $\chi(\lambda)$ целочисленной симплектической матрицы A может быть разложен в произведение вещественных многочленов с рациональными коэффициентами только двумя способами: 1) $\chi(\lambda) = P_4(\lambda)Q_2(\lambda)$ с неприводимыми многочленами P_4 четвертой степени и Q_2 второй степени; 2) $\chi(\lambda) = P_2(\lambda)Q_2(\lambda)R_2(\lambda)$ с неприводимыми многочленами второй степени. В противном случае, если предположить, что $\chi(\lambda)$ — произведение двух рациональных многочленов нечетных степеней, тогда, как и раньше, получаем, что существует рациональный корень и, следовательно, целочисленный собственный вектор, что приводит к существованию инвариантной окружности на $\mathbb{T}^6$ с единственной неустойчивой неподвижной точкой, т.е. к противоречию.

Распределение корней среди этих многочленов может быть следующим: $\lambda, \lambda^{-1}, \exp[\pm i\alpha_1]$ для P_4 и $\exp[\pm i\alpha_2]$ для Q_2 или $\exp[\pm i\alpha_1], \exp[\pm i\alpha_2]$ для P_4 и λ, λ^{-1} для Q_2 , для первого случая, а для второго случая собственные значения разбиты на пары $\lambda, \lambda^{-1}, \exp[\pm i\alpha_1], \exp[\pm i\alpha_2]$ для каждого многочлена.

Учитывая это, получаем следующие теоремы о классификации.

Теорема 28. Пусть симплектический автоморфизм f_A тора $\mathbb{T}^6$ с одномерным неустойчивым слоением разложим, и замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя является четырехмерным тором. Тогда матрица A рационально подобна блочно-диагональной матрице (H, I) , где блоки 4×4 для H и 2×2 для I являются сопровождающими матрицами неприводимых характеристических многочленов P_4 и Q_2 соответственно. Две такие блочно-диагональные матрицы $(H, I), (H', I')$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда частично гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I, I' имеют одинаковый период k , где $k \in \{3, 4, 6\}$.

Теорема 29. Пусть f_B – разложимый симплектический автоморфизм $\mathbb{T}^6$ с одномерным неустойчивыми слоением такой, что замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой двумерный тор. Тогда матрица B рационально подобна блочно-диагональной матрице (H, I) , блоки которой являются сопровождающими матрицами 4×4 и 2×2 для H, I , соответственно, порожденные неприводимыми характеристическими многочленами P_4, Q_2 , или трем 2×2 матрицам (H, I_1, I_2) , порожденным неприводимыми характеристическими многочленами P_2, Q_2, R_2 , соответственно.

В первом случае две такие блочно-диагональные матрицы $(H, I), (H', I')$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда их гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I, I' имеют одинаковый период k .

Во втором случае два набора блочно-диагональных матриц $(H, I_1, I_2), (H', I'_1, I'_2)$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I_1, I'_1 имеют одинаковый период k_1 и I_2, I'_2 имеют одинаковый период k_2 , $k_i = 3, 4, 6$, $i = 1, 2$ при условии, что $k_1 \neq k_2$.

Замечание 11. В первом случае, когда замыкание неустойчивого (устойчивого) слоя представляет собой двумерный тор, сопровождающая матрица H на $\mathbb{T}^4$ имеет целочисленный, возвратный, характеристический многочлен с двумя парами простых комплексных корней на единичной окружности. Как следует из теоремы Кронекера [56], все четыре корня являются корнями из единицы. Если $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1$ – такой многочлен с целыми коэффициентами a, b ,

тогда $a = -2(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$, $b = 2 + 4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$. То $|a| < 4$, $|b - 2| < 4$ и, следовательно, возможно 49 таких случаев. Среди них есть приводимые, например, $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$, но существуют и неприводимые многочлены. В качестве такового примера, можно взять $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Таким образом, некоторая степень матрицы H имеет единицу в качестве корня характеристического многочлена. Поскольку все собственные значения H просты, единица является кратным собственным значением с четырьмя одномерными жордановыми клетками, так что эта тождественная матрица и H — периодическая матрица.

