

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Погребняк Максим Анатольевич

Моделирование движения транспортных потоков

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р. физ.-мат. наук, доцент
Кащенко Илья Сергеевич

Ярославль — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Актуальность темы исследования	5
Современное состояние исследований	6
Цели и задачи исследования	8
Научная новизна результатов	9
Теоретическая и практическая значимость исследований	9
Методология и методы исследования	10
Достоверность полученных результатов	11
Апробация результатов исследования	11
Публикации	12
Основные положения и результаты, выносимые на защиту	13
Основное содержание работы	13
Объем и структура работы	20
Глава 1. Обзор литературы	22
1.1 Исторический обзор моделей движения транспортных потоков . .	22
1.1.1 Первые математические модели транспортных потоков . .	22
1.1.2 Моделирование движения транспортных потоков в эпоху ранних компьютеров	26
1.1.3 Современные модели движения транспортных потоков . .	28
1.2 Подробный обзор классических моделей движения транспортных потоков	31
1.2.1 Макроскопические модели транспортных потоков	32
1.2.2 Мезомодели транспортных потоков	36
1.2.3 Модели клеточных автоматов	39
1.2.4 Вероятностные модели	41
1.2.5 Микроскопические модели транспортных потоков	42
Глава 2. Построение новой математической модели движения транспортного потока	47
2.1 Построение модели	47
2.2 Определение значений параметров	52
2.3 Определение диапазона значений параметров a_n, q_n, k_n	56

2.3.1	Определение диапазона значений параметра a_n	56
2.3.2	Определение диапазона значений параметра q_n	57
2.3.3	Определение диапазона значений параметра k_n	59
2.4	Анализ устойчивости равномерного движения автомобилей	62
Глава 3. Расширения (модификации) модели		64
3.1	Моделирование движения транспортного потока на участках с различными ограничениями скорости	64
3.2	Моделирование движения транспортного потока с учетом прогнозирования динамики движения впередиидущего транспортного средства	67
3.3	Моделирование движения двух транспортных потоков с учетом их взаимодействия	71
Глава 4. Применение новой математической модели в некоторых дорожных ситуациях		81
4.1	База данных для верификации модели	81
4.2	Программный комплекс для моделирования транспортных потоков в различных дорожных ситуациях	83
4.2.1	Начало движения и остановка	85
4.2.2	Режим работы одного светофора	87
4.2.3	Режим работы нескольких светофоров	89
4.2.4	Движение на участках с ограничениями скорости	91
4.2.5	Движение с небольшим замедляющим препятствием	93
4.2.6	Движение с учетом прогнозирования по прямой	96
4.2.7	Движение с учетом прогнозирования через светофор	97
4.2.8	Движение по двум полосам без взаимодействия	100
4.2.9	Движение с учетом перестроения	102
4.2.10	Движение с учетом перестроения через узкое место	104
Заключение		108
Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации базы данных «TrafficFlowDatabase»: база данных пропускной способности светофоров . . .		130

Приложение Б. Свидетельство о государственной регистрации программы «Программный комплекс для моделирования движения транспортного потока в различных дорожных ситуациях»	131
Приложение В. Количество автомобилей, проезжающих по улице Магистральной в Ярославле (57.636941, 39.793694) за одну минуту	132
Приложение Г. Фрагменты исходного кода программы	133

Введение

Актуальность темы исследования

Автомобили занимают важное место в современной жизни каждого человека. С каждым годом их количество увеличивается, что приводит к перегрузкам на городских магистралях, увеличению числа пробок и росту количества дорожно-транспортных происшествий. С ростом городов и расширением транспортной инфраструктуры задача эффективного управления транспортными потоками приобретает критическую важность для обеспечения устойчивости и безопасности городской среды [1].

Улучшение ситуации на дорогах требует мер, реализация которых может потребовать значительных финансовых ресурсов, поскольку существующие методы анализа транспортных систем зачастую не обеспечивают достаточной эффективности из-за высокой стоимости и трудностей с прогнозированием [2].

Математическое моделирование транспортных потоков является мощным инструментом для повышения эффективности управления транспортными системами. Оно позволяет не только анализировать существующие транспортные сети, но и разрабатывать новые. Внедрение таких моделей способствует улучшению транспортной инфраструктуры, более эффективной оценке различных систем управления дорожным движением и формированию новых подходов к планированию и эксплуатации транспортных сетей.

Моделирование движения транспорта применимо не только для планирования и улучшения транспортных систем, но также и для оптимизации логистических процессов и прогноза транспортного спроса, что, в свою очередь, ведет к улучшению в управлении транспортными системами и повышению общей эффективности транспортных сетей. Использование моделирования помогает снизить затраты, минимизировать риски и повысить эффективность транспортных систем, что в конечном итоге улучшает качество жизни в городах [3–5].

В настоящее время проводится множество исследований, направленных на изучение, оптимизацию и создание математических моделей движения транспортного потока [6–16]. Большое количество исследований в этой области отражает возрастающую потребность в точных и действенных методах ор-

ганизации транспортных систем. Математическое моделирование транспорта приобретает все большее значение, превращаясь в ключевой инструмент для решения актуальных задач в организации дорожного движения и обеспечения устойчивости транспортной инфраструктуры.

Все вышеперечисленное позволяет сделать вывод об актуальности и перспективности выбранного автором диссертации направления исследований.

Современное состояние исследований

История математического моделирования транспортных потоков насчитывает свыше ста лет. За это время было сделано множество попыток описать поведение транспортных средств с помощью уравнений и математических закономерностей. На протяжении десятилетий эта область активно развивалась, и сегодня математическое моделирование транспорта является неотъемлемой частью исследований в управлении транспортными системами, способствуя оптимизации дорожного движения, повышению его безопасности и эффективности [17].

Несмотря на значительный прогресс в исследовании этой области, она все еще остается недостаточно изученной. Создание точных и комплексных моделей транспортных потоков требует учета целого ряда сложных факторов. Разнообразие методов и подходов, применяемых в транспортном моделировании, а также широкий спектр задач, которые необходимо решать для точного моделирования трафика в городской дорожной сети, открывают множество возможностей для исследований.

В настоящее время существует множество подходов к моделированию транспортных потоков, каждый из которых обладает как своими преимуществами, так и недостатками [18—20].

Макромодели позволяют быстро анализировать транспортные системы на основе общих закономерностей, что делает их удобными для крупномасштабных исследований. Однако их недостатком является отсутствие учета взаимодействий на микроуровне, что снижает точность результатов. В настоящее время макромодели применяются в задачах управления транспортными потоками, как, например, в работах Берклиевской группы [21; 22].

Мезомодели занимают промежуточное положение между макромоделями и микромоделями. Они используются для решения узкоспециализированных

задач, но их применение ограничивается небольшим числом регулируемых параметров. Несмотря на снижение популярности, ряд исследователей продолжает развивать мезомодели, создавая гибридные подходы, объединяющие преимущества макромоделирования и микромоделирования [23].

Модели клеточных автоматов благодаря своей дискретной природе особенно удобны для компьютерного моделирования. Однако они уступают в точности на микромасштабах, что ограничивает их применение для детализированного анализа. Исследования в этой области активно проводятся в институте прикладной математики имени М. В. Келдыша [24; 25].

Вероятностные модели учитывают случайные факторы, что позволяет анализировать неопределенности в транспортных потоках. Тем не менее, их использование связано с высокой сложностью анализа и необходимостью значительных объемов данных, что ограничивает точность и применимость результатов. Развитие и применение вероятностных моделей исследуются в Нижегородском государственном университете на базе идей, заложенных М. А. Федоткиным [26—28], Также исследования таких моделей ведутся в Московском автомобильно-дорожном государственном техническом университете, где развиваются подходы, предложенные А. П. Буслаевым [29; 30],

Выбранный для диссертационной работы подход базируется на микроскопическом моделировании транспорта. Микроскопическое моделирование транспортных потоков в настоящее время является одним из наиболее популярных и перспективных подходов, используемых в большом количестве современных работ (см., например, [31—36]). Микроскопический подход, позволяет с высокой точностью воспроизводить поведение транспортных средств в реальных условиях, учитывая индивидуальные характеристики водителей и особенности их движения. Микроскопические модели подробно описывают взаимодействие между отдельными транспортными средствами, что обеспечивает их устойчивость к изменению параметров и высокую точность анализа.

При микроскопическом моделировании ускорение транспортного средства определяется функцией, которая зависит от характеристик самого автомобиля и автомобиля, движущегося впереди. Динамика транспортного потока описывается системой дифференциальных уравнений, как обычных, так и с запаздывающим по времени аргументом. Этот подход позволяет детально описывать и прогнозировать транспортные потоки в условиях городской инфраструктуры.

Большинство существующих в настоящее время моделей в основном фокусируются на качественном описании динамических свойств транспортного потока. В отличие от них, в настоящей работе построена модель, которая с высокой степенью достоверности описывает движение транспорта не только на качественном, но и на количественном уровне, обеспечивая точное воспроизведение реальных процессов.

Цели и задачи исследования

Основная цель работы заключается в создании математической модели движения транспортных потоков, ее численном и аналитическом исследовании, а также в разработке специализированного программного комплекса для моделирования движения транспортного потока в различных дорожных ситуациях.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Построить новую математическую модель движения транспортного потока в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом. Для модели определить диапазоны значений для всех параметров, а также провести анализ устойчивости равномерного режима движения.
2. Для построенной модели разработать ряд модификаций: смоделировать ситуацию, когда на дороге присутствуют различные ограничения скорости; смоделировать учет прогноза динамики движения впереди идущего транспортного средства, а также провести моделирование взаимодействия двух транспортных потоков.
3. На основе предложенной математической модели разработать программный комплекс для моделирования динамики транспортного потока в различных сценариях.
4. Собрать данные наблюдения за реальными транспортными потоками и работой светофоров. На основе собранных данных провести верификацию и анализ разработанной модели.

Научная новизна результатов

Научная новизна результатов состоит в следующем.

1. Построена новая математическая модель движения транспортного потока в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, которая позволяет с высокой точностью описывать движение транспортных средств, отражая происходящие в реальности процессы. Отличительной особенностью модели является разделение движения автомобиля на две фазы: разгон и торможение, которые связаны между собой через релейную функцию.
2. С помощью численных и численно-аналитических методов определены диапазоны значений всех параметров модели.
3. Для модели предложен ряд модификаций, которые позволяют моделировать новые дорожные ситуации, такие как учет различных скоростных режимов, прогнозирование динамики движения впередиидущего транспортного средства, а также моделирование взаимодействия двух транспортных потоков.
4. На основе модели создан программный комплекс, позволяющий моделировать динамику транспортного потока на участках транспортной сети в различных дорожных ситуациях, включая однополосное движение, проезд через произвольное количество светофоров, движение с учетом прогнозирования, движение по участкам с разной разрешенной скоростью, а также многополосное движение с учетом перестроений. Собрана база данных пропускной способности светофоров, используемая для верификации как модели, так и программного комплекса.
5. С помощью программного комплекса проведено численное моделирование транспортного потока в различных дорожных сценариях. Результаты моделирования с высокой степенью точности совпадают с данными наблюдений за реальными транспортными потоками.

Теоретическая и практическая значимость исследований

С теоретической точки зрения новая математическая модель и ее расширения представляют интерес как основа для создания новых подходов

к моделированию движения автотранспорта. Учет различных стратегий поведения транспортного потока и реализация их в виде программного комплекса представляют интерес для анализа и моделирования реальных транспортных сетей.

С практической точки зрения новая математическая модель и программный комплекс могут служить основой для интеллектуальных транспортных систем городов и использоваться, как для прогнозирования движения потоков, так и для обеспечения возможности управления ими в режиме реального времени. Они также могут использоваться для решения задач при планировании новой и модернизации уже существующей дорожно-транспортной инфраструктуры, повышая эффективность и надежность транспортных систем. Разработанная модель обладает универсальностью и может быть адаптирована для решения задач в различных сценариях, включая логистику и управление другими видами транспортных потоков, например, движением беспилотных летательных аппаратов в ограниченном воздушном пространстве.

Методология и методы исследования

Новая математическая модель движения транспортного потока разработана на основе микроскопического метода, который описывает каждый автомобиль как отдельную частицу с уникальными характеристиками скорости и целей движения. Микроскопический подход обеспечивает более точное описание динамики транспортных потоков, хотя требует значительных вычислительных ресурсов.

В основе новой математической модели лежит система дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом. Запаздывание обосновано, в первую очередь, временем реакции водителя.

Численное исследование модели проведено с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка, адаптированного для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Для визуализации и создания графических материалов, используемых в диссертации, применялась система для современных технических вычислений Wolfram Mathematica. Визуализация также была выполнена с помощью специально разработанного программного комплекса, который был реализован на языке программирования C# версии 10.0.0 с использованием библиотеки

Windows Forms. Программный комплекс основан на методе Рунге-Кутты четвертого порядка, адаптированном для уравнений с запаздыванием.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением численных методов и вычислительных алгоритмов, а также тщательной проверкой наблюдаемых данных

Результаты численного моделирования и аналитических расчетов демонстрируют высокую степень согласованности с закономерностями, наблюдаемыми в реальных транспортных потоках.

Апробация результатов исследования

Основные результаты работы докладывались на ряде научных конференций и семинаров.

1. Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020, 2022, 2023, 2024» (Москва, Россия, 2020-2024).
2. International Scientific Students' Conference Science Drive 2021, 2022 (Ярославль, Россия, 2021-2022).
3. 74, 75, 76 Всероссийские научно-технические конференции студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием (Ярославль, Россия, 2021-2023).
4. Путь в науку. Математика (Ярославль, Россия, 2021-2024).
5. Международная конференция «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышева (Сургут, Россия, 2021).
6. Integrable systems & nonlinear dynamics (ISDN-2021, 2022, 2023, 2024) (Ярославль, Россия, 2021-2024).
7. Всероссийская научно-практическая конференция им. Жореса Алфёрова (Санкт-Петербург, Россия, 2021, 2023).
8. 64, 65, 66 Всероссийские научные конференции МФТИ (Москва, Россия, 2021-2024).

9. XI Международная научно-практическая конференция студентов и аспирантов «Казанские научные чтения студентов и аспирантов имени В. Г. Тимирязова-2021» (Казань, Россия, 2021).
10. II Международная научно-практическая конференция «Инжиниринг: теория и практика» (Пинск, Беларусь, 2022).
11. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко (Москва, Россия, 2022).
12. The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Москва, Россия, 2022).
13. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2022, 2024 (Суздаль, Россия, 2022, 2024).
14. XXI International Conference Foundations & Advances in Nonlinear Science (Минск, Беларусь, 2022).
15. XX, XXI научные школы «Нелинейные волны — 2022, 2024» (Нижний Новгород, Россия, 2022, 2024).
16. Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXIV, XXXV (Воронеж, Россия, 2023, 2024).
17. XV Международная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (Махачкала, Россия, 2023).
18. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа — 2023» (Уфа, Россия, 2023),
19. Научный семинар ЯрГУ (Ярославль, 2024),
20. Научный семинар ННГУ (Нижний Новгород, 2024).
21. Научный семинар СГУ (Саратов, 2024).

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 40 печатных изданиях, [177—180; 185—220], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [177—180], 35 — в тезисах докладов [185—219], 1 — в прочих изданиях [220]. Зарегистрирована 1 база данных [181]. Зарегистрировано 3 программы для ЭВМ [182—184].

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Построена новая математическая модель транспортного потока в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, которая позволяет с высокой степенью точности описывать движение транспортных средств в различных дорожных ситуациях, включая однополосное движение, движение через произвольное количество светофоров, движение с учетом прогнозирования, движение по участкам с разной разрешенной скоростью, а также многополосное движение с учетом перестроений.
2. Предложены численные и численно-аналитические методы оценки диапазонов значений параметров модели.
3. Разработан ряд модификаций модели, которые включают: ситуацию, когда на дороге присутствуют различные ограничения скорости; учет прогноза динамики движения впередиидущего транспортного средства, а также моделирование взаимодействия двух транспортных потоков.
4. Создан программный комплекс для моделирования динамики транспортного потока в различных сценариях. Собрана база данных пропускной способности светофоров, используемая для верификации, как модели, так и программного комплекса.
5. С помощью программного комплекса получены результаты численного моделирования движения транспортного потока в различных сценариях. Проведена оценка пропускной способности некоторых участков дорожной сети, включая светофоры, ограничения скорости, дорожные препятствия и узкие места.

Основное содержание работы

Первая глава диссертационной работы посвящена обширному обзору литературы, посвященной моделированию транспортных потоков.

Раздел 1.1 представляет собой исторический обзор различных моделей транспортного потока. В **подразделе 1.1.1** рассматриваются первые математические модели транспортных потоков, которые заложили основу для последующих исследований. В **подразделе 1.1.2** рассматриваются мо-

дели, разработанные в эпоху ранних компьютеров. В подразделе 1.1.3 рассматриваются современные математические модели транспортных потоков, разработанные с использованием передового математического аппарата и новейших технологий.

Раздел 1.2 посвящен подробному обзору классических методов и моделей движения транспортных потоков. В подразделе 1.2.1 обсуждаются макроскопические модели, которые рассматривают транспортные потоки как непрерывную среду и описывают общие закономерности движения. **Подраздел 1.2.2** охватывает мезомодели, которые занимают промежуточное положение между макроскопическими и микроскопическими подходами, объединяя элементы обоих методов. **Подраздел 1.2.3** посвящен моделям клеточных автоматов, описывающим транспортные потоки на дискретной сетке с использованием условной дискретизации пространства и времени. В подразделе 1.2.4 рассматриваются вероятностные модели, которые учитывают случайные факторы и неопределенности в поведении водителей. **Подраздел 1.2.5** посвящен микроскопическим моделям транспортных потоков, которые описывают взаимодействие между отдельными автомобилями, что позволяет наиболее точно воспроизводить реальное поведение транспортных потоков.

Вторая глава диссертации посвящена разработке новой математической модели транспортного потока, основанной на микроскопическом подходе и концепции следования за лидером.

Раздел 2.1 посвящен построению модели. Модель имеет вид системы дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом и описывает движение $N \in \mathbb{N}$ транспортных средств. Для каждого транспортного средства с номером $n \geq 1$ в потоке за $x_n(t)$ обозначено положение переднего бампера в момент времени t , а за $\dot{x}_n(t)$ и $\ddot{x}_n(t)$ его скорость и ускорение, соответственно.

Новая математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1 [a_1 (v_{max,1} - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1)H_1, \\ \ddot{x}_n(t) = R_n [a_n (P_n - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n)H_n, \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{для } t \in [-\tau_n, 0], \end{cases} \quad (1)$$

где R_n представляет собой релейную функцию следующего вида:

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n > (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n \leq (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \end{cases}$$

которая описывает переключение между режимами «разгон-торможение». Уравнение $\Delta x_n = x_{n-1}(t - \tau_n) - x_n(t)$ описывает расстояние между соседними транспортными средствами, где для первого транспортного средства $\dot{x}_0(t - \tau_1) = L$, где L — расстояние, которое первое транспортное средство преодолет перед остановкой (возможно, $L = \infty$). Параметр τ_n описывает время реакции водителя, а $\tau_{b,n}$ — время срабатывания тормозной системы. Величины μ и g обозначают коэффициент трения скольжения и ускорение свободного падения, соответственно. Параметр l_n представляет собой сумму безопасного расстояния между двумя соседними транспортными средствами и длины впередиидущего транспортного средства $l_n = l_{safe} + l_{veh,n-1}$ ($l_{veh,0} = 0$). Коэффициент $a_n > 0$ описывает обратную зависимость времени согласования скоростей между двумя соседними транспортными средствами и зависит от их мощностей. Параметр $v_{max,n} > 0$ является максимальной желаемой скоростью, а P_n — логистическая функция вида:

$$P_n = \frac{v_{max,n} - V_n}{1 + \exp[k_n(-\Delta x_n + S_n)]} + V_n,$$

которая описывает регулировку скорости транспортного средства относительно впередиидущего. Функция V_n имеет следующий вид:

$$V_n = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau_n), v_{max,n}) \quad \text{для } n > 1, \quad V_1 = 0$$

и вводится для учета ограничения скорости транспортного средства $v_{max,n}$. Коэффициент $k_n > 0$ представляет собой скорость роста логистической функции, описывая насколько плавно водитель транспортного средства подстраивает свою скорость относительно скорости впередиидущего. Параметр S_n логистической кривой имеет вид:

$$S_n = (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n + s_n,$$

где коэффициент s_n равен расстоянию, пройденному за τ_n времени со скоростью сближения: $s_n = \tau_n \Delta \dot{x}_n$, где $\Delta \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1}(t - \tau_n) - \dot{x}_n(t)$ — разница скоростей двух соседних автомобилей ($\dot{x}_0(t - \tau_1) = 0$). Функция H_n представляет собой функцию скачка вида:

$$H_n = \begin{cases} q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n}{\Delta x_n - l_n} \right)^2, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n}{\Delta x_n - l_n} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n}{\Delta x_n - l_n} \right)^2 > \mu g, \end{cases}$$

которая описывает торможение транспортного средства. Коэффициент q_n показывает интенсивность торможения.

В начальный момент времени автомобили едут со скоростью v_n и располагаются на расстоянии λ_n друг от друга, причем $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ и выполняется неравенство $\lambda_n - \lambda_{n+1} > (\tau_n + \tau_{b,n})v_n + v_n^2/2\mu g + l_n + \tau_n v_n$ (λ_1 может быть любым).

На рисунке 1 изображены графики изменения скорости и расстояния для нескольких одинаковых автомобилей, двигающихся согласно модели (1). Эти графики демонстрируют динамику движения автомобилей, начиная с разгона и заканчивая остановкой перед препятствием. Видно, как автомобили постепенно увеличивают свою скорость, затем, по мере приближения к препятствию, начинают замедляться и останавливаются на безопасном расстоянии.

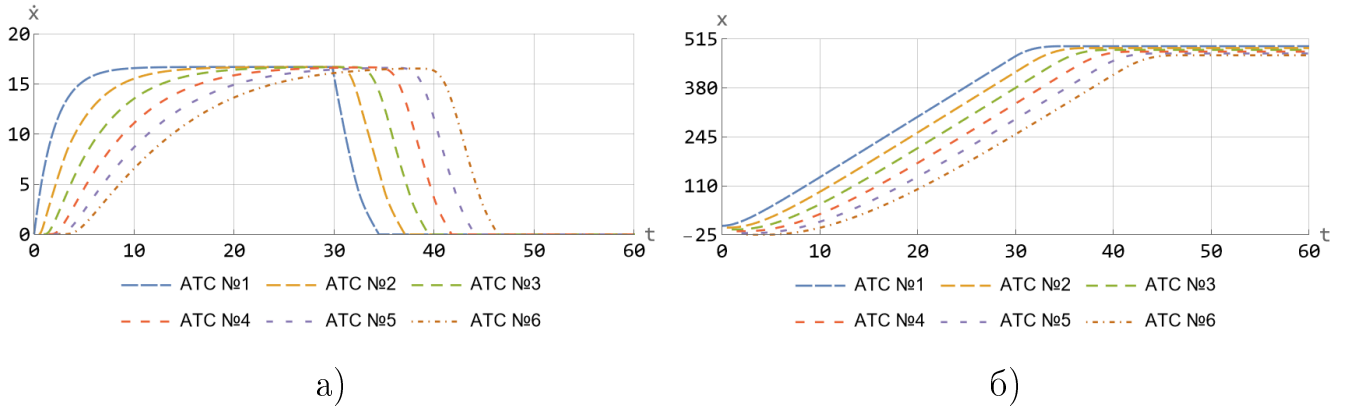


Рисунок 1 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для модели (1) при значениях параметров: $\tau_n = 0.5$, $\tau_{b,n} = 0.1$, $a_n = 0.5$, $q_n = 0.14$, $v_{max,n} = 16.7$, $l_{safe,n} = 1$, $l_{veh,n} = 4$, $g = 9.8$, $\mu = 0.6$, $k_n = 0.5$, $L = 500$.

Раздел 2.2 посвящен определению значений параметров математической модели (1). Параметры модели определены на основе физических законов, действующего законодательства Российской Федерации и логических соображений. Все параметры модели выражены в системе СИ для обеспечения точности в расчетах и согласованности с физическими величинами.

В **разделе 2.3** описывается определение диапазонов значений параметров a_n , q_n , и k_n . В **подразделе 2.3.1** определяется диапазон значений параметра a_n , который отвечает за согласование скоростей между соседними транспортными средствами. **Подраздел 2.3.2** рассматривает диапазон значений параметра q_n , который характеризует интенсивность торможения автомобилей в потоке. **Подраздел 2.3.3** посвящен определению диапазона

значений параметра k_n , который описывает скорость адаптации водителя транспортного средства к скорости впередиидущего автомобиля. Значения всех параметров модели представлены в таблице.

Таблица 1 — Параметры модели (1)

Параметр модели	Краткое описание	Диапазон значений	Единица СИ
τ_n	время реакции водителя	$[0.2, 2.5]$	с
$\tau_{b,n}$	время срабатывания тормозной системы	$[0.1, 0.6]$	с
μ	коэффициент трения	$[0, 1]$	б/р
g	ускорение свободного падения	9.8	м/с ²
$l_{veh,n}$	длина автомобиля	≥ 2	м
$l_{safe,n}$	безопасное расстояние	≥ 1	м
$v_{max,n}$	максимальная желаемая скорость	≥ 0	м/с
a_n	коэффициент ускорения	$[0.31, 0.92]$	1/с
q_n	коэффициент торможения	$(0, 1/\mu g]$	с ² /м
k_n	коэффициент логистического роста	$(0, 1]$	1/м

Раздел 2.4 посвящен анализу устойчивости режима равномерного движения автомобилей в рамках предложенной модели (1). В этом режиме все транспортные средства двигаются с одинаковой скоростью v_{max} на расстояниях $\Delta c_n = c_{n-1} - c_n$ друг от друга, где c_n — убывающая последовательность. Для любой такой убывающей последовательности c_n существует всегда устойчивое решение системы (1) вида: $x_n(t) = c_n + v_{max}t$. Устойчивость такого решения зависит от знаков выражений:

$$d_n = -\tau_n v_{max} + \Delta c_n - l_n.$$

Сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если для $\forall n$ выполняется неравенство $d_n > v_{max}^2/2\mu g$, то равномерный режим движения устойчив. Если хотя бы при одном каком-то i выполняется неравенство $d_i \leq v_{max}^2/2\mu g$, то равномерный режим движения неустойчив.*

Третья глава диссертации посвящена расширению математической модели транспортного потока с учетом ее адаптации к более сложным и реалистичным условиям движения. Рассмотрены три направления улучшения.

Раздел 3.1 описывает моделирование движения на участках дороги с различными скоростными режимами. Для этого участок разбивается на $M \in \mathbb{N}$ интервалов, причем для каждого интервала m и транспортного средства n определяется индивидуальная желаемая максимальная скорость.

Раздел 3.2 посвящен моделированию движения с учетом прогнозирования поведения впереди идущих транспортных средств. В этом расширении модели транспортное средство n учитывает динамику движения $n - 2$ автомобиля, и на его основе прогнозирует поведение $n - 1$.

Раздел 3.3 исследует взаимодействие двух параллельных транспортных потоков. Это расширение предназначено для моделирования движения по многополосным дорогам, где транспортные средства могут влиять друг на друга. Расширение позволяет моделировать движение с учетом перестроений между полосами.

Четвертая глава диссертационной работы демонстрирует применение разработанной математической модели для анализа различных дорожных ситуаций и оценки ее практической ценности для управления транспортными потоками. В качестве инструмента используется специально созданный программный комплекс, который позволяет проводить симуляции и оценивать эффективность стратегий управления транспортными потоками на реальных дорожных участках.

Раздел 4.1 описывает процесс сбора данных, необходимых для верификации модели. Сюда входят параметры движения транспортных средств, данные о пропускной способности светофоров и наблюдения за транспортным потоком. Все данные структурированы в виде базы данных для последующего анализа и использования в моделировании.

Раздел 4.2 посвящен описанию архитектуры программного комплекса, разработанного для симуляции различных дорожных сценариев.

Подраздел 4.2.1 описывает режим работы программы «Начало движения и остановка», моделирующий ситуации старта и остановки автомобилей. Также здесь проводится оценка максимальной пропускной способности дорожного участка в зависимости от предельно допустимой скорости.

Подраздел 4.2.2 рассматривает сценарий программы «Режим работы одного светофора», моделирующий светофорное регулирование движения на дороге. Приводится анализ результатов моделирования и их сравнение с реальными данными работы светофоров.

Подраздел 4.2.3 описывает сценарий программы «Режим работы нескольких светофоров», исследующий моделирование движения автомобилей через произвольное количество последовательно расположенных светофоров. Проводится сравнительный анализ результатов моделирования движения автомобилей через реальные и смоделированные светофоры.

Подраздел 4.2.4 посвящен режиму работы программы «Движение на участках с ограничениями скорости», который предназначен для моделирования движения автомобилей на дорогах с разными скоростными интервалами. Здесь рассматриваются два сценария: постепенное снижение скорости через несколько интервалов и резкое торможение, с анализом их влияния на пропускную способность.

Подраздел 4.2.5 описывает режим работы программы «Движение с небольшим замедляющим препятствием», позволяющий моделировать влияние мелких дорожных неровностей, таких как «лежачие полицейские», трамвайные пути и другие элементы инфраструктуры, на транспортный поток. Проводится анализ влияния небольших участков дороги с разной скоростью движения на пропускную способность транспортного потока.

Подраздел 4.2.6 посвящен режиму работы программы «Движение с учетом прогнозирования по прямой», где моделируется поведение автомобилей с прогнозированием движения впереди идущих транспортных средств. Здесь проводится сравнение количества автомобилей, проходящих через участок, для моделей с прогнозированием и без него при различных значениях параметра τ_n .

Подраздел 4.2.7 описывает режим работы программы «Движение с учетом прогнозирования через светофор», который предназначен для моделирования движения автомобилей с прогнозированием на светофоре. Также анализируется пропускная способность реальных и смоделированных светофоров при учете прогнозирования.

Подраздел 4.2.8 рассматривает режим работы программы «Движение по двум полосам без взаимодействия», который предназначен для моделирования транспортного потока на двух параллельных полосах без взаимодействия между ними. Проводится анализ пропускной способности различных участков

за разные временные периоды, рассчитанные при фиксированных значениях параметра τ_n .

Подраздел 4.2.9 описывает режим работы программы «Движение с учетом перестроения», моделирующий ситуацию взаимодействия потоков, когда транспортные средства совершают перестроение из одного потока в другой. В этом подразделе приводится моделирование и анализ явления, известного как «плавающая пробка».

Подраздел 4.2.10 посвящен режиму работы программы «Движение с учетом перестроения через узкое место» предназначен для моделирования эффекта «бутылочного горлышка». В этом подразделе исследуется влияние сужения дороги на пропускную способность, включая анализ трех сценариев: движение одного потока, два независимых потока и полное перестроение одного потока в другой.

Приложения диссертационной работы включают дополнительные материалы, иллюстрирующие и подтверждающие основные результаты исследования, а также обеспечивающие практическую применимость разработанных моделей и программного обеспечения.

Приложение А содержит свидетельство о государственной регистрации базы данных «TrafficFlowDatabase», содержащей информацию о пропускной способности светофоров.

Приложение Б содержит свидетельство о государственной регистрации программного комплекса «Программный комплекс для моделирования движения транспортного потока в различных дорожных ситуациях».

Приложение В предоставляет эмпирические данные о количестве автомобилей, проезжающих по улице Магистральной в городе Ярославле (координаты: 57.636941, 39.793694) за одну минуту.

Приложение Г включает фрагменты исходного кода разработанного программного комплекса.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 4 приложений. Полный объем диссертации составляет 135 страниц, включая 35 рисунков и 15 таблиц. Список литературы содержит 220 наименований. Весь материал,

представленный в диссертации, был получен, обработан и проанализирован автором лично.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Исторический обзор моделей движения транспортных потоков

1.1.1 Первые математические модели транспортных потоков

История развития транспорта и дорожного строительства насчитывает более нескольких тысяч лет. Появление дорог было обусловлено потребностью человека передвигаться на большие расстояния и символизировало культурный прогресс человечества. Археологи обнаруживали хорошо благоустроенные улицы периода нового времени, средневековья, античности, а также более ранних временных эпох [37]. Но вплоть до XIX века дороги были предназначены лишь для гужевого транспорта. Большинство людей передвигались пешком, верхом или на конных упряжках. Эти средства передвижения доминировали и определяли высокую плотность застройки городов, обеспечивая жителям быстрое перемещение по городу с минимальными временными и физическими затратами [2].

