МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)
Институт проблем машиностроения РАН
– филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова – Грехова
Российской академии наук» (ИПМ РАН)

На правах рукописи

АНТОНОВ Артем Михайлович

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦАХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры теоретической,
компьютерной и экспериментальной механики
ННГУ, Ерофеев Владимир Иванович

Нижний Новгород 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования

В 1885 г. английский учений лорд Рэлей (Джон Уильям Стретт) теоретически показал, что вдоль плоской границы твердого упругого полупространства с вакуумом или достаточно разряженной средой (например, с воздухом) могут распространяться волны, амплитуда которых быстро спадает с глубиной [1]. Эти волны, названные поверхностными волнами Рэлея, в зависимости от частотного диапазона, имеют разную прикладную направленность.

Практически сразу стало очевидно, что волны Рэлея в низкочастотном диапазоне (1 – 100 Гц) являются основным типом волн, наблюдающихся при землетрясениях. Поэтому они подробно изучаются в сейсмологии вот уже без малого 140 лет [2].

Основные закономерности распространения рэлеевских волн следующие: отсутствие дисперсии, т.е. скорость волны не зависит от ее частоты и является постоянной для каждого материала; эта скорость достигает 0,87 – 0,96 от скорости объемной сдвиговой волны; вектор перемещений имеет продольную и поперечную составляющие, при этом поперечная составляющая всегда превосходит продольную [3].

В цикле работ В.В. Крылова [4–10], удостоенном медали Рэлея в 2000 г. (присуждаемой Акустическим институтом Великобритании и часто называемой Нобелевской премией по акустике), посвященном изучению упругих колебаний земли, порожденных поездами и автотранспортными средствами, был теоретически предсказан очень высокий уровень земных вибраций, генерируемых высокоскоростными железнодорожными составами, движущимися со скоростью выше, чем скорость поверхностных волн Рэлея в грунте. Теория Крылова была экспериментально подтверждена в 1997 –1998 гг. (при его непосредственном участии) на новой высокоскоростной линии в Швеции (Гётеборг-Мальме), где на некоторых участках трассы скорость волн Рэлея была всего 45 м/с, и скорости движения поездов в 160 км/час было достаточно, чтобы наблюдать эффект. Обнаруженный эффект стал называться «грунтовым вибрационным ударом» (по аналогии с известным звуковым ударом от сверхзвукового самолета), а источники генерации стали именовать «транс-рэлеевскими поездами» [11].

Заметим, что о существовании критических скоростей движения нагрузок по рельсовым направляющим, при превышении которых в направляющих генерируются изгибные волны, говорилось еще в первой половине 1980-х годов в работах А.И. Весницкого и его школы [12–17], а также в работе Г.Г. Денисова, В.В. Новикова и Е.К. Кугушевой [18]. Однако, вычисленные тогда критические скорости показали практическую недостижимость эффекта генерации транспортным средством изгибных волн в направляющих. Нагрузке оказалось легче преодолеть скорость волны Рэлея в грунте, находящемся под рельсовой направляющей, а сама направляющая при этом выступила, наряду с системой шпал и балластом, посредником между источником генерации волн и средой, в которой эти волны возникли.

В настоящее время задачи об устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим, задачи генерации изгибных и изгибно-крутильных волн в рельсовых направляющих признаны актуальными и результаты их решения служат методическим и расчетным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону (или торможению) полезной нагрузки на ракетных треках: работы С.И. Герасимова, В.И. Ерофеева, В.Г. Камчатного, Е.Е. Лисенковой и других [19–25]; работы С.А. Астахова, В.И. Бирюкова, А.В. Катаева и других [26–32].

С 1950-х годов широкое применение нашли рэлеевские волны ультразвукового диапазона (частоты порядка 10^6 Гц). При их помощи можно контролировать состояние поверхностного слоя образца (выявление поверхностных и около поверхностных дефектов в образцах из металла, стекла, пластмассы и других материалов – ультразвуковая поверхностная дефектоскопия). Влияние свойств поверхностного слоя образца на скорость и затухание рэлеевских волн позволяет использовать последнее для определения остаточных напряжений поверхностного слоя металла, термических и механических свойств поверхностного слоя образца [33, 34].

С начала 1970-х годов рэлеевские волны с частотами 10^7 – 10^{10} Гц широко применяются в миниатюрных твердотельных устройствах по обработке информации (ультразвуковые линии задержки, полосовые фильтры, ответвители сигналов, фазовращатели и т.д.). На стыке ультра- и гиперзвуковой акустики, с одной стороны, и электроники твердого тела, с другой стороны, возникла отрасль знаний, именуемая акустоэлектроникой [33, 36]. На закономерностях акустоэлектроники базируется такая важная индустрия, как микроэлектроника на ПАВ (т.е. на поверхностных акустических волнах) [37 – 40].

Наряду с моделью классического континуума в механике деформируемого твердого тела широко применяются модели обобщенных континуумов [41–60].

К числу наиболее известных обобщенных (неклассических) континуумов принадлежат микрополярная среда Коссера и градиентно-упругая среда.

При работе с микрополярной средой следует различать предложенные братьями Эженом и Франсуа Коссера в 1909 году общую модель континуума, каждая точка которого обладает тремя трансляционными и тремя вращательными степенями свободы [61], ее частный случай – модель микрополярной среды со стесненным вращением частиц [62], а также редуцированную модель микрополярной среды, предложенную Л. Шварцем, Д. Джонсоном и С. Фенгом в 1984 г. [63–66].

Модель градиентно-упругой среды тоже появилась в начале 20-го века и связана с именами Лёру (1911, 1913) [67, 68] и Джеремилло (1929) [69].

Поверхностные волны Рэлея в рамках модели континуума Коссера изучались в работе А.Е. Лялина, В.А. Пирожкова, Р.Д. Степанова [70]; в цикле работ М.А. Кулеша, В.П. Матвеенко, И.Н. Шардакова [71–73]. В рамках градиентно-упругой модели они практически не изучались. Исключение составляет работа П.Ф. Сабодаша, И.Г. Филиппова [74], в которой, на основании проведенных исследований, утверждается, что скорость поверхностной волны в градиентно-упругой среде может превосходить скорость объемной сдвиговой волны, что представляется невероятным с точки зрения канонов классического континуума.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является развитие волновой динамики механических систем в части изучения особенностей распространения упругих поверхностных волн применительно к проблемам скоростного транспорта, неразрушающего контроля и технологии машиностроения.

Достижение цели планируется осуществить путем решения следующих **задач:**

- Определение дисперсионных характеристик поверхностных волн и расчет зависимости их амплитуд от расстояния от границы, свободной от напряжений, для: а) градиентно-упругого полупространства; б) полупространства среды Коссера (редуцированная модель).
- Исследование генерации поверхностных волн источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства: а) с постоянной скоростью, не превышающей значение скорости сдвиговой волны в материале; б) с постоянной скоростью, превышающей значение скорости сдвиговой волны в материале.
- Разработка самосогласованной двумерной математической модели, включающей в себя динамические уравнения теории упругости (уравнения Ламе) и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале, позволяющей описывать распространение поверхностных волн вдоль свободной от напряжений границы полупространства, материал которого содержит повреждения.
- Исследование (в рамках разработанной математической модели) дисперсионных и диссипативных свойств поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной от напряжений границы полупространства, материал которого содержит накопившуюся поврежденность.
-

Научная новизна

Для градиентно-упругого полупространства, несущего на себе движущийся со сверхзвуковой скоростью нормальную нагрузку, впервые рассчитана коническая поверхность (конус Маха), образующаяся вслед за источником генерации поверхностной волны.

Для изотропного упругого полупространства с поврежденностью его материала впервые сформулирована и решена самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления поврежденности в материале среды.

Теоретическая значимость

Выявлены не изученные ранее закономерности в поведении упругих поверхностных волн, а именно: их способность распространяться со скоростью, достигающей (согласно модели градиентно-упругой среды) и превышающей (согласно модели редуцированной среды Коссера) скорости сдвиговых волн в материале.

Практическая значимость

Выполненные исследования волновых процессов в упругих направляющих, взаимодействующих с движущимися объектами, позволяют на этапе конструирования наземных транспортных средств проводить оценку энергозатрат на преодоление сил волнового сопротивления движению и вносить допустимые изменения в конструкции с целью их уменьшения. Результаты, касающиеся исследования дисперсии и частотно-зависимого затухания поверхностных волн Рэлея, проведенного методами механики обобщенных континуумов, прошли апробацию в ЗАО НИЦ КД и включены в тексты разработанного ЗАО НИЦ КД и утвержденного Евразийским советом по стандартизации, метрологии и сертификации межгосударственного стандарта ГОСТ 35003-2023 «Техническая диагностика. Определение глубины трещин на поверхности стальных изделий ультразвуковым методом с использованием поверхностных волн. Общие требования» и первой редакции национального стандарта ГОСТ Р «Расчеты и испытания на прочность. Определение поврежденности и остаточного ресурса элементов конструкций, подвергаемых малоцикловым усталостным воздействиям, на основе акустических измерений. Общие требования» (шифр темы Программы национальной стандартизации 1.0.132-1.044.24).

Имеется акт внедрения (см. Приложение).

Методология и методы исследования

При проведении исследований использованы методы механики сплошных сред, теории колебаний и волн.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты исследования дисперсионных свойств поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной от напряжений границы: а) градиентно-упругого полупространства; б) полупространства среды Коссера (редуцированная модель).
2. Результаты исследования генерации поверхностных волн источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства: а) с постоянной скоростью, не превышающей значение скорости сдвиговой волны в материале; б) с постоянной скоростью, превышающей значение скорости сдвиговой волны в материале.
3. Самосогласованная двумерная математическая модель, включающая в себя динамические уравнения теории упругости (уравнения Ламе) и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале, позволяющая описывать распространение поверхностных волн вдоль свободной от напряжений границы полупространства, материал которого содержит повреждения.
4. Результаты исследования дисперсионных и диссипативных свойств поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной от напряжений границы полупространства, материал которого содержит накопившуюся поврежденность.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на: Всероссийской конференции «Проблемы прочности, динамики и ресурса», посвященной 95-летию со дня рождения А.Г. Угодчикова и 40-летию Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, ННГУ, 16-19 ноября 2015); Международной Школе-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин» – School-NDM 2017 (Москва, ИМАШ РАН, 18-21 апреля 2017); XLIV Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (Москва, МАИ, 17-20 апреля 2018); Юбилейной XXX Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Москва, ИМАШ РАН, 20-23 ноября 2018); Международной конференции «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении 2020» (ICMTETE 2020) (Севастополь, СевГУ, 7-11 сентября 2020); Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвященной 50-летию ИВМ СО РАН (Красноярск, ИВМ СО РАН, 18-20 сентября 2024).

В полном объеме диссертация обсуждалась на семинаре Института проблем машиностроения РАН – филиала Федерального исследовательского центра **Института** прикладной физики им. А.В. Гапонова – Грехова Российской академии наук (апрель 2024) и на объединенном заседании кафедры Теоретической, компьютерной и экспериментальной механики и Научно-исследовательского института механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (октябрь 2024).

Публикации

По теме **диссертации** опубликовано 17 работ [75–89, 129, 130], в том числе 9 из них [75– 82, 130] в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, включённых Высшей аттестационной комиссией России в список изданий, рекомендуемых для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, в журналах и изданиях индексируемых, в базах данных Web of Science и Scopus.

Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем:

- получение дисперсионных уравнений для поверхностных волн Рэлея, распространяющихся вдоль свободных от напряжений границ полупространств, описываемых моделями обобщенных континуумов (градиентно-упругого; редуцированного микрополярного; содержащего накопленную поврежденность материала);
- анализ соотношения скоростей сдвиговых волн и поверхностных волн Рэлея для материалов, описываемых уравнениями механики обобщенных континуумов;
- расчет амплитуд перемещений и напряжений в поверхностной волне от глубины ее проникновения в материал деформируемого полупространства;
- изучение параметров конической поверхности (конуса Маха), образующейся при движении нормальной нагрузки со сверхзвуковой скоростью по полупространству, состоящему из градиентно-упругого материала.

Ерофееву В.И. принадлежит постановка задачи диссертационного исследования, общее руководство работой, формулировка утверждений, участие в обсуждении, редактировании и оформлении результатов; им же предложен используемый в третьей главе диссертации подход к изучению динамики поврежденных сред, основанный на постановке и решении самосогласованных задач, включающих в себя систему связанных кинетических уравнений накопления повреждений и уравнений теории упругости. Мальханов А.О., Никитина Е.А., Новосельцева Н.А. участвовали в проведении численных расчетов поведения дисперсионных кривых поверхностных волн при различных параметрах задачи. Леонтьева А.В. участвовала в исследовании частотной зависимости затухания поверхностной волны, распространяющейся вдоль свободной от напряжений границы полупространства, материал которого содержит накопленную поврежденность. Шекоян А.В. участвовал в постановке задачи о движении точечного источника с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства.

Диссертационная работа выполнялась при поддержке:

- Программы фундаментальных научных исследований Государственных академий наук на 2013-2020гг. (Раздел 3 «Технические науки». Подраздел 30 «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и новых человеко-машинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике»). По теме 0055-2014-0002: «Развитие теории нелинейной волновой динамики и виброакустики машин и ее приложение к анализу устойчивости распределенных механических систем с высокоскоростными движущимися нагрузками, созданию методов и средств диагностики конструкций на ранних стадиях повреждения и разработке высокоэффективных адаптивных систем виброзащиты машин (руководитель: Ерофеев В.И.), № госрегистрации 01201458047 – п.2.1. диссертации;
- Программы фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021-2030) (Раздел 2 «Технические науки». Подраздел 2.3. «Механика и машиностроение»). По теме FFUF-2021-0025: «Создание научных основ технологий повышения ресурса ответственных деталей и узлов машин и энергетических установок, работающих в условиях высоких механических, вибрационных и высокотемпературных нагрузок, эрозионных и коррозионных сред, развитие методов нелинейной волновой динамики и неразрушающего контроля конструкционных материалов, виброзащиты машин и конструкций» (руководитель: Ерофеев В.И.) – п.3.2. диссертации;
- Гранта Правительства Российской Федерации (договор № 14.Y26.31.0031) – п.3.1. диссертации;

- Государственного задания Минобрнауки РФ (базовая часть) (соглашение FSWR-2023-0036) – п.3.3. диссертации;
- Российского научного фонда по теме: «Динамика и устойчивость систем “грунт–рельсовая направляющая–высокоскоростной движущийся объект” с учетом эффектов излучения волн и накопления повреждений в материалах конструкций». Проект РНФ № 14-19-01637-Продление (2017-2018), ЦИТиС: АААА-А18-118102490078-7 (руководитель: Ерофеев В.И.) – п.2.2. диссертации;
- Российского фонда фундаментальных исследований:
  - по теме «Нелинейные акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой». Проект РФФИ № 20-38-70158-Стабильность (2019-2020), ЦИТиС: АААА-А20-120111390033-4 (руководитель: Мальханов А.О.) – п.2.3. диссертации;
  - по теме «Исследование объемных и поверхностных волн в составных элементах конструкций на основе уточненных моделей для акустической диагностики механических неоднородностей при неразрушающем контроле изделий». Проект РФФИ № 16-38-00426 мол_а (2016) (руководитель: Архипова Н.И.) – п.2.1. диссертации.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 136 наименований и приложения. Общий объем диссертации составляет 112 страниц, включая 32 рисунка.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи исследования, показана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, описана методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности результатов и апробация работы, отмечены публикации, личный вклад соискателя, структура и объем работы.

В первой главе приведен обзор основных типов волн, их свойств и условий распространения. Рассмотрены основные уравнения достаточно хорошо изученной модели плоской волны в упругой изотропной среде. Более подробно рассмотрен вопрос распространения поверхностных волн Рэлея в классическом континууме.

В первой части **второй главы** (**п. 2.1**) рассматривается математическая модель обобщенного континуума (называемого градиентно-упругой средой), напряженно-деформированное состояние которого описывается тензором деформаций, вторыми градиентами вектора перемещений, несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений. В двумерной постановке рассматривается задача о распространении упругой поверхностной волны на границе градиентно-упругого полупространства. Решение уравнений ищется в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, причем у векторного потенциала отлична от нуля только одна компонента. Показано, что такая волна, в отличие от классической волны Рэлея, обладает дисперсией. Вычислена зависимость фазовой скорости поверхностной волны от волнового числа, проведено ее сравнение с дисперсионной характеристикой фазовой скорости объемной сдвиговой волны. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

Во второй части главы (**п. 2.2**, **п. 2.3**) рассматривается задача о генерации возмущений движущимся источником на границе градиентно-упругого полупространства. Предполагается, что источник движется с постоянной скоростью вдоль границы полупространства. Задача рассматривается в двумерной постановке, когда все процессы однородны вдоль горизонтальной поперечной координатной оси. Вектор перемещений содержит две компоненты: продольную и вертикальную поперечную. Скорость источника может превосходить по своей величине скорости сдвиговой упругой волны (сверхзвуковое движение). В результате аналитических исследований показано, что движущийся источник будет генерировать волны, распространяющиеся вдоль границы полупространства как экспоненциально убывающие в его глубину, так и дискретно стабилизирующиеся на определенной глубине при дозвуковой и сверхзвуковой скоростях соответственно. Поперечная составляющая вектора перемещений при движении на дозвуковых скоростях всегда превосходит продольную, а при движении на сверхзвуковых скоростях только в околоповерхностном слое полупространства. Такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией, поскольку ее фазовая скорость не является постоянной величиной, а зависит от частоты. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника и его скорости. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

В первой части **третьей главы** (**п.3.1**) рассматривается упрощенная (редуцированная) динамическая модель среды Коссера, занимающая промежуточное положение между классической динамической теорией упругости и собственно моделью среды Коссера, обладающей несимметричностью тензора напряжений и наличием моментных напряжений. В отличие от последней, в упрощенной модели три из шести констант упругости равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений. В двумерной постановке для модели редуцированной среды решена задача о распространении упругой поверхностной волны вдоль границы полупространства. Решение уравнений описано в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, причем у векторного потенциала отлична от нуля только одна компонента. Показано, что такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией. В плоскости «фазовая скорость - частота» для таких волн имеется две дисперсионных ветки: нижняя («акустическая») и верхняя («оптическая»). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Фазовая скорость поверхностной волны во всем частотном диапазоне превосходит фазовую скорость объемной сдвиговой волны. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

Во второй части главы (**п.3.2**) для изотропного упругого полупространства с поврежденностью его материала сформулирована самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале среды. Считается, что повреждения равномерно распределены в материале среды. Исследовано распространение поверхностной волны вдоль свободной границы поврежденного полупространства. Волна распространяется в горизонтальном и затухает в вертикальном направлениях. Предполагается, что вдоль третьей оси все процессы однородны. Показано, что в этом случае самосогласованная система с граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства, сводится к комплексному дисперсионному уравнению. Отмечено, что в предельном случае, когда поврежденность в материале отсутствует, полученное дисперсионное уравнение сводится к классическому дисперсионному уравнению для волны Рэлея в полиномиальной форме, здесь поверхностная волна распространяется вдоль границы полупространства без дисперсии и затухания. Если поврежденность в среде присутствует, то поверхностная волна затухает в направлении распространения, а низкочастотные возмущения обладают частотно-зависимой диссипацией и дисперсией. Показано, что дисперсия имеет аномальный характер. Установлено, что с уменьшением значения коэффициента поврежденности, в области высоких частот, значение фазовой скорости растет, а групповой падает. На очень низких частотах обе скорости растут при снижении коэффициента поврежденности. В заключительной части главы (**п.3.3**) проведен анализ того, как соотносятся скорости объемных сдвиговых волн и поверхностных волн Рэлея для материалов, описываемых уравнениями механики обобщенных (неклассических) континуумов. Построены частотные зависимости квадрата фазовой скорости сдвиговой волны в градиентно-упругой среде и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны в редуцированной среде Коссера, а также частотные зависимости квадрата скорости волны Рэлея в градиентно-упругом полупространстве, квадрата скорость волны

Рэлея в редуцированной среде Коссера, квадрата скорости волны Рэлея в классическом изотропном упругом полупространстве.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ И СВОЙСТВА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В главе приведен обзор основных типов волн, их свойств и условий распространения. Рассмотрены основные уравнения достаточно хорошо изученной модели плоской волны в упругой изотропной среде. Более подробно рассмотрен вопрос распространения поверхностных волн Рэлея в классическом континууме.

Глава написана на основании работы [89].

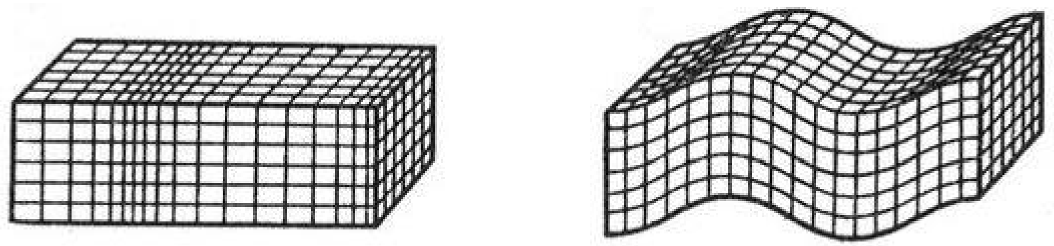
1.1 Основные типы акустических (упругих) волн

В деформируемых твердых телах могут распространяться акустические волны нескольких типов: объемные, поверхностные, волноводные и канализированные. У объемных волн процессы распространения и затухания по мере удаления от источника возбуждения происходят с одинаковой скоростью во всех направлениях движения волны. В зависимости от направления движения частиц в распространяющейся волне можно выделить объемные продольные волны или волны расширения и объемные поперечные (сдвиговые) волны или волны искажения. Вторым типом акустических волн являются поверхностные волны, локализованные в тонком околоповерхностном слое и распространяющиеся как вдоль границы двух сред с различными характеристиками, так и вдоль свободной границы упругого полупространства. В зависимости от направления движения частиц в распространяющейся волне можно выделить поверхностные волны с вертикальной и горизонтальной поляризацией. Под волноводными акустическими волнами, понимаются волны, распространяющиеся в среде, ограниченной в одном или двух направлениях стенками среды или другими средами (стержни, пластины). Другой тип специфических волн - канализированные упругие волны, способные распространяться вдоль конструкций с геометрическими неровностями (выступами) различного профиля.

1.2.1. Объемные волны

Объемные волны в твердом теле представлены двумя типами волн: продольные, частицы которых движутся вдоль направления распространения волны и сдвиговые, частицы которых движутся перпендикулярно распространению волны. При этом продольная волна называется P-волна (prima, рисунок.1.1,а), а поперечная волна S-волны (seconda, рисунок.1.1,б).

P-волна S-волна



(а) (б)

Рисунок 1.1 – Типы объемных волн в твердом теле

В зависимости от вида источника возмущений волновая поверхность и фронт волны способны принимать различный геометрические формы: плоские (плоский фронт волны), сферические (сферический фронт волны) и цилиндрические (цилиндрический фронт волны). При этом плоские волны при распространении не меняют форму и амплитуду (рисунок.1.2,а), сферические меняют форму, но меняют амплитуду (рисунок.1.2,б), цилиндрические меняют и форму и амплитуду (рисунок.1.2,в).