Аналогично случаю разложимых симплектических автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с одномерными неустойчивыми слоением, также справедливы теоремы о классификации разложимых автоморфизмов на $\mathbb{T}^6$ с двумерным неустойчивым слоением. Тем не менее, здесь есть отличие: аналог Предложения 6 недействителен. Действительно, рассмотрим матрицу S_4 из раздела 3.3. Ее неустойчивое двумерное слоение транзитивно, но характеристический многочлен приводим над $\mathbb{Z}$. Классифицируем различные классы топологического сопряжения с использованием другого подхода.

Из следствия теоремы Халмоша (см. выше) следует, что автоморфизм f_A на $\mathbb{T}^6$ эргодичен тогда и только тогда, когда среди собственных значений матрицы A нет корней из единицы. Все собственные значения матрицы A являются целыми алгебраическими числами некоторой степени, а в силу симплектичности степень является четным целым числом, равным или меньше шести. Среди них только два комплексно-сопряженных собственных значения лежат на единичной окружности. Итак, оставшиеся четыре собственных значения лежат вне единичной окружности и являются алгебраическими числами некоторой степени, они образуют либо комплексную четверку, либо две пары различных действительных собственных значений $\lambda_1, \lambda_1^{-1}$ и $\lambda_2, \lambda_2^{-1}$, $\lambda_{1,2} > 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Таким образом, приходим к следующему распределению собственных значений в зависимости от алгебраических степеней собственных значений разложимых автоморфизмов:

- множество собственных значений распадается на два подмножества: алгебраические числа четвертого порядка $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}$ и алгебраические числа второго порядка $\exp[\pm i\alpha]$ (характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ в этом случае разложим над $\mathbb{Z}$ в произведение двух монических целочисленных многочленов четвертой и второй степени, соответственно);
- множество собственных значений распадается на два подмножества: алгебраические числа четвертого порядка, составляющие четверку $\rho \exp[i\alpha], \rho \exp[-i\alpha], \rho^{-1} \exp[i\alpha], \rho^{-1} \exp[-i\alpha]$, $\rho > 1$, и алгебраические числа второго порядка $\exp[\pm i\alpha]$ (характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ разложим над $\mathbb{Z}$ в произведение двух монических целочисленных многочленов четвертой и второй степени, соответственно);

- множество собственных значений распадается на три пары, являющихся алгебраическими числами второго порядка: $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}, \exp[\pm i\alpha]$ (характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ разложим над $\mathbb{Z}$ в произведение трех монических целочисленных многочленов второй степени, соответственно).

В этих случаях устойчивые и неустойчивые двумерные слоения имеют слои, замыканиями которых являются четырехмерными торами (разложимые автоморфизмы), а центральное слоение представляет собой двумерный тор с периодическим автоморфизмом периода $\{3, 4, 6\}$ [64] при ограничении на f_A .

Учитывая это, справедливы следующие теоремы о классификации.

Теорема 30. Пусть f_A – разложимый симплектический автоморфизм тора $\mathbb{T}^6$ такой, что замыкание любого двумерного неустойчивого (устойчивого) слоя является четырехмерным тором, а матрица A имеет либо четверку комплексно-сопряженных собственных значений вне единичной окружности, либо две различные пары вещественных собственных значений вне единичной окружности. Тогда матрица A рационально подобна блочно-диагональной матрице S , блоки которой (H, I) являются сопровождающими матрицами (4×4) и (2×2) , порожденными множителями характеристического многочлена. Две такие блочно-диагональные матрицы $(H, I), (H', I')$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда гиперболические целочисленные матрицы H и H' целочисленно подобны, а периодические матрицы I, I' имеют одинаковый период $k, k \in \{3, 4, 6\}$.