В период промышленной революции и ускоренной урбанизации, начиная примерно с середины XIX века, в транспортную сферу стали активно внедряться различные технические инновации, которые оказали значительное влияние на города [2]. Появление в 1890-х годах электрического трамвая положило начало созданию системы общественного транспорта, делая городские поездки более быстрыми и доступными.

С наступлением XX века началось активное развитие личного автотранспорта. Оно сопровождалось стремительным ростом городов и вызвало потребность в организации, управлении и оптимизации транспортных сетей. В связи с этим возникла необходимость в разработке нового математического и логического аппарата. Этот период можно считать началом развития математического моделирования транспортных потоков.

История моделирования движения транспортных потоков насчитывает более вековой опыт и включает множество различных методов и подходов. Основы математического моделирования транспортных потоков и закономерности

дорожного движения были заложены в 1912 году русским ученым профессором Г. Д. Дубелиром в его книге «Городские улицы и мостовые». Эта книга считается первым исследованием по этой тематике, и посвящена анализу аспектов городского планирования, разработке транспортной инфраструктуры и предоставлению важных материалов для проектирования и строительства дорожных сетей [38].

Рост автомобильной индустрии в конце 1920-х годов потребовал существенных улучшений в дорожно-транспортной инфраструктуре. В разных странах этот процесс начался в разное время, но везде он сопровождался значительными изменениями в городской инфраструктуре. С увеличением числа автомобилей на улицах возникла острая необходимость в разработке моделей для анализа дорожного движения. Модели были необходимы, в основном, для того, чтобы изучить пропускную способность дорог и перекрестков. Необходимо было рассчитать какое максимальное количество автомобилей могло бы проехать через определенный участок дороги в единицу времени.

Первые шаги в изучении пропускной способности и внедрении этого понятия в практику были предприняты во второй половине 1920-х годов. Под пропускной способностью в то время понимали такую интенсивность движения, при которой для него не было заметных затруднений [39]. В 1928 году С. Йоханнессон сделал первую попытку определения пропускной способности дороги, основываясь на среднем минимальном расстоянии между центрами автомобилей [40].

Следующий серьезный прорыв в моделировании транспортных потоков произошел в 1933 году, когда Б. Гриншилдс воспользовался покадровой киносъемкой для измерения скоростей отдельных автомобилей и расстояний между ними. Он установил зависимость между скоростью двух соседних автомобилей и дистанцией между ними. Эту зависимость он выразил в виде уравнения прямой [41; 42], угловой коэффициент которого позднее стал интерпретироваться как время реакции водителя в модели Танака [43].

Исследовать поведение пешеходов на дорогах впервые начал В. Адамс в 1936 году. Он также стремился показать, что распределение числа движущихся автомобилей на улицах следует закону Пуассона [44]. В ходе своих исследований он вычислил некоторые средние значения, связанные со временем ожидания пешеходов, которыми позже в своих работах воспользовались Ф. Гарвуд (1940) [45], М. С. Рафф (1951) [46] и Дж. К. Таннер (1951) [47].

А впоследствии в 1954 году, используя комбинаторные аргументы, А. Дж. Майн и Д. Алан вычислили время задержки, приходящейся на одного пешехода, а также привели формулы, описывающие произвольный транспортный поток главной улицы [48].

В первой половине 1950-х годов моделирование движения транспортных потоков стали активно исследовать на возможные взаимосвязи с равновесием Нэша [49]. В 1952 году Дж. Г. Вардроп представил два ключевых принципа равновесия, которые были разработаны независимо друг от друга [50; 51]. Первый из принципов утверждает, что время, затрачиваемое на поездку по всем доступным путям, всегда не превышает времени на поездку по неиспользуемым путям. Это означает, что каждый участник потока в любой момент времени стремится выбрать наиболее оптимальный путь, независимо от остальных. Если использовать физическую аналогию, то модель движения транспортных потоков можно сравнить с моделью распространения вязкой жидкости. Второй принцип — принцип равновесия гласит, что среднее время поездки достигается только при совместных усилиях всех участников потока. В 1956 году М. Бекман, С. Б. Макгуайр и К. Б. Уинстен построили математическую модель сетевого равновесия, которая связала эти два принципа [52].

Первая макроскопическая модель была представлена в 1955 году М. Дж. Лайтхиллом и Г. Б. Уиземом [53], а также независимо от них П. Ричардсом [54]. В макроскопической модели поток автомобилей рассматривается как единое целое и уподобляется физическому потоку, используя методы гидродинамики. Эта модель, получившая название Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR), описывает движение на однополосной бесконечной дороге и связывает процессы переноса в сплошных средах с моделированием дорожных заторов.

Активное изучение движения на двухполосных дорогах началось в начале 1960-х годов. Оно положило начало современной теории клеточных автоматов. Основные результаты были получены в работе Ф. Хейта 1963 года [55], в которой была заложена общая теоретическая основа для моделей клеточных автоматов, опирающаяся на теорию вероятности и теорию массового обслуживания.

Первая микроскопическая модель была предложена в 1961 году Д. Ньюэллом, который в то время занимался моделированием последовательного размещения светофоров для повышения общей средней скорости автомобильного движения. Он разработал математическую модель, которая рассматривает

автомобили как индивидуальные элементы [56]. В рамках модели Ньюэлла для каждого водителя введена «безопасная» скорость, зависящая от расстояния до впередиидущего автотранспортного средства (лидера).

Примерно в это же время сотрудники концерна «Дженерал Моторс» — Д. Газис, Р. Херман и Р. Потс представили отличную от модели Ньюэлла микроскопическую модель для однополосного транспортного потока [57]. Результаты моделирования позволили установить зависимость между интенсивностью движения автомобилей и плотностью потока.

Обширные исследования, инициированные Д. Газисом, Р. Херманом, Р. Ротери и А. Марадудиным в 1960-х годах [58; 59], охватывали множество аспектов, включая исследования, связанные с длительностью включения желтого сигнала светофора. Согласно предположению Д. Дрю, одним из путей решения проблемы восприятия желтого сигнала, как призыва двигаться быстрее, должен был стать светофор с обратным отсчетом [60].

Первые кинетические уравнения для моделирования транспортных потоков были представлены И. Пригожиным и его коллегами в 1961 году [61]. Кинетические модели отличаются от макроскопических моделей тем, что они описывают динамику фазовой плотности потока, что включает в себя анализ распределения автомобилей как по координате, так и по скорости. Транспортный поток в кинетической модели Пригожина описывается уравнением, аналогичным уравнению Больцмана, которое использует интеграл взаимодействия между автомобилями вместо интеграла столкновения молекул газа.

Факторы ошибок водителей впервые начали изучать П. М. Херст и К. Перчонок в первой половине 1960-х годов [62; 63]. Они утверждали, что нормальный водитель иногда готов рисковать, так как избегание дороги при наличии какого-либо риска является нереалистичной ситуацией, поэтому водители должны научиться оценивать и различать приемлемые и неприемлемые риски. Дорожно-транспортные происшествия часто происходят из-за неправильной оценки риска, что подчеркивает важность понимания психологических аспектов вождения.

Первая попытка создать автопилот была предпринята в середине 1960-х годов в работе С. Халберта и С. Войцика. Они предлагали концепцию имитатора автомобильного управления, который включал в себя настоящий автомобиль [64]. Технические возможности того времени были весьма ограничены, поэтому результаты исследований оказались скромными. Тем не менее, их ра-

бота, сосредоточенная на методологии имитации автомобильного движения и потенциальных областях ее применения, стала важным шагом в развитии технологий автопилота.

Первая вероятностная модель транспортного потока была предложена в работе А. Рени в середине 1960-х годов [65]. Предложенная модель напрямую связана с поведением водителя на дороге. Дальнейшие исследования вероятностных моделей были продолжены в работе Х. Саломона и П. Вана [66].

1.1.2 Моделирование движения транспортных потоков в эпоху ранних компьютеров

С появлением компьютеров возможности численных экспериментов и моделирования значительно расширились, особенно в области сложных систем, таких как транспортные потоки. Поскольку такие модели требуют учета множества случайных факторов, использование аналитических методов зачастую оказывается затруднительным или даже невозможным, что делает численные методы и симуляции важнейшими инструментами для исследования и оптимизации транспортных процессов.

Первая крупная система компьютерного моделирования дорожного движения была разработана канадскими учеными в 1963 году. С 1970-х годов системы автоматизации управления дорожным движением стали активно применяться в различных странах, особенно в Японии. Это стало возможным благодаря работе японских ученых Х. Иносэ, Т. Хамады и К. Фуджисаки [67]. Используя теорию графов, они исследовали управление светофорами и создали модели для анализа транспортных потоков, которые в некоторых аспектах предшествовали современной теории клеточных автоматов [43].

В 1966 году М. А. Федоткин и Ю. И. Неймарк исследовали управление конфликтными потоками, применяя математическую кибернетику и теорию массового обслуживания для моделирования перекрестков [68; 69]. Они предложили модель перекрестка с фиксированными длительностями сигналов светофора, для которой были рассчитаны вероятностные характеристики стационарного режима. Также был разработан алгоритм, учитывающий количество автомобилей в очередях при принятии решений [70].

Позже М. А. Федоткиным был предложен итеративно-мажорантный метод [71; 72], который был применен в задачах управления потоками с приоритетами [73]. Эта методика была существенно доработана А. В. Зориным, который, основываясь на кибернетическом подходе, предложенном А. А. Ляпуновым и С. В. Яблонским [74], применил ее для исследования абстрактных управляющих систем обслуживания [26].

Первая компьютерная математическая модель транспортного потока была разработана Д. Дрю, Т. Месеролам и Дж. Бурам в 1967 году [75]. Эта модель исследовала процесс съезда на магистраль с прилегающего въезда, учитывая различные факторы, такие как количество полос, длина участка магистрали, количество въездов и выездов, их местоположение и размеры. Модель также учитывала параметры дороги, включая уклоны и зоны разгона. Каждому автомобилю были присвоены начальные параметры, такие как начальная позиция, текущая и желаемая скорость.

В 1972 году Д. Дрю опубликовал работу, в которой представил различные математические модели транспортных потоков, существовавшие на тот момент [60]. Помимо уже существующих моделей, он рассмотрел физические и психологические аспекты, влияющие на управление автомобилем, а также вопросы видимости и освещенности на дорогах. Он предложил критерии оценки эффективности дорожной инфраструктуры, такие как интенсивность движения, средняя скорость и количество дорожно-транспортных происшествий. Большое внимание в его исследовании было уделено использованию компьютеров для моделирования транспортных потоков.

Почти в то же время вновь возник интерес к модели LWR. В 1971 году Р. Пейн предложил модель, где, в отличие от классической LWR модели, достижение максимальной желаемой скорости происходит не мгновенно [76]. В 1974 году Дж. Уизем усовершенствовал модель, введя концепцию «дальнорукости» водителей и добавив диффузионные члены [77]. Модель Уизема учитывает, что при увеличении плотности движения водители снижают скорость, а при уменьшении — увеличивают.

Активные исследования движения транспортного потока в СССР начались в конце 1970-х годов в связи с необходимостью оптимизировать дорожное движение в преддверии предстоящих Олимпийских игр 1980 года. В 1979 году В. М. Кисляков, В. В. Филиппов и И. А. Школяренко представили результаты, учитывающие вероятностный характер условий движения при наличии и от-

сутствии светофорного управления [78]. Их исследование рассматривает весь процесс дорожного движения как вероятностную систему, но не учитывает вероятностные факторы поведения водителей.

Концепция клеточных автоматов, предложенная Дж. фон Нейманом, приобрела популярность в 1980-х годах [79]. Основная идея концепции заключалась в описании природы явлений через набор правил (компьютерных программ), а не традиционные уравнения. В 1992 году была создана модель Нагеля-Шрекенберга [80], где дорога и время разбиваются на дискретные промежутки (клетки), и предполагается, что в каждый момент времени в одной клетке может находиться только одно автотранспортное средство. Такая система представляет собой дискретный аналог непрерывных моделей.

1.1.3 Современные модели движения транспортных потоков

На рубеже XX и XXI веков стало очевидно, что основу современной цивилизации составляют города-агломерации, сосредоточившие человеческую деятельность. Многие из этих мегаполисов сталкиваются с проблемами неэффективной экономики, разрушения окружающей среды и низкого качества жизни из-за несовершенства городских транспортных систем [2].

В связи с этим возросли требования к точности и сложности моделей управления дорожным движением. Без транспортного моделирования стало невозможно планирование и модернизация транспортных объектов, жилых и деловых комплексов, схем организации дорожного движения, мер при чрезвычайных ситуациях и других практических задач.

В 1994 году на основе модели клеточных автоматов К. Даганзо, П. Варайя и А. Б. Куржанский [81–83] разработали метод оптимизации движения на скоростных трассах, включающий ограничения на въезд. Этот метод способствует более оптимальному движению на скоростных трассах за счет уменьшения эффекта «бутылочного горлышка», который часто возникает при въезде на загруженные полосы.

В период с 1996 по 2002 год Б. Кернером разрабатывалась эмпирическая теория трех фаз движения, фокусирующуюся на переходе от свободного потока к плотному в условиях интенсивного трафика. Кернер выделяет три фазы: сво-

бодный поток, синхронизированный поток и широкий движущийся кластер машин (локальный движущийся затор), в то время как ранее рассматривались только свободный и плотный потоки. В 2002 году Кернер и Кленов предложили стохастическую трехфазную модель, основанную на этой теории [84—86].

В 1998 году Ю. Е. Нестеров и А. де Пальма предложили модель стационарной динамики, которая предполагает, что водители выбирают маршруты, минимизирующие время в пути, основываясь на текущей дорожной ситуации, что соответствует первому принципу Вардропы [87]. В начале 2010-х годов А. В. Гасников и Ю. Е. Нестеров усовершенствовали эту модель, предложив трехстадийную модель стационарной динамики, которая позволяет более точно учитывать различные аспекты движения транспортных потоков [88; 89].

Один из наиболее распространенных способов моделирования транспортных потоков — это использование моделей следования за лидером (Car-Following Models, CFM), основанных на микроскопическом подходе, который описывает поведение каждого транспортного средства. В таких моделях ускорение автомобиля определяется как его собственными характеристиками, так и характеристиками впередиидущего транспортного средства. Динамика транспортного потока описывается системой дифференциальных уравнений, которая может включать временные задержки, позволяющие учитывать реакции водителей и взаимодействия между машинами.

Наиболее популярной моделью следования за лидером является модель «разумного водителя» (Intelligent Driver Model, IDM) [17], предложенная М. Трейбером в 1999 году. [90; 91]. Эта модель, а также ее различные модификации [31—36] имеют вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений и используются для описания движения на однополосной дороге, причем каждый автомобиль потока подстраивает свою скорость относительно впередиидущего.

Некоторые современные исследователи используют подходы, основанные на модификациях модели LWR, ее дифференциально-разностных и разностных аналогах. Это связано с ограниченностью доступных данных, что затрудняет применение более сложных моделей в прикладных расчетах. В 2006 году исследования были сосредоточены на решении начально-краевых задач для уравнений на графах транспортных сетей [92]. Кроме того, такие модификации находят применение в задачах управления транспортными потоками. Например, подход Берклиевской группы (А. Б. Куржанский, А. А. Куржанский,

П. Варайя, Р. Хоровитц и другие [21; 22]) демонстрирует эффективность этих методов в управлении дорожным движением.

На сегодняшний день существует множество подходов к созданию математических моделей транспортных потоков, которые учитывают разные уровни детализации. К ним относятся клеточные автоматы, микроскопические и макроскопические модели, а также гибридные подходы, объединяющие элементы как микроскопических, так и макроскопических моделей. Все эти подходы предоставляют исследователям возможность решать различные прикладные задачи в области моделирования и управления дорожным движением, создавая новые модели или модернизируя уже существующие [93]. Каждый из методов по-разному описывает поведение транспортных средств и взаимодействия между ними. В таблице 1.1 представлены современные математические модели, их типы и ссылки на ключевые исследования по их разработке и адаптации для практического использования.

Таблица 1.1 — Современные математические модели.

Авторы	Типы моделей	Ссылки на литературу
Chechina, et al.	Модели клеточных автоматов	[7; 8; 24; 25]
Wang, Yi, Jiang, et al.	Гетерогенные модели с обратной связью	[9; 94]
Pan, Deng, Lu, et al.	Модели динамического управления, основанные на переходе состояний	[10]
Li, Shihao, Zhou, et al.	Микроскопические модели с учетом прогноза риска столкновений	[11; 36]
Storani, Facundo, et al.	Гибридные модели, объединяющие макроскопические и микроскопические	[23]
Zhang, Zhao, et al.	Модели, использующие машинное обучение	[12]
Zhai, Cong, Wu, et al.	Решеточные гидродинамические модели с обратной связью	[13; 95—97]
Zhai, Cong, Li, et al.	Модели для дорог на горных автомагистралях	[14; 98]
Hosen, et al.	Гетерогенные многослойные модели	[15; 16]
Fedotkin, et al.	Вероятностные модели	[6; 28]

Математическое моделирование транспортных потоков служит эффективным инструментом для оптимизации управления транспортными системами, предоставляя возможности как для анализа текущих сетей, так и для проектирования новых. Внедрение таких моделей способствует улучшению транспортной инфраструктуры, более эффективной оценке различных систем управления дорожным движением и формированию новых подходов к планированию и эксплуатации транспортных сетей. Моделирование движения транспорта применимо не только для планирования и улучшения транспортных систем, но и для оптимизации логистических процессов и прогноза транспортного спроса, что ведет к улучшению управления транспортными системами и повышению общей эффективности сетей. Использование моделирования помогает снизить затраты, минимизировать риски и повысить эффективность транспортных систем, что в конечном итоге улучшает качество жизни в городах [3–5].

Таким образом, математическое моделирование транспортных потоков, обладающее более чем столетней историей, представляет собой неотъемлемый элемент современного управления дорожным движением. Математические модели активно используются для планирования и модернизации транспортных объектов, организации дорожного движения и решения множества практических задач, включая повышение безопасности, улучшение качества обслуживания и снижение негативного воздействия на окружающую среду. В эпоху цифровизации и больших данных точные математические модели становятся особенно важными, обеспечивая прочную основу для создания интеллектуальных транспортных систем.

1.2 Подробный обзор классических моделей движения транспортных потоков

В настоящее время существует множество подходов для построения математических моделей движения транспортных потоков [17]. Каждый из них обладает своими сильными сторонами и применяется в конкретных ситуациях, но у каждого подхода также имеются и свои недостатки. В таблице 1.2

представлены основные группы математических моделей транспортных потоков, а также их ключевые преимущества и недостатки.

Выбор конкретной математической модели определяется целями и задачами каждого отдельного исследования. Следует отметить, что каждая модель обладает определенной областью применения и служит ценным инструментом при условии правильного использования.

1.2.1 Макроскопические модели транспортных потоков

Макроскопические модели описывают движение транспортных средств на уровне агрегированных данных, таких как средняя скорость и плотность транспортного потока. В таких моделях транспортный поток уподобляется сжимаемой жидкости, что позволяет исследовать общие характеристики движения на дороге без учета индивидуального поведения отдельных автомобилей. Основное применение макроскопических моделей — анализ пропускной способности дорожных сетей и оценка эффективности управления движением. Макроскопические модели особенно полезны для построения масштабных дорожных сетей [17].

Модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR) (1955) является первой макроскопической (гидродинамической) моделью однополосного транспортного потока, в которой поток автотранспортных средств рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости [53; 54].

В модели LWR предполагается, что существует взаимно однозначная зависимость между скоростью $v(t, x)$ и плотностью потока $\rho(t, x)$, а также выполняется закон сохранения массы, который интерпретируется как закон сохранения количества транспортных средств.

Зависимость между скоростью и плотностью можно выразить условием $v(t, x) = V(\rho(t, x))$. Если $V'(\rho) < 0$, то скорость потока снижается с увеличением плотности. Количество транспортных средств, проходящих за единицу времени через заданное сечение (интенсивность потока), можно обозначить за $Q(\rho) = \rho V(\rho)$. Для однополосного потока принято считать, что $Q''(\rho) < 0$, что говорит о вогнутости функции [99]. Это условие означает, что движение

Таблица 1.2 — Сравнение основных типов математических моделей движения транспортных потоков.

Типы моделей	Краткое описание	Плюсы	Минусы
Макроскопические модели	Транспортный поток рассматривается как одномерная сжимаемая жидкость	Демонстрируют основные тенденции движения	Обладают высокой степенью обобщения, не учитывают многие элементы дороги
Мезомодели	Транспортный поток моделируется с учетом особенностей поведения водителей	Учитывают особенности поведения водителей	Обладают низкой детализацией
Модели клеточных автоматов	Транспортный поток разбивается на клетки и время рассматривается как дискретное	Обладают высокой скоростью и эффективностью вычислений	Имеют условную дискретизацию пространства и времени
Вероятностные модели	Основываются на теории вероятностей и позволяют учитывать случайные факторы	Учитывают неопределенность и случайные факторы в данных	Дают приближенные результаты
Микроскопические модели	Моделируют поведение каждого отдельного автомобиля	Обладают высоким уровнем детализации и способны учесть множество мелких деталей и взаимодействий	Требуют больших вычислительных ресурсов при практическом применении, чувствительны к ошибкам

по двум одинаковым и независимым дорожным полосам с разными плотностями менее предпочтительно, чем движение по этим же полосам с одинаковой плотностью, равной половине суммы первоначальных плотностей.

Закон сохранения массы в таком случае выражается уравнением:

$$\oint_{\Gamma} \rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt = 0,$$

которое справедливо для любого кусочно-гладкого контура Γ . Соотношение выполняется и для разрывной функции, при этом под разрывом трактуется граница затора, характеризующаяся резким увеличением плотности.

Модель Танака (1963) является частным случаем LWR модели [100]. В этой модели рассматривается однополосный поток транспортных средств, причем скорость всех автомобилей не превышает скорость v_{max} [43; 100]. Плотность $\rho(v)$ при этом выражается следующим образом:

$$\rho(v) = \frac{1}{d(v)},$$

где $d(v) = L + c_1 v + c_2 v^2$ — среднее (безопасное) расстояние между двумя транспортными средствами при заданной скорости движения потока v ; L — средняя длина автомобиля; c_1 — время реакции водителя; c_2 — коэффициент дорожных условий. Расстояние $d(v)$ при нормальных дорожных условиях [43] равно:

$$d(v) = 5.7 + 0.504v + 0.0285v^2.$$

Для мокрого асфальта [101]:

$$d(v) = 5.7 + 0.504v + 0.0570v^2.$$

Для обледенелой дороги [101]:

$$d(v) = 5.7 + 0.504v + 0.1650v^2.$$

Модель Пейна (1971) основывается на уравнении сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0,$$

в котором отсутствует зависимость скорости от плотности [76]. Это означает, что желаемая скорость устанавливается мгновенно. Для скорости потока используется следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}v = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left(V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right),$$

которое описывает стремление реальной скорости v к желаемой скорости:

$$V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Параметр τ представляет собой время релаксации, а транспортный поток можно рассматривать как сжимаемую неньютоновскую жидкость [102]. С учетом этого, полученную систему уравнений можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho \\ D(\tau\rho) & v \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ V - v \end{pmatrix}.$$

Это уравнение демонстрирует строгую гиперболичность, так как матрица при $\partial/\partial x$ имеет различные вещественные собственные значения.

Модель Уизема (1974) расширяет LWR модель, учитывая «дальнозоркость» водителей. «Дальнозоркость» означает, что скорость автомобиля уменьшается при увеличении плотности трафика и увеличивается при его уменьшении [99]:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{D(\rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad D(\rho) > 0.$$

Из этого выражения с учетом закона сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = 0$$

получается уравнение типа Бюргерса — закон сохранения массы с нелинейной дивергентной диффузией:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(Q(\rho))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Диффузионные слагаемые означают, что при увеличении плотности потока наблюдается уменьшение его скорости, а при уменьшении плотности, наоборот, его скорость увеличивается.

1.2.2 Мезомодели транспортных потоков

Мезомодели учитывают особенности поведения водителей, не прибегая к моделированию каждой отдельной машины. В литературе под мезомоделями обычно понимают «кинетические модели». Этот метод базируется на выводе макроскопической модели из микроскопического взаимодействия транспортных средств с использованием кинетического уравнения, что позволяет объединить детализированное описание движения отдельных транспортных средств и обобщенные характеристики транспортного потока [17].

Кинетическая модель Пригожина-Больцмана (1960) основана на концепции обобщенной плотности $\rho(t, x, v)$, которая представляет собой функцию плотности вероятности положения x и скорости v для транспортных средств в момент времени t [103].

Пригожин рассматривал три ключевых процесса, которые влияют на изменения обобщенной плотности ρ . Первый — это конвекция, возникающая из-за движения транспортных средств. Второй — непрерывные изменения плотности ρ во времени в фиксированной точке. Третий — изменение скорости транспортных средств, которое может происходить двумя способами: либо как непрерывное изменение, обусловленное стремлением водителя поддерживать желаемую скорость, либо в виде резких скачков, возникающих при взаимодействии более быстрых автомобилей с медленными.

Уравнение Пригожина-Больцмана для функции распределения потока $\rho(t, x, v)$ имеет вид:

$$\frac{\partial \rho(t, x, v)}{\partial t} + v \frac{\partial \rho(t, x, v)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \rho(t, x, v)}{\partial t} \right)_{(con)} + \left(\frac{\partial \rho(t, x, v)}{\partial t} \right)_{(dis)}.$$

Левая часть уравнения представляет собой оператор потока, примененный к функции распределения. Правая часть — это формула Пригожина, которая включает два различных распределения: процесс релаксации (*con*) и процесс коллизии (*dis*).

Непрерывное ускорение до желаемой скорости определяется как экспоненциальный процесс релаксации и зависит от желаемого распределения скоростей

$w(t, x, v)$ транспортных средств со скоростью v :

$$\left(\frac{\partial \rho(t, x, v)}{\partial t} \right)_{(con)} = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\rho \frac{w(t, x, v) - v}{\tau} \right),$$

где τ — время релаксации.

Модель Пригожина-Хермана (1971) является обобщенным вариантом модели Пригожина-Больцмана [104], за счет изменения правой части уравнения [100; 105]. Для дискретного процесса замедления предполагается, что быстрые транспортные средства, догоняющие более медленные с вероятностью p , будут перестраиваться на другую полосу и продолжать движение без торможения. С вероятностью $(1 - p)$ быстро идущее транспортное средство замедлится.

Изменение плотности вероятности скорости v в точке x обусловлено балансом двух процессов: увеличением скорости v за счет притока транспортных средств, движущихся с более высокой скоростью v_0^f , и снижением скорости v в результате оттока транспортных средств, которые изначально двигались с этой скоростью, но уменьшили ее до v_1^f :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho(t, x, v)}{\partial t} \right)_{(dis)} &= \\ &= (1 - p) \left(\int_{v_0^f > v} (v_0^f - v) \varphi(t, x, v_0^f, x', v) dv_0^f - \int_{v > v_0^s} (v_0^f - v) \varphi(t, x, v_0^s, x', v) dv_0^s \right). \end{aligned}$$

В этом уравнении учитывается парное взаимодействие транспортных средств. Одно транспортное средство с высокой скоростью v_0^f находится в позиции x , а второе, более медленное, в позиции x' с начальной скоростью x_0^s . Принципиальное упрощение модели заключается в том, что она не учитывает конечные размеры и пространственные координаты транспортных средств, представляя их движение как хаотическое [106]:

$$\varphi(t, x, v_0^f, x', v_0^s) = \varphi(t, x, v_0^f, x, v_0^s) = \rho(t, x, v_0^f) \rho(t, x, v_0^s).$$

Модели Пригожина-Больцмана и Пригожина-Хермана были обобщены Павери-Фонтаном (1975) [107; 108], который усовершенствовал статистическую обработку желаемой скорости в рамках оригинальной концепции Пригожина.

При этом базовое поведение водителя, предложенное Пригожиным, сохранилось неизменным [109].

Модель Хелбинга (2001) представляет собой усовершенствованную модель Пригожина, которая устраняет некоторые ее недостатки [110; 111]. В модели используются методы статистической физики, применяемые для описания сыпучих материалов, что учитывает склонность транспортных потоков собираться в толпы и распадаться на отдельные потоки [112]. В отличие от других кинетических моделей, в модели Хелбинга динамическая равновесная скорость зависит от плотности и средней скорости в точке взаимодействия:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\rho \partial x} = \frac{v_0 - v}{\tau} - \frac{v_0(\theta + \theta_0)}{\tau A(\rho_{max})} \left(\frac{\rho_a T}{1 - \rho_a / \rho_{max}} \right)^2 B(\delta_v).$$

Изменение средней скорости v со временем зависит от нескольких факторов. Во-первых, это распространение скоростного профиля. Во-вторых, давление, выражающее эффект дисперсии, связанный с конечным множеством скоростей. В-третьих, ускорение к желаемой средней скорости v_0 с временем релаксации водителя τ . Наконец, нелокальное торможение в ответ на дорожную ситуацию в точке взаимодействия $x_a = x + \gamma(1/(\rho_{max} + TV))$, где $1 < \gamma < 2$ — параметр модели, ρ_{max} — максимальная плотность, а T — среднее время продвижения.

Функция $B(\delta_s)$ в уравнении Хелбинга — это фактор Больцмана:

$$B(\delta_s) = \delta_v \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + (1 + \delta_v^2) \int_{-\infty}^{\delta_v} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz,$$

где коэффициент δ_v равен выражению:

$$\delta_v = \frac{v - v_0}{\sqrt{\theta - \theta_a}}$$

и учитывает скорость и дисперсию в актуальной позиции x и в точке взаимодействия x_a .

1.2.3 Модели клеточных автоматов

Модели клеточных автоматов описывают дорогу как сетку, состоящую из дискретных клеток, при этом время также рассматривается как дискретное. В большинстве случаев [81; 113], предполагается, что в одной клетке может находиться не более одного автомобиля. Такой подход приводит к разностным аналогам макроскопических уравнений, позволяя описывать транспортный поток с помощью правил, регулирующих перемещение автомобилей между клетками. Эти правила включают важные аспекты движения, такие как ускорение, замедление, а также вероятность смены полосы движения.

Модель Нагеля-Шрекенберга (1992) является первой моделью, использующей концепцию клеточных автоматов [80; 114; 115], введенную Дж. фон Нейманом в 50-е годы XX века [116].

Модель предполагает, что на каждом шаге $m \rightarrow m + 1$ состояние всех транспортных средств обновляется в соответствии с несколькими правилами, которые воспроизводят основные свойства транспортного потока.

1. Правило ускорения, отражающее стремление автомобиля двигаться максимально быстро, но не превышая допустимую скорость:

$$v_n(m + 1) = \min(v_n(m) + 1, v_{max}).$$

2. Правило торможения, гарантирующее отсутствие столкновений:

$$v_n(m + 1) = \min(v_n(m) + 1, s_{n+1}(m) - s_n(m) - d),$$

где $d \approx 7.5$ метров.

3. Правило случайных возмущений, учитывающие различия в поведении транспортных средств:

$$v_n(m + 1) = \begin{cases} \max(v_n(m) - 1, 0) & \text{с вероятностью } p, \\ v_n(m) & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

4. Правило движения:

$$s_n(m + 1) = s_n(m) + v_n(m).$$

Существует множество модификаций модели Нагеля-Шрекенберга. Например, модель Нагеля-Херманна (1993) [117] представляет собой непрерывную версию модели Нагеля-Шрекенберга, которая была обобщена в модели Зауэрмана-Херманна (1998) [118]. Модель Брилона-Ву (1999) [119] включает вероятностный элемент в процесс ускорения, что позволяет учитывать случайные изменения скорости автомобилей и повысить точность моделирования транспортных потоков. Существуют также методы, позволяющие перейти от моделей типа Нагеля-Шрекенберга к гидродинамическим моделям [120; 121] и обратно [122].

Модель Буслаева (2004) использует концепцию клеточных автоматов для моделирования транспортного потока на кольцевой дороге [123; 124]. Модель описывается следующим уравнением:

$$n_i(m+1) = n_i(m) + r_i(m) + q_{i-1}(m) - s_i(m) - q_i(m), \quad s_i(m) = \alpha_i q_i(m),$$

где $n_i(m)$ — число автомобилей в клетке i в момент времени m .