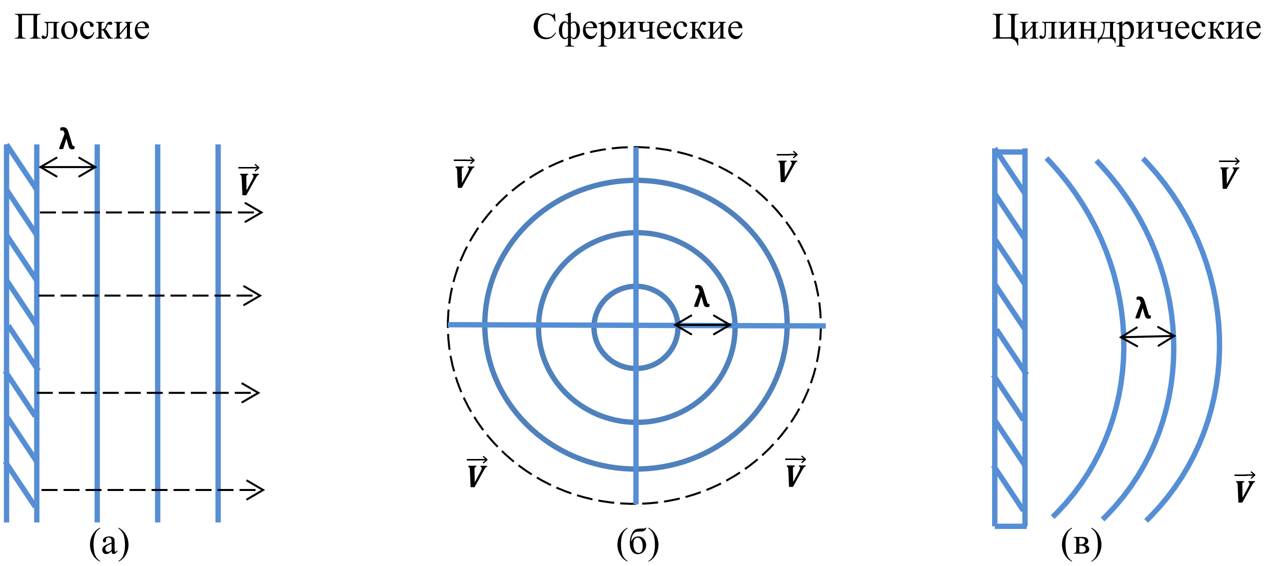


Рисунок 1.2: Виды объемных волн, в зависимости от фронта волны

Объемных волн с идеально плоской волновой поверхностью, представляющей собой систему параллельных друг другу плоскостей, в действительности практически не существует. Распространяющийся волновой процесс охватывает все новые и новые области пространства, претерпевая при этом различные изменения фазового фронта волны при огибании препятствий, и как следствие происходит изменение волновой поверхности. Однако объемные волны со сложной волновой поверхностью могут быть представлены в виде бесконечной суммы элементарных волн с плоской волновой поверхностью.

В процессе распространения продольные объемные волны вызывают изменение объема среды и поэтому могут распространяться в средах, находящихся в любом агрегатном состоянии (твердом, жидком и газообразном). Поперечные волны вызывают изменением формы среды и, следовательно, могут образовываться и распространяться только в средах, обладающих свойством упругости, т.е. исключительно в твердых телах.

Скорость распространения объемных продольных волн всегда превосходит скорость распространения поперечных волн. Соотношение этих скоростей зависит от величин констант, характеризующих упругие свойства среды.

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \qquad (1.1)$$

где c_1^2 – квадрат скорости продольной волны, c_2^2 – квадрат скорости поперечной волны, λ и μ – упругие постоянные Ламе, ρ – плотность среды.

Объемные волны не обладают дисперсией, поэтому скорость их распространения от источника возмущения в упругих изотропных средах не зависит от частоты и является постоянной. Интенсивность затухания объемных волн по мере удаления от источника не зависит от направления распространения волны.

В анизотропных средах (кристаллах) в каждом направлении распространяется три упругие волны: одна продольная и две поперечные, скорость распространения, поляризация и поглощение которых зависят от типа кристалла и направления распространения. Анизотропия упругих свойств кристаллов существенно отражается на характерных свойствах распространения объемных волн. Так групповая скорость в кристаллах может не совпадать с фазовой скоростью, а затухание существенно уменьшаться при понижении температуры.

В процессе теоретического изучения основных свойств объемных акустических волн, возрастала необходимость практического использования волн в промышленности. Прежде всего это относится к ультразвуковому неразрушающему контролю, позволяющему обнаруживать внутренние дефекты и контролировать механические свойства среды по изменению таких характерных параметров (скорость распространения объемных волн, затухание и дисперсия), которые напрямую связаны со структурой и свойствами среды. Благодаря разработке ультразвуковой дефектоскопии появилась возможность определения надежности и прочности конструкции, не нарушая ее целостности, что является весьма важным фактором в производстве техники. Объемные упругие волны имеют большое практическое значение в сейсмологии, с помощью которых появилась возможность регистрации подземных толчков и определения эпицентра землетрясения. Учитывая тот фактор, что S-волны существуют только в твердых телах, в 1906г британский геолог Ричард Диксон Олдем на основании проведенных исследований распространения поперечных волн сделал вывод, что Земля имеет жидкое внешнее ядро, так как зафиксировать на больших расстояниях S-волны не удалось.

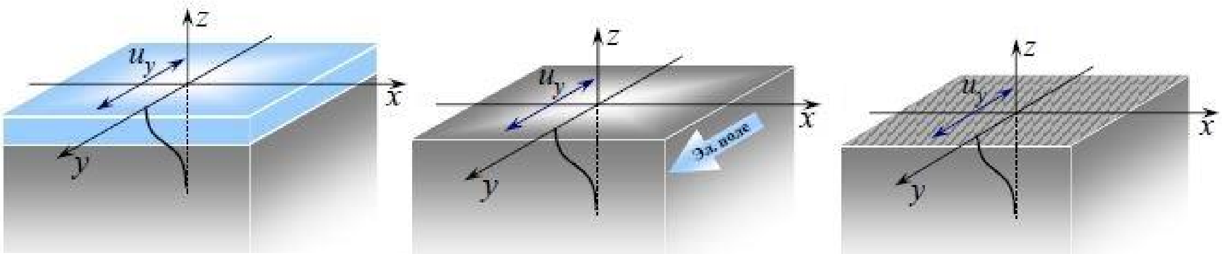
1.2.2. Поверхностные волны

Поверхностные волны в зависимости от смещения частиц среды можно разделить на два типа волн, с вертикальной поляризацией у которых вектор колебательного смещения частиц среды в волне расположен в плоскости, перпендикулярной к граничной поверхности, и с горизонтальной поляризацией, у которых вектор смещения частиц среды параллелен граничной поверхности и перпендикулярен направлению распространения волны. К поверхностным волнам с вертикальной поляризацией относятся волны Рэлея и волны Стоунли.

Волны Рэлея. Волны Рэлея впервые были обнаружены английским ученым лордом Рэлеем в 1885 году, который теоретически доказал, что на границе изотропного полупространства могут распространяться поверхностные волны, амплитуда которых экспоненциально угасает с глубиной, а движение частиц в волне происходит по траектории эллипса, меняя направления движения на обратное при незначительном удалении от поверхностного слоя полупространства. Скорость распространения поверхностных волн Рэлея не зависит от частоты (является постоянной вне зависимости от рассматриваемого материала) и не превышает скорости объемных волн, а лишь достигает 0,87-0,96 от скорости сдвиговой волны. Волны Рэлея локализованы в поверхностном слое толщиной сопоставимой с длиной волны.

Волны Стоунли. Британский сейсмолог Роберт Стоунли в 1924 году доказал, что вдоль плоской границы двух контактирующих твердых сред, при определенных соотношениях между жесткостными характеристиками (мало различными модулями упругости и плотности), могут распространяться поверхностные волны с вертикальной поляризацией, которые впоследствии были названы волнами Стоунли. Волну Стоунли можно рассматривать как состоящую из двух волн Рэлея (по одной в каждой среде), локализованных по обе стороны от границы контакта двух сред, амплитуда которых экспоненциально убывает в глубину каждой из сред. Распространение волн Стоунли происходит со скоростью меньшей, чем скорости продольных и сдвиговых объемных волн в граничных средах. Данный тип волн, как и волны Рэлея не имеет дисперсии фазовой скорости.

Наиболее известными представителями поверхностных волн с горизонтальной поляризацией являются волны Лява и Гуляева-Блюстейна. Как пример существование данного типа волн можно наблюдать в полупространстве, к свободной поверхности которого добавлен твердый слой, являющийся для него нагрузкой (рисунок. 1.3,а – волны Лява), в полупространстве с наличием электрического поля, искажающегося на границе полупространства (рисунок. 1.3, б – волны Гуляева-Блюстейна), в полупространстве с нарушением геометрии поверхностного слоя (рисунок. 1.3,в), в полупространстве (металле) под действием сильного постоянного магнитного поля, направленного вдоль свободной поверхности металла и под углом к направлению распространения волны, а так же других полупространствах с наличием источников, вызывающих механические возмущения (напряжения) на границе полупространства, которые в свою очередь и возбуждают поверхностную волну.



(а) (б) (в)

Рисунок 1.3: Источники возбуждения поверхностных волн с горизонтальной поляризацией

Волны Лява. Впервые поверхностные волны Лява были описаны в 1911 году английским математиком Лявом, который доказал, что в полупространстве с тонким слоем материала на свободной границе могут существовать поверхностные волны. Фазовая скорость распространения этих волн зависит от частоты и всегда меньше фазовой скорости поперечных объемных волн в полупространстве, но больше скорости поперечных волн в слое. Смещение частиц в волне Лява происходит перпендикулярно вектору скорости распространения волны и как правило постоянно по толщине в слое материала, тогда как в полупространстве наблюдается затухание с увеличением расстояния от источника возмущений. При стремлении толщины слоя к нулю поверхностная волна Лява трансформируется в объемную поперечную волну.

Волны Гуляева-Блюстейна. Гуляев и Блюстейн в 1968 году показали, что при наличии в кристаллах пьезоэффекта поперечные объемные волны могут переходить в поверхностные волны. В таких кристаллах поверхностные волны распространяются в сопровождении переменного квазистатического электрического поля. В большинстве реальных кристаллов фазовая скорость волн Гуляева-Блюстейна не превышает скорость поперечной объемной волны, а глубина их затухания может значительно превосходить глубину затухания волн Рэлея и Стоунли. Как пример для кристалла CdS глубина локализации волны Гуляева-Блюстейна составляет порядка 50 длин волны.

1.2.3. Волноводные и канализированные волны

Волноводными акустическими волнами называют упругие возмущения, распространяющиеся в твердой пластинке или стержне, свойства которых резко отличаются от свойств наружной среды. Представителем волноводных волн в пластинке со свободными границами являются волны Лэмба, открытые в 1916 году. Смещение волн Лэмба в пластинке происходит как в направлении распространения волны, так и перпендикулярно граням пластинки. Волны Лэмба по характеру смещения частиц можно разделить на два типа: симметричные, в которых смещение частиц происходит семерично срединной плоскости пластинки и антисимметричные, в которых смещение частиц происходит антисимметрично срединной плоскости. Важным условием существования волн данного типа является толщина пластинки, соизмеримая с длиной упругой волны. Волны Лэмба обладают дисперсией и представляют собой один из типов нормальных волн в волноводе. Поэтому иногда их еще называют нормальными волнами в пластинке.

Канализированными акустическими волнами называют волны, способные распространятся на большие расстояния вдоль конструкции со сложным геометрическим профилем (выступами, неровностями, изгибами, дефектами), тем самым представляют особый интерес при исследовании недоступных частей конструкции. Канализированные волны помимо контроля поверхности позволяют контролировать толщину стенки конструкции, путем регистрации изменения скорости распространения, которая при заданной частоте зависит от толщины стенки.

1.2 Основные уравнения плоских волн в упругой изотропной среде

Достаточно высокая степень успешно проведенных исследовательских работ по изучению основных закономерностей распространения плоских волн в классической среде позволила использовать данный тип волн в решении наиболее значимых промышленных задач. Основные результаты исследований подобного типа волн представлены в работах Викторова И.А. [101], Гринченко В.Т. и Мелешко В.В. [90], Бирюкова С.В., Гуляева Ю.В., Крылова В.В., Плесского В.П. [91], Ахенбаха Дж.Д. [92]. Рассмотрим более подробно некоторые полученные результаты.

1.2.1. Уравнение движения

Рассмотрим упругое полупространство $z \geq 0$ и предположим, что волна распространяется в направлении оси x (рисунок.1.4). Такого рода волна может возникнуть, если вызывающее ее возмущение не зависит от переменной y.

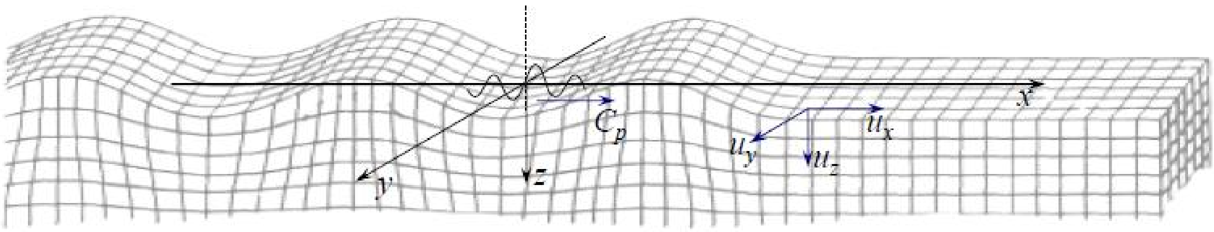


Рисунок 1.4: Распространение плоской волны в упругом полупространстве

Распространение волн в данном полупространстве будет описываться основными уравнениями теории упругости [93, 94]:

1. Уравнения движения (3 уравнения, 9 неизвестных)

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \rho \ddot{\mathbf{u}}; \qquad (1.2)$$

2. Геометрические соотношения Коши (6 уравнений, 9 неизвестных)

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}); \qquad (1.3)$$

3. Определяющие (физические) соотношения (6 уравнений, 12 неизвестных) – закон Гука

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda I_1(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{E}} + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}}. \qquad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (2.2), а затем в (1.2) получим следующее уравнение:

$$\operatorname{div}\left[\lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\bar{\bar{E}}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\right]=\ \rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{1.5}$$

и упрощая полученное уравнение с использованием соотношения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\Delta\mathbf{u}, \tag{1.6}$$

получим окончательное уравнение движения (Ламе) для вектора перемещения $\mathbf{u}$:

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=\ \rho\ddot{\mathbf{u}}\ , \tag{1.7}$$

где - вектор перемещения, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ - симметричный тензор деформаций, $\bar{\bar{\sigma}}$ - симметричный тензор напряжений, λ и μ - упругие постоянные Ламе, ρ - плотность среды, $I_1(\quad)$ - первый инвариант тензора, $\bar{\bar{\mathrm{E}}}$ - единичный тензор.

Решение уравнения движения (1.7) можно представить в виде интегралов Фурье [95, 96]:

$$u_x\big(x,z,t,k(\omega)\big)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_x(z)e^{i(k(\omega)x+\omega t)}S\,(\omega)d\omega,$$

$$u_y\big(x,z,t,k(\omega)\big)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_y(z)e^{i(k(\omega)x+\omega t)}S\,(\omega)d\omega, \tag{1.8}$$

$$u_z\big(x,z,t,k(\omega)\big)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_z(z)e^{i(k(\omega)x+\omega t)}S\,(\omega)d\omega,$$

где u_x, u_y, u_z-компоненты вектора перемещения, $k(\omega)$-волновое число, t-время, U_x, U_y, U_z-функции, характеризующие амплитуду в зависимости от глубины, i-

мнимая единица, $S(\omega)$- комплексный спектр Фурье сигнала-источника, определяющий форму волнового пакета по временной координате.

Поиск решения уравнения движения в виде интегралов Фурье позволяет продемонстрировать дисперсионные свойства волн и провести сопоставление полученных решений с экспериментальными сейсмограммами.

Прямое и обратное преобразование Фурье будем использовать в виде [97-99]:

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt,$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \tag{1.9}$$

тогда получим следующее представление уравнения движения:

$$(\lambda + 2\mu)\mathrm{grad\,div}\,\hat{\mathbf{u}} - \mu\,\mathrm{rot\,rot}\,\hat{\mathbf{u}} = \rho\omega^2\hat{\mathbf{u}}, \tag{1.10}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \{U_x(z), U_y(z), U_z(z)\}^{\boldsymbol{T}} e^{ikx}S(\omega).$$

Функции U_x, U_y, U_z, характеризующие амплитуду будут иметь следующий вид [100]:

$$U_x(z) = ikAe^{\nu_1 z} + ikBe^{-\nu_1 z} - C\nu_2 e^{\nu_2 z} + D\nu_2 e^{-\nu_2 z},$$
$$U_y(z) = Ee^{\nu_2 z} + Fe^{-\nu_2 z}, \tag{1.11}$$
$$U_z(z) = A\nu_1 e^{\nu_1 z} - B\nu_1 e^{-\nu_1 z} + ikCe^{\nu_2 z} + ikDe^{-\nu_2 z},$$

где *A, B, C, B, E, F*-константы, зависящие от граничных условий, ν_1 и ν_2 - показатели при экспоненте определяющиеся следующим образом:

$$\nu_\alpha{}^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2}, \quad \alpha = 1{,}2\,,$$

где c_α^2-безразмерный параметр, характеризующий скорости продольных и поперечных волн.

Общее решение для плоской упругой волны в перемещениях с учетом соотношений (1.8) и (1.11) примет вид [100]:

$$u_x(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(ikAe^{\nu_1 z} + ikBe^{-\nu_1 z} - C\nu_2 e^{\nu_2 z} + D\nu_2 e^{-\nu_2 z})e^{i(kx+\omega t)}S\,(\omega)d\omega,$$

$$u_y(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(Ee^{\nu_2 z} + Fe^{-\nu_2 z})e^{i(kx+\omega t)}S\,(\omega)d\omega, \tag{1.12}$$

$$u_z(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\nu_1 e^{\nu_1 z} - B\nu_1 e^{-\nu_1 z} + ikCe^{\nu_2 z} + ikDe^{-\nu_2 z})e^{i(kx+\omega t)}S\,(\omega)d\omega.$$

1.2.2. Дисперсионные уравнения поверхностных волн

Любая задача о распространении поверхностных волн не обходиться без конкретизации граничных условий, которые в свою очередь оказывают существенную роль на типы распространяющихся волн в полупространстве. Так с использованием полученных решений (1.12) и различного рода граничных условий можно получить решения для любого типа следующих волн:

Дисперсионное уравнение волн Рэлея. Рассмотрим распространение поверхностных волн на границе упругого полупространства. Принимая во внимание тот факт, что в полупространстве волны Рэлея экспоненциально угасают с увеличением глубины, в полученном решении (1.12) показатели при экспоненте должны быть величинами отрицательными. Необходимыми граничными условиями распространения волн Рэлея, являются условия отсутствия напряжений на свободной границе полупространства, т.е. граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_{zz}\,|_{z=0} = 0, \sigma_{zx}\,|_{z=0} = 0\,, \sigma_{zy}\,|_{z=0} = 0, \tag{1.13}$$

последнее граничное условие тождественно удовлетворяется в силу предположения о независимости деформаций от переменной y.

С учетом решений (1.12) и граничных условий (1.13) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{vmatrix} [\lambda(\nu_1^2 - k^2) + 2\mu\nu_1^2] & -2\mu ik\nu_2 \\ 2\mu ik\nu_1 & \mu(k^2 + \nu_2^2) \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = 0. \tag{1.14}$$

Из условия совместности системы однородных линейных уравнений (1.14) получим следующее соотношение:

$$[\lambda(\nu_1^2 - k^2) + 2\mu\nu_1^2](k^2 + \nu_2^2) - 4\mu\nu_1\nu_2 k^2 = 0. \tag{1.15}$$

С учетом следующих зависимостей

$$\frac{С_1^2}{С_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\ , \ \frac{\lambda}{\mu} = \frac{С_1^2}{С_2^2} - 2\ , \ \nu_\alpha^2 = к^2 - \frac{\omega^2}{С_\alpha^2}\ , \ \alpha = 1{,}2\,,$$

получим дисперсионное уравнение для поверхностных волн Рэлея [2, 93]:

$$(2к^2 - \frac{\omega^2}{с_2^2})^2 - 4\nu_1\nu_2 k^2 = 0, \tag{1.15}$$

введем такие параметры как $\xi = \frac{С_2^2}{С_1^2} < 1$ и $\eta = \frac{С^2}{С_2^2}$ и получим следующее уравнение

$$\eta[\eta^3 - 8\eta^2 + (24 - 16\xi)\eta - 16(1 - \xi)] = 0, \tag{1.16}$$

В уравнение не входит частота ω, поэтому поверхностная волна Рэлея не обладает дисперсией, следовательно фазовая скорость волны Рэлея будет постоянной, независимой от частоты. По своей величине фазовая скорость примерно на 5-20% меньше скорости поперечной волны и при изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0,5 постепенно возрастает со значения 0,87c_2 до 0,96c_2. В силу отсутствия дисперсии поверхностная волна Рэлея распространяется без искажения, при этом фазовая скорость совпадает с групповой скоростью волны (рисунок.1.5-1.6).