Теорема 31. Пусть f_B – разложимый симплектический автоморфизм тора $\mathbb{T}^6$ такой, что замыкание любого двумерного неустойчивого (устойчивого) слоя является четырехмерным тором, и его характеристический многочлен является произведением трех монических многочленов второй степени. Тогда матрица B рационально подобна блочно-диагональной матрице S , блоки которой (H_1, H_2, I) являются сопровождающими матрицами $(2 \times 2), (2 \times 2)$ и (2×2) , порожденные множителями характеристического многочлена. Две такие блочно-диагональные матрицы $(H_1, H_2, I), (H'_1, H'_2, I')$ порождают топологически сопряженные разложимые автоморфизмы на $\mathbb{T}^6$ тогда и только тогда, когда гиперболические целочисленные матрицы H_1 и H'_1 целочисленно подобны, гиперболические целочисленные матрицы H_2 и H'_2 также целочисленно подобны, а целочисленные матрицы I, I' имеют одинаковый период $k, k \in \{3, 4, 6\}$.

3.5 Дополнение

В этом разделе строятся примеры четырех- и шестимерных линейных симплектических целочисленных матриц, не являющихся целочисленно подобными со своей сопровождающей матрицей. Это демонстрирует, что условия целочисленного подобия в теоремах о классификации существенны. Напомним, что

симплектическая матрица S в стандартном линейном симплектическом пространстве с координатами $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ удовлетворяют соотношению $S^\top IS = I$. Если S представлена в виде четырёх целочисленных (2×2) матриц A, B, C, D

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

тогда эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$A^\top C = C^\top A, \quad B^\top D = D^\top B, \quad A^\top D - C^\top B = E, \quad (3.6)$$

где E является единичной (2×2) матрицей. Обозначим элементы этих четырех матриц следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \omega \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения из (3.6) сводятся к шести равенствам

$$\begin{aligned} bx - ay + dz - cw &= 0, & \beta\xi - \alpha\eta + \delta\zeta - \gamma\omega &= 0, \\ a\xi + c\zeta - \alpha x - \gamma z &= 1, & a\eta + c\omega - \beta x - \delta z &= 0, \\ b\xi + d\zeta - \alpha y - \gamma w &= 0, & b\eta + d\omega - \beta y - \delta w &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, у нас есть 6 уравнений для 16 переменных, следовательно, существует 10 свободных переменных. Последние четыре уравнения могут быть сгруппированы в два множества, состоящих из двух линейных уравнений, относительно тех переменных, элементы матрицы которой составляют ненулевой определитель. Предположим, например, что $\det B = \Delta \neq 0$. Тогда переменные (x, y, z, w) могут быть выражены через остальные переменные следующим образом

$$\begin{aligned} x &= \frac{\delta(a\xi + c\zeta) - \delta - \gamma(a\eta + c\omega)}{\Delta}, & y &= \frac{\delta(b\xi + d\zeta) + \gamma - \gamma(b\eta + d\omega)}{\Delta}, \\ z &= \frac{\alpha(a\eta + c\omega) + \beta - \beta(a\xi + c\zeta)}{\Delta}, & w &= \frac{\alpha(b\eta + d\omega) - \alpha - \beta(b\xi + d\zeta)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Если подставить эти выражения для (x, y, z, w) в первое соотношение в (3.7), то с учетом второго равенства в (3.7) получим соотношение $b\delta + a\gamma - d\beta - c\alpha = 0$. Следовательно, вместо двух первых соотношений в (3.7) мы можем использовать два соотношения

$$\beta\xi - \alpha\eta + \delta\zeta - \gamma\omega = 0, \quad b\delta + a\gamma - d\beta - c\alpha = 0,$$

где коэффициентами является множество $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Для примера, выберем $\alpha = \gamma = \delta = 1, \beta = 0$. Тогда $\Delta = 1$ и расчеты дают $c = a + b, \zeta = \eta + \omega$. Итак, имеем шесть произвольных параметров $a, b, d, \xi, \eta, \omega$.