В модели рассматривается кольцевая топология транспортной сети без въездов и выездов, предполагая:

$$q_i(m) = (1 + \alpha_i)^{-1} Q_i(n_i(m)),$$

что является аналогом схемы бегущего счета для модели LWR.

Разностные модели клеточных автоматов могут быть обобщены на транспортные сети с более сложной топологией. Для этого требуется знание матрицы перемешивания в каждом узле графа транспортной сети. В более сложных сетях для разрешения конфликтных ситуаций может потребоваться дополнительная информация, помимо матрицы перемешивания.

Обобщение модели на сети с более сложной топологией также включает в себя учет различных типов транспортных средств, их вероятностных характеристик и случайного поведения водителей, что позволяет создавать более реалистичные и точные модели транспортных потоков [buslaev2016dynamical buslaev2016bernoulli]. Например, для моделирования городских сетей необходимо учитывать наличие перекрестков, пешеходных переходов и других элементов городской инфраструктуры.

1.2.4 Вероятностные модели

Вероятностные модели транспортных потоков основаны на теории вероятности. Они позволяют учитывать случайные факторы, влияющие на движение транспортных средств, и предсказывать вероятность различных событий на дороге. Точечный случайный поток на прямой задается вероятностной мерой на множестве всех счетных локально-конечных (то есть конечных на каждом ограниченном интервале) подмножеств прямой и записывается в виде согласованной системы вероятностей:

$$P(I_1, k_1; \dots; I_n, k_n),$$

причем в интервалах I_j , $j = 1, \dots, n$ находится ровно k_j частиц [18].

Для более точного определения таких распределений существуют два основных подхода. Первый — теория восстановления [125], которая представляет собой более простой метод, применимый только в одномерных случаях. Второй — теория гиббсовских точечных полей [126; 127], которая тесно связана с физикой и может использоваться в многомерных сценариях.

Самый простой случайный поток — пуассоновский [128]. На интервал $[-N, N]$ независимо и равномерно бросается $M = [\rho N]$ случайных точек, где $\rho > 0$ — некоторая константа, называемая плотностью. Биномиальная вероятность $P_{N,M}(k, I)$, которая описывает вероятность того, что ровно k точек попадут в конечный интервал I , при $N \rightarrow \infty$ стремится к пуассоновскому выражению:

$$P(k, I) = \frac{\{\rho|I|\}^k}{k!} e^{-\rho|I|}.$$

Более общие потоки (не пуассоновские) строятся на полупрямой $[0, \infty)$. Случайные точки $x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, \dots$ определяются как суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$ с распределением $G(x)$:

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots$$

Для определения потока на всей прямой необходимо выбрать начальную точку, относительно которой будут измеряться независимые величины влево и вправо. Для выбора такой точки необходимо воспользоваться одним

из ключевых утверждений теории восстановления [129]. Выражение $P(t, t + \Delta t)$ представляет собой вероятность того, что в интервал $(t, t + \Delta t)$ попадет ровно одна точка x_n . Тогда если ξ_i имеют плотность, то на полупрямой существует предел:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} P(t, t + \Delta t),$$

который равен $\rho = (E\xi)^{-1}$. Тогда предельная плотность вероятности того, что расстояние от точки t до первой случайной точки $x_i > t$ больше s , равна $\rho(1 - G(s))$.

Первую после начала координат точку потока следует взять на случайном расстоянии с полученной плотностью. Расстояния же между точками будут по-прежнему независимыми с функцией распределения $G(x)$.

Маркированные потоки представляют собой точечный процесс, где каждой точке x_i сопоставлена величина σ_i , принимающая значения в некотором множестве S . Эту величину в разных случаях называют маркой или спином в точке i и говорят о случайном маркированном точечном множестве, которое определяется мерой на счетных множествах пар (x_i, σ_i) .

1.2.5 Микроскопические модели транспортных потоков

Микроскопические модели транспортных потоков моделируют движение каждого автомобиля индивидуально [130]. Такой подход позволяет достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с усредненным макроописанием.

В микроскопических моделях каждое транспортное средство пронумеровано и рассматривается как отдельная частица со своей скоростью и целью. Ускорение конкретного транспортного средства зависит от соседних автомобилей, причем наибольшее влияние на поведение водителя оказывает впередиидущий автомобиль (лидер).

Микроскопические модели транспортных потоков в основном представлены моделями следования за лидером (Car-Following Models, CFM), где ускорение автомобиля определяется на основе его собственных характеристик и характеристик впередиидущего автомобиля.

Модель следования за лидером (1953) предполагает, что каждый водитель изменяет свою скорость в соответствии с изменением скорости впереди идущего автомобиля [17; 100; 130—134]. Простейший вариант этой модели был предложен Л. А. Пайпсом [135]. Ускорение автомобиля в модели Пайпса рассчитывается следующим образом:

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = \frac{1}{\tau} (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)),$$

где τ — время согласования скоростей двух соседних автомобилей, $\dot{x}_i(t)$ и $\ddot{x}_i(t)$ — скорость и ускорение i -го автомобиля соответственно.

Модель Пайпса не описывает свойств неустойчивости, процессов возникновения ударных волн и заторов, поэтому существует ряд ее модификаций. Например, в работе Д. Чандлера [136] (1958) предложено ввести задержку аргумента $t_d \approx 1.3$ секунды, что соответствует времени реакции водителя на изменение скорости лидирующего автомобиля. Множитель $1/\tau$ интерпретируется как коэффициент чувствительности α , характеризующий скорость реакции водителя на изменение скорости лидера. С учетом этих предположений модель можно переформулировать в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + t_d) = \alpha (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)).$$

При константной α условие неустойчивости имеет вид $t_d/\tau > 1/2$, что позволяет моделировать волны и заторы.

Модель «Дженерал Моторс» (1959) является одной из первых нетривиальных микроскопических моделей однополосного транспортного потока. Она была предложена сотрудниками концерна «Дженерал Моторс» Д. Газисом, Р. Херманом и Р. Потсом [137]. В этой модели вместо постоянного коэффициента $1/\tau$ используется динамический коэффициент чувствительности, который изменяется в зависимости от дистанции до лидирующего автомобиля. При уменьшении дистанции коэффициент чувствительности возрастает, а при увеличении — уменьшается:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + t_d) = \alpha \frac{\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)}{x_i(t) - x_{i+1}(t)}, \quad \alpha > 0.$$

После интегрирования уравнение принимает следующий вид:

$$\dot{x}_{i+1}(t + t_d) = \ln(\rho_{max}(x_i(t) - x_{i+1}(t))),$$

где ρ_{max} — константа, описывающая движение автомобилей в плотном потоке на очень близком расстоянии «бампер-к-бамперу».

Если транспортный поток является стационарным, то плотность ρ выражается формулой $\rho = 1/(x_i(t) - x_{i+1}(t))$, а так как скорость в стационарном режиме постоянна, то ее можно выразить следующим образом:

$$v = \alpha \ln \frac{\rho_{max}}{\rho}, \quad \rho > \frac{1}{L},$$

где L — средняя длина автомобиля. Эта зависимость была экспериментально обнаружена Х. Гринбергом (1959) по данным для туннеля Линкольна в Нью-Йорке [17].

В своей работе Д. Газис, Р. Херман и Р. Розэри (1961) [138] предложили обобщение модели:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + t_d) = \alpha \frac{(\dot{x}_{i+1}(t + t_d))^{m_1}}{(x_i(t) - x_{i+1}(t))^{m_2}} (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)), \quad \alpha > 0,$$

где $m_1 < 1$ и $m_2 > 1$ — эмпирически подбираемые константные величины ($m_1 \approx 0.8$, а $m_2 \approx 2.8$). На основе этой модели путем интегрирования можно получить уравнение состояния транспортного потока:

$$V(\rho) = V^0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^{m_2-1} \right)^{\frac{1}{1-m_1}},$$

где V^0 — скорость свободного движения (желаемая скорость, максимально возможная скорость), а $V(\rho)$ — скорость движения в потоке с плотностью ρ . При $m_1 = 0$ и $m_2 = 0$ получается уравнение состояния транспортного потока Б. Гриншилдса [17].

Модель оптимальной скорости Ньюэлла (1961) является одной из первых нелинейных моделей оптимальной скорости [56]. В модели Ньюэлла предполагается, что для каждого водителя существует «безопасная» скорость движения, зависящая от дистанции до лидера:

$$v_{i+1}(t + \tau) = V \left(\frac{1}{x_i(t) - x_{i+1}(t)} \right),$$

где $V'(\rho) < 0$, а τ — время, характеризующее реакцию водителей, которое определяется из зависимости интенсивности потока от плотности ρ в окрестности ρ_{max} :

$$\tau = -\frac{L}{Q'(\rho_{max})}.$$

В случае, когда средняя длина транспортного средства $L \approx 5.7$ метра, время реакции водителя равно $\tau \approx 0.4$ секунды [99]. Вместо средней длины автомобиля L можно рассматривать среднее расстояние между соседними автомобилями в заторе d , равное $d \approx 7.5$ метров.

Поведение потока вблизи точки $\rho_{max} \approx 1/L$ можно описать следующим образом:

$$V(\rho) = \frac{1/\rho - L}{\tau}.$$

Для левой окрестности точки ρ_{max} получается следующее выражение:

$$Q(\rho) = -\frac{L}{\tau} (\rho - \rho_{max}).$$

Малое возмущение в модели приводит к развитию затора, если выполнено условие неустойчивости:

$$2\rho^2|V'(\rho)|\tau < 1.$$

Модель оптимальной скорости Ньюэлла применяется для анализа динамики транспортных потоков и исследования процессов образования заторов [132].

Модель Трайбера «разумного водителя» (Intelligent Driver Model, IDM) (1999) объединяет в себе модель следования за лидером и модель оптимальной скорости [90; 91]. В общем виде ускорение каждого автомобиля в модели зависит от текущей скорости самого автомобиля, скорости впереди идущего автомобиля и расстояния между ними:

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = F(x_i(t) - x_{i+1}(t), \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t), \dot{x}_{i+1}(t)).$$

Калибровки и ряд численных экспериментов, проведенных М. Трайбером привели общий вид модели к следующему:

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = a_{i+1} \left[1 - \left(\frac{\dot{x}_{i+1}(t)}{V_{i+1}^0} \right)^\delta - \left(\frac{d_{i+1}^*(\dot{x}_{i+1}(t), \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t))}{x_i(t) - x_{i+1}(t)} \right)^2 \right],$$

где слагаемое

$$a_{i+1} \left[1 - \left(\frac{\dot{x}_{i+1}(t)}{V_{i+1}^0} \right)^\delta \right]$$

описывает динамику ускорения автомобиля на дороге, а слагаемое

$$-a_{i+1} \left(\frac{d_{i+1}^*(\dot{x}_{i+1}(t), \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t))}{x_i(t) - x_{i+1}(t)} \right)^2$$

описывает торможение, вызванное взаимодействием с лидером.

Варьирование параметра δ позволяет регулировать поведение автомобилей при разгоне (при $\delta = 1$ происходит экспоненциальный по времени разгон, при $\delta \rightarrow \infty$ происходит разгон с постоянным ускорением a_i вплоть до достижения желаемой скорости V_i^0). Тормозящий член определяется отношением желаемой дистанции d_i^* (безопасным расстоянием) к фактической дистанции $x_{i-1}(t) - x_i(t)$. Желаемая дистанция задается соотношением:

$$d_{i+1}^*(\dot{x}_{i+1}(t), \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)) = d_i + T_i \dot{x}_i(t) - \frac{\dot{x}_i(t)(\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t))}{2\sqrt{a_i b_i}},$$

где d_i — расстояние между автомобилями, b_i — ускорение «комфортного» торможения ($a_i \approx b_i \approx 2\text{м/с}^2$), а T_i — аналог времени реакции водителя.

Величина $T_i \dot{x}_i(t)$ характеризует расстояние, которое проедет водитель за время, необходимое для того, чтобы среагировать на изменившуюся ситуацию на дороге. В случае, когда необходимо торможение ($\dot{x}_{i-1}(t) < \dot{x}_i(t)$), водитель успеет снизить свою скорость до скорости впередиидущего автомобиля (двигаясь с ускорением торможения b_i) до того, как он достигнет его, только если расстояние между этими автомобилями на момент начала реагирования водителя было не менее

$$\frac{\dot{x}_i(t)(\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t))}{2\sqrt{a_i b_i}}.$$

Ситуация, когда необходимо ускориться ($\dot{x}_{i-1}(t) > \dot{x}_i(t)$), рассматривается аналогичным образом. Из-за стремления охватить две различные ситуации: ускорение и торможение — был введен знаменатель $2\sqrt{a_i b_i}$. Такой подход позволяет учитывать оба режима движения, что делает модель более универсальной.

Глава 2. Построение новой математической модели движения транспортного потока

2.1 Построение модели

Построим новую математическую модель движения транспортного потока, основанную на микроскопическом подходе и концепции следования за лидером. Модель будет представлять собой систему дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом и описывать движение $N \in \mathbb{N}$ автомобильных транспортных средств (АТС). Обозначим за n номер транспортного средства в потоке ($n \geq 1$). Тогда $x_n(t)$ будет обозначать положение переднего бампера транспортного средства n в момент времени t , а $\dot{x}_n(t)$ и $\ddot{x}_n(t)$ будут обозначать его скорость и ускорение соответственно (рисунок 2.1).

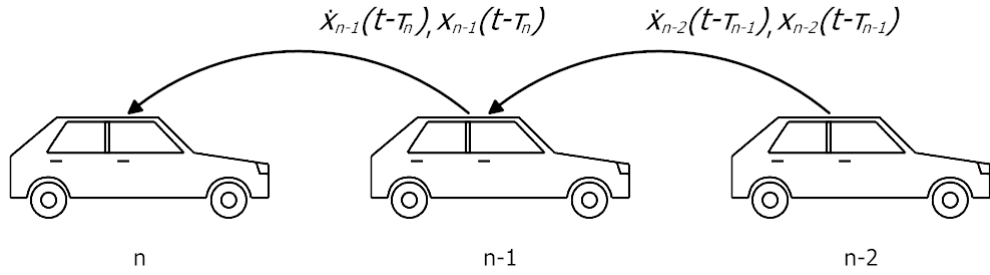


Рисунок 2.1 — Движение транспортных средств друг за другом.

Весь процесс движения автомобиля разделим на две фазы: разгон и торможение. Такое разделение обусловлено тем, что водитель, управляя автомобилем, может либо нажимать на педаль газа, увеличивая скорость, либо на педаль тормоза или сцепления, уменьшая скорость. В каждый момент времени t автомобиль либо разгоняется, либо тормозит. Для описания такого поведения введем релейную функцию вида:

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n > S + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n \leq S + l_n, \end{cases}$$

где $\Delta x_n = x_{n-1}(t - \tau_n) - x_n(t)$ — расстояние между соседними автомобилями, причем $\dot{x}_0(t - \tau_1) = L$, где L — любое расстояние, описывающее дистанцию, которую проедет первый автомобиль до остановки (может быть равно бесконечности $L = \infty$), например, это может быть расстояние до светофора

или иного препятствия. Параметр τ_n — время реакции водителя, l_n — сумма безопасного расстояния между двумя соседними автомобилями и длины впередиидущей машины $l_n = l_{safe,n} + l_{veh,n-1}$ ($l_{veh,0} = 0$), а S — остановочный путь. Под остановочным путем будем понимать расстояние, которое проходит транспортное средство с момента обнаружения водителем опасности до полной остановки [139]. Для расчета этой величины воспользуемся хорошо известной формулой [140]:

$$S = (\tau_n + \tau_{b,n})v + v^2/2\mu g, \quad (2.1)$$

где $\tau_{b,n}$ — время срабатывания тормозной системы, v — текущая скорость транспортного средства, μ — коэффициент трения скольжения, а g — ускорение свободного падения. Таким образом, получаем релейную функцию, которая будет переключать фазы движения автомобиля:

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n > (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n \leq (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n. \end{cases} \quad (2.2)$$

$R_n = 1$ соответствует первой фазе движения — разгону. При разгоне преследующему автомобилю необходимо подстраивать свою скорость относительно скорости впередиидущего автомобиля, учитывая расстояние до него. В случае достаточно большого расстояния между транспортными средствами, преследующий автомобиль должен разгоняться до своей максимальной желаемой скорости $v_{max,n}$, а влияние впередиидущего автомобиля, в таком случае, должно быть минимальным. В противоположной же ситуации, когда расстояние между автомобилями небольшое, скорость преследующего автомобиля в большей степени должна зависеть от скорости впередиидущего. Такое поведение можно получить, используя логистическую функцию [141], максимальное значение которой равно $v_{max,n}$, а минимальное — скорости впередиидущего автомобиля:

$$P_n = \frac{v_{max,n} - V_n}{1 + \exp[k_n(-\Delta x_n + S_n)]} + V_n. \quad (2.3)$$

В формуле (2.3) функция V_n имеет вид:

$$V_n = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau_n), v_{max,n}) \quad \text{при } n > 1, \quad V_1 = 0.$$

Она введена для того, чтобы учесть ограничение скорости автомобиля $v_{max,n}$. Коэффициент $k_n > 0$ — скорость логистического роста, показывающая насколько плавно водитель преследующего автомобиля подстраивает свою скорость под

впередиидущий. Параметр логистической кривой S_n имеет вид:

$$S_n = (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n + s_n,$$

где коэффициент s_n равен расстоянию, пройденному за τ_n времени со скоростью сближения: $s_n = \tau_n \Delta \dot{x}_n$, где $\Delta \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1}(t - \tau_n) - \dot{x}_n(t)$ — разница скоростей двух соседних автомобилей ($\dot{x}_0(t - \tau_1) = 0$). Параметр s_n отражает расстояние, начиная с которого влияние впередиидущего автомобиля перестает превалировать над преследующим. Очевидно, что параметр s_n строго больше, чем остановочный путь автомобиля (рисунок 2.2).

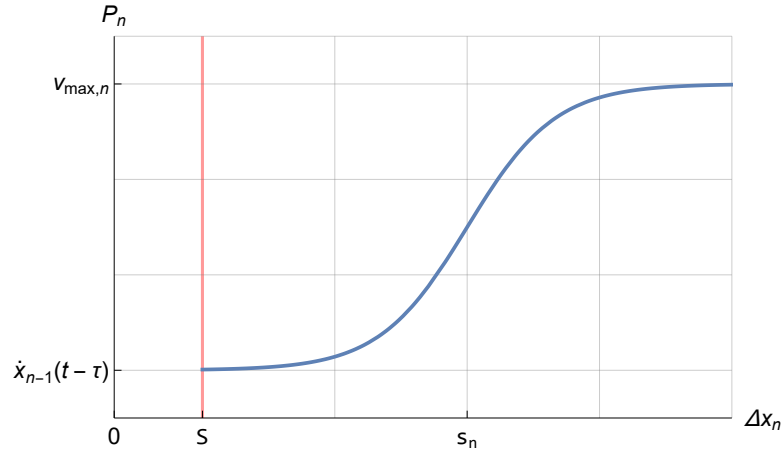


Рисунок 2.2 — Логистическая функция.

Таким образом, получаем уравнение, описывающее первую фазу движения — разгон:

$$\ddot{x}_n(t) = a_n (P_n - \dot{x}_n(t)),$$

где $a_n > 0$ — коэффициент, отражающий обратное время согласования скоростей двух соседних автомобилей и зависящий от их мощностей. Он описывает техническую характеристику автомобиля, отвечающую за интенсивность разгона.

$R_n = 0$ соответствует второй фазе движения — торможению. Преследующий автомобиль должен снижать свою скорость в зависимости от отношения разницы скоростей к разнице расстояний между ним самим и впередиидущим автомобилем, а также учитывать безопасную дистанцию. Чем медленнее едет впередиидущий автомобиль или чем ближе он находится, тем сильнее должно быть торможение. Физически невозможно тормозить быстрее, чем экстренное торможение, которое определяется как μg [142]. Указанное поведение можно

выразить с помощью функции скачка (или ненормированной функции Хевисайда) [143] следующим образом:

$$H_n = \begin{cases} q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n}{\Delta x_n - l_n} \right)^2, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n}{\Delta x_n - l_n} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n}{\Delta x_n - l_n} \right)^2 > \mu g, \end{cases} \quad (2.4)$$

где коэффициент q_n показывает интенсивность торможения (рисунок 2.3).

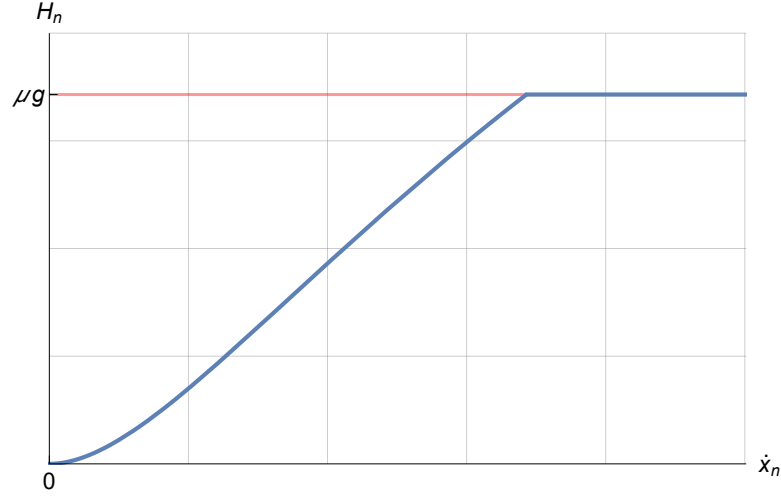


Рисунок 2.3 — Функция скачка.

Таким образом, получаем уравнение, описывающее вторую фазу движения — торможение:

$$\ddot{x}_n(t) = -H_n.$$

Объединив обе фазы, используя релейную функцию (2.2), получаем уравнение, описывающее движение n -ого ($n > 1$) автомобиля в потоке:

$$\ddot{x}_n(t) = R_n [a_n (P_n - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n) H_n.$$

Для описания первого автомобиля потока ($n = 1$) выпишем отдельное уравнение. Поскольку у первого автомобиля нет машины впереди, ему не требуется логистическая функция для согласования скоростей. Он будет разгоняться до своей максимальной желаемой скорости $v_{max,1}$. В то время как, функция скачка необходима для описания торможения автомобиля при достижении положения L . Таким образом, уравнение для первого автомобиля можно записать следующим образом:

$$\ddot{x}_1(t) = R_1 [a_1 (v_{max,1} - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1) H_1. \quad (2.5)$$

Будем считать, что в начальный момент времени автомобили едут со скоростью v_n и располагаются на расстоянии λ_n друг от друга, причем $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ и выполняется неравенство $\lambda_n - \lambda_{n+1} > (\tau_n + \tau_{b,n})v_n + v_n^2/2\mu g + l_n + \tau_n v_n$ (λ_1 может быть любым). Это неравенство представляет собой сумму остановочного пути, безопасной дистанции и расстояния, которое проедет транспортное средство за время реакции водителя $\tau_n v$. Последнее слагаемое необходимо, так как уравнение имеет запаздывающий по времени аргумент. Такие начальные условия гарантируют, что все автомобили будут находиться на безопасной дистанции друг от друга.

Используя все вышеуказанные предположения, получаем полную математическую модель движения транспортного потока:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1 [a_1 (v_{max,1} - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1)H_1, \\ \ddot{x}_n(t) = R_n [a_n (P_n - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n)H_n, \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau_n, 0]. \end{cases} \quad (2.6)$$

На рисунке 2.4 изображены графики изменения скорости и расстояния для нескольких одинаковых автомобилей, двигающихся согласно модели (2.6). Они демонстрируют динамику движения автомобилей, начиная с разгона и заканчивая остановкой перед препятствием. Видно, как автомобили постепенно увеличивают свою скорость, затем, по мере приближения к препятствию, начинают замедляться и останавливаются на безопасном расстоянии.

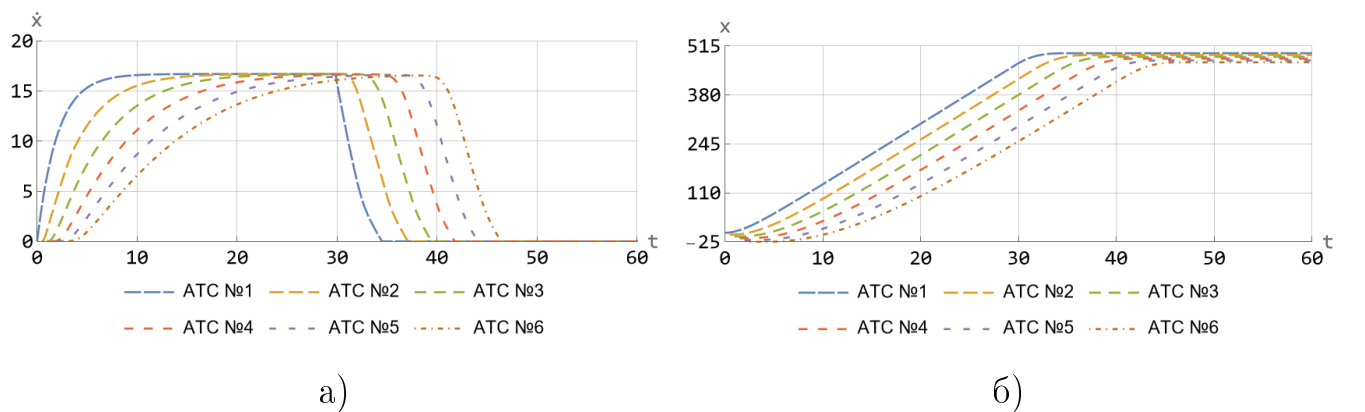


Рисунок 2.4 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для модели (2.6) при значениях параметров: $\tau_n = 0.5$, $\tau_{b,n} = 0.1$, $a_n = 0.5$, $q_n = 0.14$, $v_{max,n} = 16.7$, $l_{safe,n} = 1$, $l_{veh,n} = 4$, $g = 9.8$, $\mu = 0.6$, $k_n = 0.5$, $L = 500$.

2.2 Определение значений параметров

Модель (2.6) демонстрирует корректное поведение в широком диапазоне параметров, допуская значительные вариации их значений. Все параметры выражены в международной системе единиц (СИ), включая время, расстояние и скорость. Для повышения точности и адекватного описания реальных условий, параметры модели определены на основе физических законов, требований законодательства Российской Федерации [144], а также логических соображений и наблюдений за реальными транспортными потоками.

Параметр τ_n описывает время реакции водителя. Исследования продолжительности реакций начались во второй половине 1940-х годов [145]. В ходе исследований Было установлено, что время реакции водителя зависит от множества факторов, таких как пол, возраст, темперамент, опыт, состояние здоровья, текущая дорожная обстановка, скорость и других [146].

Для водителей в возрасте 18-22 лет время реакции составляет от 0.48 до 0.56 секунд, тогда как у водителей 45-60 лет оно увеличивается до 0.78-0.82 секунд. Опытные водители на 31-38% быстрее реагируют на опасные ситуации на дороге. В плотном транспортном потоке время реакции увеличивается в 1.5-2 раза, а при экстренном торможении уменьшается в 1.5 раза [147; 148].

Время реакции водителя, равное нулю, соответствует моментальному реагированию, что не свойственно даже для роботов или систем искусственного интеллекта. В реальных условиях мгновенная реакция невозможна, поскольку человеку требуется время для принятия решения, а машине — для обработки и передачи сигнала.

Таким образом, время реакции водителя, учитывающее субъективные и объективные факторы, может варьироваться от 0.2 до 2.5 секунд в зависимости от водителя и дорожной ситуации. В экспертной практике время реакции водителя часто принимается в диапазоне от 0.5 до 0.8 секунд [146].

На рисунке 2.5 представлено движение транспортного потока, состоящего из одинаковых автомобилей, при различных значениях параметра τ_n . Из графиков видно, что чем меньше параметр τ_n , тем быстрее автомобили реагируют, что ускоряет движение потока в целом. Когда $\tau_n = 0$, все машины начинают

двигаться одновременно, что нереалистично. Это подчеркивает важность учета времени реакции в моделировании транспортных потоков.

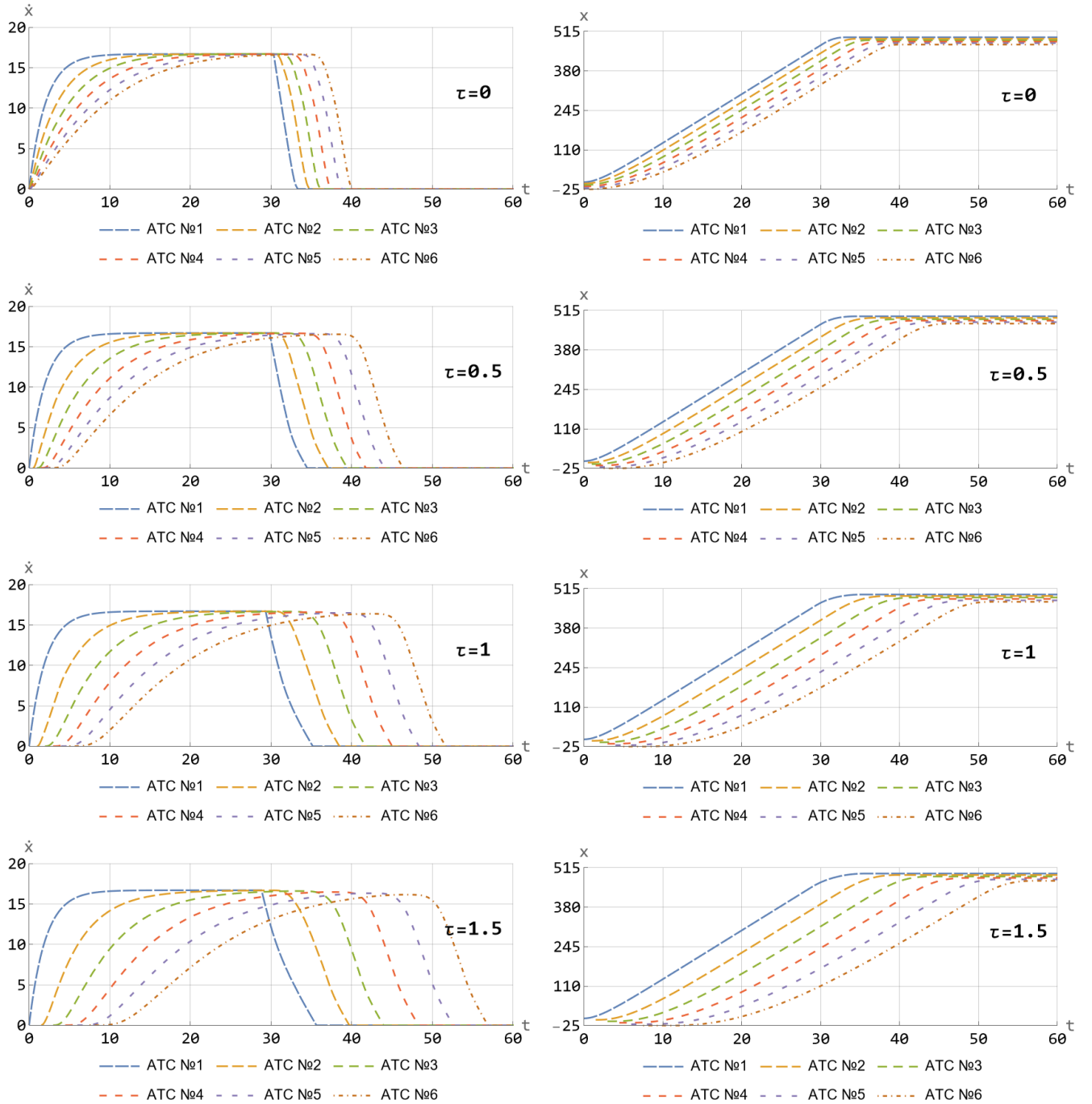


Рисунок 2.5 — Графики изменения скорости и расстояния для модели (2.6) при разных значениях параметра $\tau_n = \tau$.

Параметр $\tau_{b,n}$ описывает время задержки для замедления автомобиля, связанное с тормозным моментом, также известное как время отклика тормозной системы. Этот параметр определяется интенсивностью нажатия

на педаль тормоза, временем, необходимым для наполнения тормозных камер воздухом, а также деформацией приводных механизмов и самого тормоза. Замедление нарастает по линейному закону, и достижение максимального замедления происходит от 0.1 до 0.5 секунд. Согласно стандартам, максимальное время срабатывания тормозного привода не должно превышать 0.6 секунд [149].