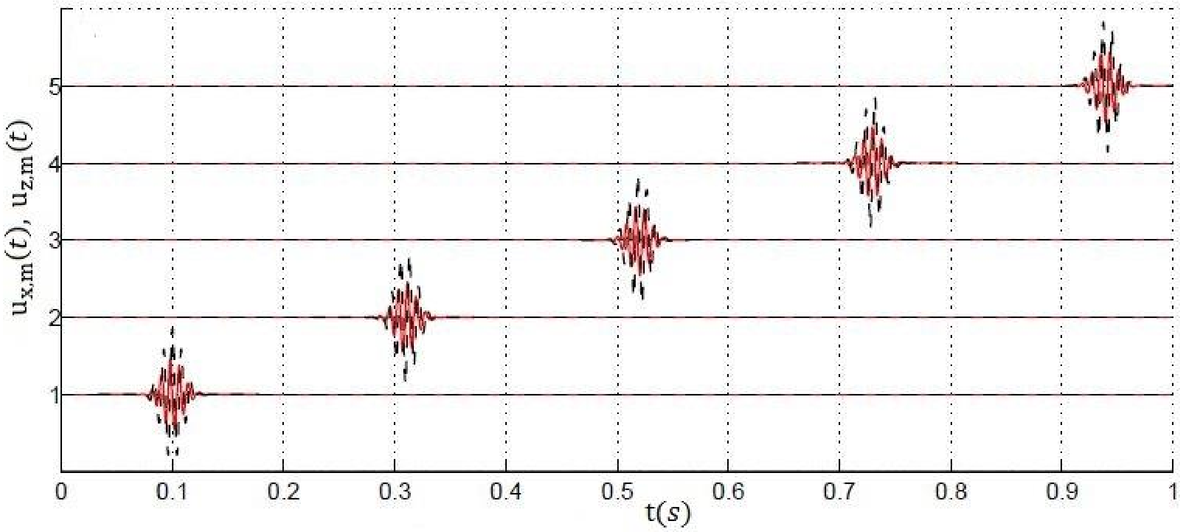


Рисунок 1.5: Компоненты перемещений в волне Рэлея

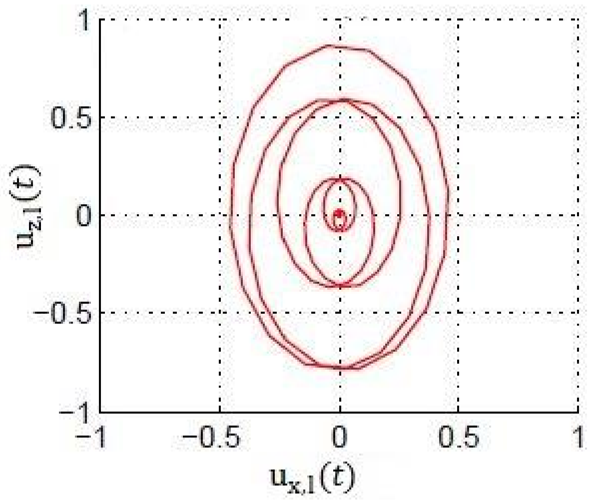
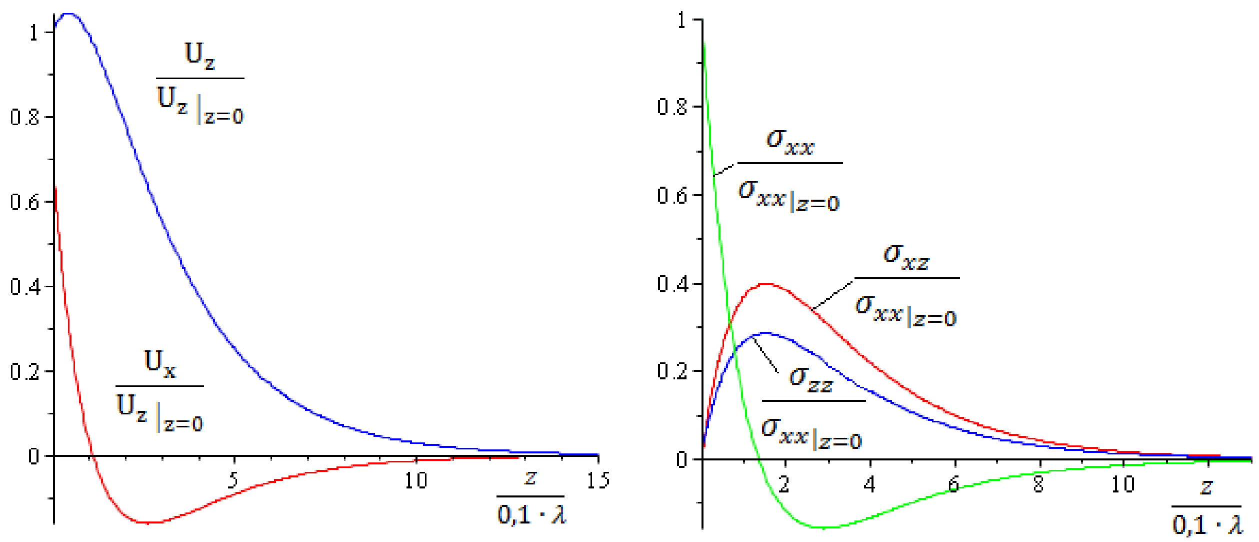


Рисунок 1.6: Годограф перемещений

На рисунке 1.7 представлены экспоненциально убывающие с увеличением глубины проникновения амплитуды смещений U_x, U_z (рисунок.1.7,а) и напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz}$ (рисунок.1.7,б) в волне Рэлея. Вектор перемещений в волне Рэлея состоит из продольной и поперечной компоненты, причем поперечная по своей величине всегда превосходит продольную. Поскольку компоненты смещения в рэлеевской волне сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$, движение частиц в волне Рэлея происходит по траектории эллипса, лежащего в сагиттальной плоскости, т.е. плоскости, проходящей через вектор скорости и нормаль к поверхности. Причем на глубине z>0,2λ, когда продольная компонента перемещений принимает отрицательное значение, направление движения частиц в волне меняется на противоположное (рисунок.1.7, а). Большая полуось эллипсов перпендикулярна границе полупространства, малая параллельна направлению распространения волны. Эксцентриситет эллипсов зависит от расстояния до поверхности и коэффициента Пуассона упругой среды. Так на поверхности полупространства при изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0,5 размеры большой полуоси (поперечная компонента смещения) постоянны, а размеры малой полуоси (продольная компонента смещения) изменяется от -0,772 до -0,54, тогда как на глубине сопоставимой с длиной волны размеры большой полуоси изменяются с 0,109 до 0,339, а размеры малой полуоси изменяются от -0,044 до -0,099 [101].



(а) (б)

Рисунок 1.7: Зависимости амплитуд смещений (а) и напряжений (б) в волне Рэлея от глубины

Дисперсионное уравнение волн Стоунли. Рассмотрим распространение поверхностных волн на границе двух твердых жестко склеенных полупространств. Граничные условия в плоскости соприкосновения полупространств (z=0) выберем так, чтобы выполнялись равенства компонент напряжений и перемещений в первой и второй средах, т.е. граничные условия будут иметь вид:

$$u_z^{(1)}\big|_{z=0} = -u_z^{(2)}\big|_{z=0}, \qquad u_x^{(1)}\big|_{z=0} = u_x^{(2)}\big|_{z=0},$$

$$\mu^{(1)}\sigma_{zz}^{(1)}\big|_{z=0} = \mu^{(2)}\sigma_{zz}^{(2)}\big|_{z=0}, \qquad \mu^{(1)}\sigma_{zx}^{(1)}\big|_{z=0} = \mu^{(2)}\sigma_{zx}^{(2)}\big|_{z=0}, \qquad (1.16)$$

где индекс (1) обозначает параметр, относящийся к первому полупространству, а индекс (2) ко второму полупространству.

С учетом решений (1.12) и граничных условий (1.16) получим следующую систему алгебраических уравнений [90]:

$$\begin{bmatrix} 2\mu^{(1)}r_1 & 2\mu^{(2)}r_2 & \mu^{(1)}(1+S_1^2) & \mu^{(2)}(1+S_2^2) \\ -\mu^{(1)}(1+S_1^2) & \mu^{(2)}(1+S_2^2) & -2\mu^{(1)}S_1 & 2\mu^{(2)}S_2 \\ 1 & -1 & S_1 & -S_2 \\ r_1 & r_2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ D^{(1)} \\ B^{(2)} \\ D^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

где $r_1 = \frac{\nu_1^{(1)}}{k}$, $r_2 = \frac{\nu_1^{(2)}}{k}$, $S_1 = \frac{\nu_2^{(1)}}{k}$, $S_2 = \frac{\nu_2^{(2)}}{k}$.

Из условия совместности системы однородных линейных уравнений (1.17) получим дисперсионное уравнение волны Стоунли. В общем случае при произвольных жескостных характеристиках $(\rho_{1,2},\ \lambda_{1,2},\ \mu_{1,2})$ решение данного дисперсионного уравнения ищется с помощью численных методов. Следует отметить, что поверхностной волне Стоунли соответствует вещественный корень полученного дисперсионного уравнения, которое в свою очередь при $\frac{\rho_1}{\rho_2} \to 0$ переходит в дисперсионное уравнение Рэлея, при этом волна Стоунли переходит в волну Рэлея [2].

Траекториями движения частиц в волне Стоунли как и в волне Рэлея являются эллипсы. Фазовая скорость упругих волн в граничных полупространствах не зависят от частоты. Эта скорость, как и другие характеристики волн, определяются плотностями и упругими параметрами сред. Скорость волн Стоунли не превышает скоростей продольных и поперечных волн в граничных средах. Продольная и поперечная компоненты вектора перемещения локализуются на глубине порядка длины волны, но в некоторых случаях, как пример, для границы твердое тело-жидкость, это не выполняется.

Дисперсионное уравнение волн Лява. Рассмотрим распространение поверхностных волн на границе твердого полупространства и твердого слоя толщиной h, причем будем считать что, плотность и постоянные Ламе двух сред различные, т.е. $\rho^{(1)} \neq \rho^{(2)}$, $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$, $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$. Индекс (1) обозначает параметр, относящийся к полупространству, а индекс (2) к слою. Принимая во внимание тот факт, что волны является затухающими, в решении (1.12) необходимо ограничится экспонентами с отрицательными показателями. Граничные условия заключаются в непрерывности компонент смещений и напряжений на границе соприкосновения сред (z=0) и отсутствию напряжений на свободной границе твердого слоя (z=-h), толщина которого в безразмерном виде равна единице:

$$U_y^{(1)}(z) = F^{(1)} e^{-\nu_2^{(1)} z}, \quad z > 0,$$

$$U_y^{(2)}(z) = E^{(2)} e^{\nu_2^{(2)} z} + F^{(2)} e^{-\nu_2^{(2)} z}, \ -1 < z < 0. \tag{1.18}$$

Граничные условия с учетом вышесказанного будут иметь вид:

$$\mu^{(1)} \sigma_{yz}^{(1)} \big|_{z=0} = \mu^{(2)} \sigma_{yz}^{(2)} \big|_{z=0}, \qquad u_y^{(1)} \big|_{z=0} = u_y^{(2)} \big|_{z=0}, \tag{1.19}$$

$$\sigma_{yz}^{(2)}\,|_{z=-1} = 0.$$

С учетом компонент (1.18) и граничных условий (1.19) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \nu_2^{(2)}e^{-\nu_2^{(2)}} & \nu_2^{(2)}e^{\nu_2^{(2)}} & 0 \\ \mu^{(2)}\nu_2^{(2)} & -\mu^{(2)}\nu_2^{(2)} & \mu^{(1)}\nu_2^{(1)} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E^{(2)} \\ F^{(2)} \\ F^{(1)} \end{bmatrix} = 0 \qquad (1.20)$$

Из условия совместности системы однородных линейных уравнений (1.20) получим дисперсионное уравнение волны Лява [93]:

$$th\nu_2^{(2)} + \frac{\mu^{(1)}\nu_2^{(1)}}{\mu^{(2)}\nu_2^{(2)}} = 0. \qquad (1.21)$$

Фазовая скорость волн Лява зависит от частоты, поэтому для данного типа волн имеет место дисперсия (рисунок.1.8), следовательно фазовая скорость по своему значению не совпадает с групповой скоростью волны (рисунок.1.9).

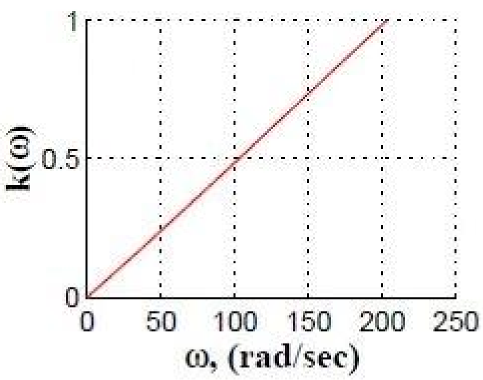
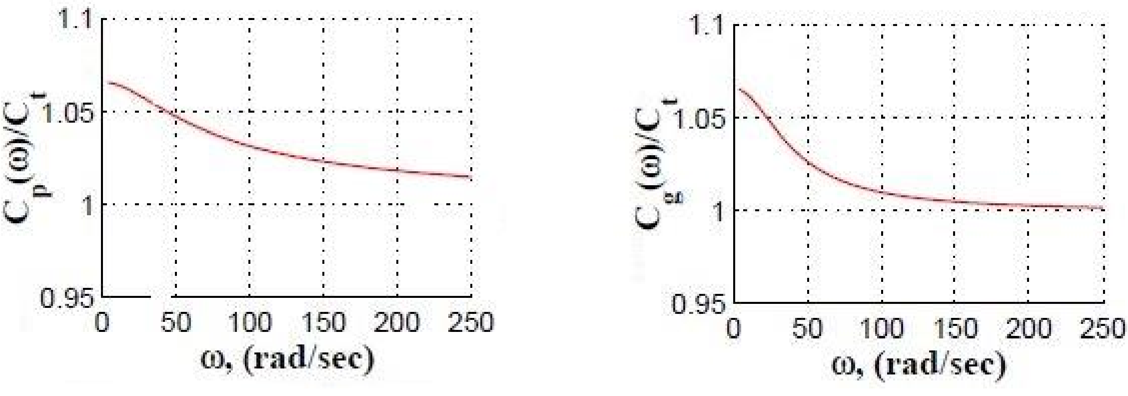


Рисунок 1.8: Зависимость волнового числа от частоты



(а) (б)

Рисунок 1.9: (а)-зависимость фазовой скорости от частоты, (б)-зависимость групповой скорости от частоты

Дисперсия волн приводит к искажению волн Лява, которое увеличивается по мере удаления волны от источника возмущения (рисунок.1.10).

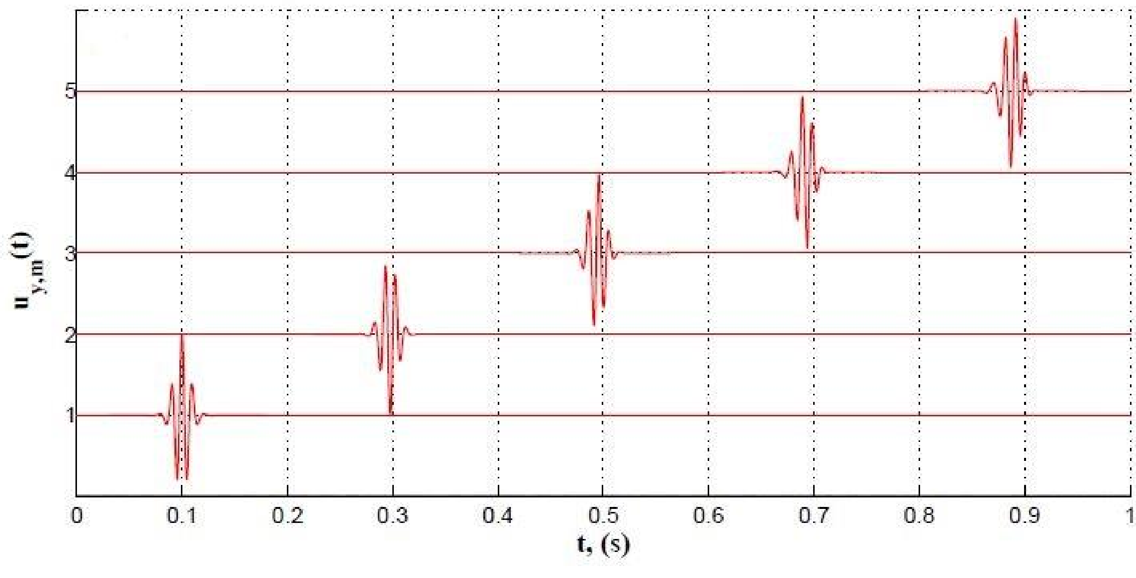


Рисунок 1.10: Компонента перемещений в волне Лява

Фазовая скорость волн Лява в слое меньше чем в полупространстве и при увеличении толщины слоя уменьшается и стремится к фазовой скорости поперечной объемной волны в слое, при этом смещение становится распределенным по косинусу. Локализация волны Лява зависит от толщины слоя и частоты и может достигать значений значительно превышающие длину волны.

При этом если толщина слоя стремится к нулю, поверхностная волна Лява переходит в объемную поперечную волну.

Дисперсионное уравнение волн Лэмба. Рассмотрим распространение волн в твердой пластинке (слое) толщиной $2h$. Причем смещение данного типа волн возможно как в направлении распространения волны, так и в перпендикулярно плоскости пластинки. Граничными условиями выступают условия отсутствия напряжений на обеих поверхностях пластинки, т.е. отсутствия сил, направленных по нормали:

$$\sigma_{zx}\left.\right|_{z=\pm h} = 0,\ \ \sigma_{zz}\left.\right|_{z=\pm h} = 0. \tag{1.22}$$

Используя полученные решения (1.12) и граничные условия, с учетом, что половина толщины слоя в безразмерном виде равна единице, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} (k^2+\nu_2^2)e^{\nu_1} & (k^2+\nu_2^2)e^{-\nu_1} & 2ik\nu_2 e^{\nu_2} & -2ik\nu_2 e^{-\nu_2} \\ 2ik\nu_1 e^{\nu_1} & -2ik\nu_1 e^{-\nu_1} & -(k^2+\nu_2^2)e^{\nu_2} & -(k^2+\nu_2^2)e^{-\nu_2} \\ (k^2+\nu_2^2)e^{-\nu_1} & (k^2+\nu_2^2)e^{\nu_1} & 2ik\nu_2 e^{-\nu_2} & -2ik\nu_2 e^{\nu_2} \\ 2ik\nu_1 e^{-\nu_1} & -2ik\nu_1 e^{\nu_1} & -(k^2+\nu_2^2)e^{-\nu_2} & -(k^2+\nu_2^2)e^{\nu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0.$$

Из условия совместности вышеуказанной системы линейных уравнений можно получить дисперсионное уравнение волны Лэмба.

Фазовые и групповые скорости в волне Лэмба, обладающей дисперсией представляют собой более сложную структуру, нежели волны Рэлея (рисунок.1.11).

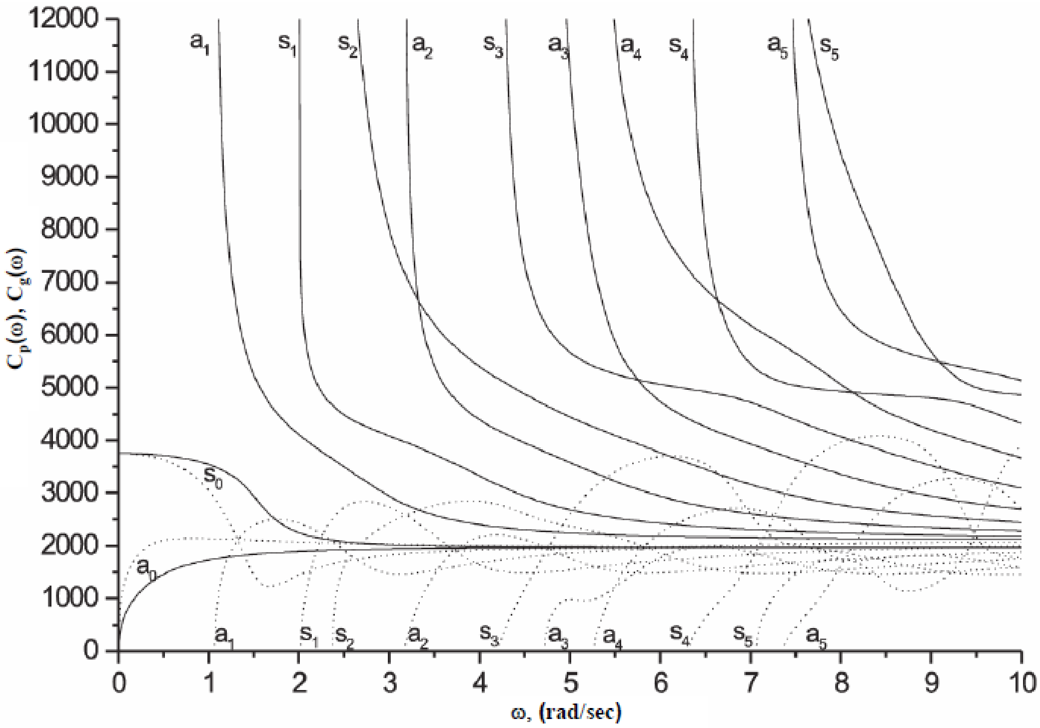


Рисунок 1.11: Зависимость структуры фазовых (сплошные линии) и групповых (пунктирные линии) скоростей симметричных и антисимметричных мод волн Лэмба от частоты [102]

Фазовые и групповые скорости нулевых волн Лэмба стремятся при увеличении частоты к фазовой скорости волны Рэлея. Тогда как фазовые и групповые скорости ненулевых волн Лэмба стремятся к скорости поперечных волн, причем иногда групповые скорости могут быть отрицательными, это означает, что фазовая и групповая скорости данной волны направлены в противоположные стороны. Что характерно для некоторых волн может существовать несколько максимумов групповой скорости, которые увеличиваются с ростом номера волны. Смещение ненулевых волн Лэмба для мод нулевого порядка локализовано вблизи свободных границ, тогда как для мод высшего порядка локализованы в толщине пластины.

ГЛАВА 2. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ НА ГРАНИЦЕ ГРАДИЕНТНО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

В первой части главы рассматривается математическая модель обобщенного континуума (называемого градиентно-упругой средой), напряженно-деформированное состояние которого описывается тензором деформаций, вторыми градиентами вектора перемещений, несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений. В двумерной постановке рассматривается задача о распространении упругой поверхностной волны на границе градиентно-упругого полупространства. Решение уравнений ищется в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, причем у векторного потенциала отлична от нуля только одна компонента. Показано, что такая волна, в отличие от классической волны Рэлея, обладает дисперсией. Вычислена зависимость фазовой скорости поверхностной волны от волнового числа, проведено ее сравнение с дисперсионной характеристикой фазовой скорости объемной сдвиговой волны. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

Во второй части главы рассматривается задача о генерации возмущений движущимся источником на границе градиентно-упругого полупространства. Предполагается, что источник движется с постоянной скоростью вдоль границы полупространства. Задача рассматривается в двумерной постановке, когда все процессы однородны вдоль горизонтальной поперечной координатной оси. Вектор перемещений содержит две компоненты: продольную и вертикальную поперечную. Скорость источника может превосходить по своей величине скорости сдвиговой упругой волны (сверхзвуковое движение). В результате аналитических исследований показано, что движущийся источник будет генерировать волны, распространяющиеся вдоль границы полупространства как экспоненциально убывающие в его глубину, так и дискретно стабилизирующиеся на определенной глубине при дозвуковой и сверхзвуковой скоростях соответственно. Поперечная составляющая вектора перемещений при движении на дозвуковых скоростях всегда превосходит продольную, а при движении на сверхзвуковых скоростях только в околоповерхностном слое полупространства. Такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией, поскольку ее фазовая скорость не является постоянной величиной, а зависит от частоты. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника и его скорости. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

Глава написана на основании работ [75, 76, 79, 81, 83, 85–89].

Рассмотрим задачу о распространении упругой поверхностной волны Рэлея на границе градиентно-упругого изотропного полупространства $y \geq 0$ (ограничимся двумерным случаем, когда все процессы однородны по оси z, а направление движения волны совпадает с направлением оси x), деформированное состояние которого описывается тензором деформаций и вторыми градиентами вектора перемещений:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right),$$

$$\chi_{klm} = -\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m}. \tag{2.1}$$

При рассмотрении адиабатических процессов упругого деформирования необходимо постулировать зависимость внутренней энергии U от инвариантов мер деформации (2.1).

Разложим функцию U в окрестности естественного состояния $(\varepsilon_{kl} = 0, \chi_{klm} = 0)$ в ряд Тейлора, пренебрегая величинами третьего порядка. Для изотропного однородного и центрально-симметричного тела получим разложение следующего вида [103]:

$$U = \frac{\lambda}{2}\,\varepsilon_{kk}^2 + \mu\varepsilon_{ik}^2 + 2\mu L^2(\chi_{klm}^2 + \tilde{\nu}\chi_{klm}\chi_{lkm}), \tag{2.2}$$

где λ и μ – упругие постоянные Ламе, L^2 – отношение модуля кривизны к модулю сдвига μ, имеющая размерность квадрата длины, $\tilde{\nu}$ – безразмерная константа, ρ – плотность среды.

В перемещениях векторное уравнение динамики градиентно-упругой среды имеет вид:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + 4\mu L^2\Delta(\Delta\mathbf{u} + \tilde{\nu}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) = 0. \tag{2.3}$$

Данное уравнение содержит четвертый порядок производных по координатам, в отличие от классического уравнения Ламе, описывающего динамику деформируемого твердого тела, содержащего вторые производные по координатам.

2.1 Дисперсия волны. Распределение перемещений и напряжений

Дисперсия волны. Уравнения динамики, эквивалентные векторному уравнению (2.3), в двумерном случае запишутся в виде [101]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

здесь u – продольная, а v – поперечная компоненты вектора перемещений.

Напряженное состояние данной модели будет описываться несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений. Компоненты тензора напряжений, входящие в (2.4), связаны со компонентами смещениями u,v следующими соотношениями:

$$\sigma_{xx}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\sigma_{yy}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_{xy}=\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-L^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \tag{2.5}$$

$$\sigma_{yx}=\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+L^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],$$

из которых видно, что $\sigma_{xy}\neq\sigma_{yx}$.

Моментные напряжения μ_x и μ_y выражаются через u,v следующим образом:

$$\mu_x=2\,\mu L^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\mu_y=2\,\mu L^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2.6}$$

Будем считать, что на границе y=0 напряжения и моментные напряжения отсутствуют, т.е. граничные условия примут следующий вид [74]:

$$\sigma_{yy}\big|_{y=0}=0,\qquad \sigma_{yx}\big|_{y=0}=0\,,\qquad \sigma_{yz}\big|_{y=0}=0,$$

$$\mu_y=0, \tag{2.7}$$

причем третье условие тождественно удовлетворяется в силу предположения о независимости деформаций от переменной z.