Если задать $\alpha = 2, \beta = \gamma = \delta = 1$, то, как легко проверить, можно выбрать

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

и соответствующий характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 17\lambda^2 - 8\lambda + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$: $\chi(\lambda) = (\lambda^2 - 5\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$. Таким образом, получаем автоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^4$ с двумерным неустойчивым и устойчивым слоением, но он является разложимым, так как замыкание одномерного неустойчивого слоения, порожденного собственным вектором, соответствующим одному из собственных значений больше единицы ($\lambda_1 = (5 + \sqrt{21})/2$ или $\lambda_2 = (3 + \sqrt{5})/2$) образует инвариантный двумерный тор.

Теперь выберем следующие матрицы A, B, C, D :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 1$, соответствующий симплектической матрице S , неприводим над $\mathbb{Z}$ и имеет следующие корни

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}{2}, \lambda_{3,4} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\sqrt{5} - 5}}{2}.$$

Оказывается, что матрица S не целочисленно подобна своей сопровождающей матрице K

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что автоморфизмы f_S и f_K , будучи одновременно эргодическими и транзитивными (и даже перемешивающимися) с транзитивными устойчивыми, неустойчивыми слоениями, не являются топологически сопряженными, поскольку их матрицы S , и K не являются целочисленно подобными, хотя они рационально подобны.

Для 6-мерного случая используемый выше алгоритм неудобен. Здесь мы применяем метод порождающей функции [94]. Мы ищем симплектическую матрицу для симплектического преобразования в виде

$$X = \frac{\partial S}{\partial Y}, y = \frac{\partial S}{\partial x}, X = (X_1, X_2, X_3), y = (y_1, y_2, y_3),$$

с квадратичной порождающей функцией $S(x, Y) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (Bx, Y) + \frac{1}{2}(CY, Y)$, где матрицы A, C симметричны, а B - произвольная вещественная невырожденная матрица. Затем преобразование выполняется в форме "креста"

$$X = Bx + CY, \quad y = Ax + B^\top Y,$$

или в прямой форме

$$x = B^{-1}X - B^{-1}CY, \quad y = AB^{-1}X + (B^\top - AB^{-1}C)Y.$$

Выберем матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем симплектическую 6×6 матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

с характеристическим многочленом $\chi(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^5 - 16\lambda^4 + 24\lambda^3 - 16\lambda^2 + 2\lambda + 1$ с корнями $\lambda_{1,2} \approx 0.704 \pm i0.710$, $\lambda_{3,4} \approx -5.663, 1.907$, $\lambda_{5,6} \approx -0.177, 0.524$. Последний многочлен может быть получен из кубического многочлена $z^3 + 2z^2 - 19z + 20$ посредством замены $z = \lambda + 1/\lambda$.

Литература

- [1] Banyaga A., de la Llave R., Wayne C. E. Cohomology equations near hyperbolic points and geometric versions of Sternberg linearization theorem //The Journal of Geometric Analysis. – 1996. – V. 6, № 4. – P. 613-649.
- [2] Barrientos P. G., Raibekas A., Rodrigues A. A. P. Chaos near a reversible homoclinic bifocus //Dynamical Systems. – 2019. – V. 34, № 3. – P. 504-516.
- [3] Belyakov L. A., Glebsky L. Y., Lerman L. M. Abundance of stable stationary localized solutions to the generalized 1D Swift-Hohenberg equation //Comput. Math. Appl. – 1997. – V. 34, № 2-4. – P. 253-266.
- [4] Birkhoff G. D. On the periodic motions of dynamical systems //Acta Mathematica. – 1927. – V. 50. – P. 359-379.
- [5] Bochner S. Compact groups of differentiable transformation //Annals of Mathematics. – 1945. – V. 46, № 3. – P. 372-381.
- [6] Bona J. L., Chen M. A Boussinesq system for two-way propagation of nonlinear dispersive waves //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – V. 116, № 1-2. – P. 191-224.
- [7] Bowen R. Equilibrium State and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms// Lecture Notes in Mathematics No. 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [8] Bourbaki N. Elements of Mathematics. General Topology, Part 2 // Addison-Wesley P.C., Reading, Massachusetts-Palo Alto-London-Don Mills, Ontario, 1966 (transl. from French).
- [9] Bronstein I. U., Kopanskii A. Y. Normal forms of vector fields satisfying certain geometric conditions //Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. – Basel : Birkhäuser Basel, 1996. – P. 79-101.
- [10] Budd C. J., Kuske R. Localized periodic patterns for the non-symmetric generalized Swift-Hohenberg equation //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2005. – V. 208, № 1-2. – P. 73-95.
- [11] Burke J., Knobloch E. Localized states in the generalized Swift-Hohenberg equation //Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2006. – V. 73, № 5. – P. 056211.
- [12] Burns K., Wilkinson A. On the ergodicity of partially hyperbolic systems //Annals of Mathematics. – 2010. – V.171, № 1. – P. 451-489.