Коэффициент трения μ представляет собой безразмерную величину, которая определяет отношение силы трения между колесами автомобиля и дорожным покрытием к другим силам, действующим на автомобиль. Сила трения возникает из-за неровностей дорожного покрытия и молекулярных взаимодействий между колесами и поверхностью. Значение коэффициента μ зависит от состояния дороги: на сухой дороге коэффициент трения выше, что обеспечивает лучшее сцепление и управляемость, тогда как на мокрой, ледяной или неровной дороге он снижается, что может привести к проскальзыванию и потере контроля над транспортным средством. На величину μ также влияют состояние дорожного покрытия и тип шин. В таблице 2.1 представлены значения коэффициентов трения для различных дорожных условий [150].

Таблица 2.1 — Значения коэффициента трения для различных дорожных условий

Условия скольжения	μ
Шина по сухому асфальту	0.50-0.70
Шина по мокрому асфальту	0.35-0.45
Шина по сухой грунтовой дороге	0.40-0.50
Шина по мокрой грунтовой дороге	0.30-0.40
Шина по гладкому льду	0.15-0.20

Ускорение свободного падения g на Земле варьируется от 9.780 м/с² на экваторе до 9.82 м/с² на полюсах. Стандартное значение, используемое в системах единиц, составляет 9.8 м/с² [151].

Параметр $l_{veh,n}$ описывает длину автомобиля и является технической характеристикой, значение которой варьируется в широких пределах. Существуют как маленькие транспортные средства длиной около 2 метров, так

и большие грузовики с прицепами, достигающие нескольких десятков метров. В среднем, длина автомобилей составляет от 3 до 5 метров [152].

Параметры $l_{safe,n}$ и $v_{max,n}$ описывают поведение водителей, и для каждого водителя эти параметры могут различаться. Водители выбирают безопасную дистанцию $l_{safe,n}$ и максимальную желаемую скорость $v_{max,n}$, ограничиваясь лишь собственными пожеланиями, техническими характеристиками автомобиля и правилами дорожного движения (ПДД). В частности, $v_{max,n}$ можно считать равной максимальной разрешенной скорости в населенных пунктах, которая согласно [144] составляет 60 км/ч (16.7 м/с).

Диапазоны значений параметров a_n (коэффициент ускорения), q_n (коэффициент торможения) и k_n (коэффициент логистического роста) невозможно определить, основываясь на физических законах, законодательстве Российской Федерации и логических соображениях. Их диапазоны значений будут рассмотрены в главе 2.3.

Все параметры, их единицы измерения и диапазоны значений представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 — Параметры модели (2.6).

Параметр модели	Краткое описание	Диапазон значений	Единица СИ
τ_n	время реакции водителя	[0.2, 2.5]	с
$\tau_{b,n}$	время срабатывания тормозной системы	[0.1, 0.6]	с
μ	коэффициент трения	[0, 1]	б/р
g	ускорение свободного падения	9.8	м/с ²
$l_{veh,n}$	длина автомобиля	≥ 2	м
$l_{safe,n}$	безопасное расстояние	≥ 1	м
$v_{max,n}$	максимальная желаемая скорость	≥ 0	м/с
a_n	коэффициент ускорения	[0.31, 0.92]	1/с
q_n	коэффициент торможения	$(0, 1/\mu g]$	с ² /м
k_n	коэффициент логистического роста	$(0, 1]$	1/м

2.3 Определение диапазона значений параметров a_n, q_n, k_n

2.3.1 Определение диапазона значений параметра a_n

Коэффициент a_n описывает обратное время согласования скоростей двух соседних автомобилей и зависит от их мощностей. На этот параметр не влияет количество автомобилей и их расположение в потоке, поэтому для оценки диапазона его значений достаточно рассмотреть лишь фазу разгона ($R = 1$) единственного транспортного средства модели (2.6), в которой можно опустить индексы, так как транспортное средство всего одно. В таком случае модель (2.6) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = a(v_{max} - \dot{x}(t)), \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Система (2.7) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями. Решение такого уравнения имеет вид:

$$x(t) = (-1 + \exp(-at)v_{max})/a.$$

Из решения уравнения (2.7) можно выразить следующее уравнение для скорости:

$$\dot{x}(t) = v_{max}(1 - \exp(-at)).$$

Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = v_{max}$. Время разгона до выхода на желаемую скорость достаточно взять с точностью $\varepsilon = 0.01$. Возникновение такой погрешности может быть обусловлено различными причинами (человеческий фактор, технические особенности автомобиля, неточности измерительной системы, состояние дорожного покрытия). В связи с этим будем считать, что $\exp(-at_0) = \varepsilon$ в момент t_0 . Тогда $t_0 = \ln \varepsilon^{-1}/a$, из чего можно выразить a :

$$a = 4.6/t_0. \quad (2.8)$$

В среднем время разгона стоячего легкового автомобиля до скорости $v_{max} = 27.78$ м/с (100 км/ч) находится в промежутке от 5 до 15 секунд [153].

Используя (2.8), получаем, что параметр a лежит в диапазоне $a \in [0.31, 0.92]$. На рисунке 2.6 представлен график, иллюстрирующий диапазон значений параметра a в зависимости от времени разгона автомобиля.

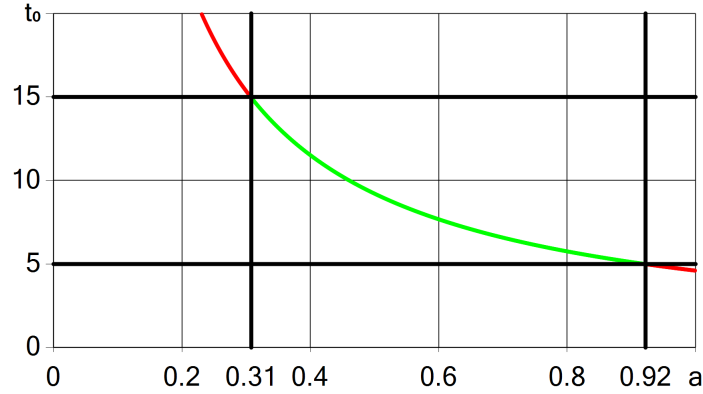


Рисунок 2.6 — Время разгона до скорости $v_{max} = 27.78$ м/с при различных значениях параметра a , согласно модели (2.7).

2.3.2 Определение диапазона значений параметра q_n

Параметр q_n описывает интенсивность торможения автомобиля. Аналогично параметру a_n , он не зависит от количества и расположения автомобилей в потоке. Для оценки диапазона его значений рассмотрим экстренное торможение ($R = 0$) только одного транспортного средства, изначально движущегося со своей максимальной скоростью v_{max} . Аналогично предыдущему случаю опустим индексы. С учетом этих предположений модель (2.6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -H, \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_{max}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Под экстренным торможением будем понимать резкое снижение скорости транспортного средства до его полной остановки за минимальное время [154]:

$$t_b = v/\mu g, \quad (2.10)$$

где v — скорость транспортного средства. При этом автомобиль проедет расстояние, равное тормозному пути [154]:

$$S_b = v^2/2\mu g.$$

Таким образом, отношение разницы скоростей к разнице расстояний в функции скачка (2.4) можно интерпретировать, как обратное время t_b :

$$H = \begin{cases} q\mu^2 g^2, & \text{если } q \leq 1/\mu g, \\ \mu g, & \text{если } q > 1/\mu g. \end{cases} \quad (2.11)$$

Согласно второму закону Ньютона, для торможения автомобиля выполняется следующее уравнение:

$$ma = F,$$

где m — масса автомобиля, a — его замедление, а F — тормозная сила [142]. В соответствии с законом Амонтона-Кулона, замедление $a = \mu g$, где μ — коэффициент сцепления шин с дорогой, а g — ускорение свободного падения. Это выражение точно соответствует уравнению (2.11) при условии $q = 1/(\mu g)$, так как $H = \mu g$, что в точности согласуется со вторым законом Ньютона.

Коэффициент $q = 1/(\mu g)$ соответствует идеальной тормозной системе. Случай $q > 1/\mu g$ физически не реализуется, поскольку время торможения будет быстрее минимально возможного значения (2.10).

Случай $q < 1/(\mu g)$ соответствует изношенной тормозной системе. Будем считать, что если скорость автомобиля, через время t_b после начала остановки больше $\varepsilon = 0.01$, то тормозная система изношена или полностью неисправна. Для исправного автомобиля параметр q лежит в диапазоне $q \in [0.04, 0.15]$, что иллюстрируется на рисунке 2.7.

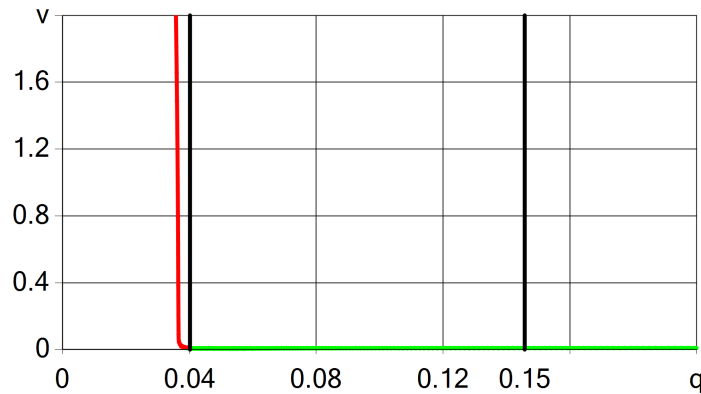


Рисунок 2.7 — График зависимости скорости автомобиля от времени t_b при торможении с начальной скоростью $v_{max} = 27.78$ м/с до полной остановки для различных значений параметра q , согласно модели (2.9).

2.3.3 Определение диапазона значений параметра k_n

Для оценки параметра k_n рассмотрим два одинаковых автомобиля. Первый автомобиль начинает движение, в то время как второй уже движется с некоторой скоростью v , находясь на расстоянии λ от первого. Модель (2.6) в таком случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = a(v_{max} - \dot{x}_1(t)), \\ x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) = R_2[a(P_2 - \dot{x}_2(t))] - (1 - R_2)H_2, \\ x_2(0) = -\lambda, \quad \dot{x}_2(0) = v. \end{cases} \quad (2.12)$$

Для того, чтобы второй автомобиль двигался независимо от первого, расстояние между ними в любой момент времени t должно быть больше остановочного пути (2.1) второго автомобиля:

$$S_2 = (\tau_2 + \tau_{b,2})\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2/2\mu g.$$

Рассмотрим ситуацию, в которой второй автомобиль движется со скоростью v_{max} на расстоянии λ от первого автомобиля. Предположим, что $\lambda > S_2$ при любом t . Тогда (2.6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = a(v_{max} - \dot{x}_1(t)), \\ x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) = a(v_{max} - \dot{x}_2(t)) \\ x_2(0) = -\lambda, \quad \dot{x}_2(0) = v. \end{cases}$$

Оба уравнения системы можно решить в явном виде:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = (-1 + \exp(-at) + at) v_{max}/a, \\ \ddot{x}_2(t) = v_{max}t - \lambda. \end{cases}$$

Разница между решениями $x_1(t) - x_2(t)$ должна быть больше S_2 . Поэтому $\lambda + [(-1 + \exp(-at))/a] v_{max} > \lambda - (1/a)v_{max} > S_2$, из чего следует, что

$$\lambda > S_2 + a^{-1}v_{max}. \quad (2.13)$$

Условие (2.13) является достаточным, но не необходимым. Поэтому при скорости $v_{max} = 60$ км/ч второй автомобиль будет двигаться независимо от первого на расстоянии $\lambda \approx 80$ метров.

Если $\lambda \leq S_2 + a^{-1}v_{max}$, то определим параметр k в ходе численного эксперимента. Для этого будем варьировать расстояние λ , а также начальную скорость v и измерять степень ее снижения. На рисунке 2.8 представлены результаты моделирования при различных значениях параметра k . Расстояние λ рассматривалось от 0 до 100 метров, а начальная скорость v варьировалась от 0 до 16.7 м/с.

При $k \in (0, 0.4)$ (рисунок 2.8) наблюдается резкое ускорение, за которым следует торможение. Водители с таким коэффициентом k демонстрируют неадекватную реакцию на дорожные условия, что может привести к частым и резким маневрам, увеличивая риск аварийных ситуаций.

При $k \in [0.4, 0.6]$ (рисунок 2.8) разгон и торможение являются оправданными. Преследующий автомобиль разгоняется плавно, минимизируя потребность в торможении. Это означает, что водители с такими значениями коэффициента k демонстрируют наиболее эффективное и безопасное поведение на дороге. Разгон при этих значениях параметра k плавный, что способствует равномерному и стабильному движению. Наилучшим значением является $k = 0.5$, что описывает опытного и аккуратного водителя, способного предвидеть и реагировать на изменения дорожной обстановки заранее.

При $k \in (0.6, 1]$ (рисунок 2.8) автомобиль начинает тормозить слишком рано, что свидетельствует о чрезмерной осторожности водителя. Такие водители часто проявляют излишнюю осторожность, что может приводить к замедлению транспортного потока и созданию потенциальных помех для других участников движения.

Рассматривать случай $k > 1$ не имеет смысла, поскольку это означает, что водитель продолжает демонстрировать те же чрезмерные осторожные действия. Влияние таких значений коэффициента на транспортный поток становится минимальным, так как поведение водителей уже стабилизируется в зоне чрезмерной осторожности.

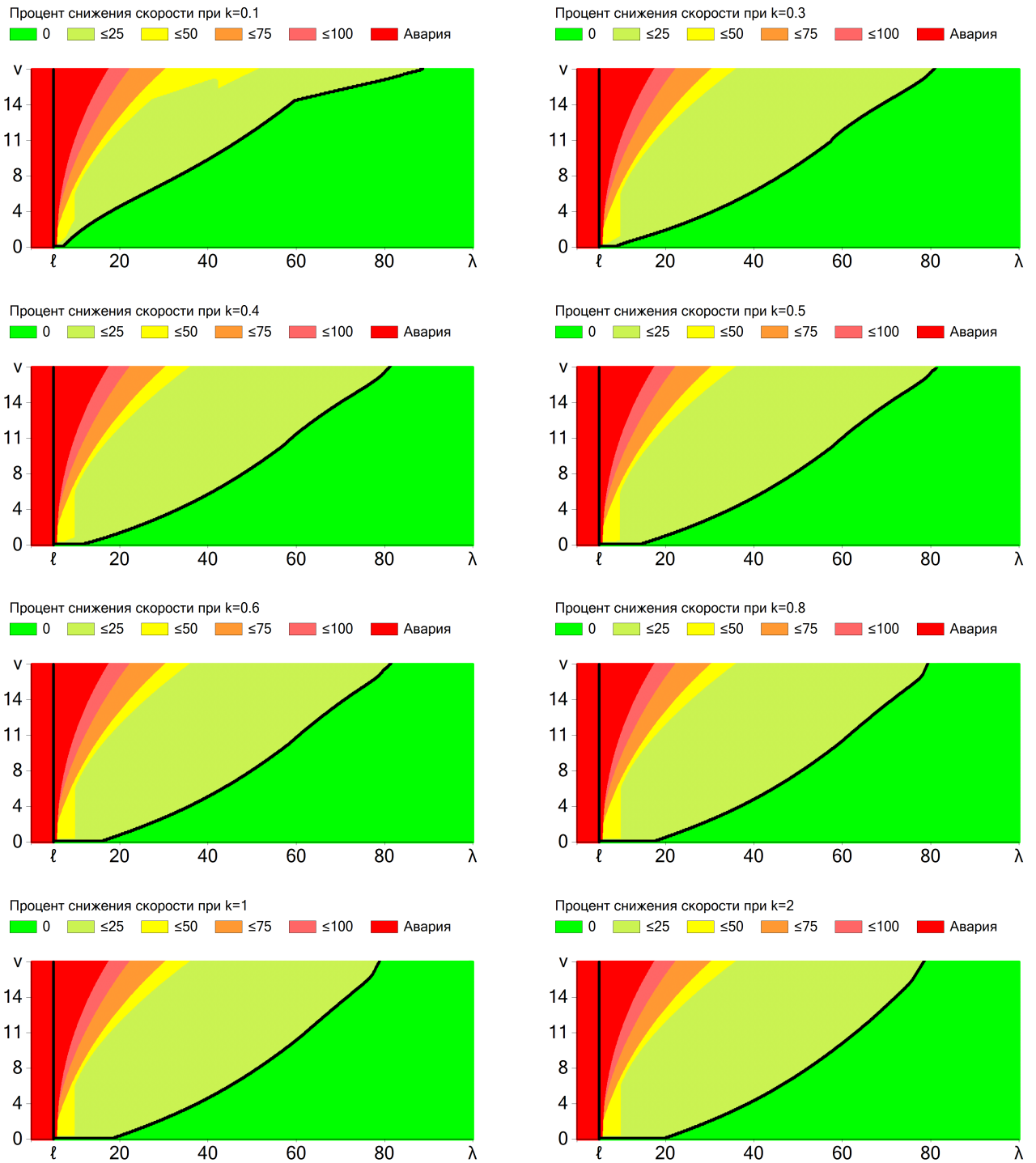


Рисунок 2.8 — Степень снижение скорости преследующего автомобиля, начинающего торможение, при различных начальных скоростях $v \in [0, 16.7]$ м/с и на различном расстоянии $\lambda \in [0, 100]$ м от впередиидущего транспортного средства согласно модели (2.12).

2.4 Анализ устойчивости равномерного движения автомобилей

Рассмотрим равномерный режим движения, при котором все автомобили двигаются с одинаковой скоростью v_{max} на расстояниях $\Delta c_n = c_{n-1} - c_n$ друг от друга, где c_n — убывающая последовательность. Для любой такой убывающей последовательности c_n существует всегда устойчивое решение системы (2.6) вида:

$$x_n(t) = c_n + v_{max}t.$$

Устойчивость такого решения зависит от знаков выражений:

$$d_n = -\tau_n v_{max} + \Delta c_n - l_n.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если для $\forall n$ выполняется неравенство $d_n > v_{max}^2/2\mu g$, то равномерный режим движения устойчив. Если хотя бы при одном каком-то i выполняется неравенство $d_i \leq v_{max}^2/2\mu g$, то равномерный режим движения неустойчив.*

Доказательство. В системе (2.6) сделаем замену вида $x_n(t) = v_{max}t + z_n(t) + c_n$, где $z_n(t)$ — малая величина. Обозначим $\Delta z_n = z_{n-1}(t - \tau_n) - z_n(t)$, а $\Delta \dot{z}_n = \dot{z}_{n-1}(t - \tau_n) - \dot{z}_n(t)$.

При этом система (2.6) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) = R_1 (-a_1 \dot{z}_1(t)) - (1 - R_1)H_1, \\ \ddot{z}_n(t) = R_n (-a_n \dot{z}_n(t)) - (1 - R_n)H_n. \end{cases} \quad (2.14)$$

Функция скачка H_n системы (2.14) примет вид:

$$H_n = \begin{cases} \frac{q_n v_{max,n}^2}{d_n^2} (\Delta \dot{z}_n)^2, & \text{если } \frac{q_n v_{max,n}^2}{d_n^2} (\Delta \dot{z}_n)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } \frac{q_n v_{max,n}^2}{d_n^2} (\Delta \dot{z}_n)^2 > \mu g. \end{cases}$$

Релейная функция R_n для системы (2.14) будет равна:

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{при } \Delta z_n + d_n > \frac{(v_{max,n} + \dot{z}_n(t))^2}{2\mu g}, \\ 0, & \text{при } \Delta z_n + d_n \leq \frac{(v_{max,n} + \dot{z}_n(t))^2}{2\mu g}. \end{cases}$$

Рассмотрим транспортное средство с наименьшим номером i , которое находится в фазе торможения ($R_i = 0$). Тогда, его ускорение становится нулевым или отрицательным ($\ddot{z}_i \leq 0$), а скорость начинает уменьшаться. Это приводит к отставанию от впередиидущего автомобиля, так как тот находится в фазе разгона, что влечет за собой потерю устойчивости.

Если же все транспортные средства системы (2.14) находятся в фазе разгона ($R_n = 1 \quad \forall n$), то при малых Δz_n линеаризованное уравнение для этого случая принимает следующий вид:

$$\ddot{z}_n(t) = -a_n \dot{z}_n(t).$$

У полученного уравнения все собственные значения отрицательны, следовательно, рассматриваемый режим движения устойчив по Ляпунову [155]. Такая негрубая устойчивость означает, что все автомобили в потоке находятся в фазе разгона и стремятся в ней оставаться.

Таким образом, устойчивость режима определяется расстоянием d_n между автомобилями. Режим остается устойчивым, если $\forall n$ выполняется неравенство $d_n > v_{max}^2/2\mu g$. Если же для некоторого автомобиля i это неравенство не выполняется, режим становится неустойчивым. $\square$

Из теоремы 1 следует, для обеспечения устойчивости равномерного режима движения в начальный момент времени начальное расстояние между каждой парой соседних автомобилей, двигающихся со скоростью v_n должно превышать сумму остановочного пути (2.1) и добавочного расстояния $\tau_n v_n$:

$$\Delta c_n > (\tau_n + \tau_{b,n})v_n + v_n^2/2\mu g + l_n + \tau_n v_n.$$

Добавка $\tau_n v_n$ необходима, поскольку автомобиль при начале движения учитывает положение впередиидущего τ_n времени назад. В течение этого интервала разница расстояний между автомобилями должна оставаться не меньше суммы остановочного пути и безопасной дистанции.

Глава 3. Расширения (модификации) модели

3.1 Моделирование движения транспортного потока на участках с различными ограничениями скорости

В построенной модели (2.6) предполагается, что ограничение скорости транспортного потока для каждого автомобиля n остается постоянным и равным $v_{\max, n}$ на протяжении всего пути движения.

Современная городская инфраструктура включает участки с разными ограничениями скорости для повышения безопасности и оптимизации транспортных потоков. Разделение улиц на участки с разной допустимой скоростью способствует защите пешеходов в густонаселенных районах, а также позволяет поддерживать высокую скорость движения на широких магистралях, что улучшает общую эффективность транспортной системы и снижает вероятность возникновения аварийных ситуаций.

Для описания движения с различными ограничениями скорости разделим весь участок дороги на $M \in \mathbb{N}$ интервалов, и на каждом таком интервале m для каждого автомобиля n будет своя максимальная желаемая скорость. Обозначим за φ^m начало m -ого интервала, где φ^0 равно начальному положению n -ого автомобиля $\varphi^0 = \lambda_n$, а φ^{M+1} равно расстоянию, которое должен проехать первый автомобиль $\varphi^{M+1} = L$ (рисунок 3.1).

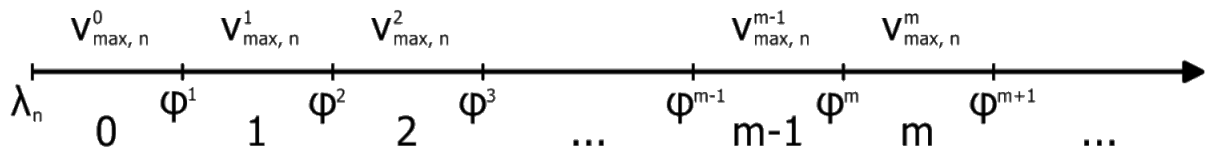


Рисунок 3.1 — Участок дороги, разделенный на скоростные интервалы.

Будем считать, что водитель транспортного средства стремится ехать с максимальной допустимой скоростью на каждом участке. Для описания мак-

симальной скорости на интервале введем функцию $V_{max,n}^m$ вида:

$$V_{max,n}^m = \begin{cases} v_{max,n}^0, & \text{если } \lambda_n \leq x_n(t) < \varphi^1, \\ v_{max,n}^1, & \text{если } \varphi^1 \leq x_n(t) < \varphi^2, \\ \dots & \\ v_{max,n}^m, & \text{если } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1}, \\ \dots & \end{cases}$$

которая учитывает ограничение скорости автомобиля на каждом интервале и не дает транспортному средству разогнаться быстрее, чем $v_{max,n}^m$ ($v_{max,n}^{M+1} = 0$).

Также введем функцию $V_{min,n}^m$ вида:

$$V_{min,n}^m = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau_n), v_{max,n}^{m+1}), \quad \text{при } n > 1 \text{ и } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1},$$

которая будет описывать скорость, под которую транспортное средство должно подстраивать свою текущую скорость ($V_{min,1}^m = V_{max,n}^{m+1}$). В качестве такой скорости рассматривается минимум между скоростью впередиидущего автомобиля и максимальной желаемой скоростью самого транспортного средства на следующем интервале.

Превышение скорости свыше $V_{max,n}^m$ на интервале m запрещено, поэтому, если текущая скорость транспортного средства выше, чем $V_{max,n}^{m+1}$, то транспортное средство должно заранее обратить внимание на начало следующего интервала и снизить свою текущую скорость. В противоположном случае автомобилю нет необходимости заранее подстраивать свою текущую скорость к началу следующего интервала, и он должен ориентироваться только на впередиидущий автомобиль. Для описания такого поведения введем функцию Φ_n^m вида:

$$\Phi_n^m = \begin{cases} \min(\varphi_n^{m+1}, x_{n-1}(t - \tau_n)), & \text{если } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1} \text{ и } \dot{x}_n \geq V_{max,n}^{m+1}, \\ x_{n-1}(t - \tau_n), & \text{если } \varphi^m \leq x_n(t) < \varphi^{m+1} \text{ и } \dot{x}_n < V_{max,n}^{m+1}. \end{cases}$$

Таким образом, модель (2.6) для движения с различными скоростными интервалами будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1^m [a_1 (V_{max,1}^m - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1^m) H_1^m, \\ \ddot{x}_n(t) = R_n^m [a_n (V_n^m - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n^m) H_n^m, \\ x_n(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n, \quad \text{при } t \in [-\tau_n, 0]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Логистическая функция (2.3) в модели (3.1) обозначается как P_n^m и выражается следующим образом:

$$P_n^m = \frac{V_{max,n}^m - V_n^m}{1 + \exp[k_n(-\Delta x_n^m + S_n^m)]} + V_n^m, \quad (3.2)$$

где $\Delta x_n^m = \Phi_n^m - x_n(t)$, а V_n^m имеет вид:

$$V_n^m = \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau_n), V_{max,n}^m) \quad \text{при } n > 1, \quad V_1^m = V_{max,1}^m.$$

Параметр S_n^m определяется следующим образом:

$$S_n^m = (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n + \tau_n \Delta \dot{x}_n^m,$$

где $\Delta \dot{x}_n^m = V_{min,n}^m - \dot{x}_n(t)$.

Функция скачка (2.4) представляется как H_n^m :

$$H_n^m = \begin{cases} q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n^m}{\Delta x_n^m - l_n} \right)^2, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n^m}{\Delta x_n^m - l_n} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\Delta \dot{x}_n^m}{\Delta x_n^m - l_n} \right)^2 > \mu g. \end{cases} \quad (3.3)$$

Релейная функция R_n^m принимает следующий вид:

$$R_n^m = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n^m > (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n^m \leq (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n. \end{cases}$$

На рисунке 3.2 изображены графики изменения скорости и расстояния для трех автомобилей, двигающихся согласно модели (3.1).

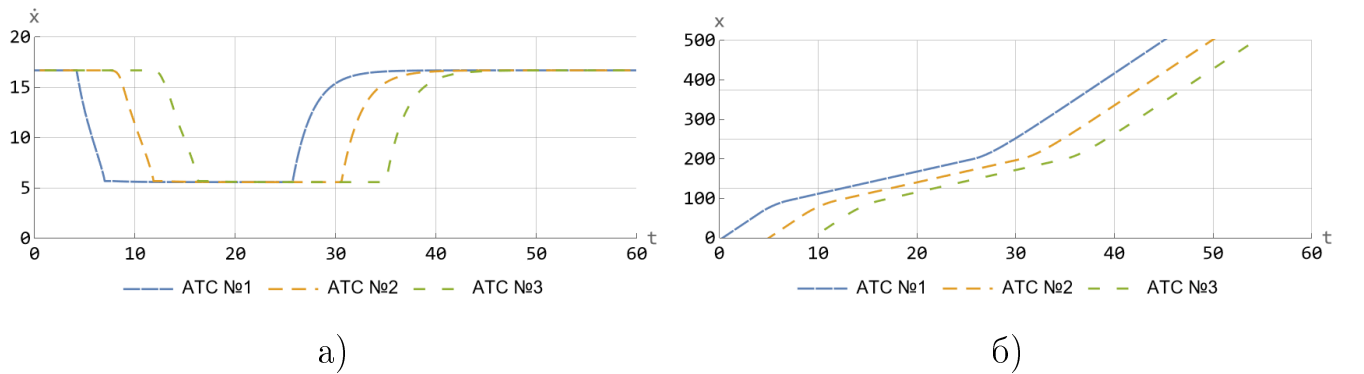


Рисунок 3.2 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для модели (3.1) при значениях параметров: $\tau_n = 0.5$, $\tau_{b,n} = 0.1$, $a_n = 0.5$, $q_n = 0.17$, $v_{max,n} = 16.7$, $l_{safe,n} = 1$, $l_{veh,n} = 4$, $g = 9.8$, $\mu = 0.7$, $k_n = 0.5$.

Графики 3.2 иллюстрируют динамику, в которой автомобили перемещаются с определенной скоростью на первом интервале, затем уменьшают ее вдвое на втором, а после вновь ускоряются до исходной на третьем.

3.2 Моделирование движения транспортного потока с учетом прогнозирования динамики движения впередиидущего транспортного средства

В построенной модели (2.6) каждое транспортное средство n движется, следуя за транспортным средством $n - 1$. В реальных дорожных условиях водитель учитывает различные факторы и объекты, такие как светофоры, другие транспортные средства, пешеходы и множество других элементов. На основе этой информации водитель принимает решения и прогнозирует поведение других участников дорожного движения [156; 157].

Учесть все внешние факторы невозможно, поэтому рассмотрим ситуацию, когда водитель видит транспортное средство, которое едет перед впередиидущим и на основе этого прогнозирует движение впередиидущего. Таким образом, теперь транспортное средство n учитывает движение транспортного средства $n - 2$ и прогнозирует поведение транспортного средства $n - 1$. Это позволяет транспортному средству n адаптировать свое движение на основе прогноза поведения впередиидущего автомобиля. В таком случае поведение водителя транспортного средства n определяется как его собственными действиями, так и поведением автомобиля, находящегося впереди через один от него.

Транспортные средства с номерами $n = 1$ и $n = 2$ не могут прогнозировать движение впередиидущих транспортных средств, поскольку перед ними отсутствуют автомобили, на основе которых можно было бы прогнозировать движение. Следовательно, они движутся в соответствии с моделью (2.6).

Обозначим за $y_k(t)$, где $k = n - 1$, $n > 2$, положение переднего бампера прогнозируемого транспортного средства в момент времени t . Тогда $\dot{y}_k(t)$ и $\ddot{y}_k(t)$ представляют собой его скорость и ускорение соответственно.

Поскольку движение транспортного средства $n - 1$ прогнозируется, водитель автомобиля n получает информацию о его поведении без задержки. Это отличается от случая, когда водитель просто смотрит на впередиидущий автомобиль и получает информацию о его движении с задержкой τ_n (рисунок 3.3).

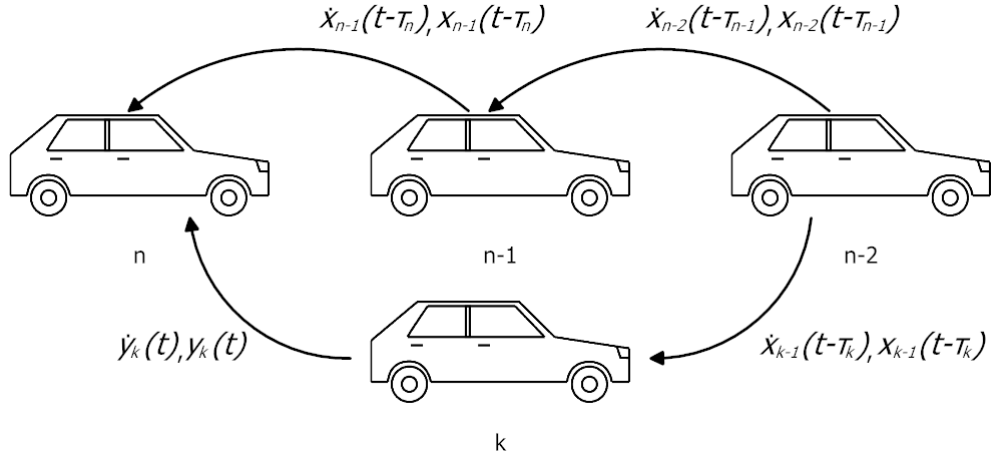


Рисунок 3.3 — Движение транспортных средств с учетом прогнозирования поведения впередиидущего автомобиля.