Введем скалярный φ и векторный $\boldsymbol{\psi}$ потенциалы так, что вектор перемещений $\mathbf{u}$ запишется в виде [93]:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla * \boldsymbol{\psi}. \tag{2.8}$$

Поскольку перемещение не зависит от координаты z, у векторного потенциала будет отличной от нуля только компонента по оси z, эту компоненту обозначим через ψ.

С помощью (2.8) система (2.4) приводится к уравнениям:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta(1 - L^2\Delta)\psi - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{2.9}$$

где $c_1^2 = \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}$ – квадрат скорости продольной волны, $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ – квадрат скорости поперечной волны.

Решение уравнений (2.9) будем искать в виде волн, гармонических во времени и распространяющихся в направлении оси x:

$$\varphi = Ae^{\zeta y + i(\omega t - kx)},$$

$$\psi = Be^{\eta y + i(\omega t - kx)}, \tag{2.10}$$

Амплитуды этих волн зависят от координаты y. Подставляя формулы (2.10) в (2.9), получим уравнения для определения ζ и η:

$$\zeta^2 + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 - k^2 = 0,$$

(2.11)

$$L^2\eta^4 - (1 + 2L^2k^2)\eta^2 + \left[k^2 + L^2k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2\right] = 0.$$

Для того чтобы возмущения убывали от границы внутрь среды и соответствовали поверхностной волне, необходимо определить такие корни уравнений (2.11), чтобы ζ и η были положительными. В результате получим:

$$\zeta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2}, k^2 > \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2,$$

(2.12)

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{(1 + 2L^2k^2) \pm \sqrt{(1 + 2L^2k^2)^2 - 4L^2\left[k^2 + L^2k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2\right]}}{2L^2}},$$

тогда соотношения (2.10) будут иметь вид:

$$\varphi = Ae^{\zeta y + i(\omega t - kx)},$$

(2.13)

$$\psi = B_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)},$$

Перемещения u и v, напряжения σ_{yx}, σ_{yy} и моментное напряжение μ_y можно представить через потенциалы φ и ψ используя следующие соотношения:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

(2.14)

$$\sigma_{yy} = \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right),$$

$$\sigma_{yx} = \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - L^2\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}\right)\right),$$

$$\mu_y = -2\,\mu L^2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right),$$

Подставляя в (2.14) выражения (2.13) и используя граничные условия (2.7), получим следующую систему уравнений:

$$\sigma_{yy}=Ae^{\zeta y+i(\omega t-kx)}\left(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2\right)+2B_1\mu ik\eta_1 e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)}+2B_2\mu ik\eta_2 e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)}=0,$$

$$\sigma_{yx}=-2A\mu\zeta kie^{\zeta y+i(\omega t-kx)}+B_1\mu e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)}\left(k^2+\eta_1^2+2\eta_1^2k^2L^2-\eta_1^4L^2-k^4L^2\right)+$$
$$+B_2\mu e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)}\left(k^2+\eta_2^2+2\eta_2^2k^2L^2-\eta_2^4L^2-k^4L^2\right)=0, \qquad (2.15)$$

$$\mu_y = 2B_1L^2\eta_1\mu e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)}(k^2-\eta_1^2) + 2B_2L^2\eta_2\mu e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)}(k^2-\eta_2^2) = 0,$$

представляющую собой однородную систему алгебраических уравнений для определения A, B_1 и B_2. Эта система имеет решения, отличные от нуля, если ее определитель обращается в нуль:

$$\eta_2(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)(k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2k^2L^2 - \eta_1^4L^2 - k^4L^2)(k^2 - \eta_2^2) - \eta_1(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + +2\mu\zeta^2)(k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2k^2L^2 - \eta_2^4L^2 - k^4L^2)(k^2 - \eta_1^2) + 2k^2\zeta\eta_1\eta_2(\eta_2^2 - \eta_1^2) = 0. \qquad (2.16)$$

Учитывая, что $\varsigma = c_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}$, $\alpha = L^2 k^2$, $\beta = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$, где -коэффициент Пуассона, c_R–скорость поверхностной волны, из (2.16) получим дисперсионное уравнение:

$$16(1-\beta\varsigma)(1+\alpha-\varsigma)\left[1+2\alpha+2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)}\right] = (2-\varsigma)^2\left[(1-3\alpha^2)^2 + \alpha(3-\alpha)(1+\alpha-\varsigma) + (1-\alpha^2)(1+\alpha-\varsigma)^2 + \alpha(1+\alpha-\varsigma)^3 + 2(1-3\alpha^2)(3-\alpha)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)} + 2(1-3\alpha^2)(1-\alpha)(1+\alpha-\varsigma) - 2(1-3\alpha^2)(1+\alpha-\varsigma)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)} + 2(3-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha-\varsigma)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)} - 2(3-\alpha)(1+\alpha-\varsigma)^2\alpha - 2(1-\alpha)(1+\alpha-\varsigma)^2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)}\right]. \quad (2.17)$$

При L=0 или α=0 полученное уравнение (2.17) сводиться к уравнению поверхностной волны Рэлея в классическом случае [104]

$$16(1-\beta\varsigma)(1-\varsigma) = (2-\varsigma)^2(3+(1-\varsigma)^2-2\varsigma). \quad (2.18)$$

Заметим, что в уравнение (2.17) входит волновое число α, поэтому поверхностная волна обладает дисперсией, в отличие от классического случая, в котором поверхностная волна Рэлея дисперсией не обладает.

На рисунке 2.1 представлены зависимости квадрата скорости поверхностной волны c_R от волнового числа α. Кривые представлены в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны c_2^2. Кривые рассчитаны для двух значений коэффициента Пуассона: ν=0.2 (сплошная кривая) и ν=0.5 (пунктирная кривая). Из графика видно, что с увеличением волнового числа α, квадрат скорости поверхностной волны возрастает и при $\alpha \to \infty$, $\varsigma \to 2$ или $c_R \to \sqrt{2}$.

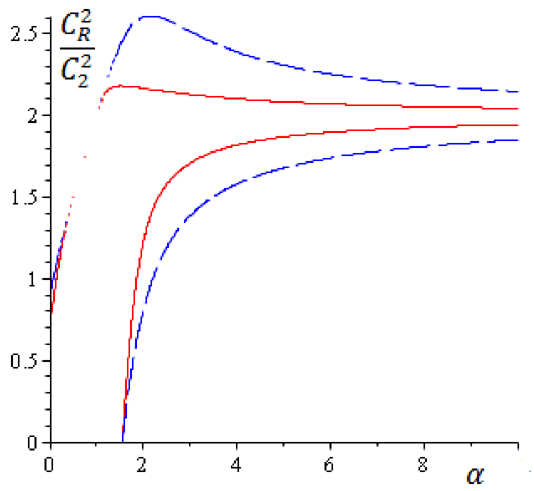


Рисунок 2.1: Зависимость квадрата скорости поверхностной волны от волнового числа

Получим выражение для фазовой скорости плоской сдвиговой волны $V_{\phi}(\alpha)$ и сравним ее со скоростью поверхностной волны $c_R(\alpha)$.

Уравнение для плоской сдвиговой волны, учитывая второе уравнение из (2.9), примет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - L^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{2.19}$$

Его решение будем искать в виде: $\psi = Be^{i(\omega t - kx)}$, отсюда

$$\omega^2 = c_2^2 k^2(1 + L^2k^2), \tag{2.21}$$

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c_2^2(1 + L^2k^2), \quad \frac{v_\phi^2}{c_2^2} = (1 + \alpha). \tag{2.22}$$

Из уравнения (2.22) следует, что сдвиговая волна в градиентно-упругой среде обладает дисперсией, ее фазовая скорость не совпадает со скоростью сдвиговой волны c_2, а превосходит ее при любом ненулевом значении волнового числа.

На рисунке 2.2 представлены две зависимости: квадрат скорости поверхностной волны $c_R{}^2$ и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны $V_ф^2$. Кривые представлены в безразмерной форме: обе величины отнесены к квадрату скорости сдвиговой волны c_2^2. Скорость поверхностной волны рассчитана для значения коэффициента Пуассона ν=0.5. Из приведенного графика можно сделать вывод, что скорость поверхностной волны не может превышать фазовую скорость сдвиговой волны, но может достигать ее при определенных значениях волнового числа α.

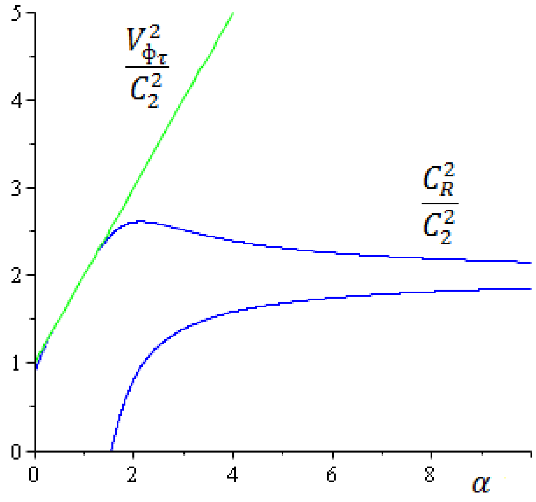


Рисунок 2.2: Зависимости квадрата скорости поверхностной волны и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны от волнового числа

Распределение перемещений и напряжений. С учетом уравнений (2.13) и (2.14) перемещения u и v могут быть записаны в следующем виде:

$$u = -iAke^{\zeta y+i(\omega t-kx)} + B_1\eta_1 e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)} + B_2\eta_2 e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)} = \left(-iAke^{\zeta y} + B_1\eta_1 e^{\eta_1 y} + B_2\eta_2 e^{\eta_2 y}\right)e^{i(\omega t-kx)},$$

$$(2.23)$$

$$v = A\zeta e^{\zeta y+i(\omega t-kx)} + iB_1 k e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)} + iB_2 k e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)} = \left(A\zeta e^{\zeta y} + iB_1 k e^{\eta_1 y} + iB_2 k e^{\eta_2 y}\right)e^{i(\omega t-kx)}.$$

Система уравнений (2.15) позволяет выразить постоянные B_1 и A через B_2:

$$B_1 = -B_2\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{k^2-\eta_2^2}{k^2-\eta_1^2}\right),$$

(2.24)

$$A = \frac{2iB_2\eta_2 k\mu}{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2)}\left(\frac{k^2-\eta_2^2}{k^2-\eta_1^2}-1\right).$$

Соотношения (2.23), после взятия вещественных частей (2.24), позволяют записать перемещения в виде:

$$u = B_2\eta_2\left[\frac{2k^2\mu}{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2)}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}-1\right)e^{-\zeta y}-\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}e^{-\eta_1 y}+e^{-\eta_2 y}\right]cos(kx-\omega t).$$

(2.25)

$$v = -B_2\left[\frac{2k^2\mu\eta_2\zeta}{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2)}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}-1\right)e^{-\zeta y}-k\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}\right)e^{-\eta_1 y}+ke^{-\eta_2 y}\right]sin(kx-\omega t).$$

На рисунке 2.3 представлены зависимости амплитуд перемещений u и v в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $v_{|y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что смещение, нормальное к поверхности, сначала возрастает, достигая своего максимума приблизительно при y=0.1λ, а затем монотонно убывает с глубиной, тогда как смещение, параллельное поверхности, меняет знак на глубине примерно y=0.15λ.

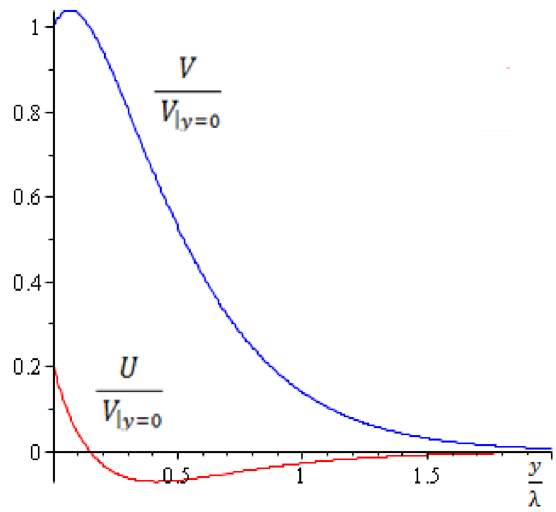


Рисунок 2.3: Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины

Компоненты напряжений можно представить через потенциалы φ и ψ, и аналогично вычислению компонент перемещений, выразить постоянные B_1 и A через B_2, тогда после взятия вещественных частей, получим следующие выражения:

$$\sigma_{yy} = B_2\left[-2\eta_2 f\mu\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}-1\right)e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f\mu\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}\right)e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f\mu e^{-\eta_2 y}\right]\sin(kx - \omega t),$$

$$\sigma_{xx} = B_2\left[2\eta_2 f\mu\frac{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu k^2)}{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2)}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}-1\right)e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f\mu\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}\right)e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f\mu e^{-\eta_2 y}\right]\cos(kx - \omega t),$$

$$\sigma_{yx} = B_2\left[\frac{4\eta_2 f^2\mu^2}{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2)}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}-1\right)e^{-\zeta y} - \mu\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}\right)(k^2+\eta_1^2+2\eta_1^2k^2L^2-\eta_1^4L^2-k^4L^2)e^{-\eta_1 y} + \mu(k^2+\eta_2^2+2\eta_2^2k^2L^2-\eta_2^4L^2-k^4L^2)e^{-\eta_2 y}\right]\cos(kx - \omega t),$$

$$\sigma_{xy} = B_2\left[\frac{4\eta_2 f^2\mu^2}{(\lambda\zeta^2-\lambda k^2+2\mu\zeta^2)}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}-1\right)e^{-\zeta y}-\mu\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{f^2-\eta_2^2}{f^2-\eta_1^2}\right)(k^2+\eta_1^2-2\eta_1^2k^2L^2+\eta_1^4L^2+k^4L^2)e^{-\eta_1 y}+\mu(k^2+\eta_2^2-2\eta_2^2k^2L^2+\eta_2^4L^2+k^4L^2)e^{-\eta_2 y}\right]\cos(kx-\omega t),$$

$$\mu_y = 2B_2L^2\mu\eta_2(f^2-\eta_2^2)(e^{-\eta_2 y}-e^{-\eta_1 y})\cos(kx-\omega t),$$

$$\mu_x = 2B_2L^2\mu f(f^2-\eta_2^2)\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}e^{-\eta_2 y}+e^{-\eta_1 y}\right)\sin(kx-\omega t).$$

На рисунке 2.4 представлены зависимости амплитуд напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ и моментных напряжений μ_x, μ_y в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды напряжений и моментных напряжений отнесены к амплитуде нормального напряжения на поверхности $\sigma_{xx|y=0}, \mu_{x|y=0}$, соответственно. Глубина отложена в долях длины волны. Из графиков видно, что σ_{xx} меняет знак, тогда как σ_{yy} и σ_{yx} достигают максимума приблизительно при y=0.2 λ и затем экспоненциально убывают с глубиной. Так же из графика видно, что тензор напряжений является несимметричным ($\sigma_{yx} \neq \sigma_{xy}$).

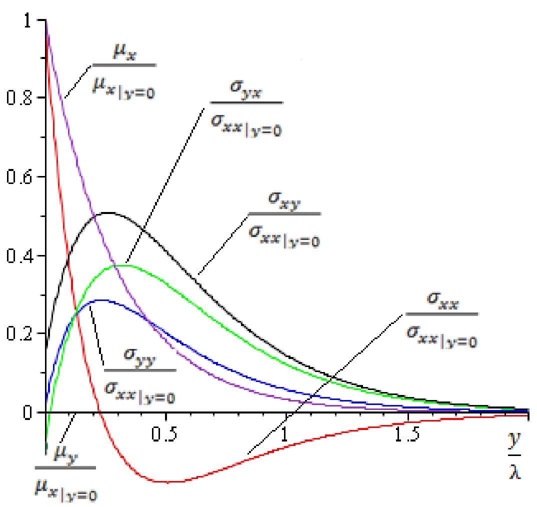


Рисунок.2.4: Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины

На рисунке 2.5 представлены зависимости амплитуд напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при L =0). Кривые представлены в безразмерной форме. Из графиков видно, что тензор напряжений стал симметричным, так как амплитуды напряжений σ_{xy}, σ_{yx} совпали и достигают максимума приблизительно при y=0.2 λ.

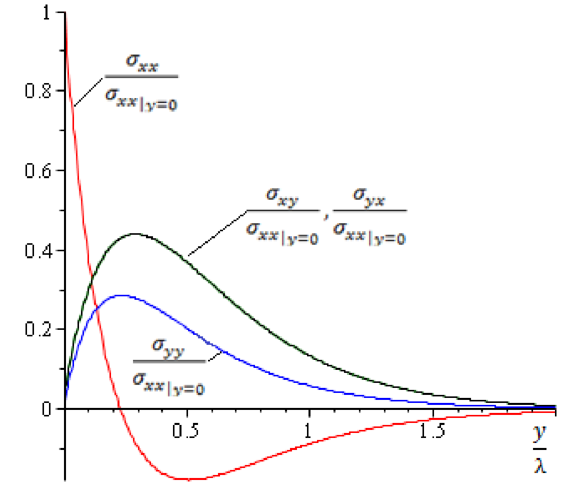


Рисунок 2.5: Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при L =0)

Приведенная на рисунках 2.3-2.5 совокупность кривых иллюстрирует, что поверхностная волна локализована в тонком поверхностном слое.

В рассмотренной модели обобщенного континуума скорость поверхностной волны, распространяющейся вдоль свободной границы градиентно-упругого полупространства, может превосходить скорость объемной сдвиговой волны, вычисляемую как радикал отношения модуля сдвига к плотности материала. Однако в рассматриваемой среде сдвиговая волна также обладает дисперсией и значение указанной скорости является лишь нижним пределом ее фазовой скорости. Таким образом, в градиентно-упругой среде фазовая скорость поверхностной волны не может превосходить фазовую скорость объемной сдвиговой волны, но, при определенных значениях волнового числа, может достигать ее.

2.2 Генерация возмущений сосредоточенным источником, движущимся с постоянной дозвуковой скоростью

Рассмотрим задачу генерации поверхностных волн источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства с постоянной скоростью D не превышающей скорости продольной $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ и сдвиговой $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ волн.

В этом случае уравнения динамики, эквивалентные векторному уравнению, в двумерном случае запишутся в виде:

$$\frac{\partial\sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial\tau_{y'x'}}{\partial y'} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\tau_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial\sigma_{y'y'}}{\partial y'} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \qquad (2.26)$$

Компоненты тензора напряжений и моментные напряжения $\mu_{x'}$ и $\mu_{y'}$ выражаются через перемещения *u, v* следующими соотношениями:

$$\sigma_{x'x'} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x'},$$

$$\sigma_{y'y'} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y'},$$

$$\sigma_{x'y'} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} - l^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right)\right], \qquad (2.27)$$

$$\sigma_{y'x'} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} + l^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)\ \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right)\quad\right],$$

$$\mu_{x'} = 2\ \mu l^2\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right),$$

$$(2.28)$$

$$\mu_{y'} = 2\ \mu l^2\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right).$$

Принципиальное отличие в постановке задачи будет наблюдаться в процессе задания граничных условий для решения уравнения динамики. В рассматриваемой задаче граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{y'y'} = -P\delta(x),\quad \sigma_{y'x'} = 0,\quad \mu_{y'} = 0. \tag{2.29}$$

Введем подвижную систему координат (*x,y*), в которой покоится источник возмущений и которая связана с неподвижной системой координат известным преобразованием Галилея:

$$x = x' - Dt,\ y = y'. \tag{2.30}$$

Соотношения (2.27), (2.28) и (2.29) позволяют записать уравнения динамики в перемещениях:

$$(\lambda + 2\mu - \rho D^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + l^2\Delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] = 0,$$

$$(2.31)$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\mu\left[\left(1-\frac{\rho D^2}{\mu}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-l^2\Delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right]=0.$$

Решение уравнений (2.31) будем искать в следующем виде:

$$u = Ae^{kqy}si\,n(kx),$$
$$(2.32)$$
$$v = Be^{kqy}co\,s(kx).$$

Подставляя (2.32) в уравнения (2.31) получим систему алгебраических уравнений относительно A и B:

$$[-\mu l^2k^2q^4+\mu q^2(1+l^2k^2)-(\lambda+2\mu-\rho D^2)]+[\mu l^2k^2q^3+q(\lambda+\mu-\mu l^2k^2)]B=0,$$
$$(2.33)$$
$$[-\mu l^2k^2q^3-q(\lambda+\mu-\mu l^2k^2)]A+[(\lambda+2\mu-\rho D^2)q^2-(\mu+\mu l^2k^2-\rho D^2)]B=0.$$

Условием существования полученной системы является равенство нулю определителя матрицы, что дает нам следующее уравнение:

$$(l^2k^2-\gamma+\beta_1^2)l^2k^2q^6+\big(l^2k^2(1+l^2k^2-\beta_1^2)+\gamma(1+l^2k^2)(1-\gamma\beta_1^2)+2l^2k^2(\gamma-l^2k^2)\big)q^4+\big((1+l^2k^2)(1+l^2k^2-\beta_1^2)-(\gamma-\beta_1^2)^2+(\gamma-l^2k^2)^2\big)q^2+(\gamma-\beta_1^2)(1+l^2k^2-\beta_1^2)=0. \quad (2.34)$$

где $\beta_1^2=\frac{\rho D^2}{\mu}$ – отношение квадрата скорости движения источника к квадрату скорости сдвиговой волны; $\gamma=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}$ – отношение квадрата скорости продольной волны к квадрату скорости сдвиговой волны.

Корни уравнения (2.34) q_1, q_2, q_3 следует искать при условии Re q>0. Компоненты продольных и поперечных перемещений будут выражаться в виде сумм:

$$u = \sum_{i=1}^{3} \int_0^\infty A_i e^{kq_i y} sinkxdk,$$

(2.35)

$$v = \sum_{i=1}^{3} \int_0^\infty \alpha_i A_i e^{kq_i y} coskxdk,$$

где

$$\alpha_i = \frac{\mu l^2 k^2 q_i^4 - \mu q_i^2(1 + l^2 k^2) + (\lambda + 2\mu - \rho D^2)}{\mu l^2 k^2 q_i^3 + (\lambda + \mu - \mu l^2 k^2) q_i},$$

(2.36)

$$B_i = \alpha_i A_i.$$

Подставляя (2.35) в граничные условия (2.29), получим следующую систему из трех уравнений для определения A_1, A_2, A_3.

$$\sum_{i=1}^{3} [\lambda + \alpha_i q_i(\lambda + 2\mu)] A_i = -\frac{P}{\pi k},$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left[-\alpha_i(1 - l^2 k^2) + q_i(1 - lk^2 \alpha_i q_i) + lk^2 q_i\left(1 - q_i^2\right)\right] A_i = 0, \qquad (2.37)$$

$$\sum_{i=1}^{3} q_i(\alpha + q_i) A_i = 0,$$

Известно, что влияние моментных напряжений особенно сказывается при коротких волнах [103]. Исходя из этого введем безразмерный малый параметр $\varepsilon = 1/lk$.

