

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
(МИАН)

ул. Губкина, д. 8, Москва, 119991 Тел.: +7(495) 984 81 41 Факс: +7(495) 984 81 39

<http://www.mi-ras.ru> E-mail: steklov@mi-ras.ru

ОКПО 02699547 ОГРН 1027739665436 ИНН/КПП 7736029594/773601001

«06» декабря 2024 № 11102-2171/262
на № _____ от «__» _____ 202__

УТВЕРЖДАЮ

Директор ФГБУН Математический институт
им. В.А. Стеклова Российской академии наук
академик РАН, профессор



Д.В. Трещев

«06» декабря 2024 г.

Отзыв ведущей организации, Федерального государственного бюджетного учреждения
науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
на диссертацию

Трифорова Константина Николаевича

«Задачи хаотической динамики теории гамильтоновых и обратимых систем»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы

Диссертация К.Н. Трифорова относится к важному разделу современной теории динамических систем — теории гамильтоновых и обратимых систем со сложным, хаотическим поведением траекторий. Системы дифференциальных уравнений, которые можно записать в гамильтоновой форме, являются классическим объектом исследования в теории дифференциальных уравнений. Они представляют математические модели явлений, возникающих в различных разделах современной физики, механики, гидродинамики, нелинейной оптики, химии (задачи молекулярной динамики) при игнорировании эффектов диссипации. Обратимые динамические системы (как векторные поля, так и диффеоморфизмы) также часто служат математическими моделями различных явлений, а также появляются при исследовании некоторых классов решений уравнений с частными производными, причем обратимыми могут быть как гамильтоновы, так и системы, не

являющиеся гамильтоновыми. В последнем случае их поведение может быть диссипативным в одних областях фазового пространства и близким к консервативному – в других областях фазового пространства. Поэтому исследование обратимых систем представляет собой большой интерес как с математической точки зрения, так для приложений.

Существует также еще один плодотворный подход к изучению сложной динамики -- исследование простых по постановке модельных задач, приводящих к сложному поведению траекторий. Такими, например, являются исследования гиперболических диффеоморфизмов. Аносова многомерного тора. В диссертации изучается поведение траекторий для обобщения диффеоморфизмов Аносова – частично гиперболических симплектических автоморфизмов 6-мерного тора. Такие автоморфизмы моделируют поведение гамильтоновой системы с четырьмя степенями свободы на уровнях ее гамильтониана. Ввиду простоты постановки задачи, здесь возможно не только изучить поведение траекторий, но и дать топологическую классификацию хаотической динамики, которая, несмотря на большое число работ по изучению частично гиперболических диффеоморфизмов, не была получена для симплектических автоморфизмов тора.

Хаотическое поведение в гамильтоновых системах является классической областью исследований, начиная с работ Пуанкаре, Биркгофа, Адамара, Хопфа, а в более близкое время – Аносова, Песина, Катка, Козлова, Девани, Шильникова, Лермана, Тураева и др. Обратимые системы со сложной динамикой также исследовались во многих работах, например, Девани, Лэмба, Тураева, и др. Поэтому актуальность темы исследования диссертации не вызывает сомнений.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы

Работа носит теоретический характер. Значимость результатов исследования для развития теории заключается в том, что они могут быть использованы при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида, а также при исследовании конкретных моделей. Методы исследования, разработанные в главах 1-2, могут быть применены в теории обратимых гамильтоновых систем при изучении структуры траекторий и бифуркаций при вариации уровня гамильтониана и параметров в окрестностях гетероклинических контуров различного типа, при изучении пространственной структуры стационарных и бегущих локализованных волн для уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений, в задачах неголономной механики, которые могут быть представлены в виде обратимых систем дифференциальных уравнений.

Материалы и результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при разработке программ спецкурсов по качественной теории и теории бифуркаций на физико-математических факультетах университетов.

Анализ содержания диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 124 страницы. Список литературы содержит 117 наименований.

Во **введении** содержатся краткие исторические сведения, дается общая характеристика рассматриваемых задач, обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели, задачи и основные результаты диссертации, указана научная новизна и практическая значимость работы, приведены сведения об апробации результатов работы, сведения о публикациях.

Первая глава диссертации посвящена исследованию динамики вещественно-аналитической обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности гетероклинического контура, состоящего из симметричного седло-центра, симметричной седловой периодической траектории в том же уровне гамильтониана и пары несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией. В этой главе получен ряд важных результатов, характеризующих сложную динамику в окрестности гетероклинического контура: для достаточно малой окрестности рассматриваемого гетероклинического контура доказано существование счетных семейств периодических траекторий разного типа, наличие гиперболических инвариантных подмножеств, а также наличие инвариантных КАМ торов как следствие существования семейств эллиптических периодических траекторий общего типа. Кроме того, в первой главе рассматривается общее однопараметрическое семейство обратимых гамильтоновых систем, содержащее рассматриваемый контур при критическом значении параметра, получен критерий существования гомоклинических траекторий к седло-центру для счетного набора значений параметра, близких к критическому.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию динамики гладкого четырехмерного обратимого векторного поля, не являющегося гамильтоновым, в окрестностях гетероклинических контуров двух типов. Контур первого типа состоит из двух несимметричных седло-фокусов, переставляемых инволюцией, и двух симметричных невырожденных гетероклинических траекторий, связывающих седло-фокусы. Контур второго типа состоит из двух симметричных седло-фокусов и двух несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией, связывающих оба седло-фокуса. Здесь получены новые интересные результаты о структуре системы и ее сложности в окрестностях таких контуров. Для контуров первого типа доказывается существование однопараметрических семейств симметричных периодических траекторий, многообходных контуров такого же типа, а при рассмотрении общего семейства обратимых систем, содержащего систему с контуром — пар несимметричных гомоклинических траекторий к каждому седло-фокусу для счетного множества значений параметра. Для контуров второго

типа доказано существование счетных семейств многообходных симметричных гомоклинических траекторий к каждому симметричному седло-фокусу и связанных с ними однопараметрических семейств симметричных периодических траекторий. Для общих однопараметрических семейств обратимых систем, имеющих при некотором значении параметра контур второго типа, доказывалось существование двухобходных контуров второго типа. Все эти результаты характеризуют сложность динамики изучаемых систем.