Таким образом, модель (2.6), учитывающая предсказание динамики впередиидущего автомобиля, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1 [a_1 (v_{max,1} - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1)H_1, \\ \ddot{x}_2(t) = R_2 [a_2 (P_2 - \dot{x}_2(t))] - (1 - R_2)H_2, \\ \ddot{y}_k(t) = \hat{R}_k \left[a_k \left(\hat{P}_k - \dot{y}_k(t) \right) \right] - (1 - \hat{R}_k)\hat{H}_k, \\ \ddot{x}_n(t) = \tilde{R}_n \left[a_n \left(\tilde{P}_n - \dot{x}_n(t) \right) \right] - (1 - \tilde{R}_n)\tilde{H}_n, \\ x_n(t) = y_k(t) = \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = \dot{y}_k(t) = v_n, \quad \text{для } t \in [-\tau_n, 0]. \end{cases} \quad (3.4)$$

Релейные функции $\hat{R}_k$ и $\tilde{R}_n$ системы (3.4) определяются следующим образом:

$$\hat{R}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{k-1}(t - \tau_k) - y_k(t) > (\tau_k + \tau_{b,k})\dot{y}_k(t) + \dot{y}_k^2(t)/2\mu g + l_k, \\ 0, & \text{если } x_{k-1}(t - \tau_k) - y_k(t) \leq (\tau_k + \tau_{b,k})\dot{y}_k(t) + \dot{y}_k^2(t)/2\mu g + l_k \end{cases}$$

и

$$\tilde{R}_n = \begin{cases} 1, & \text{если } y_{n-1}(t) - x_n(t) > (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n, \\ 0, & \text{если } y_{n-1}(t) - x_n(t) \leq (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n \end{cases}$$

соответственно.

Логистическая функция $\hat{P}_k$ системы (3.4) имеет следующий вид:

$$\hat{P}_k = \frac{v_{max,k} - \hat{V}_k}{1 + \exp[k_k(-(x_{k-1}(t - \tau_k) - y_k(t)) + \hat{S}_k)]} + \hat{V}_k,$$

где $\hat{V}_k = \min(\dot{x}_{k-1}(t - \tau_k), v_{max,k})$, а параметр $\hat{S}_k$ логистической кривой равен:

$$\hat{S}_k = (\tau_k + \tau_{b,k})\dot{y}_k(t) + \dot{y}_k^2(t)/2\mu g + l_k + \tau_k(\dot{x}_{k-1}(t - \tau_k) - \dot{y}_k(t)).$$

Логистическая функция $\tilde{P}_n$ системы (3.4) задается следующим образом:

$$\tilde{P}_n = \frac{v_{max,n} - \tilde{V}_n}{1 + \exp[k_n(-(y_{n-1}(t) - x_n(t)) + \tilde{S}_n)]} + \tilde{V}_n,$$

где $\tilde{V}_n = \min(\dot{y}_{n-1}(t), v_{max,n})$, а параметр $\tilde{S}_n$ равен:

$$\tilde{S}_n = (\tau_n + \tau_{b,n})\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n + \tau_n(\dot{y}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)).$$

Функции скачка $\hat{H}_k$ и $\tilde{H}_n$ системы (3.4) определяются следующим образом:

$$\hat{H}_k = \begin{cases} q_k \left(\dot{y}_k(t) \frac{\hat{\Delta}\dot{y}_k}{\hat{\Delta}y_k - l_k} \right)^2, & \text{если } q_k \left(\dot{y}_k(t) \frac{\hat{\Delta}\dot{y}_k}{\hat{\Delta}y_k - l_k} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_k \left(\dot{y}_k(t) \frac{\hat{\Delta}\dot{y}_k}{\hat{\Delta}y_k - l_k} \right)^2 > \mu g, \end{cases}$$

где $\hat{\Delta}\dot{y}_k = \dot{x}_{k-1}(t - \tau_k) - \dot{y}_k(t)$ и $\hat{\Delta}y_k = x_{k-1}(t - \tau_k) - y_k(t)$, а

$$\tilde{H}_n = \begin{cases} q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\tilde{\Delta}\dot{x}_n}{\tilde{\Delta}x_n - l_n} \right)^2, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\tilde{\Delta}\dot{x}_n}{\tilde{\Delta}x_n - l_n} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\tilde{\Delta}\dot{x}_n}{\tilde{\Delta}x_n - l_n} \right)^2 > \mu g, \end{cases}$$

где $\tilde{\Delta}\dot{x}_n = \dot{y}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)$ и $\tilde{\Delta}x_n = y_{n-1}(t) - x_n(t)$.

На рисунке 3.4 представлены графики изменения скорости и расстояния для нескольких транспортных средств, движущихся согласно модели (3.4).

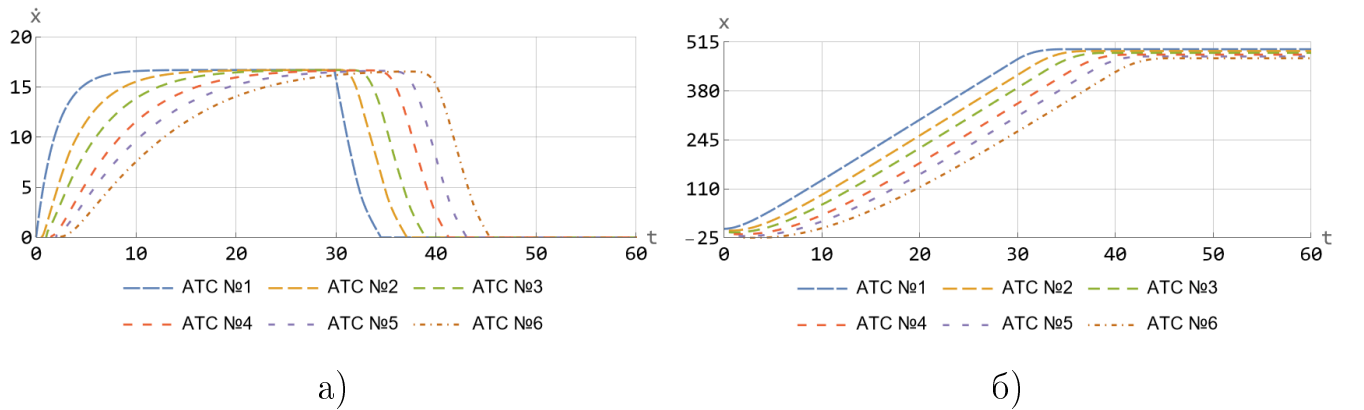


Рисунок 3.4 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для модели (3.4) при значениях параметров: $\tau_n = 0.5$, $\tau_{b,n} = 0.1$, $a_n = 0.5$, $q_n = 0.14$, $v_{max,n} = 16.7$, $l_{safe,n} = 1$, $l_{veh,n} = 4$, $g = 9.8$, $\mu = 0.6$, $k_n = 0.5$.

Графики изменения скорости и расстояния для модели (3.4) имеют схожий вид с графиками для модели (2.6). Но при их сравнении, как показано на рисунке 3.5, становится очевидно, что транспортный поток, движущийся согласно модели (3.4), демонстрирует более высокую плотность и эффективность по сравнению с потоком, движущимся согласно модели (2.6).

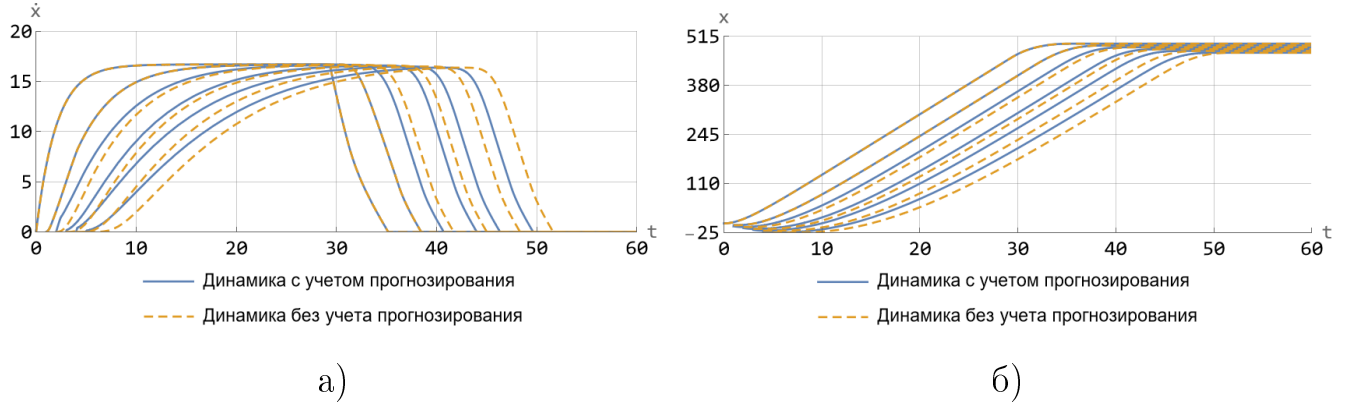


Рисунок 3.5 — Сравнение графиков изменения скорости (а) и расстояния (б) для моделей (2.6) и (3.4) при значениях параметров: $\tau_n = 0.5$, $\tau_{b,n} = 0.1$, $a_n = 0.5$, $q_n = 0.14$, $v_{max,n} = 16.7$, $l_{safe,n} = 1$, $l_{veh,n} = 4$, $g = 9.8$, $\mu = 0.6$, $k_n = 0.5$.

Таким образом поток автомобилей, движущийся по модели (3.4), двигается быстрее и эффективнее по сравнению с моделью (2.6). Такое поведение способствует более плавному и безопасному движению. Но модель (3.4) имеет недостаток в виде добавления $n - 2$ дополнительных уравнений, что усложняет расчеты. Значительное увеличение числа дифференциальных уравнений может вызвать трудности при обработке данных для больших транспортных потоков.

Для расширения модели с учетом прогнозирования можно рассмотреть произвольное количество транспортных средств, которые предсказывают движение всех автомобилей, находящихся между наблюдаемым и текущим транспортным средством. В идеальном сценарии все транспортные средства в потоке реагируют на движение первого автомобиля. Это потребует значительных вычислительных ресурсов для решения $\sum_{k=3}^n (k - 2)$ дополнительных уравнений. Однако, такой подход позволит всем транспортным средствам двигаться синхронно с минимальной задержкой, обеспечивая плавное и безопасное движение.

3.3 Моделирование движения двух транспортных потоков с учетом их взаимодействия

В построенной модели (2.6) описывался один транспортный поток и взаимодействие транспортных средств внутри него, что соответствует движению по одной полосе. Теперь рассмотрим два независимых транспортных потока, что позволяет моделировать движение по нескольким однонаправленным полосам и учитывать возможное взаимодействие между ними.

В простейшем случае, когда два потока не взаимодействуют между собой, достаточно взять модель (2.6) и распространить ее на обе полосы. Пусть автомобили в первой полосе имеют номера n , а во второй — k . В таком случае модель для движения по двум полосам без взаимодействия между ними будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = R_1^x [a_1^x (v_{max,1}^x - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1^x)H_1^x, \\ \ddot{x}_n(t) = R_n^x [a_n^x (P_n^x - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n^x)H_n^x, \\ x_n(t) = \lambda_n^x, \quad \dot{x}_n(t) = v_n^x, \quad \text{при } t \in [-\tau_n^x, 0], \\ \ddot{y}_1(t) = R_1^y [a_1^y (v_{max,1}^y - \dot{y}_1(t))] - (1 - R_1^y)H_1^y, \\ \ddot{y}_k(t) = R_k^y [a_k^y (P_k^y - \dot{y}_k(t))] - (1 - R_k^y)H_k^y, \\ y_k(t) = \lambda_k^y, \quad \dot{y}_k(t) = v_k^y, \quad \text{при } t \in [-\tau_k^y, 0]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Динамика движения транспортных средств в обоих потоках описывается аналогичными уравнениями, с учетом их принадлежности к соответствующим потокам. В системе (3.5) все параметры и функции в первом потоке обозначаются верхним индексом x , а во втором — y , и определяются аналогично тому, как это было описано в главе 2.1.

В реальном мире движение транспортных потоков значительно сложнее, так как часто происходит перестроение — ситуация, когда автомобиль из одной полосы перемещается в другую. Водители, планирующие перестроение, заранее предупреждают об этом других участников движения, включая соответствующий сигнал. Такие ситуации возникают, например, при необходимости поворота или смены полосы из-за препятствий на дороге. При перестроении автомобиль покидает свой исходный поток, переставая влиять на транспортные средства в нем, и начинает оказывать влияние на автомобили в новом потоке.

Обычно не все транспортные средства одновременно перестраиваются из одного потока в другой. Поэтому рассмотрим ситуацию, когда существует два потока — поток X , состоящий из $N \in \mathbb{N}$ автомобилей, и поток Y , включающий только одно транспортное средство, которое хочет вклиниться в поток X .

Обозначим верхним индексом y все параметры и функции, относящиеся к транспортному средству из потока Y , а верхним индексом x — все, что связано с транспортными средствами из потока X . Значения всех параметров аналогичны тем, которые представлены в таблице 2.2.

Будем считать, что транспортное средство из потока Y может перестроиться в движущийся поток X только в том случае, если расстояние между ним самим и автомобилем, за которым оно встраивается, а также расстояние между ним самим и автомобилем, перед которым оно встраивается, больше тормозного пути (2.1). В таком случае могут возникнуть три различные ситуации:

1. Транспортное средство из потока Y становится первым в потоке X .
2. Транспортное средство из потока Y вклинивается в середину потока X .
3. Транспортное средство из потока Y становится последним в потоке X .

Все три ситуации должны проверяться последовательно: если выполнена одна, то рассматривать остальные уже нет необходимости, поскольку транспортное средство уже встроилось в поток и продолжает в нем движение.

Первый случай описывает ситуацию, когда транспортное средство из потока Y становится первым в потоке X . Для проверки успешности такого перестроения, введем релейную функцию следующего вида:

$$W_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta y_1 > S_1^x, \\ 0, & \text{если } \Delta y_1 \leq S_1^x, \end{cases}$$

где расстояние между автомобилем из полосы Y и первым транспортным средством из полосы X обозначено как $\Delta y_1 = y(t) - x_1(t - \tau^y)$. Аналогично можно обозначить разницу скоростей между этими транспортными средствами: $\Delta \dot{y}_1 = \dot{y}(t) - \dot{x}_1(t - \tau^y)$. Тормозной путь для первого автомобиля из потока X , обозначен как S_1^x и рассчитывается по следующей формуле:

$$S_1^x = (\tau_1^x + \tau_{b,1}^x) \dot{x}_1(t) + \dot{x}_1^2(t) / 2\mu g + l_1^x.$$

Если релейная функция W_1 позволяет транспортному средству из потока Y стать первым в потоке X , то в этом случае он должен продолжать движение как первый автомобиль потока X :

$$\ddot{y}(t) = R_1^y [a^y (v_{max}^y - \dot{y}(t))] - (1 - R_1^y) H_1^y.$$

Релейная функция R_1^y имеет вид:

$$R_1^y = \begin{cases} 1, & \text{если } L^x - y(t) > S^y, \\ 0, & \text{если } L^x - y(t) \leq S^y, \end{cases}$$

где S^y — тормозной путь для автомобиля из потока Y :

$$S^y = (\tau^y + \tau_b^y)\dot{y}(t) + \dot{y}^2(t)/2\mu g + l^y.$$

Функция скачка H_1^y в этом случае имеет вид:

$$H_1^y = \begin{cases} q^y \left(-\frac{\dot{y}^2(t)}{L^x - y(t) - l^y} \right)^2, & \text{если } q^y \left(-\frac{\dot{y}^2(t)}{L^x - y(t) - l^y} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q^y \left(-\frac{\dot{y}^2(t)}{L^x - y(t) - l^y} \right)^2 > \mu g. \end{cases}$$

Второй случай описывает ситуацию, когда транспортное средство из потока Y вклинивается между $n-1$ и n транспортными средствами из потока X . Для успешного перестроения требуется, чтобы расстояния до автомобиля, за которым планируется перестроение, и перед которым автомобиль будет двигаться, превышали длину тормозного пути. Для того, чтобы определить возможность такого маневра, вводится релейная функция следующего вида:

$$W_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta' y_{n-1} > S^y \text{ и } \Delta y_n > S_n^x, \\ 0, & \text{если } \Delta' y_{n-1} \leq S^y \text{ или } \Delta y_n \leq S_n^x, \end{cases}$$

где $\Delta' y_{n-1} = x_{n-1}(t - \tau^y) - y(t)$ — расстояние между транспортным средством из полосы Y и впередиидущим транспортным средством из полосы X , а $\Delta y_n = y(t) - x_n(t - \tau^y)$ — расстояние между транспортным средством из полосы Y и следующим за ним транспортным средством из полосы X . Аналогично можно обозначить разницу скоростей между транспортными средствами $\Delta' \dot{y}_{n-1} = \dot{x}_{n-1}(t - \tau^y) - \dot{y}(t)$ и $\Delta \dot{y}_n = \dot{y}(t) - \dot{x}_n(t - \tau^y)$ соответственно. Тормозной путь для автомобиля с номером n из потока X , обозначен как S_n^x и рассчитывается по следующей формуле:

$$S_n^x = (\tau_n^x + \tau_{b,n}^x)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n^x.$$

Если релейная функция W_n допускает перестроение транспортного средства из потока Y между $n-1$ и n транспортными средствами в потоке X ,

то теперь новое транспортное средство должно ориентироваться на поведение $n - 1$ автомобиля из потока X :

$$\ddot{y}(t) = R_n^y [a^y (P_n^y - \dot{y}(t))] - (1 - R_n^y) H_n^y.$$

Релейная функция R_n^y имеет вид:

$$R_n^y = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta' y_{n-1} > S^y, \\ 0, & \text{если } \Delta' y_{n-1} \leq S^y. \end{cases}$$

Логистическая функция P_n^y равна следующему:

$$P_n^y = \frac{v_{max}^y - \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau^y), v_{max}^y)}{1 + \exp[k^y(-\Delta' y_{n-1} + S^y + \tau^y \Delta' \dot{y}_{n-1})]} + \min(\dot{x}_{n-1}(t - \tau^y), v_{max}^y).$$

Функция скачка H_n^y в этом случае имеет вид:

$$H_n^y = \begin{cases} q^y \left(\dot{y}(t) \frac{\Delta' \dot{y}_{n-1}}{\Delta' y_{n-1} - l^y} \right)^2, & \text{если } q^y \left(\dot{y}(t) \frac{\Delta' \dot{y}_{n-1}}{\Delta' y_{n-1} - l^y} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q^y \left(\dot{y}(t) \frac{\Delta' \dot{y}_{n-1}}{\Delta' y_{n-1} - l^y} \right)^2 > \mu g. \end{cases}$$

Третий случай описывает ситуацию, когда транспортное средство из потока Y становится последним в потоке X . Для такого перестроения требует только, чтобы расстояние до последнего автомобиля, имеющего номер N , в потоке X превышало тормозной путь перестраивающегося автомобиля:

$$W_N = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta' y_N > S^y, \\ 0, & \text{если } \Delta' y_N \leq S^y, \end{cases}$$

где $\Delta' y_N = x_N(t - \tau^y) - y(t)$ — расстояние между транспортным средством из полосы Y и последним транспортным средством из полосы X . Аналогично можно обозначить разницу скоростей между этими транспортными средствами $\Delta' \dot{y}_N = \dot{x}_N(t - \tau^y) - \dot{y}(t)$.

Если релейная функция W_N позволяет транспортному средству из потока Y стать последним в потоке X , то с этого момента оно должно ориентироваться на поведение последнего автомобиля в потоке X :

$$\ddot{y}(t) = R_N^y [a^y (P_N^y - \dot{y}(t))] - (1 - R_N^y) H_N^y.$$

Релейная функция R_N^y имеет вид:

$$R_N^y = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta' y_N > S^y, \\ 0, & \text{если } \Delta' y_N \leq S^y. \end{cases}$$

Логистическая функция P_N^y равна следующему:

$$P_N^y = \frac{v_{max}^y - \min(\dot{x}_N(t - \tau^y), v_{max}^y)}{1 + \exp[k^y(-\Delta'y_N + S^y + \tau^y\Delta'\dot{y}_N)]} + \min(\dot{x}_N(t - \tau^y), v_{max}^y).$$

Функция скачка H_N^y в этом случае имеет вид:

$$H_N^y = \begin{cases} q^y \left(\dot{y}(t) \frac{\Delta'\dot{y}_N}{\Delta'y_N - l^y} \right)^2, & \text{если } q^y \left(\dot{y}(t) \frac{\Delta'\dot{y}_N}{\Delta'y_N - l^y} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q^y \left(\dot{y}(t) \frac{\Delta'\dot{y}_N}{\Delta'y_N - l^y} \right)^2 > \mu g. \end{cases}$$

В зависимости от того, в какое место потока X встроился автомобиль из потока Y , его поведение различается. Если он стал первым, то он должен вести себя как первый автомобиль потока X . Если же он встроился в середину или конец, его движение должно зависеть от транспортного средства, перед которым он оказался. До перестроения автомобиль движется в своем исходном потоке Y согласно (2.5), так как он единственное транспортное средство:

$$\ddot{y}(t) = R^y [a^y (v_{max}^y - \dot{y}(t))] - (1 - R^y)H^y.$$

Релейная функции R^y описывает движение автомобиля по полосе Y до перестроения и определяются следующим образом:

$$R^y = \begin{cases} 1, & \text{если } L^y - y(t) > S^y, \\ 0, & \text{если } L^y - y(t) \leq S^y, \end{cases}$$

где L^y определяет максимальное расстояние, которое транспортное средство может преодолеть по полосе Y . При достижении этого расстояния дальнейшее движение по полосе становится невозможным, и автомобиль должен остановиться.

Функция скачка H^y имеет следующий вид:

$$H^y = \begin{cases} q^y \left(-\frac{\dot{y}^2(t)}{L^y - y(t) - l^y} \right)^2, & \text{если } q^y \left(-\frac{\dot{y}^2(t)}{L^y - y(t) - l^y} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q^y \left(-\frac{\dot{y}^2(t)}{L^y - y(t) - l^y} \right)^2 > \mu g. \end{cases}$$

Таким образом, движение автомобиля из потока Y можно описать как произведение вектора релейных функций перестроения и вектора возможных сценариев движения. Так как вектор релейных функций в каждый момент

времени t имеет только одну единицу, а остальные элементы равны нулю, то произведение этих двух векторов будет однозначно определять сценарий движения автомобиля из потока Y .

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}(t) = \begin{pmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_n \\ \dots \\ W_N \\ \prod_{i=1}^N (1 - W_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^y [a^y (v_{max}^y - \dot{y}(t))] - (1 - R_1^y) H_1^y \\ \dots \\ R_n^y [a^y (P_n^y - \dot{y}(t))] - (1 - R_n^y) H_n^y \\ \dots \\ R_N^y [a^y (P_N^y - \dot{y}(t))] - (1 - R_N^y) H_N^y \\ R^y [a^y (v_{max}^y - \dot{y}(t))] - (1 - R^y) H^y \end{pmatrix} \\ y(t) = \lambda^y, \quad \dot{y}(t) = v^y, \quad \text{при } t \in [-\tau^y, 0]. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Система (3.6) содержит полное описание динамики движения транспортного средства из полосы Y для всех возможных сценариев его поведения. Теперь следует рассмотреть, как будет изменяться движение транспортных средств из потока X с учетом появившегося в этом потоке автомобиля из полосы Y .

Движение транспортных средств в полосе X можно описать так: если в поток X перестраивается автомобиль из полосы Y , то он начинает влиять на транспортное средство, перед которым встроился. Автомобиль из потока X теперь должен учитывать его движение, как если бы этот автомобиль был частью потока X . Если перед транспортным средством не произошло перестроений, оно продолжает следовать за своим впередиидущим автомобилем по своей полосе без изменений. Если же автомобиль из полосы Y становится последним в потоке X , то он не влияет на остальные транспортные средства потока.

Для первого автомобиля потока X это можно записать следующим образом:

$$M_1 = \begin{cases} \bar{R}_1^x [a_1^x (\bar{P}_1^x - \dot{x}_1(t))] - (1 - \bar{R}_1^x) \bar{H}_1^x, & \text{если } y(t - \tau_1^x) > x_1(t), \\ R_1^x [a_1^x (v_{max,1}^x - \dot{x}_1(t))] - (1 - R_1^x) H_1^x, & \text{если } y(t - \tau_1^x) \leq x_1(t). \end{cases}$$

Релейная функция $\bar{R}_1$ определяются следующим образом:

$$\bar{R}_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } y(t - \tau_1^x) - x_1(t) > (\tau_1^x + \tau_{b,1}^x) \dot{x}_1(t) + \dot{x}_1^2(t)/2\mu g + l_1^x, \\ 0, & \text{если } y(t - \tau_1^x) - x_1(t) \leq (\tau_1^x + \tau_{b,1}^x) \dot{x}_1(t) + \dot{x}_1^2(t)/2\mu g + l_1^x. \end{cases}$$

Логистическая функция $\bar{P}_1$ определяется следующим образом:

$$\bar{P}_1 = \frac{v_{max,1} - \bar{V}_1}{1 + \exp[k_1^x (-(y(t - \tau_1^x) - x_1(t)) + \bar{S}_1)]} + \bar{V}_1,$$

где $\bar{V}_1 = \min(\dot{y}(t - \tau_1^x), v_{max,1})$, а параметр $\bar{S}_1$ логистической кривой равен:

$$\bar{S}_1 = (\tau_1^x + \tau_{b,1}^x)\dot{x}_1(t) + \dot{x}_1^2(t)/2\mu g + l_1^x + \tau_1^x(\dot{y}(t - \tau_1^x) - \dot{x}_1(t)).$$

Функция скачка $\bar{H}_1$ определяется следующим образом:

$$\bar{H}_1 = \begin{cases} q_1 \left(\dot{x}_1(t) \frac{\bar{\Delta}\dot{x}_1}{\bar{\Delta}x_1 - l_1^x} \right)^2, & \text{если } q_1 \left(\dot{x}_1(t) \frac{\bar{\Delta}\dot{x}_1}{\bar{\Delta}x_1 - l_1^x} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_1 \left(\dot{x}_1(t) \frac{\bar{\Delta}\dot{x}_1}{\bar{\Delta}x_1 - l_1^x} \right)^2 > \mu g, \end{cases}$$

где $\bar{\Delta}\dot{x}_1 = \dot{y}(t - \tau_1^x) - \dot{x}_1(t)$ и $\bar{\Delta}x_1 = y(t - \tau_1^x) - x_1(t)$. Функции R_1^x и H_1^x определяются аналогично модели (2.6).

Для остальных автомобилей потока систему можно записать следующим образом:

$$M_n = \begin{cases} \bar{R}_n^x [a_n^x (\bar{P}_n^x - \dot{x}_n(t))] - (1 - \bar{R}_n^x) \bar{H}_n^x, & \text{если } y(t - \tau_n^x) > x_n(t) \text{ и} \\ & y(t - \tau_{n-1}^x) < x_{n-1}(t), \\ R_n^x [a_n^x (P_n^x - \dot{x}_n(t))] - (1 - R_n^x) H_n^x, & \text{если } y(t - \tau_n^x) \leq x_n(t) \text{ или} \\ & y(t - \tau_{n-1}^x) \leq x_{n-1}(t). \end{cases}$$

Релейная функция $\bar{R}_n$ определяются следующим образом:

$$\bar{R}_n = \begin{cases} 1, & \text{если } y(t - \tau_n^x) - x_n(t) > (\tau_n^x + \tau_{b,n}^x)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n^x, \\ 0, & \text{если } y(t - \tau_n^x) - x_n(t) \leq (\tau_n^x + \tau_{b,n}^x)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n^x. \end{cases}$$

Логистическая функция $\bar{P}_n$ определяется следующим образом:

$$\bar{P}_n = \frac{v_{max,n} - \bar{V}_n}{1 + \exp[k_n^x(-(y(t - \tau_n^x) - x_n(t)) + \bar{S}_n)]} + \bar{V}_n,$$

где $\bar{V}_n = \min(\dot{y}(t - \tau_n^x), v_{max,n})$, а параметр $\bar{S}_n$ логистической кривой равен:

$$\bar{S}_n = (\tau_n^x + \tau_{b,n}^x)\dot{x}_n(t) + \dot{x}_n^2(t)/2\mu g + l_n^x + \tau_n^x(\dot{y}(t - \tau_n^x) - \dot{x}_n(t)).$$

Функция скачка $\bar{H}_n$ определяется следующим образом:

$$\bar{H}_n = \begin{cases} q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\bar{\Delta}\dot{x}_n}{\bar{\Delta}x_n - l_n^x} \right)^2, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\bar{\Delta}\dot{x}_n}{\bar{\Delta}x_n - l_n^x} \right)^2 \leq \mu g, \\ \mu g, & \text{если } q_n \left(\dot{x}_n(t) \frac{\bar{\Delta}\dot{x}_n}{\bar{\Delta}x_n - l_n^x} \right)^2 > \mu g, \end{cases}$$

где $\bar{\Delta}\dot{x}_n = \dot{y}(t - \tau_n^x) - \dot{x}_n(t)$ и $\bar{\Delta}x_n = y(t - \tau_n^x) - x_n(t)$. Функции R_n^x , L_n^x и H_n^x определяются аналогично модели (2.6).

Система уравнений для описания движения автомобилей в полосе X с учетом перестраивающегося транспортного средства из полосы Y имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = M_1, \\ \ddot{x}_n(t) = M_n, \\ x_n(t) = \lambda_n^x, \quad \dot{x}_n(t) = v_n^x, \quad \text{при } t \in [-\tau_n^x, 0]. \end{cases} \quad (3.7)$$

Таким образом, системы уравнений (3.6) и (3.7) описывают взаимодействие двух транспортных потоков, учитывая все возможные случаи, когда второй поток состоит из одного транспортного средства.

С математической точки зрения, перестраивающееся транспортное средство должно учитывать все автомобили в потоке и вычислять элементы вектора для каждого из них. На практике достаточно отслеживать только ближайшие автомобили спереди и сзади в соседнем потоке, так как остальные элементы вектора будут автоматически принимать нулевые значения.

На рисунке 3.6 представлены графики изменения скорости и расстояния для транспортных средств, движущихся согласно моделям (3.6) и (3.7), в случае, когда автомобиль из полосы Y становится первым в потоке X .

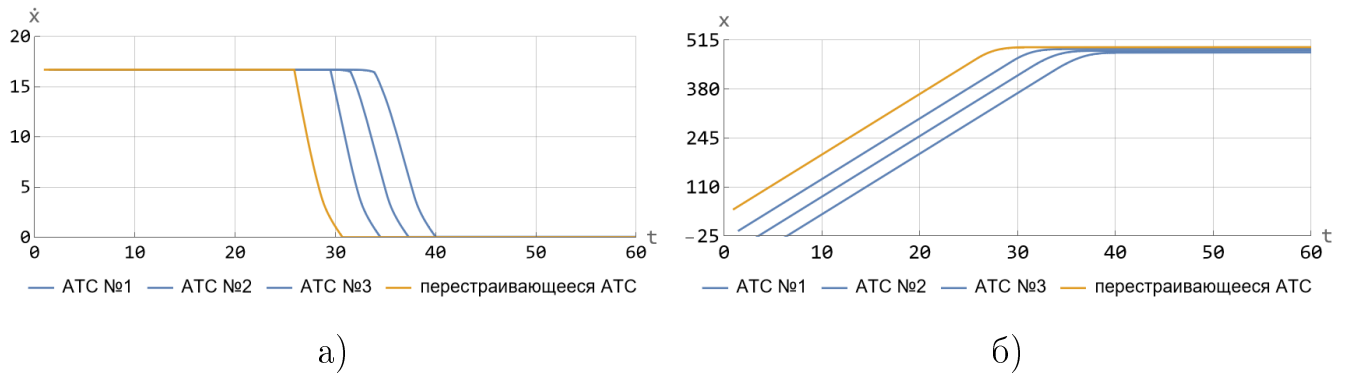


Рисунок 3.6 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для моделей (3.6) и (3.7), в случае, когда транспортное средство из полосы Y становится первым в потоке X . Значения параметров автомобилей из полосы X : $\tau_n^x = 0.5$, $\tau_{b,n}^x = 0.1$, $a_n^x = 0.5$, $q_n^x = 0.14$, $v_{max,n}^x = 16.7$, $l_{safe,n}^x = 1$, $l_{veh,n}^x = 4$, $k_n^x = 0.5$. Значения параметров автомобиля из полосы Y : $\tau^y = 0.5$, $\tau_b^y = 0.1$, $a^y = 0.5$, $q^y = 0.14$, $v_{max}^y = 16.7$, $l_{safe}^y = 1$, $l_{veh}^y = 4$, $k^y = 0.5$.