С точностью до величин порядка ε^2 из (2.34) получим:

$$q_1 = a_{01}\varepsilon, \quad q_2 = \frac{(a_{02} + a_{12}\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad q_3 = \frac{(a_{02} - a_{12}\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{2.38}$$

где

$$a_{01} = -\frac{\gamma\sqrt{1-\beta_0^2}}{\sqrt{2}}, \qquad a_{02} = -\frac{1+i}{\sqrt[4]{128}}, \quad a_{12} = \frac{\mathrm{i}(1+i)(3-\beta_0^2)\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{8}}, \tag{2.39}$$

$$\beta_0^2 = \frac{\rho D^2}{\lambda + 2\mu},$$

С учетом выражений (2.36-2.38) получим следующие соотношения:

$$\alpha_1 = \alpha_{01} + \alpha_{11}\varepsilon, \;\; \alpha_2 = q_2, \;\; \alpha_3 = q_3, \;\; A_1 = -\frac{P}{\pi\lambda k}, \;\; A_2 = A_3 = 0 \tag{2.40}$$

$$\alpha_{01} = \frac{(1+\beta_0^2)\gamma^2 - 2\beta_1^2}{\gamma\sqrt{1-\beta_0^2}}, \;\; \alpha_{11} = \gamma\sqrt{1-\beta_0^2}\left[\frac{(1+\beta_0^2)\gamma^2}{2} - \beta_1^2\right],$$

позволяющие записать перемещения (2.35) в виде:

$$u = -\frac{P}{\pi\lambda}e^{-\beta_2 y}\int_{k_0}^{\infty}\frac{sinkx}{k}dk,$$

$$v = -\frac{P\alpha_{01}}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{coskx}{k} dk - \frac{P\alpha_{11}k_0}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{coskx}{k^2} dk, \tag{2.41}$$

где $k_0 = 1/l$, $\beta_2 = a_{01}k_0$.

Из первого уравнения (2.41) видно, что амплитуды перемещений будут меняться в зависимости от величины нагрузки движущегося источника P и его скорости D.

На рисунке 2.6 представлена зависимость нормированной амплитуды поперечного перемещения:

$$V_1 = -\frac{v\pi\lambda e^{\beta_2 y}}{P} = \alpha_{01} \int_{k_0}^{\infty} \frac{coskx}{k} dk + \alpha_{11}k_0 \int_{k_0}^{\infty} \frac{coskx}{k^2} dk, \tag{2.42}$$

от квадрата безразмерной скорости движущегося источника возмущений. Из графического изображения видно, что при приближении скорости движущегося источника к скорости сдвиговой волны, V_1 неограниченно возрастает.

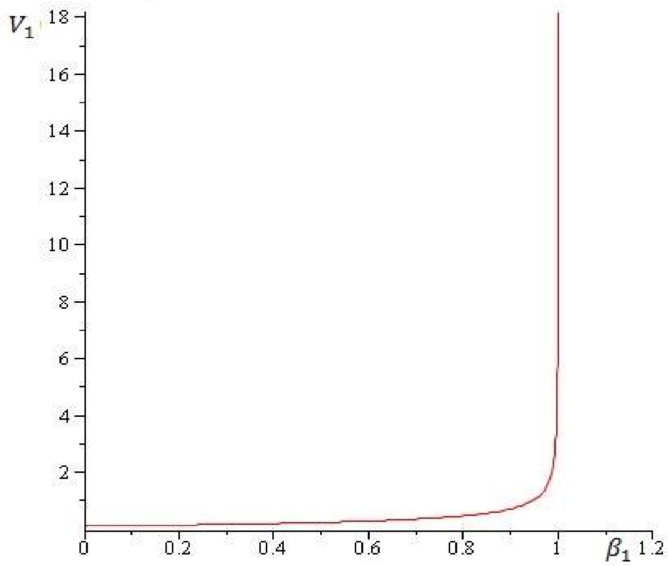


Рисунок 2.6: Зависимость амплитуды поперечного перемещения от скорости движущегося источника.

На рисунке 2.7 представлены зависимости продольного U и поперечного V перемещений от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $V_{y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что компоненты смещения экспоненциально убывают с глубиной, причем поперечная составляющая вектора перемещений всегда превосходит продольную, а вращение частиц при распространении поверхностной волны в направлении оси x происходит по эллиптической траектории.

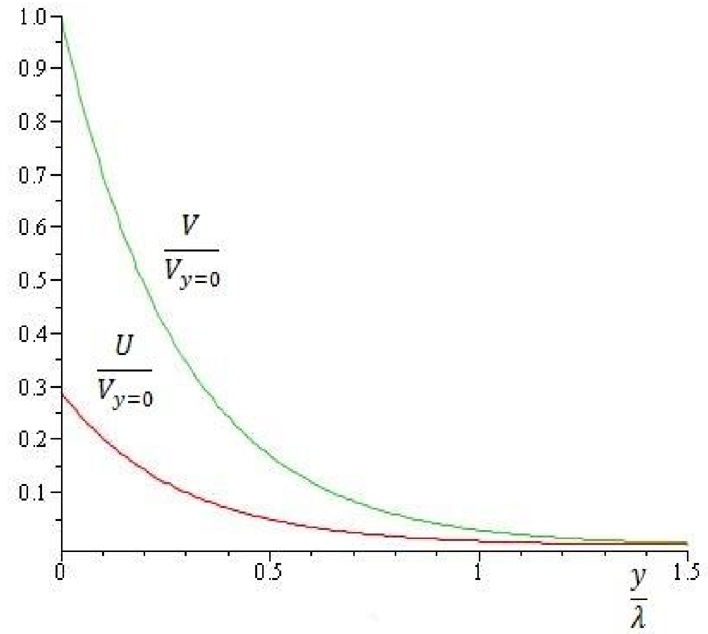


Рисунок 2.7: Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

В рассмотренной модели источник, движущийся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства, будет генерировать поверхностные упругие волны. Такие волны, в отличие от классических поверхностных волн Рэлея, обладают дисперсией. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника, а также его скорости, и неограниченно возрастают при приближении скорости источника к скорости сдвиговой волны.

2.3 Генерация возмущений сосредоточенным источником, движущимся с постоянной сверхзвуковой скоростью

Рассмотрим задачу генерации поверхностных волн источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства с постоянной скоростью D превышающей скорости продольной $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ и сдвиговой $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ волн.

Введем потенциалы (φ, ψ), удовлетворяющие соотношениям:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{\partial \psi}{\partial y'},$$
$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + \frac{\partial \psi}{\partial x'}, \tag{2.43}$$

и воспользуемся волновыми следующими уравнениями [93]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x'^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4}\right) - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0. \tag{2.44}$$

Введем подвижную систему координат (x,y), в которой покоится источник возмущений и которая связана с неподвижной системой координат преобразованием Галилея:

$$x = x' - Dt, \; y = y'. \tag{2.45}$$

Переходя к новым координатам с учетом волновых уравнений (2.44) и граничных условий (2.29) получим следующую систему уравнений:

$$\left(\lambda_1^2\frac{\partial^2}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y}\right)\varphi=0, \tag{2.46}$$

$$\left(\lambda_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+l^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\right)\psi=0, \tag{2.47}$$

$$\left((\eta_2^2-2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)_{\mathrm{y}=0}=-\frac{\mathrm{P}}{\mu}\delta(\mathrm{x}), \tag{2.48}$$

$$\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\eta_2^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{y}=0}=0, \tag{2.49}$$

$$\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)_{\mathrm{y}=0}=0, \tag{2.50}$$

где $\eta_\alpha=\frac{D}{c_\alpha}$, $\lambda_1^2=\sqrt{(\eta_\alpha^2-1)}$, $\alpha=1{,}2.$

Решением дифференциальных уравнений (2.44) будут интегралы:

$$\varphi(x,\mathrm{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-ia(x-\lambda_1 y)}da,$$

$$\psi(x,\mathrm{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{ia(x-\lambda_2 y)}}\mathrm{da}, \tag{2.51}$$

найденные путем применения интегрального преобразования Фурье. Легко проверить, что эти функции удовлетворяют условиям излучения на бесконечности.

Решая систему уравнений (2.46-2.50) с использованием соотношений (2.51), при этом учитывая, что функции $\delta(\mathrm{x})$ будет иметь вид:

$$F[\delta(\mathrm{x})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{x}) B\, \mathrm{e}^{-iax} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} -a(\eta_2^2 - 2)\mathrm{A} + 2a^2\lambda_2\mathrm{B} = -\frac{P}{\mu\sqrt{2\pi}}, \\ 2a^2\lambda_1\mathrm{A} - a^2(\eta_2^2 + 2)\mathrm{B} = 0. \end{gathered} \tag{2.52}$$

Определим значения A и B из системы уравнений (2.52):

$$\begin{gathered} \mathrm{A} = \frac{(\eta_2^2 - 2)\mathrm{P}}{\mu a^2\sqrt{2\pi}[(\eta_2^2 + 2)(\eta_2^2 - 2) + 4\lambda_1\lambda_2]}, \\ \mathrm{B} = \frac{2\lambda_1\mathrm{P}}{\mu a^2\sqrt{2\pi}[(\eta_2^2 + 2)(\eta_2^2 - 2) + 4\lambda_1\lambda_2]}, \end{gathered} \tag{2.53}$$

с учетом зависимостей

$$\gamma_1 = \eta_2^2 + 2, \gamma_2 = \eta_2^2 - 2, \Delta = \gamma_1\gamma_2 + 4\lambda_1\lambda_2,$$

выражения для A и B (2.53) примут следующий вид:

$$\mathrm{A} = \frac{\gamma_2 \mathrm{P}}{\mu a^2 \sqrt{2\pi}\Delta},$$

$$\mathrm{B} = \frac{2\lambda_1 \mathrm{P}}{\mu a^2 \sqrt{2\pi}\Delta}. \tag{2.54}$$

С учетом введенных скалярного и векторного потенциалов, выражения для перемещений запишутся в виде:

$$u = -\frac{i\mathrm{P}}{2\pi\mu\Delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma_2 \mathrm{e}^{i\lambda_1 a y} + 2\lambda_1\lambda_2 \mathrm{e}^{i\lambda_2 a y}\right) \frac{\mathrm{e}^{-iax}}{a} da,$$

$$v = \frac{i\mathrm{P}}{2\pi\mu\Delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma_2\lambda_1 \mathrm{e}^{i\lambda_1 a y} - 2\lambda_1 \mathrm{e}^{i\lambda_2 a y}\right) \frac{\mathrm{e}^{-iax}}{a} da. \tag{2.55}$$

Так как перемещения являются действительными функциями, то из (2.55) следует, что:

$$u = -\frac{\mathrm{P}}{2\pi\mu\Delta}\left[\gamma_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{sin a(x-\lambda_1 y)}{a} da - 2\lambda_1\lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{sin a(x-\lambda_2 y)}{a} da\right].$$

$$v = \frac{\mathrm{P}}{2\pi\mu\Delta}\left[\gamma_2\lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{sin a(x-\lambda_1 y)}{a} da - 2\lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{sin a(x-\lambda_2 y)}{a} da\right]. \tag{2.56}$$

Определим ступенчатую функцию равной нулю для отрицательных значений z и единице для положительных. Чтобы область определения функции содержала все точки действительной оси, в нуле функцию определим числом $\frac{1}{2}$. Рассматриваемая функция, как известно, носит название функции Хевисайда:

$$H(z) = \begin{Bmatrix} 0 \text{ при } z < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ при } z = 0 \\ 1 \text{ при } z > 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{sinaz}{a} da, \qquad (2.57)$$

Из (2.56) и (2.57) получаем выражение для перемещений:

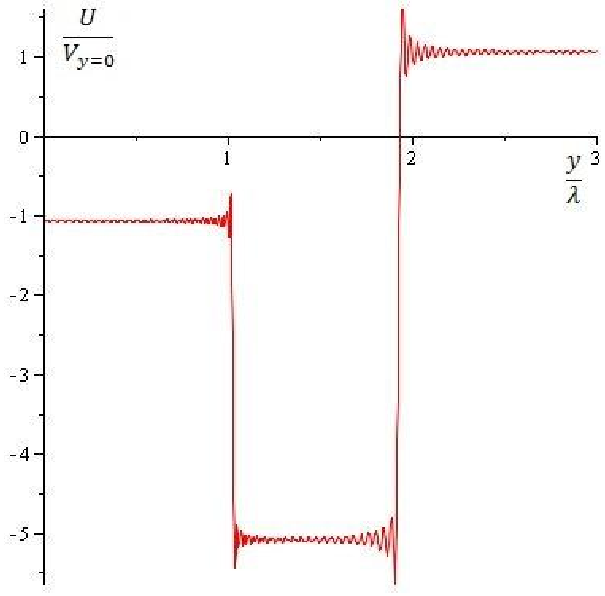
$$u = -\frac{\text{P}}{\mu\Delta}[\gamma H(x - \lambda_1 y) - 2\lambda_1\lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + const,$$

$$(2.58)$$

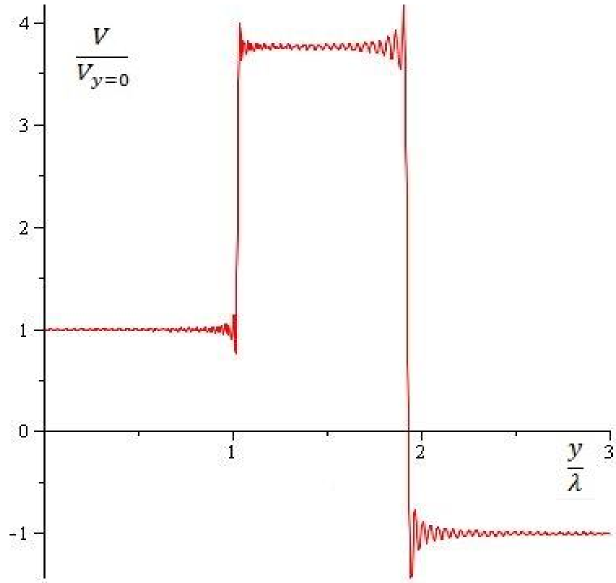
$$v = -\frac{\text{P}}{\mu\Delta}[\gamma\lambda_1 H(x - \lambda_1 y) + 2\lambda_1 H(x - \lambda_2 y)] + const',$$

где *const* – постоянная величина, не влияющая на распределение напряжений, $H(z)$ – функция Хевисайда.

На рисунке 2.8 представлены зависимости амплитуд смещения в рэлеевской волне от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $v_{y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что при убывании продольной компоненты, поперечная начинает возрастать. В процессе отдаления от поверхностного слоя, наблюдается увеличение амплитуды смещения частиц в волне и только на глубине $2\lambda - 3\lambda$ происходит затухание возмущений.



(а)



(б)

Рисунок 2.8: Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины: (а) – амплитуда поперечных перемещений, (б) – амплитуда продольных перемещений

Аналогичным путем определим компоненты напряжений:

$$\sigma_{xx} = -\frac{\mathrm{P}}{\Delta}\left[\gamma\left(2 + \frac{\lambda}{\mu}\eta_1^2\right)\delta(x - \lambda_1 y) - 4\lambda_1\lambda_2\delta(x - \lambda_2 y)\right],$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{\mathrm{P}}{\Delta}\left[\gamma\left(2\lambda_1^2 + \frac{\lambda}{\mu}\eta_1^2\right)\delta(x - \lambda_1 y) + 4\lambda_1\lambda_2\delta(x - \lambda_2 y)\right],$$

$$\sigma_{yx} = -\frac{2\mathrm{P}}{\Delta}\lambda_1\gamma[\delta(x - \lambda_1 y) - \delta(x - \lambda_2 y)],$$

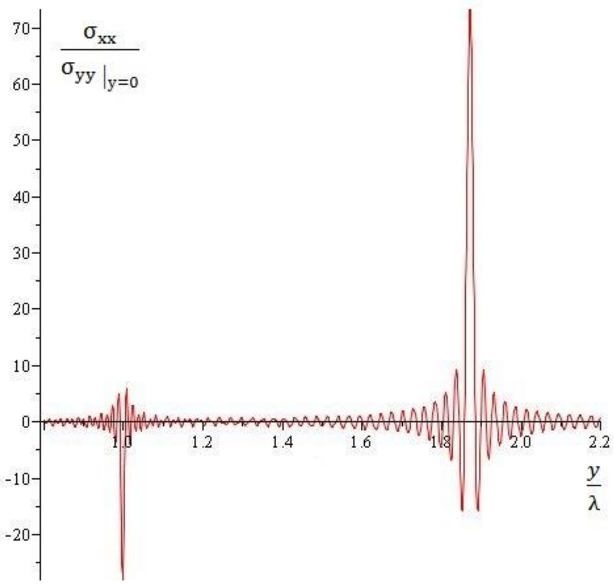
$$\sigma_{xy} = -\frac{2\mathrm{P}}{\Delta}\lambda_1\gamma[\delta(x - \lambda_1 y) + 2\delta(x - \lambda_2 y)],$$

$$\mu_x = -\frac{2aL^2\mathrm{P}}{\Delta}(\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2^2)\delta(x - \lambda_2 y),$$

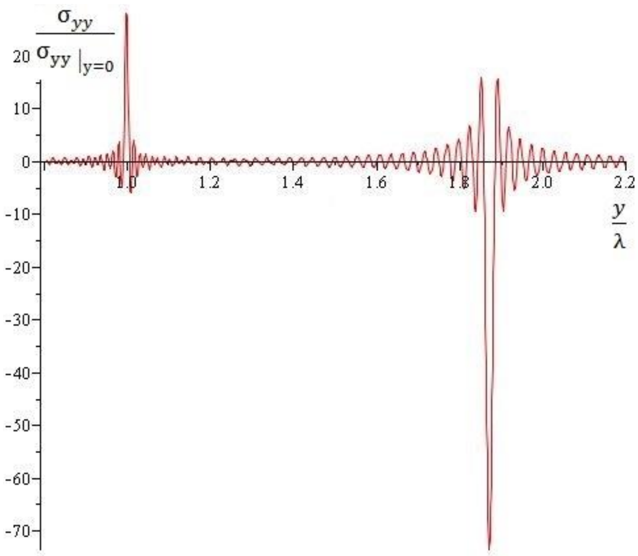
$$\mu_y = -\frac{2aL^2\mathrm{P}}{\Delta}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^3)\delta(x - \lambda_2 y),$$

где $\frac{dH(z)}{dz} = \delta(z)$, $\delta(z)$ - функция Дирака.

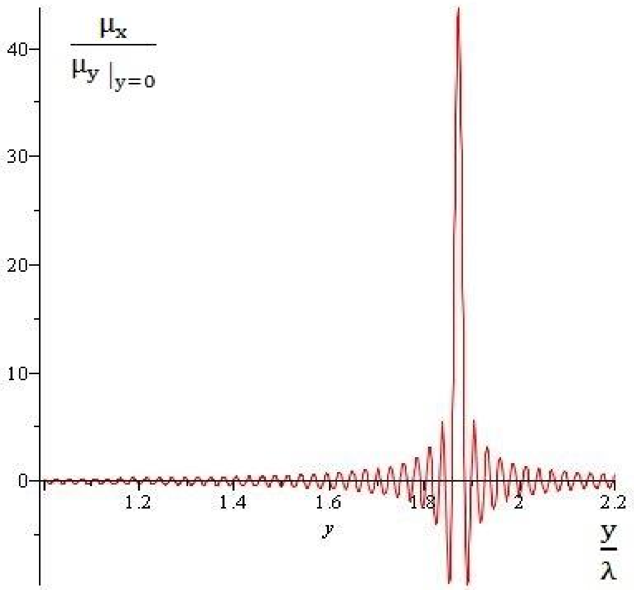
На рисунке 2.9 представлены зависимости амплитуд нормальных напряжений в рэлеевской волне от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды напряжений отнесены к амплитуде нормального $\sigma_{yy}|_{y=0}$ и моментного $\mu_y|_{y=0}$ напряжения на поверхности. Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что максимальные значения амплитуды напряжений принимают в области максимального смещения частиц. Полученные зависимости амплитуд перемещений и напряжений иллюстрируют, что локализация волны Рэлея в градиентно-упругом полупространстве при движении источника возмущений с постоянной сверхзвуковой скоростью происходит в поверхностном слое толщиной $2\lambda - 3\lambda$.



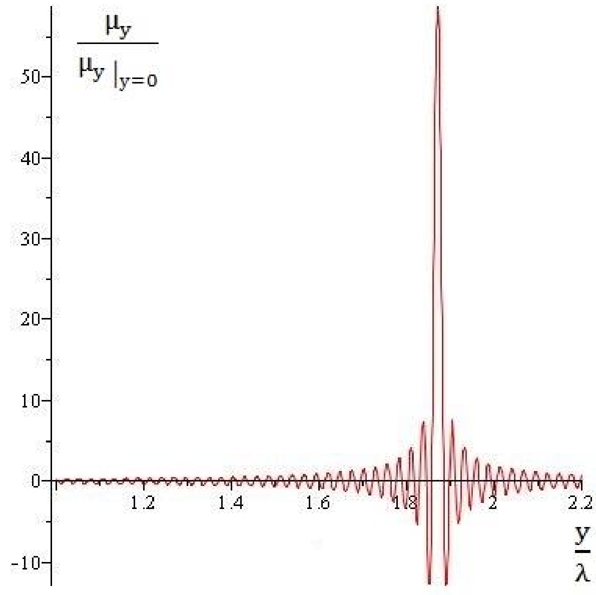
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 2.9: Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины: (а,б) – амплитуд нормальных напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, (в,г) – амплитуды моментных напряжений μ_x, μ_y

Из полученных выражений для определения компонент перемещений и напряжений видно, что возмущение, порожденное нормальной нагрузкой, характеризуется двумя волнами Маха:

$$x - \lambda_1 y = 0, \qquad x - \lambda_2 y = 0,$$

где $\lambda_\alpha^2 = \sqrt{(\eta_\alpha^2 - 1)},\ \eta_\alpha = \frac{D}{c_\alpha},\ \alpha = 1{,}2$

и углом Маха φ, между образующими одной из волн Маха и осью приложения нагрузки, определенного как

$$sin\,\varphi = \frac{c_\alpha}{D} = \frac{1}{\eta_\alpha}, \alpha = 1{,}2\,, \qquad \text{где } \eta_\alpha - \text{числа Маха}$$

Следовательно, при движении нормальной нагрузки на сверхзвуковых скоростях, вслед за источником возмущений образуется коническая поверхность (конус Маха – рисунок.2.10), ограничивающая область, в которой сосредоточены возмущения от невозмущенной области упругого полупространства. Поверхность конуса Маха является огибающей системы волн, порожденных нормальной нагрузкой. Причем, при увеличении скорости движения нормальной нагрузки угол Маха уменьшается (рисунок.2.11), а область сосредоточения возмущений сдвигается к линии приложения нагрузки.