- [13] Cassels J.W.S. An introduction to diophantine approximation// Cambridge Univ. Press, 1957.
- [14] Champneys A. R. Subsidiary homoclinic orbits to a saddle-focus for reversible systems //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1994. – V. 4, № 6. – . 1447-1482.
- [15] Champneys A. R. Homoclinic orbits in reversible systems and their applications in mechanics, fluids and optics //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – V. 112, № 1-2. – P. 158-186.
- [16] Chevalley C. Theory of Lie Groups// Princeton Mathematical Series. – 1946. – V.8.
- [17] Conley C. C. On the ultimate behavior of orbits with respect to an unstable critical point I. Oscillating, asymptotic, and capture orbits // Journal of Differential Equations. – 1969. – V. 5, № 1. – P. 136-158.
- [18] Delshams A., Gonchenko M., Gonchenko S. On dynamics and bifurcations of area-preserving maps with homoclinic tangencies //Nonlinearity. – 2015. – V. 28, № 9. – P. 3027–3071.
- [19] Devaney R. L. Blue sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems //Indiana University Mathematics Journal. – 1977. – V. 26, № 2. – P. 247-263.
- [20] Devaney R. L. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems //J. Differential Equations. – 1976. – V. 21, № 2. – P. 431-438.
- [21] Devaney R. L. Reversible diffeomorphisms and flows //Transactions of the American Mathematical Society. – 1976. – V. 218. – P. 89-113.
- [22] Duarte P. Abundance of elliptic isles at conservative bifurcations //Dynamics and Stability of Systems. – 1999. – V. 14, № 4. – P. 339-356.
- [23] Franks J. Anosov diffeomorphisms on tori //Transactions of the American Mathematical Society. – 1969. – V. 145. – P. 117-124.
- [24] Glebsky L. Y., Lerman L. M. On small stationary localized solutions for the generalized 1?D Swift–Hohenberg equation //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 1995. – V. 5, № 2. – P. 424-431.
- [25] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone //Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – V. 18. – P. 521-538.

- [26] Gonchenko M. S., Gonchenko S. V. On cascades of elliptic periodic points in two-dimensional symplectic maps with homoclinic tangencies //Regular and Chaotic Dynamics. – 2009. – V. 14, № 1. – P. 116-136.
- [27] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P. On two-dimensional analytic area-preserving diffeomorphisms with infinitely many stable elliptic periodic points //Regul. Chaotic Dyn. – 1997. – V. 2, № 3/4. – P. 106-123.
- [28] Gonchenko S. V., Turaev D. V. On three types of dynamics and the notion of attractor //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2017. – V. 297. – P. 116-137.
- [29] Gonchenko S., Turaev D., Shilnikov L. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps //Nonlinearity. – 2007. – V. 20, № 2. – P. 241.
- [30] Gonek S. M., Montgomery H. L. Kronecker's approximation theorem //Indagationes Mathematicae. – 2016. – V. 27, № 2. – P. 506-523.
- [31] Halmos P.R., On automorphism of compact groups// Bull. AMS. – 1943. – V. 49, № 8. – P. 619-624.
- [32] Hammerlindl A., Potrie R. Partial hyperbolicity and classification: a survey //Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2018. – V. 38, № 2. – P. 401-443.
- [33] Haragus M., Iooss G. Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems. – London : Springer, 2011. – V. 3.
- [34] Härterich J. Cascades of reversible homoclinic orbits to a saddle-focus equilibrium //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – V. 112, № 1-2. – C. 187-200.
- [35] Hartman P. Ordinary Differential Equations //John Wiley & Sons, 1964.
- [36] Hasselblatt B., Pesin Y. Partially Hyperbolic Dynamical Systems, in “Handbook of Dynamical Systems”, v.1B, edited by B. Hasselblatt, A.B. Katok, Elsevier, 2006, P. 1-57.
- [37] Hertz F. R. Stable ergodicity of certain linear automorphisms of the torus //Annals of mathematics. – 2005. – V. 162. – P. 65-107.
- [38] Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds// Berlin. Springer Verlag – 1977.
- [39] Homburg A. J. Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields// American Mathematical Soc., 1996. – V. 578.