Третья глава посвящена изучению частично гиперболических автоморфизмов 6-мерного тора, порожденных целочисленными симплектическими матрицами с собственными значениями на и вне единичной окружности, как в случае одномерного неустойчивого слоения, так и в случае двумерного неустойчивого слоения. Для таких автоморфизмов получена топологическая классификация возможных типов поведения траекторий, изучены все возможные случаи таких автоморфизмов (транзитивные и разложимые), построены конкретные примеры автоморфизмов всех типов.

Научная новизна диссертационной работы

Все результаты, которые выносятся на защиту, являются новыми и состоят в следующем.

1. Для обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности симметричного контура с предельным множеством из седло-центра и гиперболической периодической траектории доказано существование счетного семейства трансверсальных однообходных гомоклинических траекторий для седловой периодической траектории и связанной с ними гиперболической динамики, существование счетных семейств эллиптических периодических траекторий в окрестности контура, а поэтому – КАМ торов в их окрестностях.

2. Для общего однопараметрического семейства обратимых гамильтоновых систем, у которого система при критическом значении параметра имеет указанный контур, доказано существование счетного множества значений параметра, при которых соответствующая система семейства имеет невырожденную гомоклиническую траекторию к седло-центру, а следовательно гиперболическую динамику в близких уровнях соответствующего гамильтониана.

3. Для 4-мерной обратимой системы с гетероклиническим контуром первого типа доказано существование однопараметрического семейства симметричных периодических траекторий, накапливающихся к контуру, существование счетных семейств 2-обходных контуров и конечного числа 3-обходных контуров рассматриваемого типа, что характеризует сложную динамику в окрестности такого контура. Для гетероклинического контура второго типа доказано существование счетных семейств n -обходных гомоклинических траекторий к

каждому симметричному седло-фокусу, что также характеризует сложную динамику в окрестности контура.

4. Для общего однопараметрического семейства обратимых систем с гетероклиническим контуром первого типа доказано существование счетных семейств несимметричных гомоклинических траекторий для каждого седло-фокуса. Для общего однопараметрического семейства обратимых системы с контуром второго типа доказано существование счетного множества значений параметра, накапливающихся к критическому, при которых система имеет 2-обходный контур второго типа.

5. Дана топологическая классификация возможных типов поведения траекторий симплектических автоморфизмов 6-мерного тора как с одномерным неустойчивым слоением, так и с двумерным неустойчивым слоением и построены примеры таких автоморфизмов во всех случаях, как транзитивных, так и разложимых.

Степень достоверности результатов диссертационной работы

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью проводимых математических доказательств, использованием обоснованных методов и теорем теории гладких динамических систем и теории бифуркаций, а также согласованностью с результатами других авторов.

Основные результаты диссертационной работы отражены в 6 научных работах, рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов диссертаций, и 8 тезисах докладах на международных конференциях.

Замечания по диссертационной работе

1. Стоит отметить не всегда информативные и подробные подписи к рисункам. Например, на стр. 20 рисунок 1.2 подписан: $c=0$. Лучше бы было подписать: Уровень гамильтониана при $c=0$.

2. В некоторых местах диссертации видны следы английского текста. Например, на стр. 71 на рисунке остались обозначения на английском написано: «trace of ...». Также в некоторых местах диссертации видны следы перевода с английского перевода.

3. В тексте диссертации имеются опечатки. Например, на стр. 37 в формулировке теоремы 7 написано: «...имеет однообходную эллиптическую гомоклиническую траекторию», а должно быть: «...имеет однообходную эллиптическую периодическую траекторию».

4. Приведенный в диссертационной работе список литературы включает 117 наименований. При этом ссылки по тексту диссертации приведены не на все работы. Например, отсутствует ссылка на работы [65] и [87].

Отмеченные мелкие недостатки не снижают общей положительной оценки работы, значимости ее основных результатов в целом.

Выводы по диссертации

Диссертационная работа Трифонова Константина Николаевича, представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, представляет собой законченную научно-квалификационную работу на актуальную тему и имеет высокую научную значимость. Новые результаты, полученные диссертантом, имеют существенное значение для теории гамильтоновых систем, обратимых динамических систем и несомненно будут использованы при исследовании систем из приложений.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Трифонова Константина Николаевича на тему «Задачи хаотической динамики теории гамильтоновых и обратимых систем» отвечает требованиям «Положения о присуждении ученых степеней...», предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор – Трифонов Константин Николаевич – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании отдела механики МИАН 2 декабря 2024 г.

Присутствовало на заседании 10 чел.

Результаты голосования: за – 10 , против – 0 , воздержалось – 0.

Заведующий отделом механики,
д.ф.м.н., член-корреспондент РАН
Болотин С.В.