На рисунке 3.7 представлены графики изменения скорости и расстояния для транспортных средств, движущихся согласно моделям (3.6) и (3.7), в случае, когда транспортное средство из полосы Y становится между автомобилями $n - 1$ и n в потоке X .

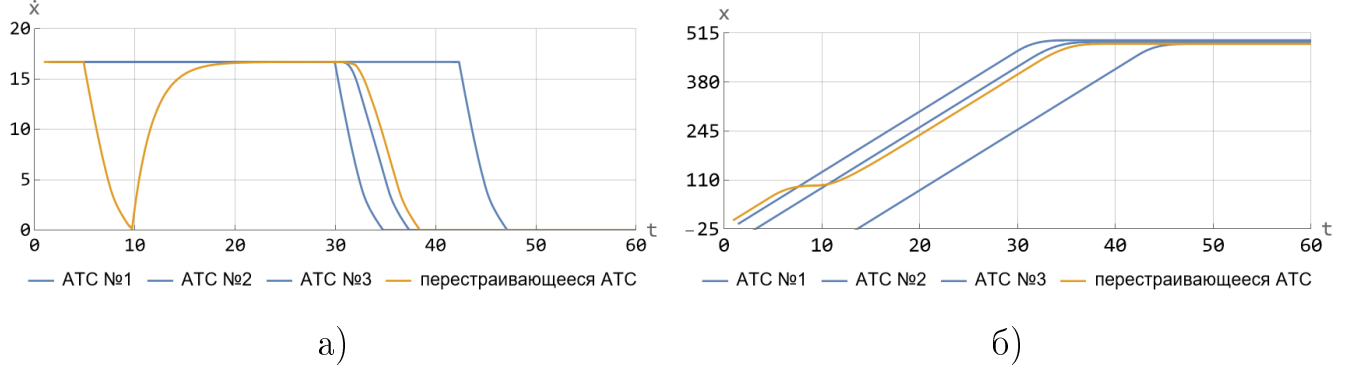


Рисунок 3.7 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для моделей (3.6) и (3.7), когда транспортное средство из полосы Y становится между автомобилями $n - 1$ и n в потоке X . Значения параметров автомобилей из полосы X : $\tau_n^x = 0.5$, $\tau_{b,n}^x = 0.1$, $a_n^x = 0.5$, $q_n^x = 0.14$, $v_{max,n}^x = 16.7$, $l_{safe,n}^x = 1$, $l_{veh,n}^x = 4$, $k_n^x = 0.5$. Значения параметров автомобиля из полосы Y : $\tau_b^y = 0.1$, $a^y = 0.5$, $q^y = 0.14$, $v_{max}^y = 16.7$, $l_{safe}^y = 1$, $l_{veh}^y = 4$, $k^y = 0.5$.

На рисунке 3.8 представлены графики изменения скорости и расстояния для транспортных средств, движущихся согласно моделям (3.6) и (3.7), в случае, когда транспортное средство из полосы Y становится последним в потоке X .

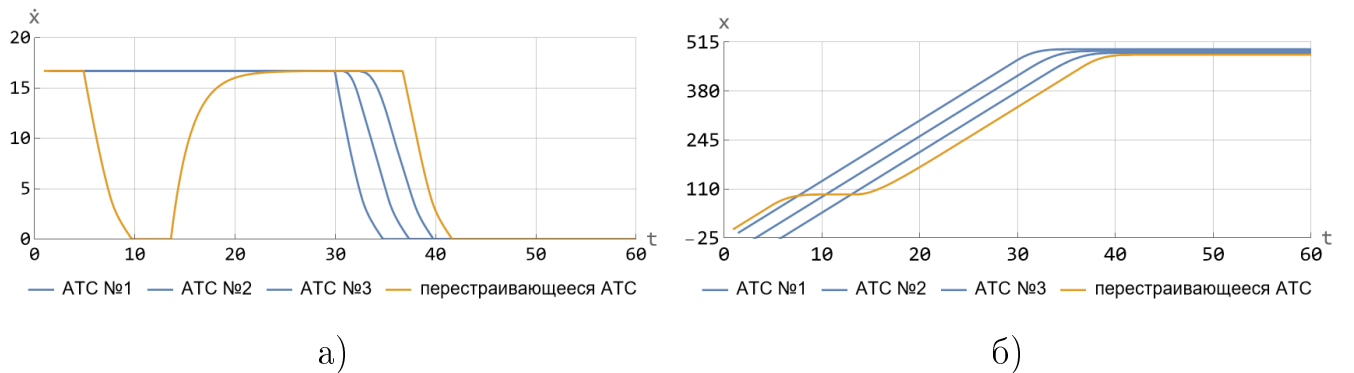


Рисунок 3.8 — Графики изменения скорости (а) и расстояния (б) для моделей (3.6) и (3.7), когда транспортное средство из полосы Y становится последним автомобилем в потоке X . Значения параметров автомобилей из полосы X : $\tau_n^x = 0.5$, $\tau_{b,n}^x = 0.1$, $a_n^x = 0.5$, $q_n^x = 0.14$, $v_{max,n}^x = 16.7$, $l_{safe,n}^x = 1$, $l_{veh,n}^x = 4$, $k_n^x = 0.5$. Значения параметров автомобиля из полосы Y : $\tau_b^y = 0.1$, $a^y = 0.5$, $q^y = 0.14$, $v_{max}^y = 16.7$, $l_{safe}^y = 1$, $l_{veh}^y = 4$, $k^y = 0.5$.

Таким образом, полученные модели (3.6) и (3.7) описывают перестроение одного транспортного средства и его влияние на движение автомобилей в его новом потоке. Для моделирования полного взаимодействия двух потоков можно использовать аналогичный подход, при котором перестраивающееся транспортное средство будет учитывать не только автомобили в новом потоке, но и транспортное средство, движущееся перед ним в его исходном потоке.

Глава 4. Применение новой математической модели в некоторых дорожных ситуациях

4.1 База данных для верификации модели

Для верификации новой математической модели (2.6) и ее расширений (3.1), (3.4), (3.6), (3.7), а также для проверки корректности диапазонов параметров модели, были проведены наблюдения за реальными транспортными потоками и режимами работы светофоров на территории города Ярославля. Собранные данные использовались для сопоставления результатов моделирования с фактическим поведением транспортных потоков. Эти данные были структурированы в базу данных, которая получила свидетельство о государственной регистрации (приложение А).

Для создания базы данных использовались данные, собранные с помощью видеокамер, установленных рядом со светофорами, которые в режиме реального времени записывали транспортный поток на протяжении всего периода наблюдения. Дополнительно были проанализированы видеоматериалы с городских камер общего доступа [158].

После сбора видеозаписей изображения обрабатывались вручную: фиксировались временные параметры работы светофора для каждого сигнального цикла, а также подсчитывалось количество транспортных средств, проехавших через светофор за каждый цикл.

Собранные данные были структурированы и занесены в базу данных для дальнейшего анализа и моделирования транспортных потоков. На рисунке 4.1 представлена ER-диаграмма (Entity Relationship Diagram, ERD) [159], которая демонстрирует структуру взаимосвязей таблиц базы данных.

Структура базы данных включает следующие таблицы.

1. **LocationData**: таблица, содержащая подробную информацию о местоположении светофоров, включая их географические координаты.
2. **TrafficData**: таблица, содержащая данные о количестве транспортных средств, проходящих через светофоры в определенные временные промежутки.

3. **TrafficLanes**: таблица, включающая информацию о дорожных полосах, пересекающих светофор, и их направлении движения. Номера полос нумеруются от обочины справа налево.
4. **TrafficLights**: таблица, содержащая параметры работы светофоров, такие как временные интервалы смены сигналов, продолжительность каждого сигнала.

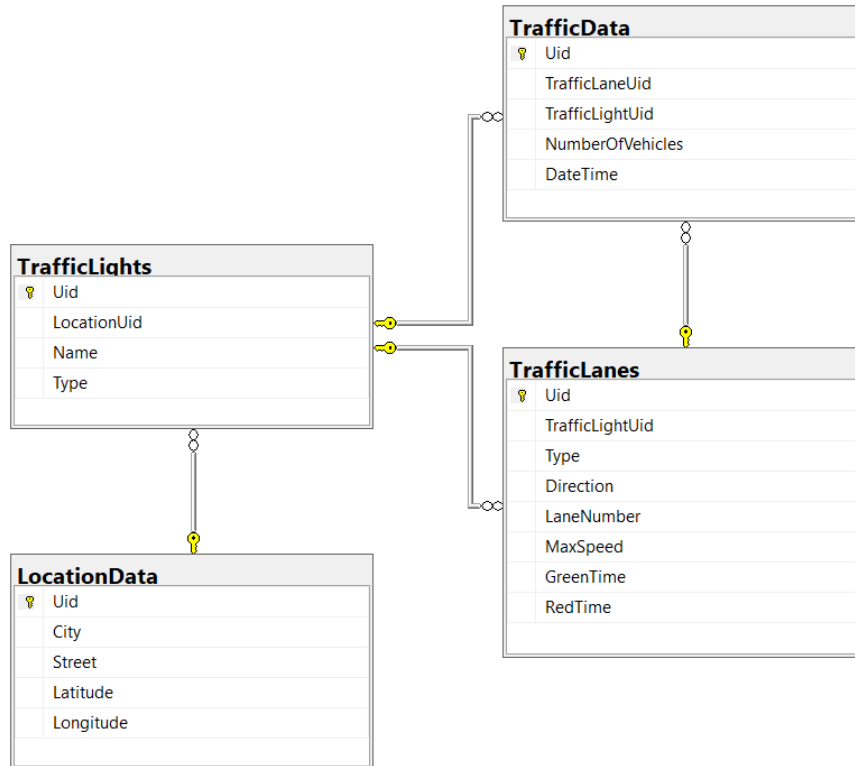


Рисунок 4.1 — ER-диаграмма базы данных.

Помимо наблюдения за транспортными потоками был проведен эксперимент для изучения влияния эффекта «бутылочного горлышка» [160; 161] на движение транспортного потока.

Эксперимент был разделен на два этапа. На первом этапе проводилась регистрация параметров движения на двухполосной дороге в стандартных условиях, без каких-либо ограничений. Собирались данные о количестве автомобилей, проезжающих через определенный участок дороги.

На втором этапе был искусственно создан эффект «бутылочного горлышка». Для этого одну из полос движения заблокировали автомобилем с включенным аварийным сигналом, что заставило транспортные средства на перекрытой полосе перестраиваться на соседнюю. Это привело к изменению динамики потока, включая снижение количества автомобилей, проходящих через данный участок. Результаты эксперимента представлены в приложении В.

4.2 Программный комплекс для моделирования транспортных потоков в различных дорожных ситуациях

Для верификации новой математической модели был создан специализированный программный комплекс для моделирования транспортных потоков в различных дорожных условиях. Программа разработана на языке программирования C# версии 10.0.0 [162] и предназначена для моделирования различных сценариев движения. Исходный код программы прошел государственную регистрацию как программное обеспечение для ЭВМ (приложение Б).

Программа моделирует движение автомобилей на основе математической модели (2.6) и ее расширений (3.1), (3.4), (3.6), (3.7), используя параметры из таблицы 2.2. Для решения системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в программе применяется адаптированный метод Рунге-Кутты четвертого порядка [163; 164]. Код реализации метода представлен в приложении Г.

На рисунке 4.2 представлен пользовательский интерфейс разработанного программного комплекса.

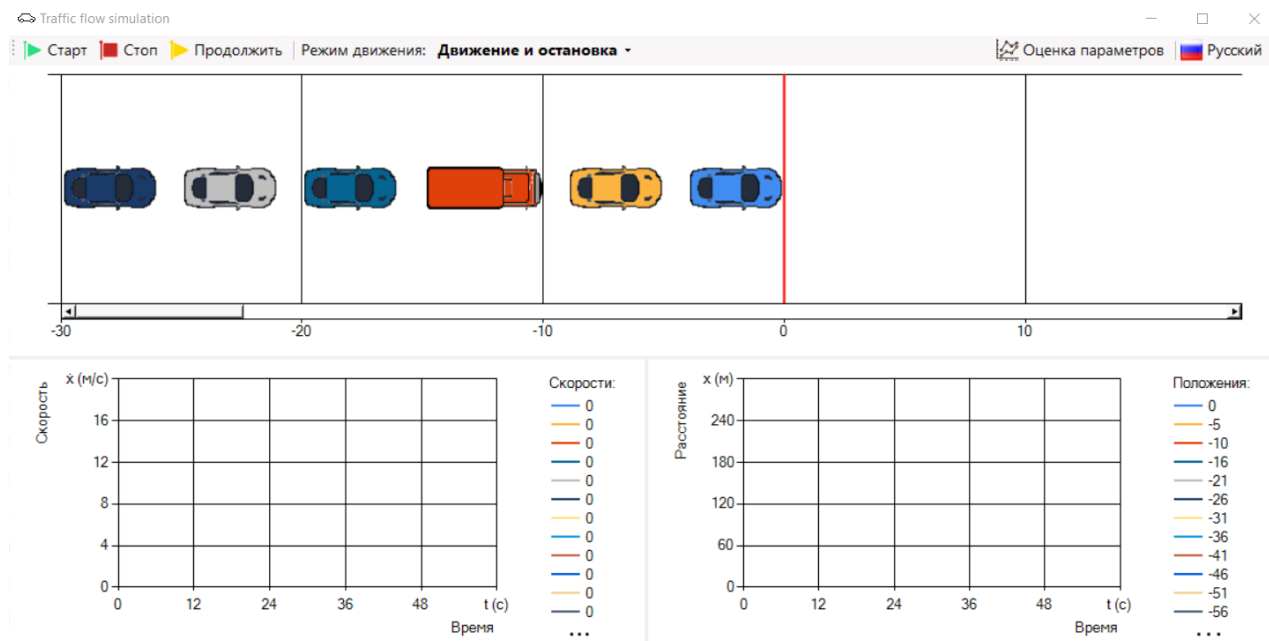


Рисунок 4.2 — Интерфейс программного комплекса.

Архитектура разработанного программного комплекса включает шесть ключевых компонентов.

1. **Вычислительное ядро:** основной блок, который отвечает за численные расчеты и выполнение математической модели транспортного потока.
2. **Блок графического отображения:** компонент предназначенный для визуализации результатов моделирования.
3. **Блок локализации:** компонент обеспечения многоязычной поддержки с учетом локальных языковых особенностей.
4. **Блок настроек:** компонент отвечающий за конфигурацию параметров необходимых для работы программного комплекса.
5. **Блок обработки графики:** компонент управляющий визуальными элементами интерфейса, такими как графические диаграммы.
6. **Блок общего назначения:** компонент реализующий вспомогательные функции для согласованной работы программного комплекса.

Программный комплекс поддерживает несколько режимов работы, каждый из которых предназначен для моделирования поведения автомобилей в различных дорожных условиях. Он позволяет оценивать пропускную способность дорожных участков и моделировать случайные транспортные потоки.

Под случайным потоком будем понимать поток транспортных средств, каждое из которых обладает уникальными характеристиками. Эти характеристики задаются параметрами из таблицы 2.2, распределенными по нормальному закону [165; 166], с различными средними значениями и стандартными отклонениями. Стандартные отклонения находятся в диапазоне от 10% до 30% от среднего значения.

Для моделирования использовались средние значения параметров, соответствующие типичным ситуациям в условиях городской застройки с качественным дорожным покрытием и плотным движением. Учитывались среднестатистические характеристики водителей и транспортных средств, что позволило максимально приблизить модель к реальным условиям.

Будем считать, что погрешность в пределах от 3% до 5% между средними значениями наблюдаемых данных и результатами моделирования является допустимой и свидетельствует о хорошем качестве модели. Например, такая погрешность может соответствовать расхождению примерно в 2 автомобиля при движении через один цикл работы светофора.

В последующих главах будет подробно рассмотрен каждый сценарий работы программного комплекса.

4.2.1 Начало движения и остановка

Режим работы программы «Начало движения и остановка» моделирует две ключевые дорожные ситуации: старт и остановку автомобилей, согласно модели (2.6).

На рисунке 4.3 представлены графики изменения скорости и координат нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты.

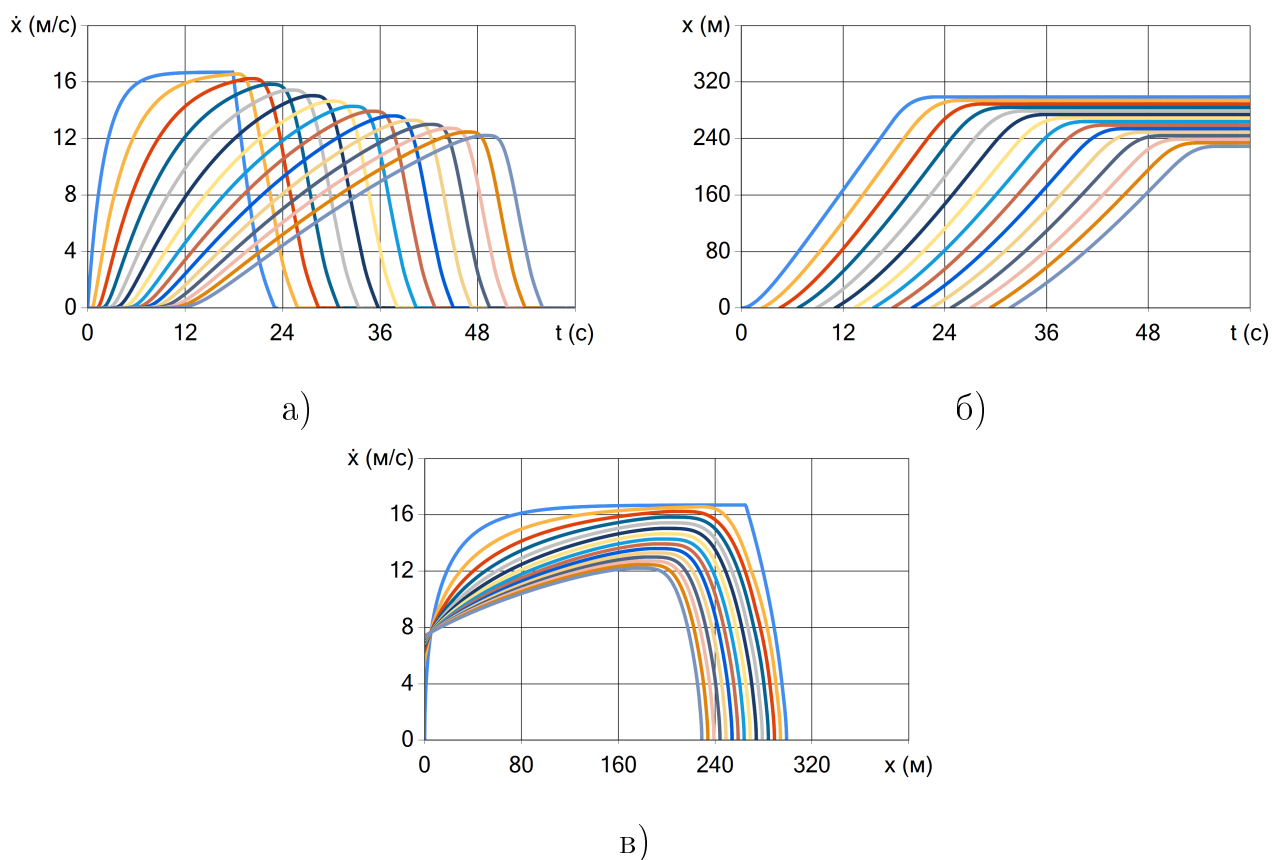


Рисунок 4.3 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для начала движения и остановки.

Режим «Начало движения и остановка» позволяет оценить максимальную пропускную способность участка дороги в зависимости от максимальной скорости движения, что является одной из ключевых задач в моделировании

транспортных потоков. Процесс основан на анализе взаимосвязи между плотностью автомобилей на дороге и их скоростью. Обычно количество автомобилей, проходящих через участок дороги за единицу времени, обозначается как Q и определяется по следующей формуле [167]:

$$Q = \rho v, \quad (4.1)$$

где ρ — плотность потока, измеряемая как количество автомобилей на единицу длины дороги (например, на километр), а v — средняя скорость автомобилей в потоке. Плотность транспортного потока можно вычислить, разделив средний тормозной путь на расстояние, на котором производится измерение плотности.

На графике 4.4 показано сравнение количества автомобилей, проехавших через участок дороги за одну минуту, полученное на основе моделирования и расчетов по формуле (4.1).

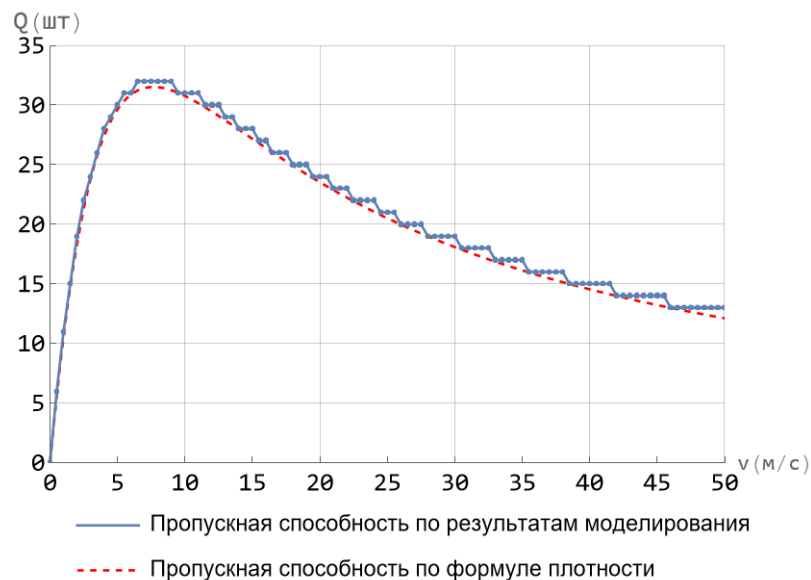


Рисунок 4.4 — Сравнение количества автомобилей, проехавших через участок дороги за одну минуту, полученное на основе моделирования и расчетов по формуле (4.1).

Из графика 4.4 видно, что максимальная пропускная способность потока достигается при скорости около 40-60 км/ч (11.1-16.7 м/с). Это связано с тем, что при такой скорости водители могут комфортно управлять автомобилем, сохраняя безопасную дистанцию [168]. При дальнейшем увеличении скорости плотность транспортного потока снижается, поскольку водители вынуждены увеличивать дистанцию между автомобилями для безопасного движения, что снижает количество транспортных средств, способных одновременно находиться на участке дороги.

4.2.2 Режим работы одного светофора

Сценарий программы «Режим работы одного светофора» предназначен для моделирования светофорного регулирования на дороге в соответствии с моделью (2.6). В этом режиме циклически воспроизводятся две фазы работы светофора: первая фаза соответствует времени действия зеленого сигнала, вторая — красного.

На рисунке 4.5 представлены графики изменения скорости и координат нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты. Эти данные получены в результате моделирования нескольких циклов работы светофора, в котором зеленый сигнал горит 20 секунд, а красный — 10 секунд.

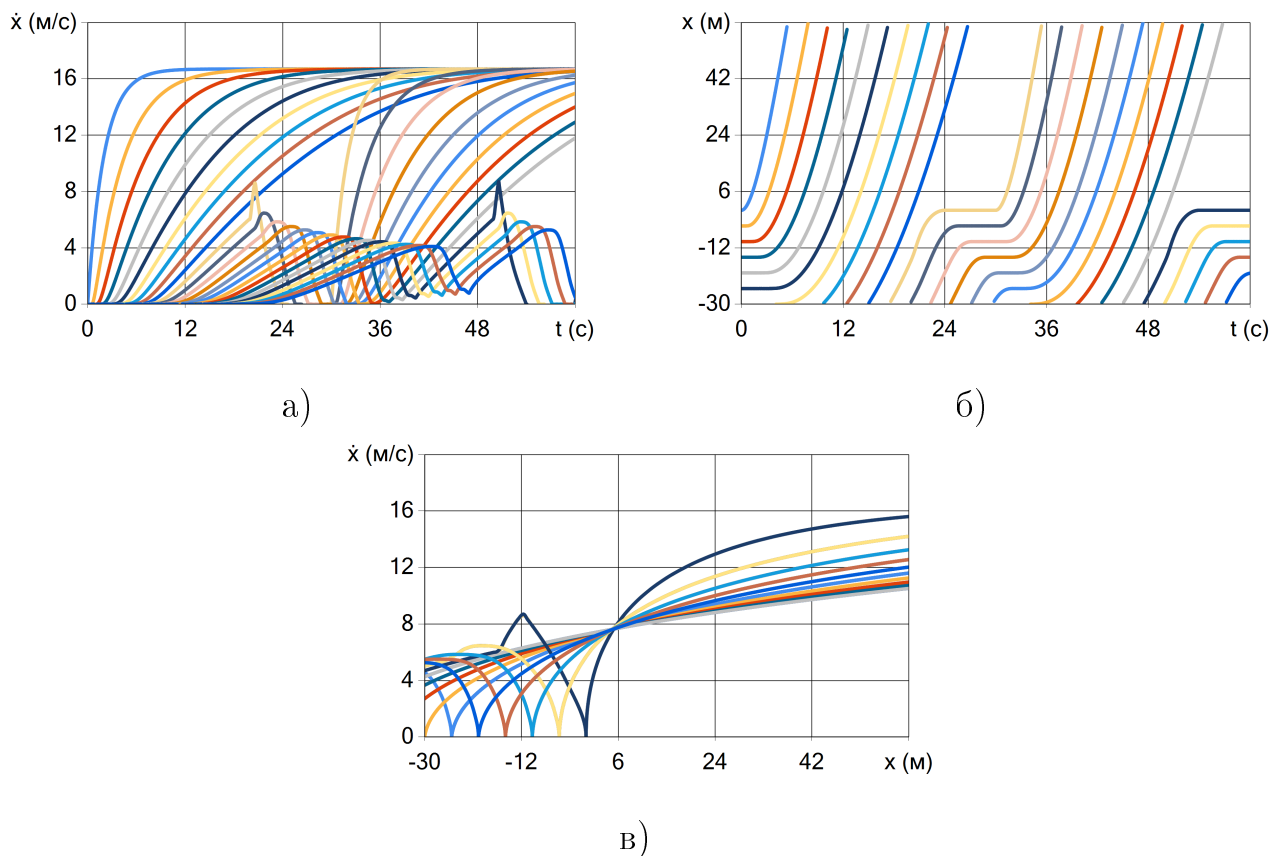


Рисунок 4.5 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей через один светофор.

Графики 4.5 показывают, как автомобили изменяют скорость и положение на дороге в зависимости от сигналов светофора. Моделирование учитывает, что некоторые автомобили могут проезжать светофор на запрещающий сигнал,

если расстояние до светофора слишком мало для безопасной остановки, что соответствует правилам дорожного движения [144].

Основным критерием эффективности работы светофора является количество автомобилей, прошедших через него за один цикл смены сигналов. В таблице 4.1 представлены данные о среднем количестве транспортных средств, пересекающих светофор по результатам 100 циклов моделирования. Эти данные дают статистически значимую оценку эффективности работы светофора, отражая среднее поведение транспортного потока при различных условиях движения. В рассматриваемом случае моделировался реальный светофор с временными интервалами: красный сигнал — 47 секунд, зеленый — 60 секунд. Для повышения точности моделирования транспортный поток был задан случайным образом. В таблице 4.1 представлено среднее количество транспортных средств, проходящих через моделируемый и реальный светофор за многократные циклы работы, с учетом различий в вероятностных характеристиках параметров.

Таблица 4.1 — Среднее число транспортных средств, проходящих через реальный и моделируемый светофор при многократных циклах работы.

Светофор \ Цикл	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Реальный светофор	25	51	76	101	125	151	176	201	227	252
Моделируемый светофор	26	52	77	103	130	156	181	207	233	259

Из данных, представленных в таблице 4.1, видно, что среднее количество транспортных средств, проходящих через светофор в программе, составляет **25.9**. Это значение практически совпадает со средним количеством автомобилей, пересекающих реальный светофор, которое равно **25.2** и получено из базы данных (приложение А). Моделирование других светофоров, представленных в базе данных, показывает аналогичные результаты.

На основе 1000 запусков моделирования была выявлена зависимость количества автомобилей от продолжительности работы зеленого сигнала светофора. Полученные данные были сведены в зависимость, отображающую соответствие между количеством транспортных средств и временем работы светофора. Зависимость была аппроксимирована линейной функцией с использованием метода наименьших квадратов [169], и ее математическое выражение выглядит сле-

дующим образом:

$$Q = \lfloor 0.42t_{green} + 1.5 \rfloor, \quad (4.2)$$

где t_{green} — время работы зеленого сигнала светофора.

Используя формулу (4.2), можно приблизительно рассчитать среднее количество автомобилей, проезжающих через светофор за один цикл его работы. Это соотношение позволяет предварительно оценить эффективность настроек светофора на этапе проектирования, исключая необходимость проведения трудоемкого моделирования.

4.2.3 Режим работы нескольких светофоров

Сценарий программы «Режим работы нескольких светофоров» предназначен для моделирования движения автомобилей через произвольное количество последовательно расположенных светофоров, согласно модели (2.6). В этом режиме все светофоры функционирует независимо друг от друга, аналогично тому, как это происходит в случае с одним светофором, рассмотренным ранее. В этом сценарии задаются временные интервалы работы зеленого и красного сигналов для каждого светофора, а также расстояния между ними.

На рисунке 4.6 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты при движении через два последовательно расположенных светофора. В этом сценарии моделируются несколько циклов работы светофоров: у первого светофора зеленый сигнал горит 20 секунд, а красный — 10 секунд, тогда как у второго светофора наоборот.

В таблице 4.2 представлена информация о среднем количестве транспортных средств, проходящих через три последовательно расположенных светофора за несколько циклов их работы. Для каждого светофора использовались реальные параметры: у первого светофора красный сигнал длится 47 секунд, а зеленый — 60 секунд; у второго светофора красный сигнал составляет 32 секунды, а зеленый — 78 секунд; у третьего светофора красный сигнал — 25 секунд, зеленый — 53 секунды. Расстояние между первым и вторым

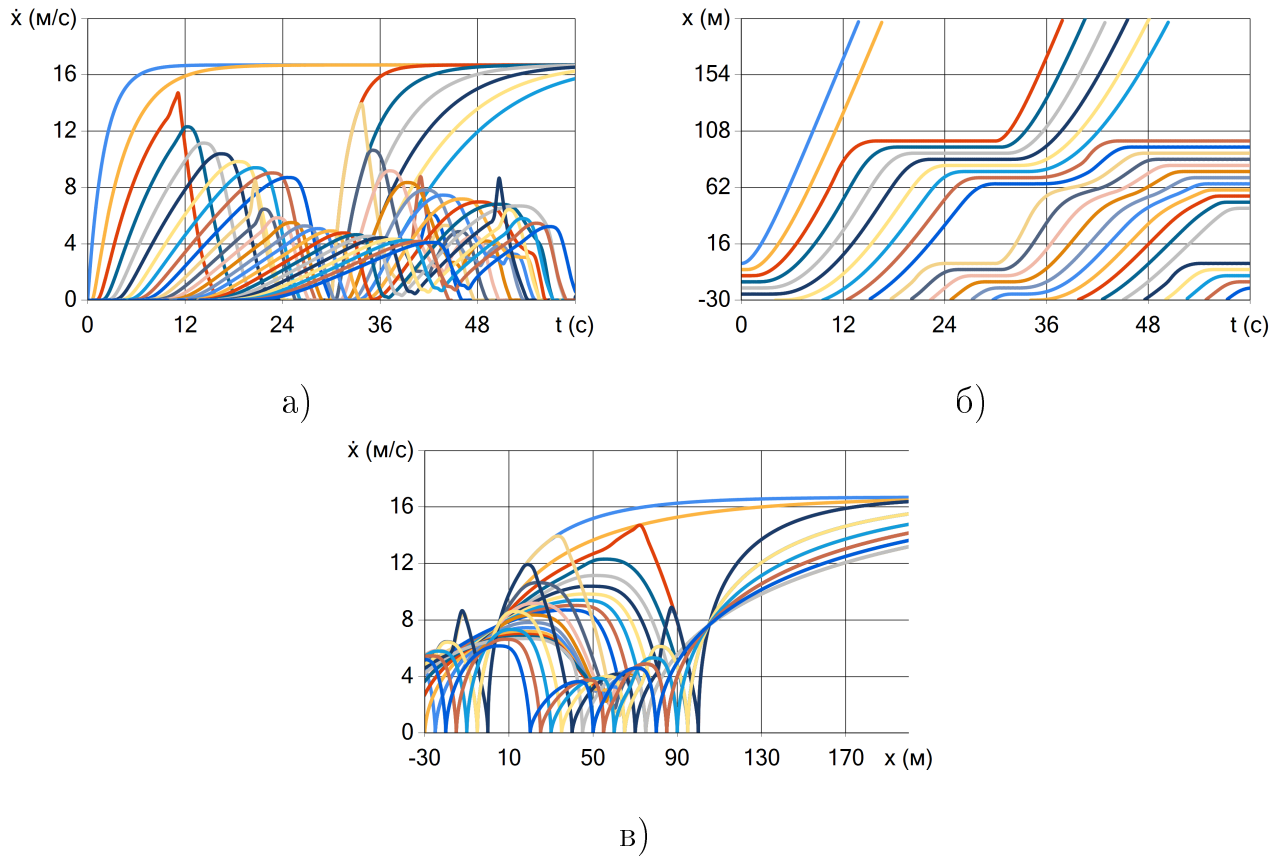


Рисунок 4.6 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимости координаты от скорости (в) для движения автомобилей через два светофора.