- [40] Homburg A. J., Lamb J. S. W. Symmetric homoclinic tangles in reversible systems //Ergodic theory and dynamical systems. – 2006. – V. 26, № 6. – P. 1769-1789.
- [41] Homburg A. J., Lamb J., Turaev D. Symmetric homoclinic tangles in reversible dynamical systems have positive topological entropy //arXiv preprint arXiv:2207.10624. – 2022.
- [42] Homburg A. J., Sandstede B. Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields //Handbook of dynamical systems. – Elsevier Science, 2010. – V. 3. – P. 379-524.
- [43] Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis// Cambridge university press, 2012.
- [44] Ibáñez S., Rodrigues A. On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: switching and horseshoes //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2015. – V. 25, № 11. – P. 1530030.
- [45] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the Theory of Dynamical System// Cambridge University Press, 1995.
- [46] Katok A., Katok S. Higher cohomology for abelian groups of toral automorphisms II: the partially hyperbolic case, and corrigendum //Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2005. – V. 25, № 6. – P. 1909-1917.
- [47] Katok A., Nitica V. Rigidity in higher rank abelian group actions: Volume 1, Introduction and Cocycle Problem// Cambridge University Press, 2011. – V. 185.
- [48] Katzenelson Y. Ergodic automorphisms of $\mathbb{T}^n$ are Bernoulli shifts //Israel Journal of Mathematics. – 1971. – V. 10, № 2. – P. 186-195.
- [49] Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds //Journal of Differential Equations. – 1967. – V. 3, № 4. – P. 546-570.
- [50] Knobloch J., Wagenknecht T. Homoclinic snaking near a heteroclinic cycle in reversible systems //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2005. – V. 206, № 1-2. – P. 82-93.
- [51] Knobloch J., Wagenknecht T. Snaking of multiple homoclinic orbits in reversible systems //SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. – 2008. – V. 7, № 4. – P. 1397-1420.
- [52] Koltsova O. Y., Lerman L. M. Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center

- //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1995. – V. 5, № 2. – P. 397-408.
- [53] Koltsova O. Y., Lerman L. M. Families of transverse Poincare homoclinic orbits in 2N-dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1996. – V. 6, № 6. – P. 991-1006.
 - [54] Koltsova O. Y., Lerman L. M. New criterion of nonintegrability for an N-degrees-of-freedom Hamiltonian system //Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. – Dordrecht : Springer Netherlands, 1999. – P. 458-470.
 - [55] Kozyreff G., Tlidi M. Nonvariational real Swift-Hohenberg equation for biological, chemical, and optical systems //Chaos: Intern. J. Nonlin. Sci. – 2007. – V. 17, № 3.
 - [56] Kronecker L. Naherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen//Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1884. – P.1179–1193.
 - [57] Kronecker L. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten//Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1857. – V. 53. – P. 173-175.
 - [58] Kulagin N., Lerman L., Malkin A. Solitons and cavitons in a nonlocal Whitham equation //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – V. 93. – P. 105525.
 - [59] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits //Nonlinearity. – 2004. – V. 17, № 4. – P. 1217-1244.
 - [60] Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – V. 112, № 1-2. – P. 1-39.
 - [61] Lerman L. M. Complex dynamics and bifurcations in a Hamiltonian system having a transversal homoclinic orbit to a saddle focus //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 1991. – V. 1, № 2. – P. 174-180.
 - [62] Lerman L. M. Dynamical phenomena near a saddle-focus homoclinic connection in a Hamiltonian system //Journal of Statistical Physics. – 2000. – V. 101, № 1. – P. 357-372.
 - [63] Lerman L. M. Homo-and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a Hamiltonian system with heteroclinic contour with two saddle-foci //Regular and Chaotic Dynamics. – 1997. – V. 2, № 3-4. – P. 139-155.