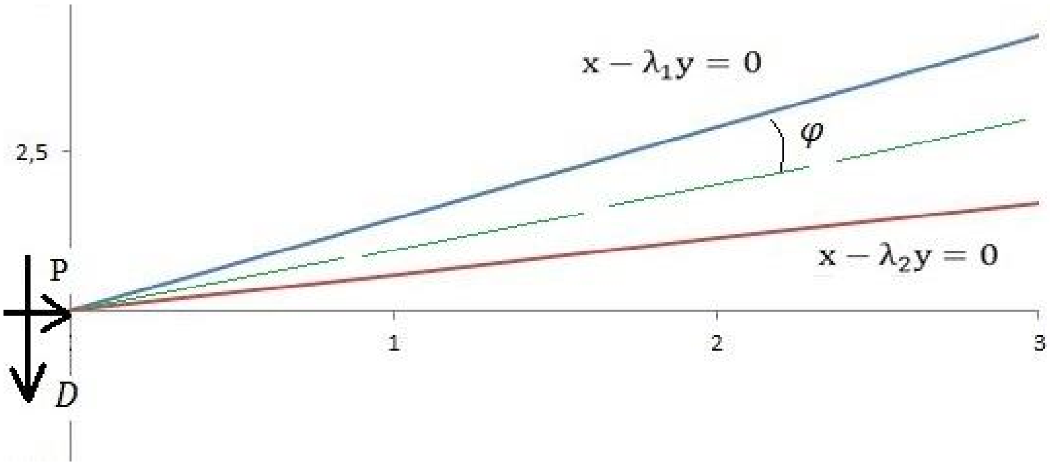


Рисунок 2.10: Конус Маха

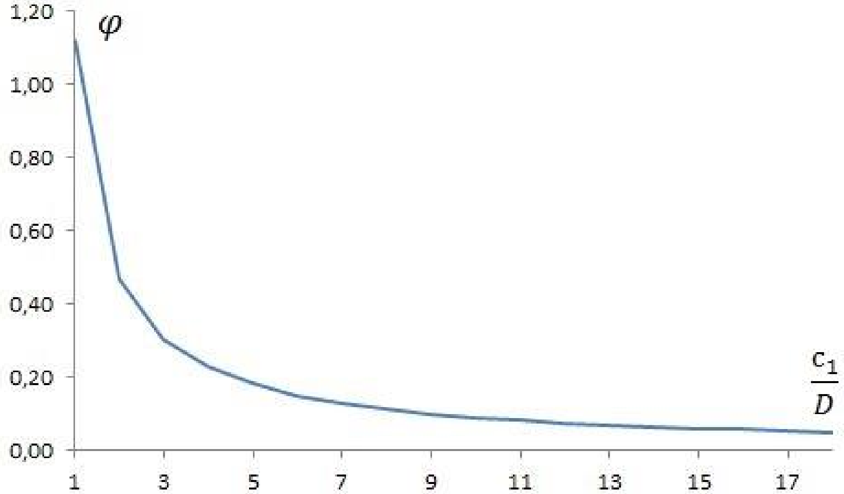


Рисунок 2.11: Зависимость угла Маха от скорости движения нормальной нагрузки

В рассмотренной модели движущийся вдоль границы градиентно-упругого полупространства источник с постоянной скоростью, большей по своей величине скорости сдвиговой упругой волны, будет генерировать поверхностные упругие волны. Причем поперечная составляющая вектора перемещения, превосходит продольную составляющую, только в околоповерхностном слое полупространства, что является отличительной особенностью распространения волн движущегося источника на больших скоростях. Такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией, поскольку ее фазовая скорость не является постоянной величиной, а зависит от частоты. Так же необходимо отметить, что при увеличении глубины (2λ-3λ) распространения волн, происходит затухание возмущений и волновой процесс стабилизируется.

При движении источника возмущений на сверхзвуковых скоростях образуется конус Маха, содержащий в себе область распространения упругих волн. Причем область сосредоточения возмущений напрямую зависит от скорости движения источника возмущений.

ГЛАВА 3. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ КОССЕРА И ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ИЗ ПОВРЕЖДЕННОГО МАТЕРИАЛА

В первой части главы рассматривается упрощенная (редуцированная) динамическая модель среды Коссера, занимающая промежуточное положение между классической динамической теорией упругости и собственно моделью среды Коссера, обладающей несимметричностью тензора напряжений и наличием моментных напряжений. В отличие от последней, в упрощенной модели три из шести констант упругости равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений.

В двумерной постановке для модели редуцированной среды решена задача о распространении упругой поверхностной волны вдоль границы полупространства. Решение уравнений описано в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, причем у векторного потенциала отлична от нуля только одна компонента. Показано, что такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией. В плоскости «фазовая скорость - частота» для таких волн имеется две дисперсионных ветки: нижняя («акустическая») и верхняя («оптическая»). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Фазовая скорость поверхностной волны во всем частотном диапазоне превосходит фазовую скорость объемной сдвиговой волны. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

Во второй части главы для изотропного упругого полупространства с поврежденностью его материала сформулирована самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале среды. Считаем, что повреждения равномерно распределены в материале среды. Исследуем распространение поверхностной волны вдоль свободной границы поврежденного полупространства. Волна распространяется в горизонтальном направлении и затухает в вертикальном направлении. Полагаем, что вдоль третьей оси все процессы однородны. Показано, что в этом случае самосогласованная система с граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства, сводится к комплексному дисперсионному уравнению. Отмечено, что в предельном случае, когда поврежденность в материале отсутствует, полученное дисперсионное уравнение сводится к классическому дисперсионному уравнению для волны Рэлея в полиномиальной форме, здесь поверхностная волна распространяется вдоль границы полупространства без дисперсии и затухания. Если поврежденность в среде присутствует, то поверхностная волна затухает в направлении распространения, а низкочастотные возмущения обладают частотно-зависимой диссипацией и дисперсией. Показано, что дисперсия имеет аномальный характер. Установлено, что с уменьшением значения коэффициента поврежденности, в области высоких частот, значение фазовой скорости растет, а групповой падает. На очень низких частотах обе скорости растут при снижении коэффициента поврежденности.

Глава написана на основании работ [77, 78, 80, 82, 84, 89, 130].

3.1 Волна Рэлея в полупространстве Коссера

Одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

Рассмотрим задачу о распространении упругой поверхностной волны в упрощенной (редуцированной) динамической модели среды Коссера, занимающей промежуточное положение между классической динамической теорией упругости и собственно моделью среды Коссера, обладающей несимметричностью тензора напряжений и наличием моментных напряжений. В отличие от последней, в упрощенной модели три из шести констант упругости равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений.

Управления динамики континуума Коссера имеют вид [104]:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}-(\lambda+2\mu)\mathrm{graddiv}\mathbf{u}+(\mu+\alpha)\mathrm{rotrot}\mathbf{u}-2\alpha\mathrm{rot}\boldsymbol{\theta}=0,$$

$$I\frac{\partial^2\boldsymbol{\theta}}{\partial t^2}-(\beta+2\gamma)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\theta}+(\gamma+\varepsilon)\mathrm{rotrot}\boldsymbol{\theta}-2\alpha\mathrm{rot}\mathbf{u}+4\alpha\boldsymbol{\theta}=0. \tag{3.1}$$

здесь $\mathbf{u}$ **-** вектор перемещения; $\boldsymbol{\theta}$ **-** вектор поворота; ρ - плотность среды, I – константа, характеризующая инерционные свойства макрообъема, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема; где λ, μ - постоянные Ламэ, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - новые упругие постоянные микрополярного материала, удовлетворяющие ограничениям [105]:

$$\alpha \geq 0, \gamma + \varepsilon \geq 0, 3\beta + 2\gamma \geq 0, -(\gamma + \varepsilon) \leq \gamma - \varepsilon \leq (\gamma + \varepsilon). \quad (3.2)$$

В работе [106] найдена следующая зависимость между этими упругими постоянными:

$$\mu(2\gamma + \beta) = (\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon). \quad (3.3)$$

Наряду с общим случаем, рассматривается и упрощенный вариант микрополярной среды (псевдоконтинуум Коссера), в котором предполагается совпадающая с соотношениями классической теории упругости жесткая зависимость вектора поворота от ротора перемещения ($\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} rot\, \partial^2 \mathbf{u}$ — стесненное вращение), но при этом сохраняются моментные напряжения и несимметричность тензора напряжений. В такой среде симметричная часть тензора напряжений зависит от симметричного тензора деформаций так же, как в классической теории упругости.

Уравнения динамики псевдоконтинуума Коссера имеют вид [104]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu) \mathrm{grad\,div}\, \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \mathrm{rot\,rot}\, \Delta \mathbf{u} + \frac{I}{4} \mathrm{rot\,rot}\, \ddot{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.4)$$

Кроме указанного частного случая, известен и другой частный случай модели среды Коссера – модель редуцированной среды Коссера, для которой три из шести констант упругости, а именно $\beta, \gamma, \varepsilon$, равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений. Впервые эта модель была предложена в [63] для описания сыпучих материалов.

Для описания редуцированной среды Коссера используется следующая система уравнений динамики [63]

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}-(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+(\mu+\alpha)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}-2\alpha\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\theta}=0,$$
$$I\frac{\partial^2\boldsymbol{\theta}}{\partial t^2}-2\alpha\mathrm{rot}\,\mathbf{u}+4\alpha\boldsymbol{\theta}=0, \tag{3.5}$$

которая сводится к одному векторному уравнению в перемещениях

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\ \mathbf{u})-\mu\nabla*(\nabla*\mathbf{u})-J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla*(\nabla*\mathbf{u})=\ \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{3.6}$$

Введем скалярный φ и векторный ψ потенциалы так, что вектор перемещений $\mathbf{u}$ запишется в виде:

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi+\nabla*\boldsymbol{\psi}. \tag{3.7}$$

В случае рассмотрения плоской задачи у векторного потенциала будет отличной от нуля только одна компонента. Эту компоненту обозначим через ψ.

Подставим вектор перемещений (3.7) в (3.6), получим:

$$\nabla\left[(\lambda+2\mu)\Delta\,\varphi\ -\rho\frac{\partial^2\,\varphi}{\partial t^2}\right]+\nabla*\left[\mu\Delta\psi+J\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]=0. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) удовлетворяется, если каждое слагаемое из выражений в квадратных скобках равно нулю:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\psi + G\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \qquad (3.9)$$

здесь введены следующие обозначения: $c_1^2 = \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$, где c_1 - скорость продольной волны, а c_2 - скорость волны сдвига в классической среде, $G = J/\mu$.

Решение уравнений будем искать в виде гармонических волн, распространяющихся в направлении оси x и имеющих неоднородную структуру по z:

$$\varphi = \Phi(z)e^{-i(\omega t - \kappa x)},$$

$$\psi = \Psi(z)e^{-i(\omega t - \kappa x)}, \qquad (3.10)$$

Подставляя выражения (3.10) в уравнения (3.9), получим из последних обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \nu_1^2\Phi = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \nu_2^2\Psi = 0, \qquad (3.11)$$

где

$$\nu_1 = \left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\nu_2 = \left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2(1 - G\omega^2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из решений уравнений (3.11) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной:

$$\Phi = \mathrm{A}e^{-\nu_1 z},$$

$$\Psi = \mathrm{B}e^{-\nu_2 z}. \tag{3.12}$$

Принятый здесь постулат об угасании волн с глубиной влечет за собой утверждение, что величины ν_α $(\alpha = 1{,}2)$ должны быть величинами действительными и положительными, т.е. $\nu_\alpha > 0$.

Тогда окончательное решение уравнений (3.9) будет иметь следующий вид:

$$\varphi = Ae^{-\nu_1 z - i(\omega t - \text{к}x)},$$

$$\psi = Be^{-\nu_2 z - i(\omega t - \text{к}x)}. \tag{3.13}$$

В предположении, что граница z=0 свободна от напряжений, граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_{zz}\,|_{z=0} = 0,\ \sigma_{zx}\,|_{z=0} = 0\,, \sigma_{zy}\,|_{z=0} = 0. \tag{3.14}$$

Поскольку через перемещения эти компоненты напряжений выражаются следующим образом:

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + J\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 t} - \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial^2 t}\right),$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{3.15}$$

а связь перемещений и потенциалов (см. (3.7)) задается выражениями:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z},$$
$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3.16}$$

напряжения через потенциалы запишутся в следующем виде:

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\right),$$
$$\sigma_{zx} = \mu\left(2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) - J\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2}\right). \tag{3.17}$$

Подставляя в (3.17) выражения (3.13) с учетом граничных условий (3.14), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$[\lambda(\nu_1^2 - k^2) + 2\mu\nu_1^2]A - 2\mu i k \nu_2 B = 0,$$
$$2\mu i k \nu_1 \mathrm{A} + (\mu k^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + J\omega^2 k^2)\mathrm{B} = 0. \tag{3.18}$$

Из условия совместности этой системы получим соотношение

$$[\lambda(\nu_1^2 - k^2) + 2\mu\nu_1^2][\mu(k^2 + \nu_2^2) + J\omega^2(k^2 - \nu_2^2)] - 4\mu\nu_1\nu_2 k^2 = 0, \tag{3.19}$$

которое при введении обозначений:

$$\xi = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1, \;\; \eta = \frac{c^2}{c_2^2},$$

и учета зависимостей:

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \;\; \frac{\lambda}{\mu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2, \;\; \nu_1^2 = к^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}, \qquad {\nu_2}^2 = к^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2(1 - G\omega^2)},$$

преобразуется к следующему виду:

$$\eta\left[\eta^3 - 8\eta^2 + \left(24 - 16\frac{\xi}{1-\frac{J}{\mu}\omega^2}\right)\eta - 16\left(2 - \frac{1}{1-\frac{J}{\mu}\omega^2} - \xi\right)\right] = 0. \qquad (3.20)$$

Уравнение (3.20) представляет собой дисперсионное уравнение для вычисления фазовой скорости (c) поверхностной волны Рэлея.

На рисунке 3.1 представлены зависимости квадрата фазовой скорости поверхностной волны $\eta = c_R^2$ от частоты ω. Кривые даны в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны c_R^2 отнесен к квадрату скорости сдвиговой c_2^2.

Из графика видно, что здесь, в отличие от классического случая [3], поверхностная волна Рэлея обладает дисперсией. В плоскости «фазовая скорость – частота» имеется две дисперсионных ветки: нижняя («акустическая») и верхняя («оптическая»). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает и на бесконечности квадрат скорости поверхностной волны $\eta \to 0{,}7$. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Для частот $\omega > 9$ этот рост становится неограниченным. Следовательно, верхняя дисперсионная ветка описывает волновые процессы в интервале частот $0 < \omega < 9$, далее процесс перестает быть волновым.

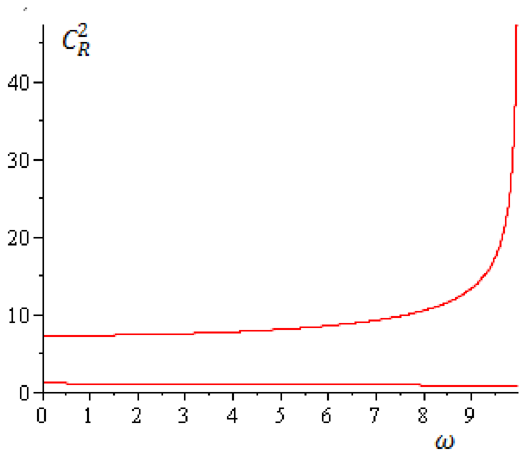


Рисунок 3.1: Зависимость квадрата фазовой скорости поверхностной волны от частоты

Плоская сдвиговая волна описывается вторым из уравнений (3.9):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + G\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Решение данного уравнения искать в виде:

$$\psi = Be^{i(\omega t - kx)},$$

что приведет к дисперсионному уравнению

$$-k^2 + Gk^2\omega^2 + \frac{1}{c_2^2}\omega^2 = 0. \tag{3.21}$$

Из (3.21) определим связь между частотой и волновым числом сдвиговой волны:

$$\omega^2 = \frac{k^2c_2^2}{1 + \frac{Gk^2}{c_2^2}},$$

и квадрат фазовой скорости этой волны:

$$v_{\text{ф}\tau}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c_2^2}{1 + \frac{Gk^2}{c_2^2}},$$

На рисунке 3.2 представлены две зависимости: квадрат скорости поверхностной волны c_R^2 (красная линия) и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны $v_{\text{ф}}^2$ (синяя линия). Кривые даны в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны классической среды c_2^2, и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны $v_{\text{ф}\tau}^2$ также отнесен к c_2^2.

Из графика видно, что фазовая скорость поверхностной волны во всем частотном диапазоне превосходит фазовую скорость сдвиговой волны, которая берет начало в единице и монотонно убывает к нулю, когда $c_R^2 \to 0{,}7$, при $\omega \to \infty$.

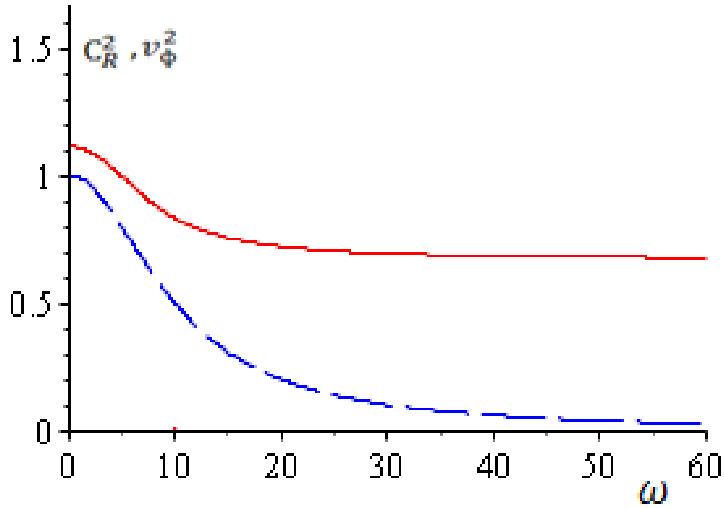


Рисунок 3.2: Зависимость квадрата скорости поверхностной волны C_R^2 (красная сплошная линия) и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны $v_{\text{ф}}^2$ (синяя прерывная линия)

Используя выражения (3.13) и (3.16) вычислим компоненты перемещений:

$$u = (ikA\mathrm{e}^{-\nu_1 z} + \nu_2 B\mathrm{e}^{-\nu_2 z})\mathrm{e}^{\mathrm{i(kx-\omega t)}},$$

$$w = (-A\nu_1 \mathrm{e}^{-\nu_1 z} + Bik\mathrm{e}^{-\nu_2 z})\mathrm{e}^{\mathrm{i(kx-\omega t)}}. \tag{3.22}$$

Постоянную A можно выразить через B, используя второе из уравнений (3.18):

$$\mathrm{B} = -\frac{2i\nu_1 k\mu}{\mu\text{к}^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2}\mathrm{A},$$

с учетом этого компоненты u и w примут следующий вид:

$$u = \left(ikA\mathrm{e}^{-\nu_1 z} - \frac{2i\nu_1 k\mu}{\mu\text{к}^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2}A\nu_2\mathrm{e}^{-\nu_2 z}\right)e^{i(kx-\omega t)},$$

$$w = \left(-A\nu_1\mathrm{e}^{-\nu_1 z} + \frac{2\nu_1\text{к}^2\mu}{\mu\text{к}^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2}A\mathrm{e}^{-\nu_2 z}\right)e^{i(kx-\omega t)}. \tag{3.22}$$

взяв действительную часть от уравнений (3.22), получим окончательные формулы для перемещений:

$$u = -Ak\left(\mathrm{e}^{-\nu_1 z} - \frac{2\nu_1\nu_2\mu}{\mu\text{к}^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\nu_2 z}\right)sin(kx-\omega t),$$

$$w = -A\nu_1\left(\mathrm{e}^{-\nu_1 z} - \frac{2\text{к}^2\mu}{\mu\text{к}^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\nu_2 z}\right)cos(kx-\omega t). \tag{3.23}$$

На рисунке 3.3 приведены зависимости амплитуд смещений u и w рэлеевской волны от глубины в среде Коссера и классическом континууме. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $w_{|z=0}$. Глубина отложена в долях длины волны.

Расчеты по формулам (3.23) показывают, что амплитуда перемещения, нормального к поверхности, увеличилась по сравнению с классическим случаем примерно на 25%. Амплитуда перемещения, параллельного поверхности, также увеличилась на 90% и сменила знак на глубине z=0,18λ. Из графика видно, что смещение параллельное поверхности может превосходить поперечную компоненту в тонком околоповерхностном слое. Траекториями движения частиц при прохождении поверхностной волны, как и в классическом случае, являются эллипсы.

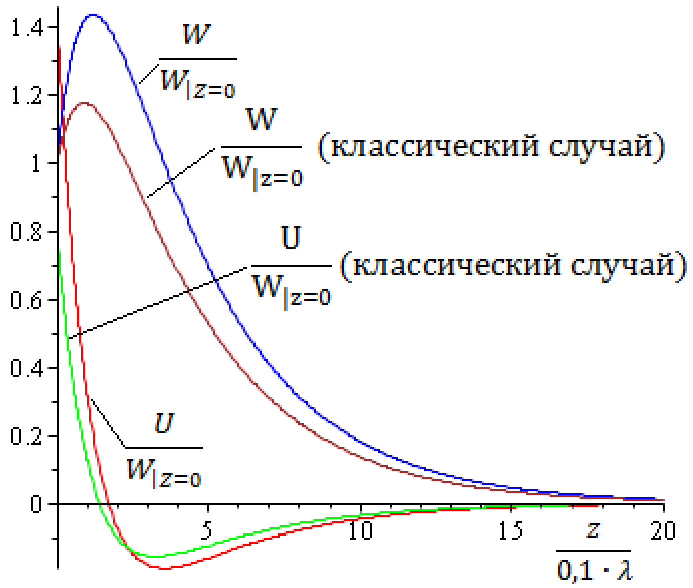


Рисунок 3.3: Зависимости амплитуд смещений u и w рэлеевской волне от глубины:

Перемещения (3.23) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{xx} = A\left[(\lambda({\nu_1}^2 - k^2) + 2\mu{\nu_1}^2)e^{-\nu_1 y} + \frac{4\nu_1\nu_2 k^2\mu^2}{\mu\kappa^2+\mu\nu_2^2-J\nu_2^2\omega^2+Jk^2\omega^2}e^{-\nu_2 y}\right]cos(kx-\omega t),$$

$$\sigma_{xz} = 2A\mu\nu_1 k[e^{-\nu_1 y} - e^{-\nu_2 y}]\, sin(kx - \omega t),$$

$$\sigma_{zz} = A\left[(\lambda({\nu_1}^2 - k^2) + 2\mu{\nu_1}^2)e^{-\nu_1 y} - \frac{4\nu_1\nu_2 k^2\mu^2}{\mu к^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2} e^{-\nu_2 y}\right] cos(kx - \omega t),$$

$$\sigma_{zx} = 2A\mu\nu_1 k\left[e^{-\nu_1 y} - \frac{\mu к^2 + \mu\nu_2^2 + J\nu_2^2\omega^2 - Jk^2\omega^2}{\mu к^2 + \mu\nu_2^2 - J\nu_2^2\omega^2 + Jk^2\omega^2} e^{-\nu_2 y}\right] sin(kx - \omega t).$$

На рисунке 3.4 представлены зависимости амплитуд напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}$ в рэлеевской волне от глубины полупространства. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды напряжений отнесены к амплитуде нормального напряжения на поверхности $\sigma_{xx|z=0}$. Из графиков видно также, что σ_{xx} меняет знак, тогда как $\sigma_{xz}, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}$ достигают максимума приблизительно при z=1,5 и затем экспоненциально убывает с глубиной. Также видно, что тензор напряжений в данном случае является несимметричным: напряжение σ_{xz} достигает большего значения, чем σ_{zx}. Нормальные напряжения в рассматриваемом случае уменьшаются с глубиной полупространства аналогично тому, как это происходит с нормальными напряжениями для классической волны Рэлея.

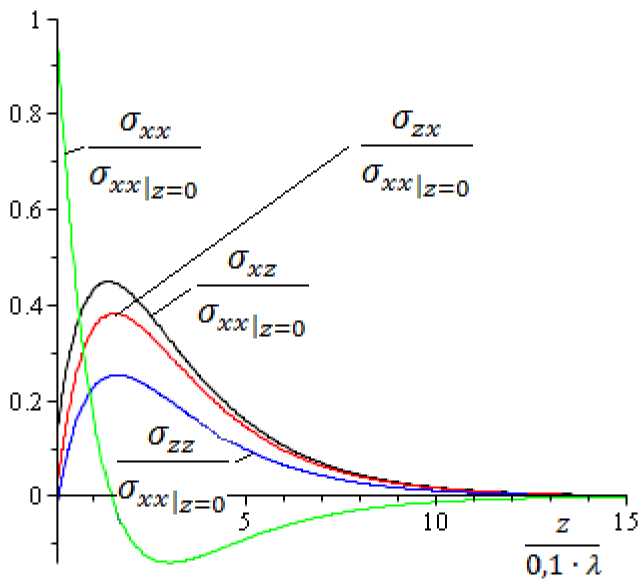


Рисунок 3.4: Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины

3.2 Волна Рэлея в полупространстве из поврежденного материала

В настоящее время интенсивно развивается механика поврежденных сред, изучающая как напряженно-деформированное состояние сред, так и накопление повреждений в их материалах.

Под поврежденностью обычно понимается сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины – в упругости, дислокации – в пластичности, микропоры – при ползучести, поверхностные микротрещины – при усталости) [107–109].