светофорами составляет 100 метров, а между вторым и третьим — 200 метров. Для повышения точности моделирования транспортный поток задавался случайным образом.

Таблица 4.2 — Среднее количество транспортных средств, проходящих через три реальных и моделируемых последовательных светофора при многократных циклах их работы.

Светофор \ Цикл										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Реальный светофор №1	29	58	81	108	130	155	182	209	235	261
Моделируемый светофор №1	28	54	78	102	128	153	177	205	230	258
Реальный светофор №2	30	61	89	119	149	180	211	237	267	299
Моделируемый светофор №2	29	61	88	119	150	179	206	235	267	298
Реальный светофор №3	23	45	68	91	110	133	155	178	199	219
Моделируемый светофор №3	22	46	67	90	108	132	153	171	195	216

Из данных, представленных в таблице 4.2, видно, что среднее количество транспортных средств, проходящих через первый светофор в модели, состав-

ляет **25.8**, через второй — **29.8**, а через третий — **21.6**. Полученные значения практически совпадают с реальными данными о числе автомобилей, проезжающих через светофоры: **26.1** для первого, **29.9** для второго и **21.9** для третьего. Реальные значения получены на основе анализа результатов наблюдений, представленных в базе данных (приложение А).

4.2.4 Движение на участках с ограничениями скорости

Режим работы программы «Движение на участках с ограничениями скорости» предназначен для моделирования движения автомобилей на дорогах с разными скоростными интервалами в соответствии с моделью (3.1). В этом сценарии задаются начало и конец нескольких дорожных участков с различными ограничениями скорости.

На рисунке 4.7 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты при движении по трем участкам. На первом участке все транспортные средства поддерживают начальную скорость $v_0 = 60$ км/ч (16.7 м/с). Второй участок начинается с нулевой координаты и ограничивает скорость до 30 км/ч (8.3 м/с), его длина составляет 500 метров. Третий интервал начинается с отметки в 500 метров и продолжается до бесконечности, возвращая максимальную разрешенную скорость на уровень первого интервала — 60 км/ч (16.7 м/с).

Моделирование движения на участках с различными ограничениями скорости позволяет смоделировать и сравнить две ситуации: поэтапное снижение скорости через несколько коротких интервалов и резкое торможение от более высокой скорости к низкой. Поэтапное снижение скоростей повышает безопасность движения, предотвращая резкие торможения и снижая риск аварий при высокой плотности потока. Резкое снижение скорости, напротив, создает опасные ситуации, способные вызвать цепную реакцию торможений и столкновений.

В таблице 4.3 представлено среднее количество транспортных средств, прошедших через участок дороги на основе 100 моделирований при двух сценариях: плавное торможение с поэтапным снижением скорости 90-70-50-40 км/ч (25.0-19.4-13.9-11.1 м/с) через каждые 10 метров и резкое торможение от 90 км/ч

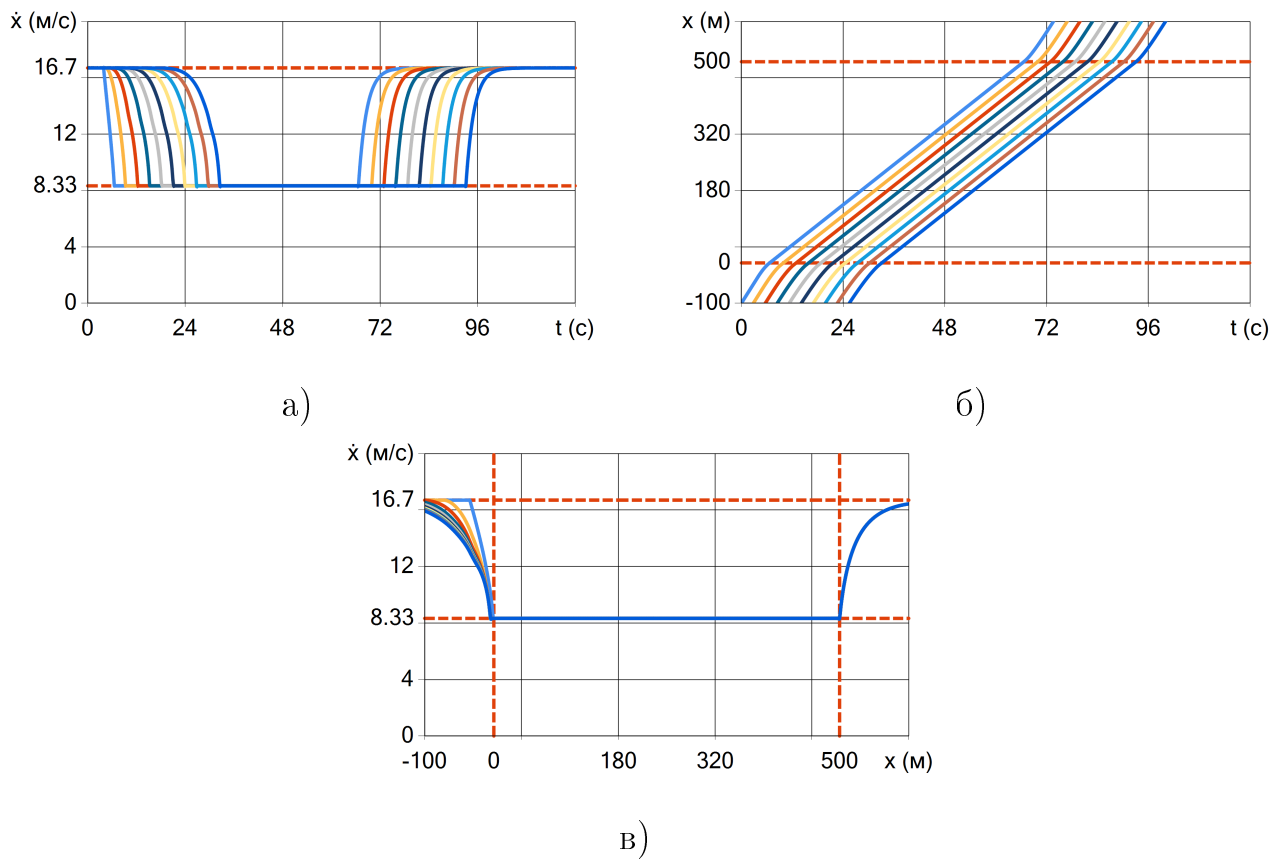


Рисунок 4.7 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей по трем интервалам. (25.0 м/с) до 40 км/ч (11.1 м/с). Параметры транспортного потока задавались случайным образом.

Таблица 4.3 — Среднее количество транспортных средств, прошедших через участок дороги при резком и плавном торможении.

Сценарий \ Время	Время					
	2 мин	4 мин	6 мин	8 мин	10 мин	12 мин
Резкое торможение	34	70	101	138	175	209
Плавное торможение	32	69	100	134	172	205

Из таблицы 4.3 видно, что плавное снижение скорости практически не влияет на пропускную способность, но в тоже время оно играет важную психологическую роль. Водители легче адаптируются к поэтапному снижению скорости, чем к резкому торможению. Постепенные изменения способствуют лучшему восприятию дорожных знаков, снижению стресса и повышению концентрации, что в конечном итоге улучшает безопасность дорожного движения [170].

4.2.5 Движение с небольшим замедляющим препятствием

Режим программы «Движение с небольшим замедляющим препятствием» представляет собой частный случай предыдущего режима и основан на модели (3.1). Этот режим позволяет моделировать влияние мелких препятствий на транспортный поток. К таким препятствиям относятся дорожные неровности, «лежачие полицейские», трамвайные или железнодорожные пути и другие элементы дорожной инфраструктуры. Хотя протяженность этих объектов невелика (несколько метров), они требуют от водителей значительного снижения скорости для их безопасного прохождения, что оказывает заметное влияние на динамику движения. В этом режиме задаются координаты начала и конца препятствия, а также ограничение скорости на нем.

На рисунке 4.8 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты при движении по дороге с препятствием длиной 0.5 метра, требующим практически полной остановки для его безопасного преодоления. Автомобили вынуждены снизить скорость до 5 км/ч (1.4 м/с), что соответствует типичному сценарию для преодоления неровностей или мелких дорожных препятствий.

В таблицах 4.4, 4.5, и 4.6 представлено среднее количество транспортных средств, преодолевающих участки дороги длиной 0.5, 3 и 10 метров при различных максимальных скоростях v за фиксированный интервал времени t . Для каждого варианта было выполнено 100 запусков моделирования, что позволило учесть случайные факторы и повысить достоверность результатов. Представленные результаты моделирования демонстрируют взаимосвязь между длиной участка дороги, ограничением скорости и пропускной способностью, позволяя оценить, как эти параметры влияют на интенсивность движения по таким участкам дороги.

Данные, представленные в таблице 4.4, отражают характеристики таких дорожных препятствий, как «лежачие полицейские» или другие небольшие неровности [171]. Анализ таблицы показывает, что использование «лежачих полицейских» или аналогичных препятствий, не требующих снижения скорости ниже 10 км/ч (2.8 м/с), минимально влияет на пропускную способность дороги, что подтверждается исследованиями [172]. Тем не менее, неровности, требую-

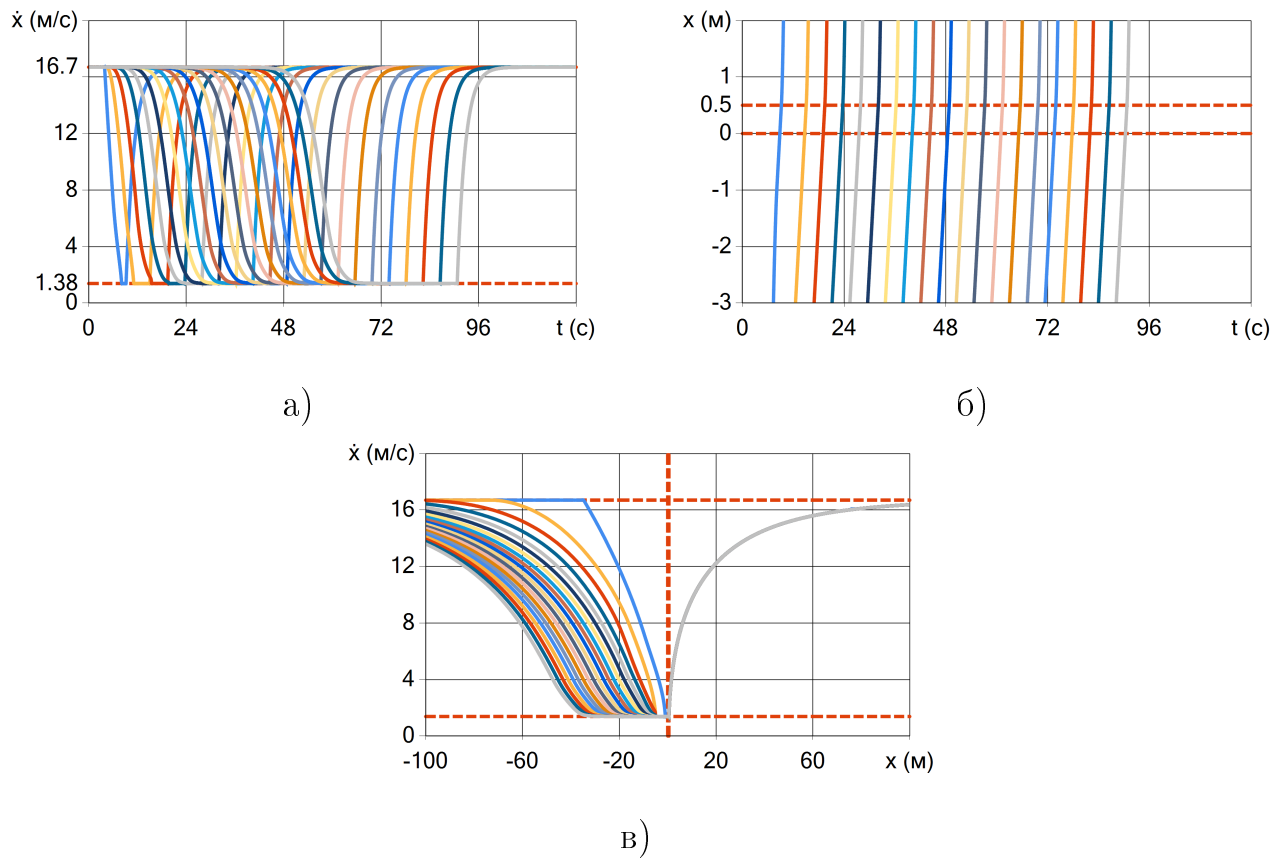


Рисунок 4.8 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей через с небольшое препятствие.

Таблица 4.4 — Среднее количество транспортных средств, проходящих через участок длиной 0.5 метра при разных скоростях на этом участке.

$t \backslash v$	60 км/ч	50 км/ч	40 км/ч	30 км/ч	20 км/ч	10 км/ч	5 км/ч
2 мин	41	41	41	41	40	39	30
4 мин	83	83	83	83	82	81	62
6 мин	126	126	126	126	125	124	95
8 мин	168	168	168	168	167	166	128
10 мин	211	211	211	211	210	209	160

Таблица 4.5 — Среднее количество транспортных средств, проходящих через участок длиной 3 метра при разных скоростях на этом участке.

$t \backslash v$	60 км/ч	50 км/ч	40 км/ч	30 км/ч	20 км/ч	10 км/ч	5 км/ч
2 мин	41	41	41	41	40	39	27
4 мин	83	83	83	83	82	81	55
6 мин	126	126	126	126	125	124	84
8 мин	168	168	168	168	167	166	112
10 мин	211	211	211	211	210	209	140

Таблица 4.6 — Среднее количество транспортных средств, проходящих через участок длиной 10 метров при разных скоростях на этом участке.

$t \backslash v$	60 км/ч	50 км/ч	40 км/ч	30 км/ч	20 км/ч	10 км/ч	5 км/ч
2 мин	41	41	41	40	39	38	24
4 мин	83	83	83	82	81	80	51
6 мин	126	126	126	125	124	123	79
8 мин	168	168	168	167	166	165	107
10 мин	211	211	211	210	209	208	135

щие снижения скорости менее 10 км/ч (2.8 м/с), оказывают более значительное воздействие на пропускную способность и могут вызывать заторы, особенно при высокой интенсивности движения.

Данные, приведенные в таблице 4.5, соответствуют характеристикам дорожных препятствий длиной около 3 метров, таких как трамвайные пути или дефекты дорожного покрытия аналогичного размера. Из анализа таблицы следует, что такие препятствия не оказывают значимого влияния на пропускную способность, если для их преодоления не требуется снижать скорость ниже 10 км/ч (2.8 м/с).

Данные, представленные в таблице 4.6, отражают характеристики дорожных препятствий длиной около 10 метров, таких как железнодорожные пути или значительные дефекты дорожного покрытия. Анализ таблицы показывает, что наличие таких препятствий не приводит к снижению пропускной способности дороги, при условии, что для преодоления они не требуют снижения скорости ниже 10 км/ч (2.8 м/с).

Результаты моделирования демонстрируют, что препятствия длиной до 10 метров не оказывают значительного влияния на пропускную способность дороги, при условии, что они не требуют снижения скорости ниже 10 км/ч

(2.8 м/с). Эти выводы подтверждаются реальными данными: в противном случае элементы дорожной инфраструктуры, такие как «лежачие полицейские», трамвайные или железнодорожные пути, могли бы существенно способствовать образованию заторов на дорогах.

4.2.6 Движение с учетом прогнозирования по прямой

Режим программы «Движение с учетом прогнозирования по прямой» предназначен для моделирования двух ключевых дорожных ситуаций: старта и остановки автомобилей. Моделирование поведения транспортных средств осуществляется с учетом прогнозирования через впередиидущее транспортное средство и реализовано в соответствии с моделью (3.4). Этот сценарий аналогичен режиму «Начало движения и остановка», но с добавлением прогнозирования.

На рисунке 4.9 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты при движении с учетом прогнозирования по прямой.

В таблице 4.7 представлено сравнение количества транспортных средств, проходящих через участок дороги согласно моделям (2.6) и (3.4) при различных значениях параметра τ_n . Анализ проводился для потока одинаковых автомобилей, движущихся по прямой. Такое сравнение позволяет оценить эффективность каждой модели в контексте пропускной способности.

Таблица 4.7 — Количество транспортных средств, проходящих через участок дороги за минуту согласно моделям (2.6) и (3.4) при разных значениях параметра τ_n .

τ_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Модель									
Модель (2.6)	35	32	29	27	25	23	22	20	19
Модель (3.4)	37	34	32	30	28	26	25	24	23

Из таблицы 4.7 видно, что пропускная способность дорожного участка оказывается выше при использовании модели (3.4) по сравнению с моделью (2.6)

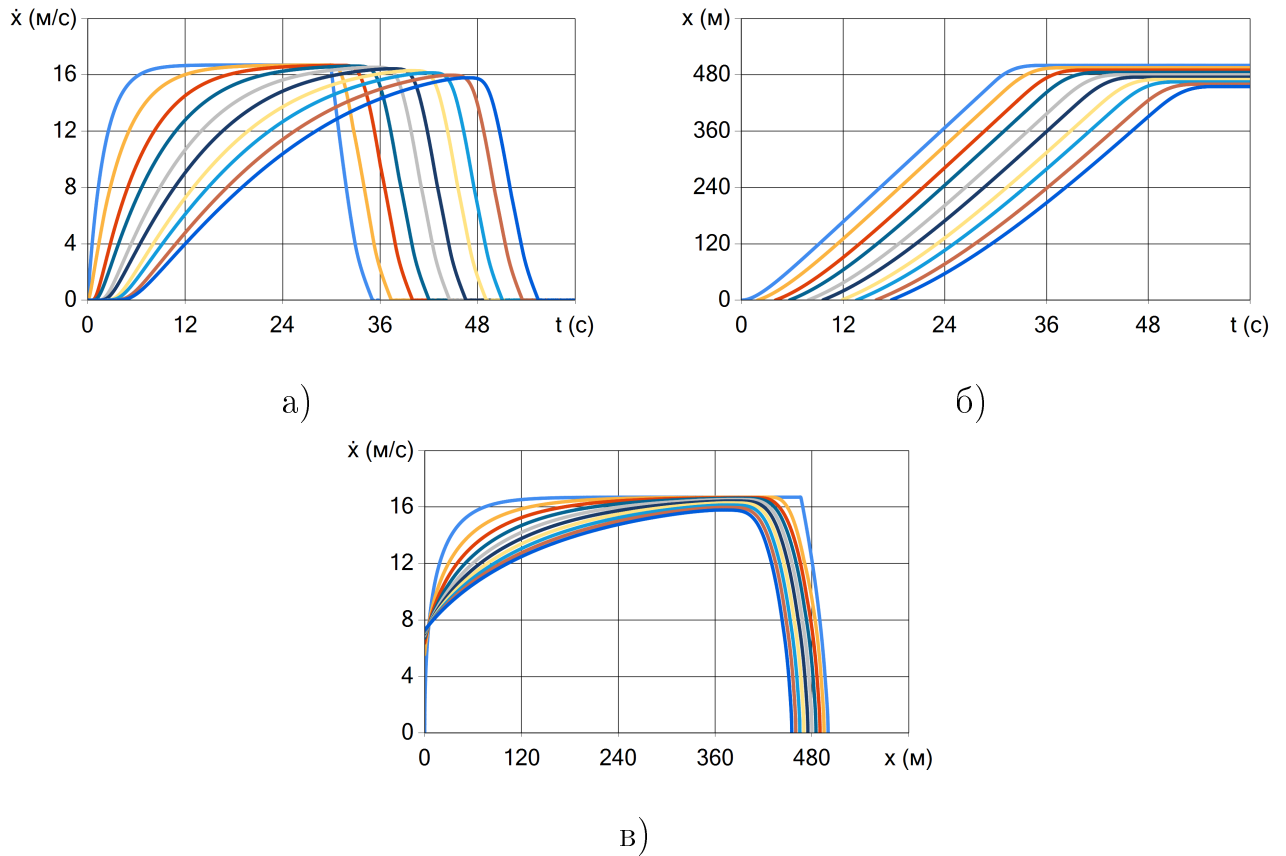


Рисунок 4.9 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей с учетом прогнозирования по прямой.

при одинаковых значениях параметра τ_n . Это показывает, что модель (3.4) обеспечивает преимущество, равное сокращению временной задержки на один шаг по τ_n . Это можно интерпретировать как более быструю реакцию водителей.

4.2.7 Движение с учетом прогнозирования через светофор

Режим программы «Движение с учетом прогнозирования через светофор» предназначен для моделирования движения автомобилей с прогнозированием на светофоре, и реализован на основе модели (3.4). Этот сценарий объединяет элементы движения через светофор и простое движение с прогнозированием. Этот режим аналогичен сценарию «Режим работы одного светофора», но с добавлением прогнозирования.

На рисунке 4.10 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты при движении с учетом прогнозирования через светофор.

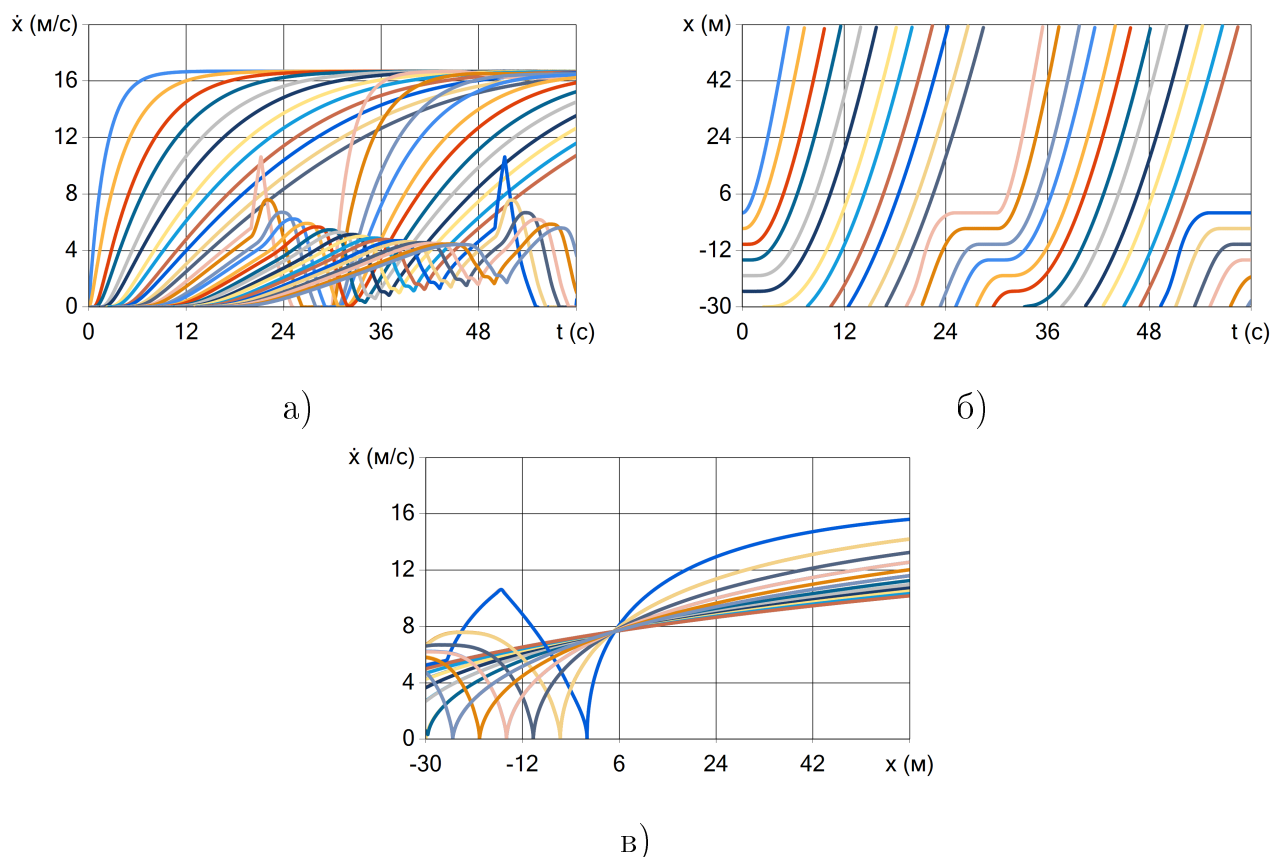


Рисунок 4.10 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей с учетом прогнозирования через светофор.

Анализ пропускной способности реальных светофоров, основанный на данных наблюдения (приложение А), показал, что количество транспортных средств, проходящих через светофор, распределяется по нормальному закону [165; 166]. Параметры этого распределения: среднее значение $\mu = 22.09$, стандартное отклонение $\sigma = 1.79$ и дисперсия $\sigma^2 = 3.21$. Мода, или наиболее вероятное значение, равна 22. На рисунке 4.11 представлена кривая нормального распределения (Гаусса), иллюстрирующая это поведение.

На графике 4.12 приведено сравнение кривых нормального распределения для количества транспортных средств, проходящих через светофор, основанных на реальных данных и результатах моделирования.

Результаты программы для модели (2.6) после моделирования 100 циклов работы светофора показали среднее значение $\mu_{(2.6)} = 22.57$, а стандартное

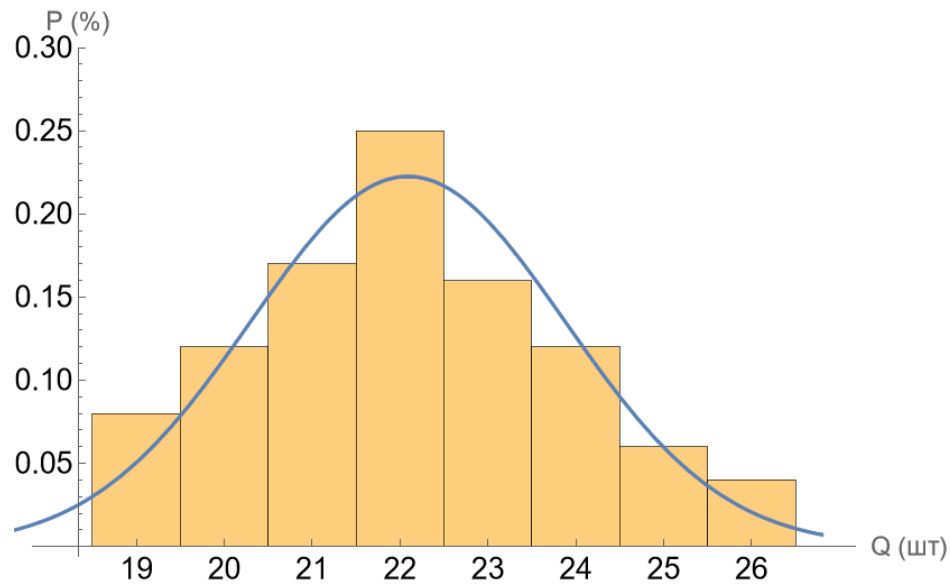


Рисунок 4.11 — Гистограмма и кривая Гаусса для наблюдаемых данных из приложения А.

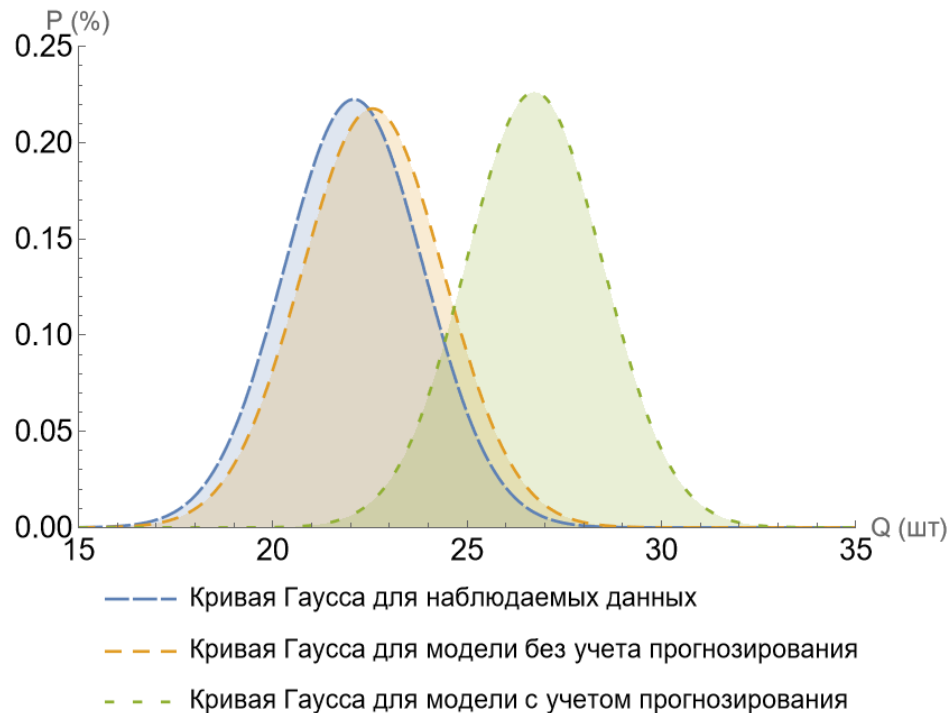


Рисунок 4.12 — Кривые Гаусса для наблюдаемых данных из приложения А и результатов моделирования с использованием моделей (2.6) и (3.4).

отклонение $\sigma_{(2.6)} = 1.83$, что практически совпадает с данными наблюдения. Незначительные расхождения можно объяснить влиянием случайных внешних факторов, которые не были учтены в модели.

Для модели (3.4), результаты после 100 циклов дали среднее значение $\mu_{(3.4)} = 26.73$, а стандартное отклонение $\sigma_{(3.4)} = 1.76$. Это свидетельствует о том, что применение модели (3.4) увеличивает среднюю пропускную

способность светофора на **18.4%** по сравнению с моделью (2.6) и на **21.0%** по сравнению с реальными данными.

4.2.8 Движение по двум полосам без взаимодействия

Режим программы «Движение по двум полосам без взаимодействия» предназначен для моделирования транспортного потока на двух параллельных полосах без взаимодействия между ними, и основан на модели (3.5). Этот режим наглядно демонстрирует влияние различных значений параметра τ_n на движение автомобилей. Для каждой полосы задается свое значение τ_n , одинаковое для всех автомобилей на этой полосе, но отличное от значения на другой.

На рисунке 4.13 показаны графики изменения скорости, координат, а также график зависимости скорости от координаты для движения автомобилей по двум полосам, где на первой полосе $\tau_n = 0$, а на второй — $\tau_n = 0.5$. Эти результаты моделирования демонстрируют влияние параметра τ_n на динамику движения транспортных средств.