- [64] Lerman L. M., Trifonov K. N. Geometry of symplectic partially hyperbolic automorphisms on 4-torus //Dynamical Systems. – 2020. – V. 35, № 4. – P. 609-624.
- [65] Lerman L. M., Turaev D. Breakdown of symmetry in reversible systems //Regular and Chaotic Dynamics. – 2012. – V. 17. – P. 318-336.
- [66] Iooss G., Peroueme M. C. Perturbed homoclinic solutions in reversible 1: 1 resonance vector fields //Journal of differential equations. – 1993. – V. 102, № 1. – P. 62-88.
- [67] Manning A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori //American Journal of Mathematics. – 1974. – V. 96, № 3. – P. 422-429.
- [68] McDuff D., Salamon D. Introduction to symplectic topology. – Oxford University Press, 2017. – V. 27.
- [69] Mielke A., Holmes P., O'Reilly O. Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center //Journal of Dynamics and Differential Equations. – 1992. – V. 4. – P. 95-126.
- [70] Mora L., Romero N. Persistence of homoclinic tangencies for area-preserving maps //Annales de la Facult? des sciences de Toulouse: Math?matiques. – 1997. – V. 6, № 4. – P. 711-725.
- [71] Moser J. On the generalization of a theorem of A. Liapounoff //Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1958. – V. 11, № 2. – P. 257-271.
- [72] Moser J. The analytic invariants of an area?preserving mapping near a hyperbolic fixed point //Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1956. – V. 9, № 4. – P. 673-692.
- [73] Newhouse S. E. Diffeomorphisms with infinitely many sinks //Topology. – 1974. – V. 13, № 1. – P. 9-18.
- [74] Newhouse S. E. Quasi-Elliptic Periodic Points in Conservative Dynamical Systems //American Journal of Mathematics. – 1977. – V. 99, № 5. – P. 1061-1087.
- [75] Ornstein D. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic //Advances in Mathematics. – 1970. – V. 4, № 3. – P. 337-352.
- [76] Ragazzo C. G. Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers //Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences. – 1997. – V. 50, № 2. – P. 105-147.

- [77] Ragazzo C. G. Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation //Communications in Mathematical Physics. – 1994. – P. 166. – P. 255-277.
- [78] Rüssmann H. Über das Verhalten Analitischer Hamiltonscher Differential Gleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung //Mathematische Annalen. – 1964. – V. 154, № 4. – P. 285-300.
- [79] Sandstede B. Instability of localized buckling modes in a one-dimensional strut model //Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1997. – V. 355, № 1732. – P. 2083-2097.
- [80] Sevryuk M. B. Reversible Systems //Lecture Notes in Mathematics, 1986.
- [81] Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V., Chua, L. O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I // World Scientific P.H., Singapore, 1999.
- [82] Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points //Differential and Combinatorial Topology. – 1965. – P. 63-80.
- [83] Smale S. Differentiable dynamical systems //Bulletin of the American mathematical Society. – 1967. – V. 73, № 6. – P. 747-817.
- [84] Swift J., Hohenberg P. C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability //Physical Review A. – 1977. – V. 15, № 1. – P. 319-328.
- [85] Tlidi M., Georgiou M., Mandel P. Transverse patterns in nascent optical bistability //Physical Review A. – 1993. – V. 48, № 6. – P. 4605-4609.
- [86] Tresser C. About some theorems by L.P. Shilnikov //Annales de l'IHP Physique theorique. – 1984. – V. 40, № 4. – P. 441-461.
- [87] Turaev D. Hyperbolic sets near homoclinic loops to a saddle for systems with a first integral //Regular and Chaotic Dynamics. – 2014. – V. 19. – P. 681-693.
- [88] Vanderbauwhede A. Heteroclinic cycles and periodic orbits in reversible systems //International conference on Theory and Applications of Differential Equations. – Longman Scientific & Technical, 1992. – V. 272. – P. 250-253.
- [89] Vanderbauwhede A., Fiedler B. Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems //Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP. – 1992. – V. 43. – P. 292-318.