Не измеряемая непосредственно (как, например, скорость, сила или температура), поврежденность, т.е. деградация механических свойств тела, может быть обнаружена в результате анализа реакции тела на различные внешние воздействия. Согласно экспериментальной практике, наличие поля повреждений в материалах может быть косвенно обнаружено и отчасти количественно представлено, через уменьшение скорости прохождения ультразвукового сигнала [110–112], уменьшение модуля Юнга («дефект модуля») [113], уменьшение плотности («разрыхление») [114], изменение твердости [115], падение амплитуды напряжений при циклическом испытании [116, 117], ускорение ползучести в третьей стадии [118].

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ Л.М. Качанова, обобщенных в монографии [119], и Ю.Н. Работнова, обобщенных в монографии [120].

В традиционных расчетах за меру повреждаемости в процессе развития деформации принимается скалярный параметр повреждаемости $\psi(x,t)$, характеризующий относительную плотность равномерно рассеянных в единице объема микродефектов. Этот параметр равен нулю, когда повреждений нет, и близок к единице в момент разрушения.

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики рассматривают отдельно от задач накопления повреждений. При разработке таких методов принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности. Фазовая скорость волны и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты и линейными функциями поврежденности [34]. При несомненных достоинствах (простота) такой подход обладает целым рядом недостатков, как и любой подход, не опирающийся на математические модели процессов и систем.

Рассмотрим самосогласованную задачу с поврежденностью материала, включающую в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале среды. Считаем, что повреждения равномерно распределены в материале среды. Исследуем распространение поверхностной волны вдоль свободной границы поврежденного полупространства. Полагаем, что вдоль третьей оси все процессы однородны.

Авторы работ [121–123] считают задачу самосогласованной, включающей в себя, кроме уравнения развития поврежденности, динамическое уравнение теории упругости:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(K+\frac{1}{3}G\right)\text{grad div}\,\mathbf{u} + G\Delta\mathbf{u} - \beta_1\text{grad}\,\psi = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}} + \alpha\psi - \beta_2\text{div}\,\mathbf{u} = 0. \tag{3.24}$$

здесь $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, K – модуль всестороннего сжатия, G – модуль сдвига, ρ – плотность материала, t– время, $\alpha = \frac{1}{\tau_*}$, β_1, β_2– постоянные параметры, характеризующие поврежденность материала и связь циклических процессов с процессами накопления повреждений ($\alpha > 0$); τ_* – время релаксации.

При рассмотрении задачи о распространении поверхностной волны Рэлея в изотропном упругом полупространстве при наличии поврежденности его материала ограничимся двумерным случаем, когда все процессы однородны по оси x_2. Система уравнений (3.24) при этом становится двумерной и приобретает следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = -\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \qquad (3.25)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} = -\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \qquad (3.26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha\psi = \beta_2(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right), \qquad (3.27)$$

где $u_1(x_1, x_3, t)$, $u_3(x_1, x_3, t)$ – компоненты вектора смещений вдоль осей x_1 и x_3 соответственно; λ, μ – константы Ламе.

Систему уравнений (3.25–3.26) необходимо дополнить граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства:

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_3} = 0, \qquad (3.28)$$

$$\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left(1 - 2\frac{c_\tau^2}{c_l^2}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_3} = 0, \qquad (3.29)$$

где $c_l = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ и $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорости распространения волн дилатации и сдвига в безграничной среде.

Исключая функцию поврежденности из системы уравнений (3.25–3.26), получим два уравнения относительно продольных и поперечных смещений:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_l^2\left(1 - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - c_\tau^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \left(c_m^2 - c_l^2\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \frac{c_l^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2\partial t} - \frac{c_\tau^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3^2\partial t} - \frac{c_m^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1\partial x_3\partial t} = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - c_l^2\left(1 - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - c_\tau^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \left(c_m^2 - c_l^2\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3} - \frac{c_l^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2\partial t} - \frac{c_\tau^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2\partial t} - \frac{c_m^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\partial x_3\partial t} = 0, \tag{3.31}$$

где $\mathrm{c_m} = \sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\rho}}$, $(\mathrm{c_\tau} < \mathrm{c_m} < \mathrm{c_l})$, заметим, что $\mathrm{c_m^2} = \mathrm{c_l^2} - \mathrm{c_\tau^2}$.

Рассмотрим возмущение, которое распространяется вдоль границы $x_3 = 0$ и затухает в направлении оси x_3. Компоненты вектора перемещений будут иметь вид:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\theta}{\partial x_3},$$
$$u_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \tag{3.32}$$

где φ – скалярный потенциал$(\mathrm{ror\,grad}\,\varphi = 0)$, θ – ненулевая компонента векторного потенциала $\theta = \{0, \theta, 0\}$ $(\mathrm{div\,rot}\,\theta = 0)$. Выражения для потенциалов следующие:

$$\varphi = A_1 e^{-q_1 x_3 + i(kx_1 - \omega t)},$$
$$\theta = A_2 e^{-q_2 x_3 + i(kx_1 - \omega t)}, \tag{3.33}$$

где ω – частота, k – волновое число, q_1, q_2 – положительные коэффициенты, характеризующие убывание возмущений вглубь полупространства, A_1, A_1 – произвольные постоянные.

Из системы (3.28-3.31) с учетом (3.32-3.33) находим дисперсионное уравнение

$$-c_l^2(k^2 - q_1^2)(k^2 + q_2^2) + 2c_\tau^2 k^2(k^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2) = 0, \qquad (3.33)$$

в котором коэффициенты q_1, q_2 определяются соотношениями

$$q_1^2 = k^2 - \frac{(i\omega - \alpha)\omega^2}{(i\omega - \alpha + \beta_1\,\beta_2)c_l^2},$$
$$(3.34)$$
$$q_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\tau^2}.$$

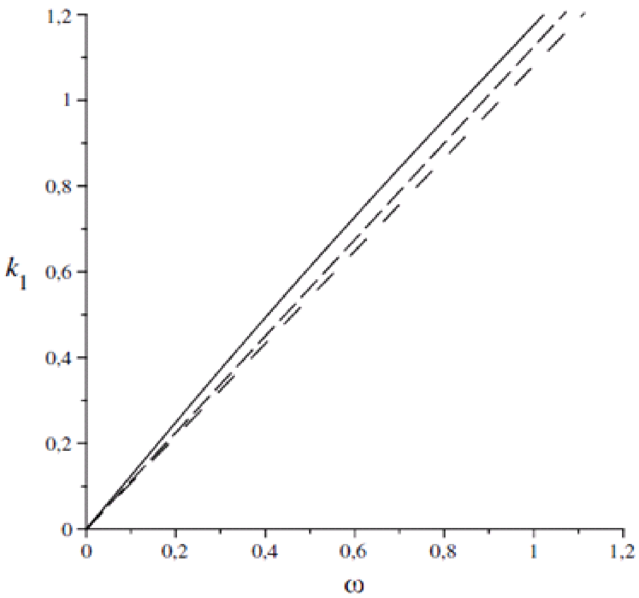
Из соотношений (3.33), (3.34) следует, что волновое число k является комплексным $k = k_1 + ik_2$. Подставляя это выражение в комплексное дисперсионное уравнение и выделяя действительную и мнимую части, получаем систему двух нелинейных алгебраических уравнений.

В предельном случае, когда поврежденность в материале отсутствует, система алгебраических уравнений сводится к дисперсионному уравнению для волны Рэлея [3, 104] и зависимость волнового числа от частоты определяется выражением

$$\omega^6 - 8k_1^2\omega^4 + 8k_1^4(3 - 2a_1^2)\omega^2 - 16k_1^6(1 - a_1^2) = 0, \qquad (3.35)$$

где $a_1 = \frac{c_\tau}{c_l}$. Дисперсионное уравнение (3.35) записано в безразмерных переменных $\bar{\omega}$, $\bar{k}$ $\left(\omega = \alpha\bar{\omega}, k = \frac{\alpha}{c_\tau}\bar{k}\right)$, черта в записи опущена. Безразмерная скорость распространения волны Рэлея определяется как $c_R = \frac{\omega}{k_1}$. Известно, что классическая волна Рэлея распространяется вдоль свободной границы полупространства без затухания и не обладает дисперсией, её скорость является постоянной величиной для каждого материала [3].

Из (3.33) и (3.34) видно, что при наличии поврежденности в материале волна Рэлея затухает в процессе распространения. Зависимости действительной и мнимой частей волнового числа от частоты при изменении параметра поврежденности и фиксированном параметре a_1 представлены на рисунках 3.5, 3.6. Параметр a_1 выражается через коэффициент Пуассона (ν): $a_1 = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}$ и его значение изменяется в пределах $0 \le a_1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Безразмерный параметр $a_2 = \frac{\beta_1\,\beta_2}{\alpha}$ характеризует поврежденность материала, знак этого параметра зависит от знаков исходных параметров β_1, β_2, чаще $a_2 < 0$. Принципиально различный вид имеют дисперсионные кривые при положительных и отрицательных значениях этого параметра.



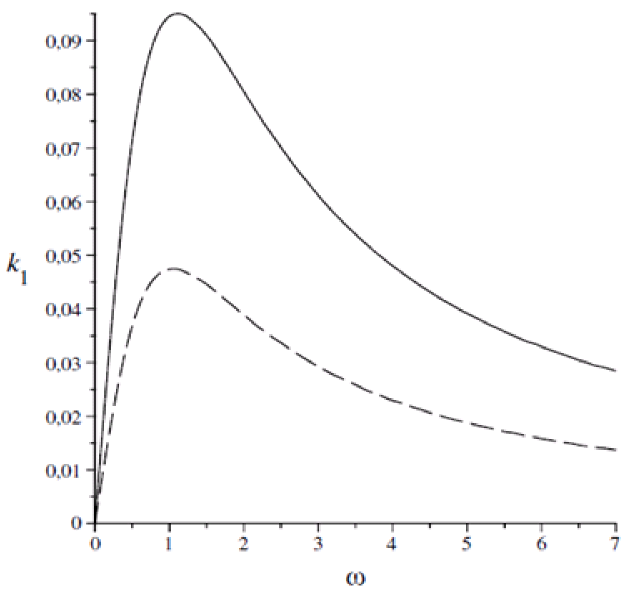


Рисунок 3.5: Зависимости действительной части волнового числа от частоты $k_1(\omega)$ при различных значениях параметра a_2: $a_2^{(1)} = -1$ (сплошная), $a_2^{(2)}$ (штриховая), $a_2^{(3)} = 0$ (штриховая с пробелами), $a_2^{(1)} < a_2^{(2)} < a_2^{(3)}$.

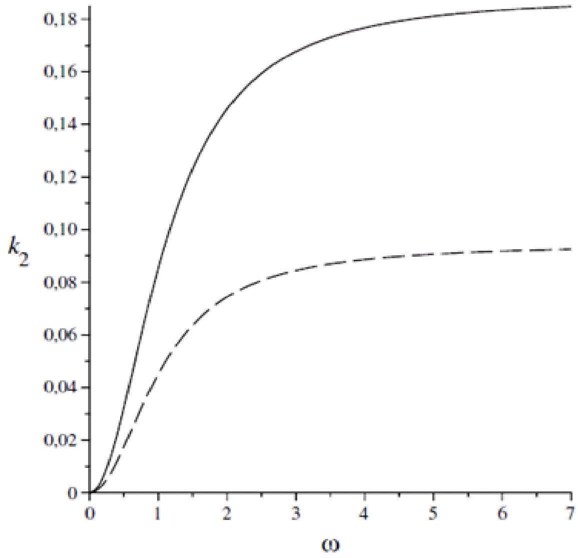


Рисунок 3.6. Зависимости мнимой части волнового числа от частоты $k_2(\omega)$ при различных значениях параметра a_2: $a_2^{(1)} = -1$ (сплошная), $a_2^{(2)}$ (штриховая), $a_2^{(1)} < a_2^{(2)} < 0$

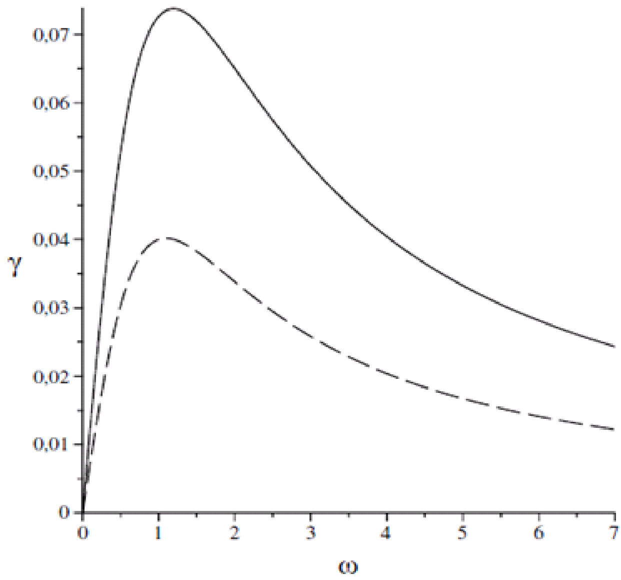


Рисунок 3.7 Зависимости коэффициента затухания $\gamma(\omega)$ при различных значениях параметра a_2: $a_2^{(1)} = -1$ (сплошная), $a_2^{(2)}$ (штриховая), $a_2^{(1)} < a_2^{(2)} < 0$

При $a_2 \neq 0$ дисперсионные кривые действительной и мнимой частей от частоты имеют по две ветви, причем положительным значениям k_1 соответствуют положительные значения k_2, а отрицательным значениям k_1 – отрицательные значения k_2. Поэтому достаточно рассмотреть эти зависимости в первой четверти. На рисунке 3.5 изображены зависимости $k_1(\omega)$ при различных значениях параметра a_2, здесь же изображены две зависимости $f_i = k_1\left(\omega,\ a_2 = a_2^{(i)}\right) - k_1(\omega,\ a_2 = 0), (i = 1{,}2)$, которые наглядно показывают существующие отклонения рассматриваемой кривой от дисперсионной прямой, соответствующей классической волне Рэлея. Из рисунков 3.6, 3.7 видно, что зависимость $k_2(\omega)$, имеет горизонтальную асимптоту при $\omega \to +\infty$, а коэффициент затухания $\gamma = \frac{k_2}{k_1}$ стремится к нулю при больших значениях ω. При $a_2 = 0$ графиком зависимости действительной части волнового числа от частоты является прямая, мнимая часть при этом отсутствует.

Зависимости фазовой $v_{ph} = \frac{\omega}{k_1}$ и групповой $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_1}$ скоростей от частоты изображены на рисунке 3.8. Видно, что при фиксированном не нулевом значении параметра a_2 кривая групповой скорости расположена выше кривой фазовой скорости; на низких частотах очевидна дисперсия. При уменьшении по абсолютной величине значения коэффициента поврежденности амплитуды обеих кривых уменьшаются, при этом значение фазовой скорости во всем частотном диапазоне увеличивается, а значение групповой скорости увеличивается на более низких частотах и уменьшается на более высоких частотах; максимум функции групповой скорости падает и сдвигается в сторону низких частот. При $a_2 = 0$ кривые фазовой и групповой скоростей совпадают $v_{ph} = v_{gr} = const$, где константа определяется уравнением (3.35) и зависит только от коэффициента Пуассона.

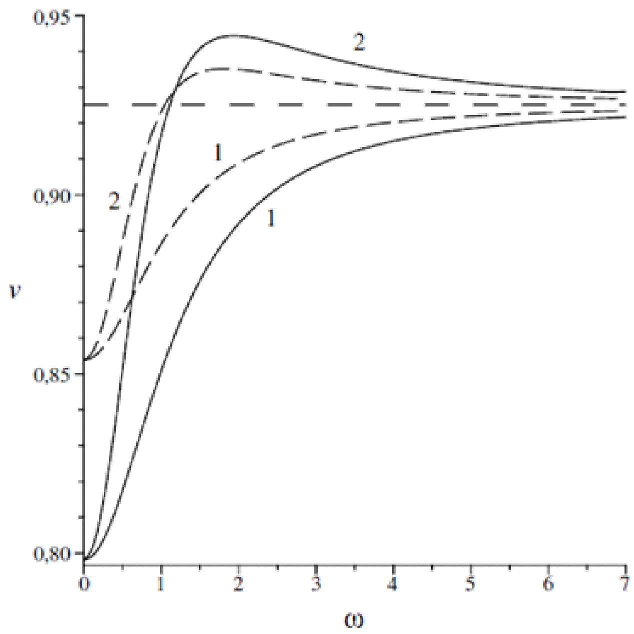


Рисунок 3.8: Зависимости фазовой $v_{ph}(\omega)$ (1) и групповой $v_{gr}(\omega)$ (2) скоростей при различных значениях параметра a_2: $a_2^{(1)} = -1$ (сплошная), $a_2^{(2)}$ (штриховая), $a_2^{(3)} = 0$ (штриховая с пробелами), $a_2^{(1)} < a_2^{(2)} < a_2^{(3)}$.

При наличии поврежденности в среде поверхностные волны затухают в процессе распространения вдоль границы полупространства и обладают дисперсией. Наличие поврежденности способствует появлению незначительной дисперсии в низкочастотном диапазоне. Чем меньше величина коэффициента поврежденности, тем меньше её проявление. Дисперсия носит аномальный характер. В отсутствие поврежденности в среде поверхностная волна распространяется без дисперсии и затухания.

Заметим, что для ряда задач необходимо учитывать, что элементы конструкций работают в условиях взаимодействия с внешним магнитным полем, которое оказывает влияние на процесс формирования и распространения упругих волн [124−127].

В [128] рассматривалось распространение продольных волн в однородном стержне, находящемся во внешнем магнитном поле при наличии поврежденности в материале стержня.

3.3 О соотношении скоростей сдвиговых волн и поверхностных волн Рэлея для материалов, описываемых уравнениями механики обобщенных континуумов

В разработанных и введенных в практику неразрушающего контроля материалов изделий машиностроения методиках, использующих поверхностные волны Рэлея, заложены их фундаментальные свойства: *а)* независимость их скорости C_R от частоты излучаемого сигнала (т.е. отсутствие дисперсии фазовой скорости); *б)* скорость поверхностной волны меньше (на величину, составляющую от 5 до 20%) скорости объемной сдвиговой волны. Эти свойства многократно подтверждалось экспериментально.

Но есть экспериментальные данные и о том, что свойство *б)* выполняется не всегда. Факт того, что скорость волны Рэлея может быть больше скорости волны сдвига, описан и проанализирован в статье [131]. Рассматривается слоистый материал, содержащий вблизи к свободной поверхности слои, в которых скорость сдвиговой волны значительно выше, чем в слоях, более удаленных от поверхности. В этом случае скорость поверхностной волны близка к скорости сдвиговой волны в самом высокоскоростном слое, а общая скорость сдвиговой волны определяется усредненными характеристиками всей слоистой конструкции и она, естественно, медленнее, чем скорость волны Рэлея. Механика однородного изотропного деформируемого твердого тела исключает возможность распространения поверхностной волны быстрее, чем распространяется сдвиговая волна. Однако в механике деформируемого твердого тела, наряду с моделью классического континуума, модели обобщенных континуумов также достаточно широко применяются. В настоящей работе рассмотрены задачи о распространении поверхностных волн Рэлея вдоль границ неклассических (обобщенных)упругих полупространств: градиентно-упругих, микрополярных и полупространств, в материале которых накапливается поврежденность.

На рисунок. 3.9 представлены частотные зависимости $V_{ф\tau1}^{2}$ – квадрата фазовой скорости сдвиговой волны в градиентно-упругой среде и $V_{ф\tau2}^{2}$ – квадрата фазовой скорости сдвиговой волны в редуцированной среде Коссера. Из графиков видно, что фазовая скорость сдвиговых волн в градиентно-упругой среде превосходит фазовую скорость сдвиговых волн в редуцированной среде Коссера во всем частотном диапазоне.

На рисунок. 3.10 представлены частотные зависимости C_{R1}^{2} – квадрата скорости волны Рэлея в градиентно-упругом полупространстве, C_{R2}^{2} – квадрата скорость волны Рэлея в редуцированной среде Коссера (нижняя дисперсионная ветка), C_{R3}^{2} – скорость волны Рэлея в классическом изотропном упругом полупространстве. Из графиков видно, что на низких частотах максимальная скорость распространения волн Рэлея наблюдается в редуцированной среде Коссера. При этом с увеличением частоты скорость волны Рэлея в редуцированной среде уменьшается, а скорость волны Рэлея в градиентно-упругом полупространстве возрастает и превосходит скорость волны в среде Коссера на всем частотном диапазоне. Также на графиков видно, что скорость волн Рэлея в классическом полупространстве с увеличением частоты превосходит скорость волн в среде Коссера. При этом скорость поверхностной волны в классической среде является постоянной, не зависимой от частоты, поэтому волны в данной среде не обладают дисперсией. С учетом верхней дисперсионной ветки скорости волны Рэлея можно утверждать, что скорость распространения поверхностной волны в редуцированной среде Коссера превосходит скорости поверхностных волн в классической среде и градиентно-упругой среде.

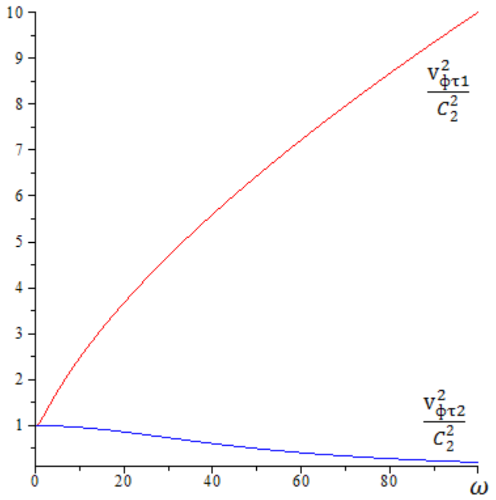


Рисунок 3.9: Частотные зависимости $V^2_{\phi\tau1}$ – квадрата фазовой скорости сдвиговой волны в градиентно-упругой среде и $V^2_{\phi\tau2}$ – квадрата фазовой скорости сдвиговой волны в редуцированной среде Коссера.

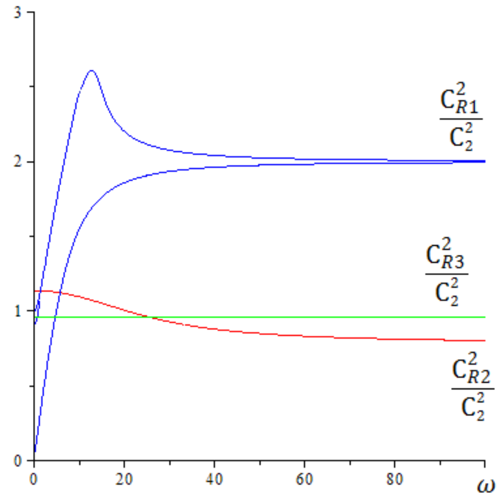


Рисунок 3.10: Частотные зависимости C^2_{R1} – квадрата скорости волны Рэлея в градиентно-упругом полупространстве, C^2_{R2} – квадрата скорость волны Рэлея в редуцированной среде Коссера (нижняя дисперсионная ветка), C^2_{R3} – скорость волны Рэлея в классическом изотропном упругом полупространстве.

Исследования поверхностных волн Рэлея, проведенные с привлечением моделей и методов механики обобщенных континуумов, позволяют описать частотную зависимость их фазовых скоростей, а также вскрыть иные, неклассические, соотношения между скоростями поверхностных и объемных упругих волн.

В заключение заметим, что изучению поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободных границ твердых тел, в рамках других моделей обобщенных континуумов, посвящены работы [132 – 136].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. В рамках математической модели градиентно-упругого континуума, т.е. среды, напряженно-деформированное состояние которой описывается тензором деформаций, вторыми градиентами вектора перемещений, несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений, рассмотрена задача о генерации возмущений источником, движущимся с постоянной скоростью вдоль границы полупространства. В результате аналитических исследований показано, что источник, движущийся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства, будет генерировать поверхностные упругие волны. Такие волны, в отличие от классических поверхностных волн Рэлея, обладают дисперсией. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника, а также его скорости, и неограниченно возрастают при приближении скорости источника к скорости сдвиговой волны. При движении нормальной нагрузки со сверхзвуковыми скоростями, вслед за источником возмущений образуется коническая поверхность (конус Маха), ограничивающая область, в которой сосредоточены возмущения от невозмущенной области упругого полупространства. Поверхность конуса Маха является огибающей системы волн, порожденных нормальной нагрузкой. Замечено, что при увеличении скорости источника возмущений, угол между образующими конуса и его осью уменьшается. При этом поперечная составляющая вектора перемещения превосходит продольную только в околоповерхностном слое полупространства, что является отличительной особенностью распространения волн от движущегося источника на больших скоростях.

2. Выявлены особенности распространения поверхностных волн Рэлея вдоль свободной границы полупространства среды Коссера (редуцированная модель), заключающиеся в том, что поверхностная волна в этом случае обладает

дисперсией, в плоскости «фазовая скорость - частота» для таких волн имеется две дисперсионных ветки: нижняя («акустическая») и верхняя («оптическая»). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Фазовая скорость поверхностной волны во всем частотном диапазоне превосходит фазовую скорость объемной сдвиговой волны. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

3. Поставлена самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале среды. Показано, что в этом случае самосогласованная система с граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства, сводится к комплексному дисперсионному уравнению.

4. Показано, что если в материале присутствует поврежденность, то поверхностная волна Рэлея затухает в направлении распространения, а низкочастотные возмущения обладают частотно-зависимой диссипацией и дисперсией. При этом дисперсия имеет аномальный характер. Установлено, что с уменьшением значения коэффициента поврежденности, в области высоких частот, значение фазовой скорости растет, а групповой падает. На очень низких частотах обе скорости растут при снижении коэффициента поврежденности.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lord Rayleigh On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proceedings of the London Mathematical Society. 1885. s1-17(1). 4-11.
2. Aki K., Richards P.G. Quantitative Seismology: Theory and Methods. 2 nd edition. University Science Books. 2002. 700 p.
3. Викторов. И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука. 1981. 288 с.
4. Krylov V.V. On the Theory of Railway-induced Ground Vibrations // Journal de Physique IV, 4(C5), 1994, pp 769—772.
5. Krylov V.V. and Ferguson C.C. Calculation of Low-frequency Ground Vibrations from Railway Trains // Applied Acoustics, 42, 1994, pp 199—213.
6. Krylov V.V. Generation of Ground Vibrations by Superfast Trains // Applied Acoustics, 44, 1995, pp 149—164.
7. Krylov V.V. Vibrational Impact of High-speed Trains: Effect of Track Dynamics // Journal of the Acoustical Society of America, 101(6), 1996, pp 3121-3134.
8. Krylov V.V. Spectra of Low-frequency Ground Vibrations Generated by High-speed Trains on Layered Ground // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 16(4), 1997, pp 257—270.
9. Krylov V.V. Effect of Track Properties on Ground Vibrations Generated by High-speed Trains // Acustica-Acta Acustica, 84(1), 1998, pp 78-90.
10. Krylov V.V. Ground Vibration Boom from High-speed Trains // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 18(4), 1999, pp 207—218.
11. Krylov V.V. (ed). Noise and Vibration from High Speed Trains, Thomas Telford Publishing, London, 2001. ЖЖЖ
12. Весницкий А.И., Крысов С.В., Сьянов С.А., Уткин Г.А. Излучение упругих волн в одномерных системах с равномерно движущимися закреплениями и нагрузками // Препринт № 160. НИРФИ. Горький. 1982. 17 с.

13. Весницкий А.И., Крысов С.В. Возбуждение колебаний в движущихся упругих элементах конструкций // Машиноведение. 1983. № 1. С.16-17.
14. Крысов С.В., Сьянов С.А. Излучение упругих волн в одномерных системах движущимся источником // Журнал прикладной механики и технической физики. 1983. № 1. С.149-153.
15. Крысов С.В., Устинова Т.В., Уткин Г.А. К вопросу о движении нагрузки вдоль балки на упругом основании // Проблемы машиностроения. Киев: Наукова думка. 1985. № 23. С.28-32.
16. Сьянов С.А. Вынужденные колебания экипажа, движущегося вдоль упругой направляющей // Проблемы машиностроения. Киев: Наукова думка. 1985. № 23. С.12-14.
17. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит. 2001. 320 с.
18. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Кугушева Е.К. К задаче об устойчивости одномерных безграничных упругих систем // Прикладная математика и механика. 1985. Т.49. № 6. С.164-168.
19. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С.3-8.
20. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т.77. № 4. С.412-424.
21. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 3. С.25-27.
22. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Герасимова Р.В., Ляхов К.И., Мельник А.В., Одзерихо И.А., Яненко Б.А. Постановка испытаний топливных упаковочных комплектов на ракетном треке // Глобальная ядерная безопасность. 2017. № 3(24). С.66-74.

23. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Движение двухопорного экипажа по направляющей ракетного трека // Вестник научно-технического развития. 2017. № 11 (123). С.18-23.
24. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзерихо И.А. Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С.21-27.
25. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований) // Вестник научно-технического развития. 2021. № 1(160). С.25-47.
26. Астахов С.А., Бирюков В.И., Катаев А.В. К вопросу об эффективности гидродинамического торможения при высокоскоростных испытаниях на ракетно-рельсовом треке // Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т.23. № 4. С.641-656.
27. Астахов С.А., Бирюков В.И., Катаев А.В. Оценка эффективности различных методов торможения сохраняемого оборудования на ограниченной длине при высокоскоростных трековых испытаниях изделий авиационной и ракетной техники // Вестник Московского авиационного института. 2022. Т.29. № 2. С.20-34.
28. Астахов С.А., Бирюков В.И., Катаев А.В. Экспериментальное определение проводимости вибраций элементами конструкции ракетной каретки при высокоскоростных трековых испытаниях авиационной техники // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т.24. № 1. С.44-63.
29. Астахов С.А., Бирюков В.И., Боровиков Д.А. Алгоритм моделирования вибрационных воздействий при трековых испытаниях авиационной и ракетной техники // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т.24. № 2. С.291-308.
30. Астахов С.А., Бирюков В.И., Тимушев С.Ф., Катаев А.В. Моделирование аэродинамического взаимодействия при трековых испытаниях изделий

авиационной техники // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 72. С.5-20.

31. Астахов С.А., Бирюков В.И., Катаев А.В. Методика определения характеристик вибропрочности конструкции при высокоскоростных трековых испытаниях авиационной техники // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 72. С.75-90.
32. Астахов С.А., Бирюков В.И., Тимушев С.Ф. Акустико-вихревой механизм возбуждения вибраций элементах конструкции каретки при трековых испытаниях изделий авиационной техники // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 73. С.74-87.
33. Неразрушающий контроль: Справочник в 7т. / Под ред. академика РАН В.В.Клюева. Т.3 : Ультразвуковой контроль / И.Н.Ермолов, Ю.В. Ланге. М.: Машиностроение, 2004.864с.
34. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / Отв.ред.академик РАН Ф.М. Митенков. М.: Наука, 2009.280 с.
35. Гуляев Ю.В. Акустоэлектроника (исторический обзор) // Успехи физических наук. 2005. № 8. С. 887-895.
36. Алексеев С.Г., Гуляев Ю.В., Котелянский И.М., Мансфельд Г.Д. Некоторые тенденции развития акустоэлектроники сверхвысоких частот // Успехи физических наук. 2005.№ 8. С. 895-899.
37. Синицына Т.В., Багдасарян А.С., Кондратьев С.Н., Николаев В.И., Машинин О.В., Егоров Р.В. Фильтры с высокой входной мощностью для радиотехнических систем: фильтр на ПАВ на частоту 216 МГц // Теория и техника радиосвязи. 2015. № 3. С.28-39.
38. Никитов С.А., Багдасарян А.С., Кондратьев С.Н., Синицына Т.В., Машинин О.В., Груздев А.С. Фильтры на ПАВ с высокой входной мощностью для

систем связи, радиолокационной и телекоммуникационной аппаратуры на номинальную частоту 2170 МГц // Радиотехника и электроника *2016. Т.61. №4. С.389-394.*

39. Синицына Т.В., Багдасарян А.С., Машинин О.В., Егоров Р.В. СВЧ фильтры с высокой входной мощностью для систем и аппаратуры передачи и обработки информации // Труды НИИР. 2016. №1. С.26-31.
40. Прапорщиков В., Орлов В. Фильтры на ПАВ. Краткий обзор и методы расчета // СВЧ-электроника. 2020. № 3. С.40-47.
41. Maugin G.A., Metrikine A.V. (Editors). Mechanics of Generalized Continua: On Hundred Years After the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics.Vol. 21, Springer, Berlin, 2010. 338 p.
42. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V. (Editors). Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials. Vol. 7. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011. 350 p.
43. Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Editors). Generalized Continua as Models with Multi-Scale Effects or Under Multi-Field Actions. Advanced Structured Matherials.Vol. 22. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013. 332 p.
44. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Editors). Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications. Springer, Wien, 2013. 388 p.
45. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials. Vol. 24. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2016. 274 p.
46. Altenbach H., Forest S. (Editors). Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Advanced Structured Matherials. Vol. 42. Springer-Verlag, Switzerland, 2016. 458 p.
47. Maugin G.A. Non-Classical Continuum Mechanics. Advanced Structured Matherials.Vol. 51. Springer, Singapore, 2017. 260 p.
48. dell'Isola F., Eremeyev V., Porubov A. (Editors). Advanced in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Advanced Structured Materials. Vol.87. Springer. Cham. Switzerland. 2018. 370 p.

49.Altenbach H., Pouget J., Rousseau M., Collet B., Michelitsch T. (Editors). Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials 1. Advanced Structured Materials. Vol.90. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature. 2018. 760 p.; Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials 2. Advanced Structured Materials. Vol.90. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature. 2018. 328 p.

50.Altenbach H., Belyaev A., Eremeyev V.A.., Krivtsov A., Porubov A.V. (Editors). Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures Advanced Structured Materials. Vol.103. Springer Nature Switzerland AG. Part of Springer. Cham. Switzerland. 2019. 526 p.

51.Sumbatyan, M. (eds) Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials, vol 109. Springer, Cham, 2019, 254 p.

52. Altenbach, H., Müller, W., Abali, B. (eds) Higher Gradient Materials and Related Generalized Continua. Advanced Structured Materials, vol 120. Springer, Cham, 2019, 231 p.

53. Abali, B., Giorgio, I. (eds) Developments and Novel Approaches in Nonlinear Solid Body Mechanics. Advanced Structured Materials, vol 130. Springer, Cham, 2020, 493 p

54.dell'Isola, F., Igumnov, L. (eds) Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics. Advanced Structured Materials, vol 137. Springer, Cham, 2021, 403 p.

55.Abramian, A.K., Andrianov, I.V., Gaiko, V.A. (eds) Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials, vol 139. Springer, Cham, 2021, 276 p.

56.Altenbach, H., Eremeyev, V.A., Igumnov, L.A. (eds) Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials, vol 141. Springer, Cham, 2021, 499 p.

57.Erofeev, V.I., Pavlov, I.S. Structural Modeling of Metamaterials. Advanced Structured Materials, vol 144. Springer, Cham, 2021, 208 p.

58.Altenbach H., Amabili M., Mikhlin Yu.V. (eds) Nonlinear Mechanics of Complex Structures Advanced Structured Matherials. Vol. 157. Springer, Cham, 2021. 469 p.

59.Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B.E., Altenbach H. (eds) Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. Advanced Structured Materials, vol 175. Springer, Cham, 2022, 707 p.

60.Altenbach H., Berezovski A., dell'Isola F., Porubov A. (eds) Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials. Vol. 170. Springer, Cham, 2023. 746 p.

61.Cosserat E. et F. Theorie des Corps Deformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. 1909. 226 p.

62.Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. 1986.

63.Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials // Physical Review Letters. 1984. Vol. 52. No 10. P.831-834.

64.Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // Math. Mech. Solids. 2016. Vol. 21. No 1. P. 73-93.

65.Grekova E.F. Waves in elastic reduced Cosserat medium with anisotropy in the term coupling rotational and translational strains or in the dynamic term // Advanced Structured Materials. 2018. Vol.87. P.143-156.

66. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials // Advanced Structured Materials. 2019. Vol. 103. P. 253-268.

67.Le Roux J. Etude geometrique de la flexion, dans les deformations infinitesimaleg d'nn milien continu // Ann. Ecole Norm.Super.1911.28.523-579.

68.Le Roux J. Recherchesg sur la geometrie beg deformatios finies // Ann. Ecole Norm. Super.1913.30.193-245.

69.Jaramillo T.J. A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory. Dissertation.Departamrnt of Mathematics. University of Chicago. 1929.

70. Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д. О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. 1982. Т.28. № 6. С.838-840.
71. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т.46. № 4. С.116-124.
72. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. 2006. Т.52. № 2. С.227-235.
73. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 4. С.100-113.
74. Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений // Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С.317-321.
75. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Волна Рэлея на границе градиентно-упругого полупространства // Вестник Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана. 2018. Т.79. №4. С.59-72.
76. Антонов А.М., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Генерация возмущений сосредоточенным источником, движущимся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т.80. №4. С.438-455.
77. Антонов А.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Влияние поврежденности материала на распространение волны Рэлея вдоль границы полупространства // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т.12. №3. С.293-300.
78. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Распространение волны Рэлея вдоль границы полупространства, описываемого упрощенной моделью Коссера // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т.81. №3. С.333-344.

79. Antonov A.M., Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Excitation of waves by a high-speed source moving along the border gradient-elastic half-space // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 971. Article ID: 032068. 4 pages.
80. Antonov A.M., Erofeev V.I., Leonteva A.V. Influence of damage on the Rayleigh wave propagation along half-space boundary // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. Vol. 61. No 7. P.1174-1181.
81. Antonov A.M., Erofeev V.I., Malkhanov A.O., Novoseltseva N.A. Excitation of the waves with a focused source, moving along the border of gradient-elastic half-space // Advanced Structured Materials. 2021. Vol.137 / Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics / dell'Isola F., Igumnov L.A. (eds). Springer Nature Switzerland AG. Part of Springer Nature. P.17-40.
82. Erofeev V., Antonov A., Leonteva A., Malkhanov A. Cosserat half-space (reduced model) and half-space of damaged materials // Advanced Structured Materials. 2023. Vol.170 / Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60 th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev / Altenbach H., Berezovski A., dell'Isola F., Porubov A. (eds). Springer Nature Switzerland AG. Part of Springer Nature. P.171-190.
83. Антонов А.М., Ерофеев В.И. О свойствах волны Рэлея, распространяющейся вдоль границы градиентно-упругого полупространтства // Прикладная механика и технологии машиностроения. Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2015. Т.24. №1. С.137-154.
84. Антонов А.М., Ерофеев В.И., Никитина Е.А. О свойствах волны Рэлея, распространяющейся вдоль границы полупространства, описываемого упрощенной моделью Коссера // Прикладная механика и технологии машиностроения. Нижний Новгород: Издательство общества «Интелсервис». 2015. Т.24. №1. С.155-167.
85. Антонов А.М., Ерофеев В.И. О свойствах волны Рэлея, распространяющейся вдоль границы градиентно-упругого

полупространтства // Сборник трудов IV Международной Школы-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин» - School-NDM 2017 (Москва, 18-21 апреля 2017г). Москва: ИМАШ РАН. 2017. С.99-106.

86. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Волны Рэлея на границе градиентно-упругого полупространства и их возбуждение движущимся источником // Сборник тезисов XLIV Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения». 2018. С.367.
87. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Возбуждение волн сосредоточенным источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства // Вестник научно-технического развития. 2018. № 10 (134). С.3-21.
88. Антонов А.М., Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Возбуждение волн высокочастотным источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства // Труды Юбилейной XXX Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения. М.: ИМАШ РАН. 2019. С.278-281.
89. Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой / отв.ред. В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2021. 311 с.

    В коллективной монографии опубликованы главы: Глава 1. Основные типы и свойства акустических волн, распространяющихся в твердых телах (авторы: Антонов А.М., Ерофеев В.И.). С. 13-29; Глава 2. Волны Рэлея на границе градиентно-упругой среды (авторы: Антонов А.М., Ерофеев В.И., Мальханов А.О.). С. 30-54; Глава 3. Волны Рэлея в полупространстве Коссера и полупространстве из поврежденного материала (авторы: Антонов А.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В.). С. 55-74.
90. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

91.Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
92.Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam; London: North-Holland publishing company, 1973. 443 p.
93.Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
94.Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
95.Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
96.Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов: пер. с франц. М.: Наука, 1982. 424 с.
97.Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. 316 с.
98.Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
99.Блехуд Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1998. 448 с.
100.Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Волновая динамика упругих сред: методоческие материалы к спецкурсу «Дополнительные главы теории упругости». Пермь: Перм. ун-т, 2007. 60 с.
101.Викторов. И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука. 1966.
102. David J., Cheeke N. Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves. CRC Press LLC, 2002.
103.Erofeyev V.I. Wave Processes in Solids with Microstructure. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific. 2003. 256 p.
104.Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2012. 260 с.
105.Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С.646-751.
106.Деев В.М. Системный анализ уравнений пространственной задачи несимметричной теории упругости в перемещениях // Математическое

моделирование в естественных науках. Тезисы докладов 10-й Всероссийской конференции молодых ученых. Пермь, 2001. С.14.

107.Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. – UK: Cambridge University Press, 1992. – 350 p.

108.Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 228 p.

109.Krajcinovic, D. Damage Mechanics. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1996. – 774 p.

110.Зуев Л.Б., Муравьев В.В., Данилова Ю.С. О признаке усталостного разрушения сталей // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т.25, №9. – С. 31-34.

111.Hirao M., Ogi H., Suzuki N., Ohtani T. Ultrasonic Attenuation Peak During Fatigue of Polycristalline Copper // Acta Mater. – 2000. – Vol. 48. – P. 517-524.

112.Wang J., Fang Q.F., Zhu Z.G. Sensitivity of Ultrasonic Attenuation and Velocity Change to Ciclic Deformation in Pure Aluminum // Phys. Stat. Sol. (a). – 1998. – Vol. 169. – P.43-48.

113.Клепко В.В., Колупаев Б.Б., Колупаев Б.С., Лебедев Е.В. Диссипация энергии и дефект модуля в гетерогенных системах на основе гибкоцепных линейных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 2007. – Т.49, №1. – С. 139-143.

114.Волков В.М. Разрыхление металлов и разрушение конструкций машин // Вестник ВГАВТ. Сер. «Надежность и ресурс конструкций». – 2003. – Вып. 4. – С.50-69.

115.Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. – М.: Мир, 1984. – 624 с.

116.Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.

117.Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1988. – 278 с.

118.Березина Т.Г., Минц И.И. Влияние структуры на развитие третьей стадии ползучести хромомолибденованадиевых сталей // Жаропрочность и жаростойкость металлических материалов. – М.: Наука, 1976. – С. 149-152.
119.Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311с.
120.Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
121.Erofeev V.I., Nikitina E.A. The self-consistent dynamic problem of estimating the damage of a material by an acoustic method. Acoustical Physics, 2010, vol. 56, no 4, pp. 584-587.
122.Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum. Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats. Series: Advances in Mechanics and Mathematics, Maugin, Gerard A., Metrikine, Andrei V. (Eds.), Springer, Heidelberg. 2010, vol. 21, pp. 143-148.
123.Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages. Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Series: Advances Structured Materials, Altenbach, Holm, Forest, Samuel (Eds.), Springer, Switzerland. 2016, vol. 42, pp. 413-423.
124.Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 1. – С.95-100.
125.Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т.3, № 4. – С.5-15.
126.Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные магнитоупругие волны в пластине, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т.5, № 1. – С.79-84.

127.Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Локализованные волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде, взаимодействующей с магнитным полем // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – № 2. – С. 130-138.
128.Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. Влияние поврежденности материала на распространение продольной магнитоупругой волны в стержне // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т.11, № 4. – С.397-408.
129.Ерофеев В.И., Антонов А.М. Поверхностные волны Рэлея, распространяющиеся вдоль границ классических и обобщенных континуумов // Материалы докладов Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвященной 50-летию ИВМ СО РАН. Красноярск: ИВМ СО РАН. 2024. С. 76-83.
130.Антонов А.М. О соотношении скоростей сдвиговых волн и поверхностных волн Рэлея для материалов, описываемых уравнениями механики обобщенных континуумов // Проблемы прочности и пластичности. 2024. Т. 86. № 3.
131.Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю. Волны Рэлея и обнаружение низкоскоростных слоев в слоистом полупространстве // Акустический журнал. 2003. Т.49. № 5. С.613–625.
132.Ерофеев В.И., Шешенина О.А. Волны в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 1. С. 61-74.
133.Марков М.Г. Распространение волны Релея вдоль границы пористой среды, насыщенной неньютоновской жидкостью // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 4. С.502-508.
134.Игумнов Л.А., Карелин И.С. Моделирование поверхностных волн на границе пороупругого полупространства // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 19-24 июня 2010 г. / Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2010. С. 129-133.
135.Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н., Петров А.Е. Гранично-элементное исследование поверхностных пористо-упругих волн // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т.75. № 2. С. 137-144.

136.Чен Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Упругое моментное полупространство под действием осесимметричных нестационарных поверхностных кинематических возмущений // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 1. С. 40-52.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Закрытое акционерное общество
Joint - Stock Company

Научно-исследовательский центр контроля и диагностики технических систем

Research Centre for Technical System Control and Diagnostics

ЗАО "НИЦ КД" JSC "NITs KD"

1-8/54

«УТВЕРЖДАЮ»
Генеральный директор
ЗАО «Научно-исследовательский
центр контроля и диагностики технических систем»,
заслуженный деятель науки
Российской Федерации,
доктор технических наук, профессор

Шолкин Валерий Георгиевич

подпись

« __ » _________ 20__ г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ
РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Настоящий акт подтверждает, что результаты кандидатской диссертации младшего научного сотрудника лаборатории моделирования физико-механических процессов Центра суперкомпьютерного моделирования Научно-исследовательского института механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского **Антонова Артема Михайловича**, касающиеся исследования дисперсии и частотно-зависимого затухания поверхностных волн Рэлея, проведенного методами механики обобщенных континуумов, прошли апробацию в ЗАО «НИЦ КД» и включены в тексты разработанного ЗАО «НИЦ КД» и утвержденного Евразийским советом по стандартизации, метрологии и сертификации межгосударственного стандарта ГОСТ 35003-2023 «Техническая диагностика. Определение глубины трещин на поверхности стальных изделий ультразвуковым методом с использованием поверхностных волн. Общие требования» и первой редакции национального стандарта ГОСТ Р «Расчеты и испытания на прочность. Определение поврежденности и остаточного ресурса элементов конструкций, подвергаемых малоцикловым усталостным воздействиям, на основе акустических измерений. Общие требования» (шифр темы Программы национальной стандартизации 1.0.132-1.044.24). В настоящее время ведется подготовка технической документации, позволяющей провести экономический анализ и оценку эффективности предлагаемых подходов для мониторинга технического состояния элементов машиностроительных конструкций.

Эксперт: Начальник НИС
«Техническая диагностика»,
доктор технических наук,
старший научный сотрудник

Углов Александр Леонидович

603079, Нижний Новгород, Московское шоссе, 213а
ИНН 5259040095
Тел.: (831) 217-00-75, Факс: (831) 217-00-75
Эл. почта: info@nickd.ru, Интернет: http://www.nickd.ru

213a, Moskovskoje Shosse, 603079, Nizhny Novgorod,
INN 5259040095
Phone: (831) 217-00-75, Fax: (831) 217-00-75
E-mail: info@nickd.ru, Web-site: http://www.nickd.ru