- [90] Woods P. D., Champneys A. R. Heteroclinic tangles and homoclinic snaking in the unfolding of a degenerate reversible Hamiltonian–Hopf bifurcation //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1999. – V. 129, № 3-4. – P. 147-170.
- [91] Yagasaki K. Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers //Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2000. – V. 154. – P. 275-296.
- [92] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 1967. – Т. 90, №. 0. – С. 3-210.
- [93] Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы //Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22, № 5 (137). – С. 107-172.
- [94] Арнольд В. И. Математические методы классической механики // Рипол Классик, 1979.
- [95] Аров Д. З. О топологическом подобию автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп //Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 5 (113). – С. 133-138.
- [96] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца //Труды Московского математического общества. – 1982. – Т. 44, № 0. – С. 150-212.
- [97] Белицкий Г. Р. Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса C^∞ //Математический сборник. – 1973. – Т. 91, № 4 (8). – С. 565-579.
- [98] Брин М. И., Песин Я. Б. Частично гиперболические динамические системы //Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1974. – Т. 38, № 1. – С. 170-212.
- [99] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений //Труды московского математического общества. – 1971. – Т. 25, № 0. – С. 119-262.
- [100] Брюно А. Д. Нормализация системы Гамильтона вблизи инвариантного цикла или тора // Успехи математических наук. – 1989. – Т. 44, № 2 (266). – С. 49-78.
- [101] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I// Математический сборник. – 1972. – Т. 88, № 4 (8). – С. 475-492; II //Математический сборник. – 1973. – Т. 90, № 1. – С. 139-156

- [102] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Доклады академии наук. – Российская академия наук, 1993. – Т. 330, № 2. – С. 144-147.
- [103] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем // М.: Факториал, 1999.
- [104] Лерман Л. М. О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра // Методы качеств. теории диф. ур. Межвуз. сб. науч. трудов/Под ред. ЕА Леонтович-Андроновой. Горький: Горьковский ун-т. – 1987. – С. 89-103.
- [105] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, № 12. – С. 141-176.
- [106] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. О существовании петель сепаратрис в четырехмерных системах, близких к интегрируемым гамильтоновым // ПММ. – 1983. – Т. 47, № 3. – С. 395.
- [107] Лычагин В. В. О достаточных орбитах группы контактных диффеоморфизмов // Математический сборник. – 1977. – Т. 104, № 2 (10). – С. 248-270.
- [108] Малкин А. И. Акустические солитоны в заполненных жидкостью упругих трубах // Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1995. – Т. 342, № 5. – С. 621-625.
- [109] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры: учеб // Санкт-Петербург: Лань, 2009.
- [110] Овсянников И. М., Шильников Л. П. Системы с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса и спиральный хаос // Математический сборник. – 1991. – Т. 182, № 7. – С. 1043-1073.
- [111] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Том 2, 1971.
- [112] Синай Я. Г. Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2, № 1. – С. 64-89.
- [113] Тураев Д. В., Шильников Л. П. О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла // Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1989. – Т. 304, № 4. – С. 811-814.

- [114] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // ДАН СССР. – 1965. – Т. 160, № 3. – С. 558-561.
- [115] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Математический сборник. – 1967. – Т. 74, № 3. – С. 378-397.
- [116] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Математический сборник. – 1970. – Т. 81, № 1. – С. 92-103.
- [117] Шильников Л. П. О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172, № 2. – С. 298.