Из графиков видно, что увеличение значения параметра τ_n существенно снижает проходимость транспортного потока через участок. Это обусловлено тем, что большее значение τ_n соответствует более медленной реакции водителей, что вызывает задержки в движении. Напротив, уменьшение τ_n позволяет водителю автомобилям быстрее реагировать на изменения в движении, что способствует более плавному и эффективному потоку.

В таблице 4.8 приведены данные о средней пропускной способности участка дороги за периоды 30, 60, 90, 120, 150 и 180 секунд, рассчитанные при фиксированных значениях параметра τ_n после 100 запусков моделирования. Параметры транспортного потока, за исключением τ_n , были взяты случайным образом.

Из данных таблицы 4.8 видно, что увеличение значения τ_n приводит к снижению пропускной способности. При $\tau_n = 0.5$ результаты моделирования совпадают с наблюдаемыми данными из базы данных (приложение А), что соответствует среднему времени реакции водителей в реальных условиях.

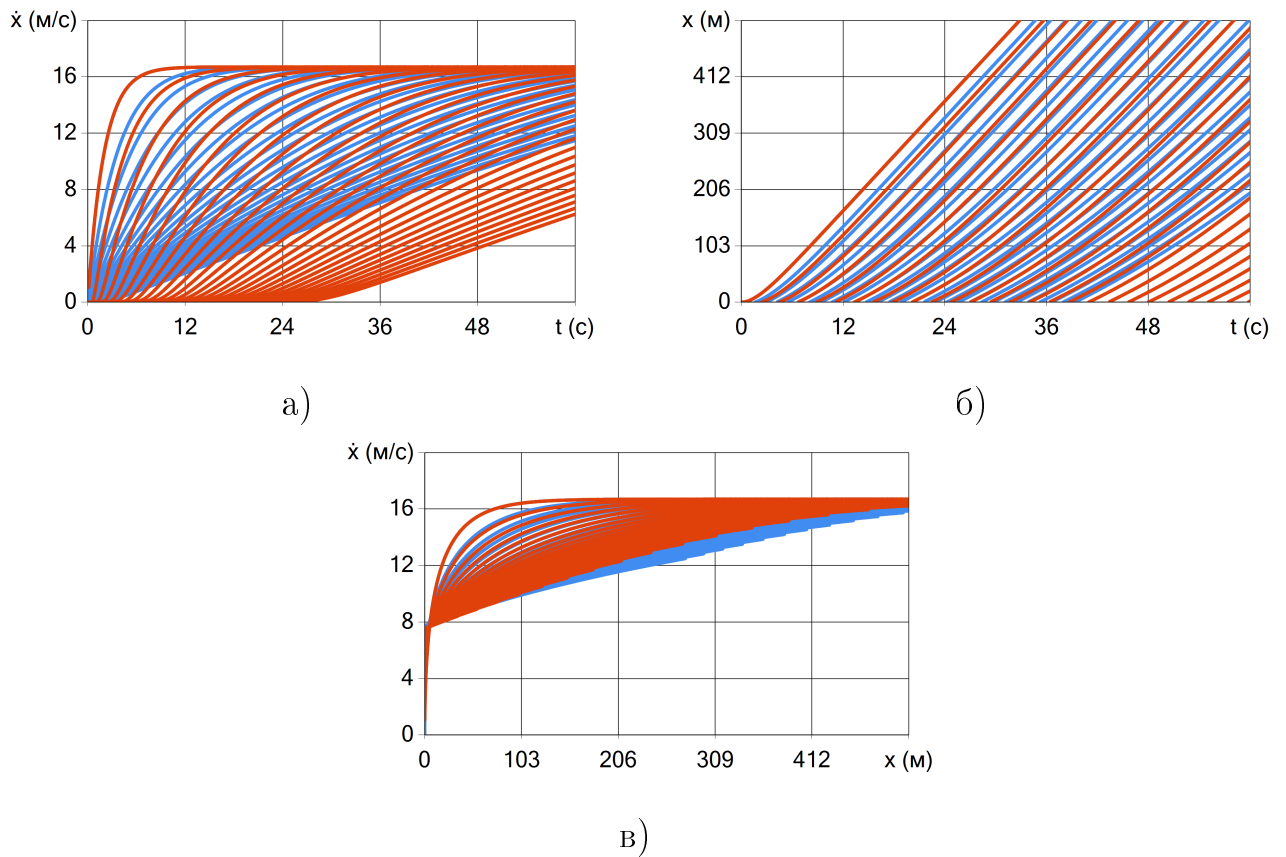


Рисунок 4.13 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей по двум полосам, где на первой полосе $\tau_n = 0$, а на второй $\tau_n = 0.5$.

Таблица 4.8 — Средняя пропускная способность транспортного потока на участке дороги при различных значениях параметра τ_n .

$t \backslash \tau_n$	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25
30 с	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
60 с	33	29	26	24	22	21	20	19	15	13
90 с	50	45	42	39	35	33	31	29	24	20
120 с	65	60	55	52	48	45	42	39	33	27
150 с	82	77	71	65	60	54	50	45	41	35
180 с	98	91	85	79	74	69	60	54	49	43

4.2.9 Движение с учетом перестроения

Режим программы «Движение с учетом перестроения» предназначен для моделирования ситуации, когда транспортные средства совершают перестроение из одного потока в другой. Он реализован на основе моделей (3.6) и (3.7). В этом режиме задаются два транспортных потока и номера автомобилей, которые будут совершать перестроение из одного потока в другой.

На рисунках 4.14 и 4.15 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости скорости от координаты. Графики демонстрируют динамику движения каждого потока в момент, когда одно из транспортных средств из середины первого потока перестраивается в середину второго.

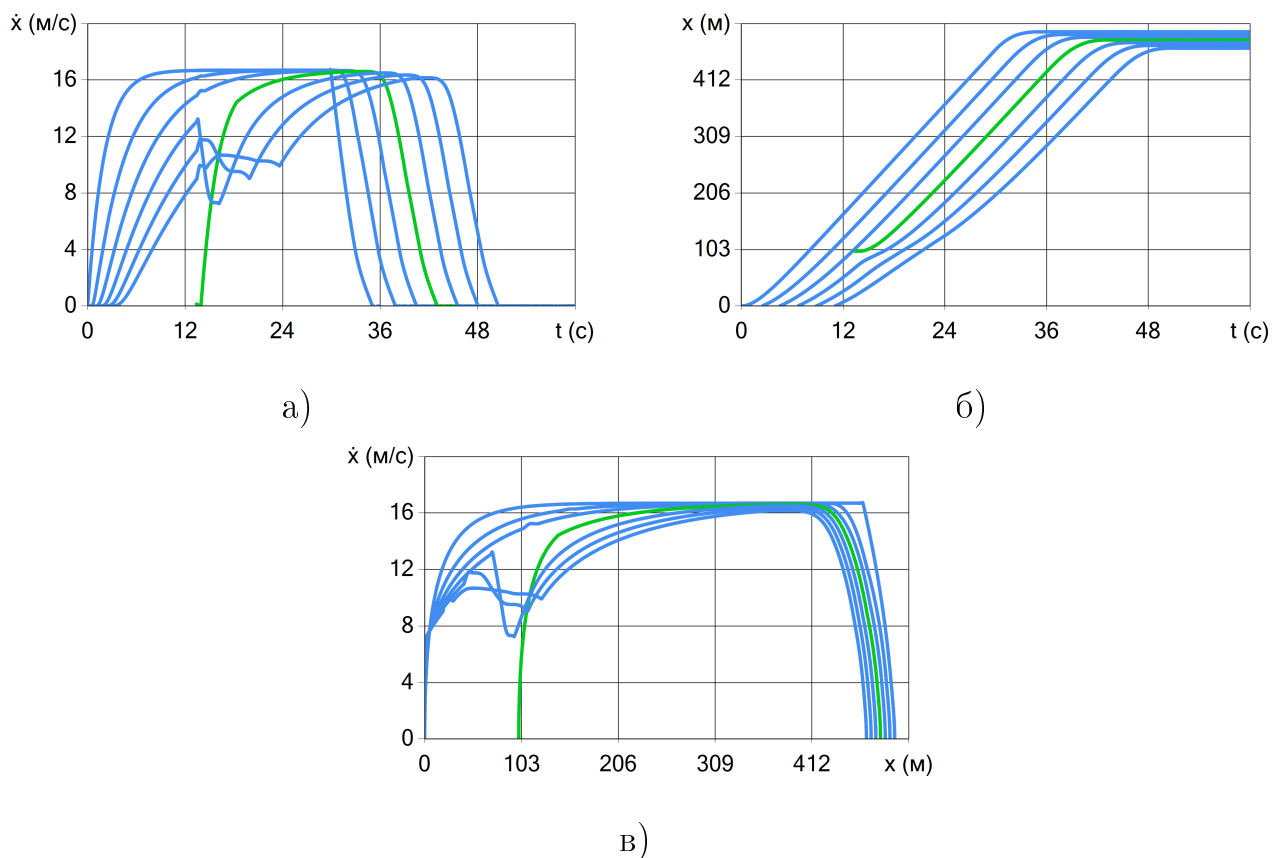


Рисунок 4.14 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей в первом потоке с учетом перестроения.

Перестроение автомобиля может вызвать явление, известное как «плавающая пробка» (или «плавающая волна затора») [173]. В этом случае затор

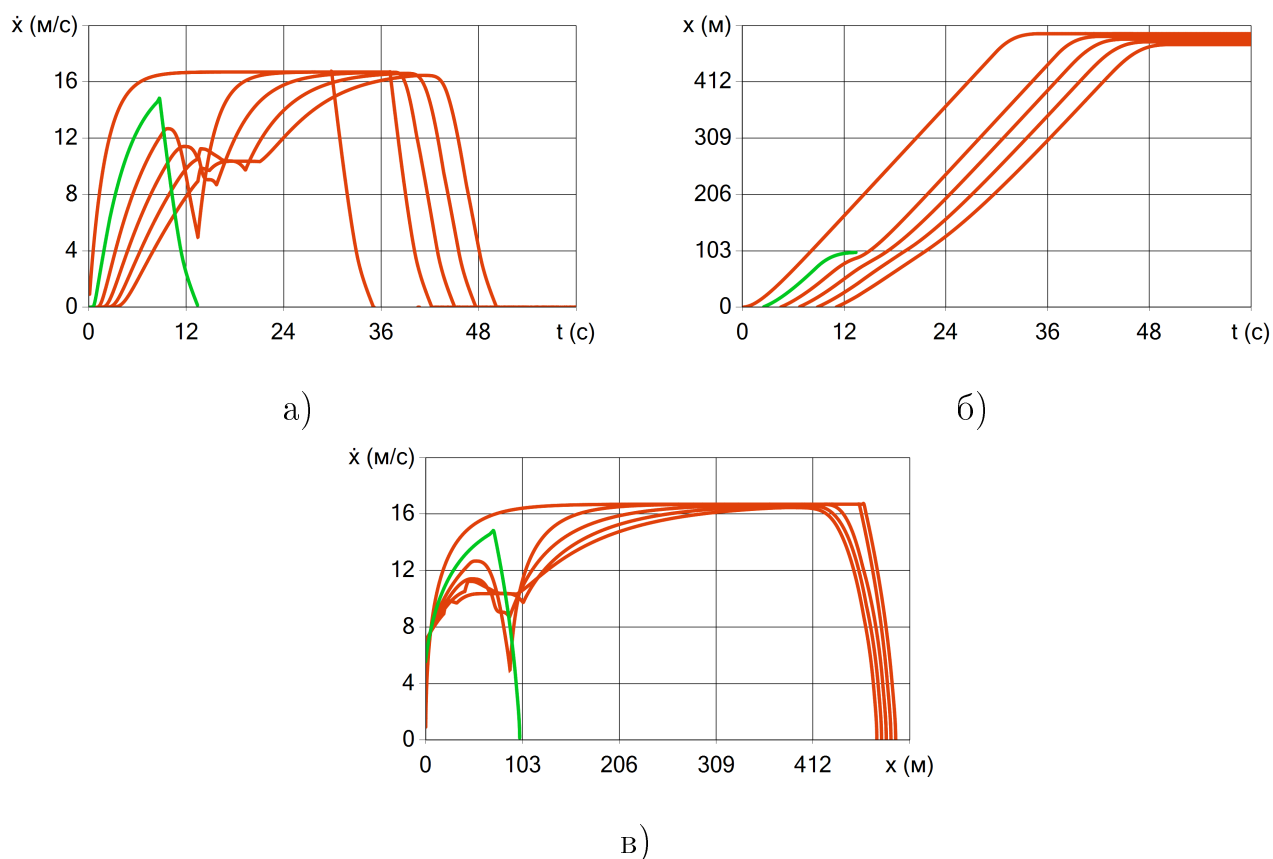


Рисунок 4.15 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей во втором потоке с учетом перестроения.

формируется не из-за внешних факторов, таких как аварии или препятствия, а вследствие взаимодействия автомобилей в потоке. Это явление характеризуется волнообразным замедлением движения, распространяющимся против или вдоль основного потока, хотя явная причина задержки может отсутствовать.

Для моделирования такого эффекта рассматривается поток машин, движущихся со скоростью 60 км/ч (16.7 м/с) на безопасных расстояниях. Автомобили первого потока не перестраиваются во второй, но в него вклинивается новое транспортное средство, которое либо движется значительно медленнее скорости потока, либо вообще неподвижно, что необходимо для успешного перестроения в плотный поток. Автомобили первого потока начинают постепенно снижать скорость, реагируя на изменение в динамике движения.

В таблице 4.9 приведены средние минимальные скорости v_{min} автомобилей первого потока после перестроения в него нового транспортного средства, рассчитанные на основе 100 моделирований. Параметры транспортного потока

задавались случайным образом, что позволяет получить обобщенные результаты для различных дорожных условий.

Таблица 4.9 — Средние минимальные скорости после перестроения транспортного средства.

v \ № АТС	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_{min}	10.7	11.7	12.01	12.3	11.8	11.7	11.9	11.6	11.9	10.9

Из таблицы видно, что в среднем каждый автомобиль снижает свою скорость примерно на **35%**, что приводит к образованию «плавающего» затора. Такой затор перемещается в направлении основного потока, создавая волнообразные задержки.

Скорость распространения затора можно вычислить по соотношению для ударной волны Ранкина-Гюгонио [174]:

$$V = \frac{\rho_2 - \rho_1}{k_2 - k_1},$$

где k_1 и k_2 — количество автомобилей на метр дороги, v_1 и v_2 — скорости до и во время затора соответственно, $\rho_1 = k_1 v_1$ и $\rho_2 = k_2 v_2$ — плотности потока.

В рассмотренном случае, при значениях $v_1 = 16.7$ м/с, $v_2 = 10.86$ м/с, $k_1 = 0.026$ и $k_2 = 0.047$ машин на метр, скорость распространения затора по направлению движения составляет $V = 3.63$ м/с, что соответствует результатам моделирования.

4.2.10 Движение с учетом перестроения через узкое место

Режим программы «Движение с учетом перестроения через узкое место» предназначен для моделирования эффекта «бутылочного горлышка». Он основан на моделях (3.6) и (3.7). Эффект «бутылочного горлышка» возникает, когда транспортные средства из одного потока вынуждены перестраиваться в другой из-за сужения дороги, ремонтных работ или аварий, блокирующих полосу. Это приводит к снижению пропускной способности и ухудшению безопасности движения в точке сужения.

На рисунках 4.16 и 4.17 представлены графики изменения скорости и положения нескольких одинаковых автомобилей, а также график зависимости

скорости от координаты демонстрирующие динамику движения каждого потока в ситуации «бутылочного горлышка».

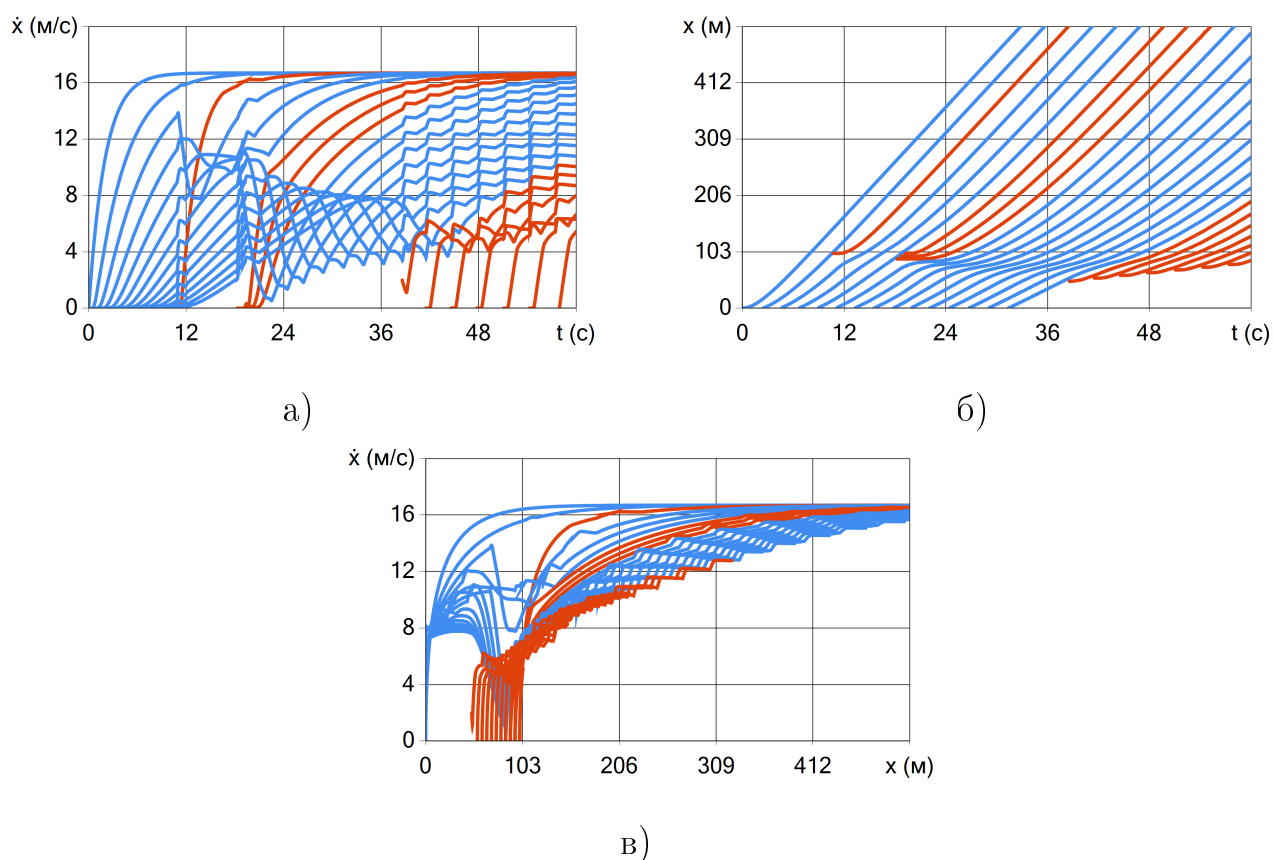


Рисунок 4.16 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей в первом потоке с учетом перестроения через узкое место.

В таблице 4.10 приведена средняя пропускная способность участка для трех сценариев: первый — движение одного потока, второй — два независимых потока, и третий — ситуация «бутылочного горлышка», где один поток полностью перестраивается во второй. Пропускная способность рассчитана на основе 100 моделирований. Параметры транспортного потока задавались случайным образом.

Из таблицы 4.10 видно, что ситуация «бутылочного горлышка» снижает пропускную способность дороги примерно на **5-7%** по сравнению с движением одного потока. Это связано с тем, что автомобили, перестраиваясь, вынуждены вклиниваться в уже движущийся поток, что приводит к снижению средней скорости движения. Данный эффект соответствует реальным наблюдениям [175; 176] на дорогах, где в подобных ситуациях часто возникает замедление

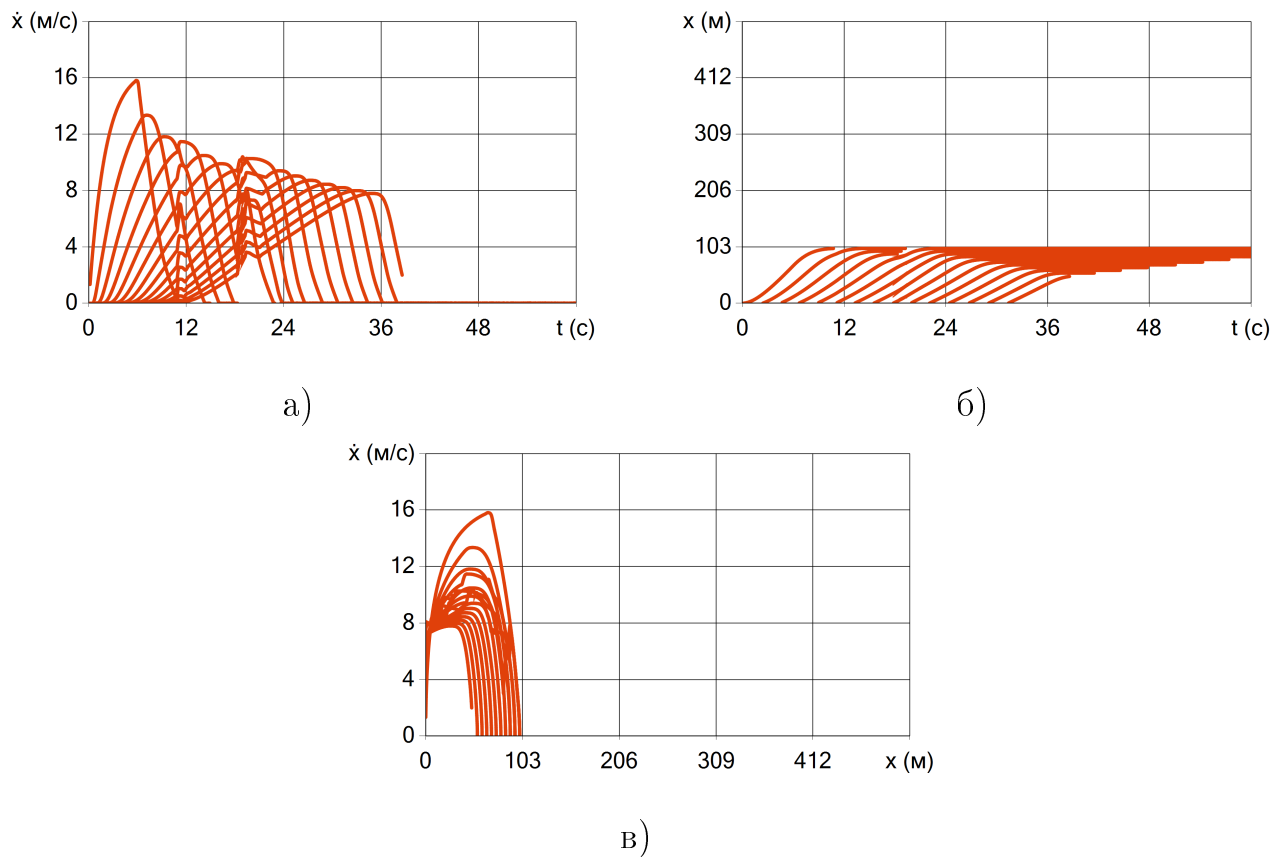


Рисунок 4.17 — Графики изменения скоростей (а), координат (б) и зависимость координаты от скорости (в) для движения автомобилей во втором потоке с учетом перестроения через узкое место.

Таблица 4.10 — Количество транспортных средств, проходящих через участок, для трех сценариев: один поток, два независимых потока, и ситуация «бутылочного горлышка».

Вид потока \ Время	Время				
	1 мин	2 мин	3 мин	4 мин	5 мин
Один поток	30	60	90	120	150
Два независимых потока	59	121	183	241	300
Узкое место	28	56	84	112	140

движения и формируются заторы, что негативно сказывается на общей эффективности транспортного потока.

На рисунке 4.18 представлены кривые Гаусса для пропускной способности, рассчитанные на основе реальных данных потоков из приложения В и результатов моделирования.

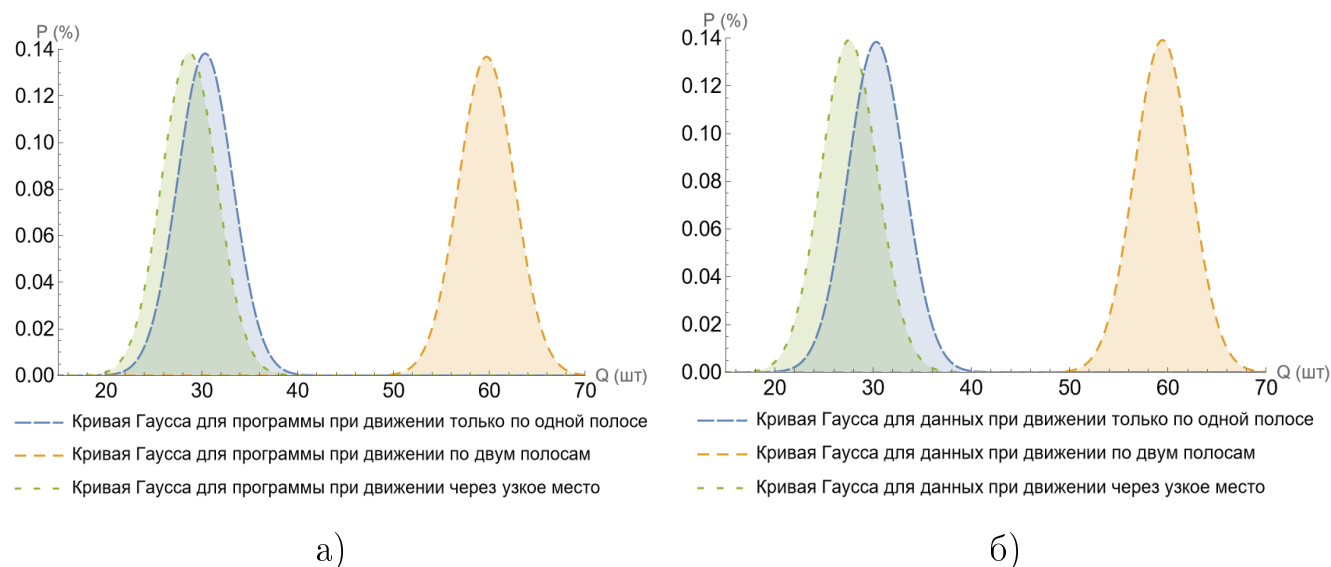


Рисунок 4.18 — Кривые Гаусса для наблюдаемых данных из приложения В и результатов моделирования.

Из графиков 4.18 видно, что полученные данные практически точно совпадают с реальными наблюдениями, представленными в приложении В. Пропускимость потока с эффектом «бутылочного горлышка» снижает пропускную способность, на **5-7%** как при моделировании так и в реальности.

Заключение

В рамках диссертационной работы проведено комплексное исследование развития транспортного моделирования, включая обзор исторических этапов и анализ современных методов и подходов к моделированию транспортных потоков.

Основные достижения работы включают.

1. Разработку новой математической модели транспортного потока, в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом. В процессе построения модели были определены единицы измерения для параметров и установлены диапазоны их значений. Также был проведен анализ устойчивости равномерного режима движения.
2. Разработку ряда расширений для предложенной модели. Расширения включают учет различных скоростных режимов, прогнозирование динамики движения впередиидущих транспортных средств, а также моделирование взаимодействия двух транспортных потоков.
3. Создание программного комплекса на основе предложенной математической модели для моделирования транспортных потоков на локальных участках транспортной сети в различных сценариях.
4. Сбор данных о реальных транспортных потоках и работе светофоров для верификации модели и оценки ее применимости в реальных условиях.

Результаты, представленные в главах 2-4, были опубликованы в работах [177—180].

Перспективы дальнейшего развития модели включают ее расширение для более сложных сценариев, таких как взаимодействие транспортных потоков на перекрестках, моделирование поведения в условиях плотного трафика, круговое движение, движение задним ходом, влияние различных параметров, таких как μ , на пропускную способность и других сценариев. Дополнительно планируется исследование по оптимизации загрузки транспортных потоков, что будет способствовать повышению эффективности управления дорожной инфраструктурой.

Важной частью дальнейшей работы станет доработка программного комплекса, чтобы он мог быть полноценно использован для оптимизации и управления дорожными сетями, обрабатывая данные в реальном времени и обеспечивая возможность моделирования и анализа в различных сценариях и условиях. Такие улучшения позволят выполнять моделирование в рамках целостной реальной транспортной системы, что значительно повысит точность и применимость модели в практике городского планирования и управления дорожной сетью.

Список литературы

1. *Knoop, V. L.* Traffic Flow Theory: An Introduction with Exercises / V. L. Knoop. — TU Delft Open, 2021. — 267 p.
2. *Вучик, В. В.* Транспорт в городах, удобных для жизни / В. В. Вучик. — М. : Альпина PRO, 2023. — 676 с.
3. *Gataullin, T. M.* Best economic approaches under conditions of uncertainty / T. M. Gataullin, S. T. Gataullin // Proceedings of the 2018 Eleventh International Conference Management of large-scale system development (MLSD). — P. 1—3.
4. *Gataullin, T.* Management of financial flows on transport / T. Gataullin, S. Gataullin // 2019 Twelfth International Conference Management of large-scale system development(MLSD). — 2019. — P. 1—4.
5. *Gataullin, T.* Synergetic effects in game theory / T. Gataullin, S. Gataullin, K. Ivanova // 2020 13th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). — 2020. — P. 1—5.
6. *Федоткин, А. М.* Численное исследование и оптимизация выходных процессов при управлении конфликтными потоками / А. М. Федоткин // Проблемы информатики. — 2021. — Т. 51, № 2. — С. 61—81.
7. *Чечина, А. А.* Сравнение воспроизведения пространственно-временных структур транспортных потоков при использовании различных способов осреднения данных / А. А. Чечина, Н. Г. Чурбанова, М. А. Трапезникова // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 1. — С. 25—35.
8. *Чечина, А. А.* Алгоритмы поведения водителей на нерегулируемых перекрестках с приоритетом и при объезде препятствий / А. А. Чечина // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 9. — С. 47—59.
9. Mitigating traffic oscillation through control of connected automated vehicles: A cellular automata simulation / Y. Wang [et al.] // Expert Systems with Applications. — 2024. — Vol. 235. — P. 121275.
10. *Pan, D.* State transition-based novel dynamic control algorithm for vehicle-following performance improvement / D. Pan, R. Lu // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 110. — P. 387—407.

11. *Li, S.* Longitudinal car-following control strategy integrating predictive collision risk / S. Li, B. Zhou, M. Xu // Applied Mathematical Modelling. — 2023. — Vol. 121. — P. 1—20.
12. Empirical study of the effects of physics-guided machine learning on freeway traffic flow modelling: model comparisons using field data / Z. Zhang [et al.] // Transportmetrica A: Transport Science. — 2023. — P. 1—28.
13. *Zhai, C.* The jamming transition of multi-lane lattice hydrodynamic model with passing effect / C. Zhai, W. Wu, Y. Xiao // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Vol. 171. — P. 113515.
14. Phase diagram in multi-phase heterogeneous traffic flow model integrating the perceptual range difference under human-driven and connected vehicles environment / C. Zhai [et al.] // Chaos, Solitons & Fractals. — 2024. — Vol. 182. — P. 114791.
15. *Hossain, M. A.* A microscopic traffic flow model for sharing information from a vehicle to vehicle by considering system time delay effect / M. A. Hossain, J. Tanimoto // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2022. — Vol. 585. — P. 126437.
16. *Hosen, M. Z.* Traffic model for the dynamical behavioral study of a traffic system imposing push and pull effects / M. Z. Hosen, M. A. Hossain, J. Tanimoto // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2024. — Vol. 645. — P. 129816.
17. *Гасников, А. В.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников. — М. : МЦНМО, 2014. — 427 с.
18. *Замятин, А. А.* Транспортные автомобильные потоки-введение в вероятностный подход / А. А. Замятин, В. А. Малышев // Труды Московского физико-технического института. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 58—74.
19. *Потапова, И. А.* Методы моделирования транспортного потока / И. А. Потапова, И. Н. Бояршинова, Т. Р. Исмагилов // Фундаментальные исследования. — 2016. — № 10—2. — С. 338—342.
20. *Недяк, А. В.* Классификация методов моделирования транспортных потоков / А. В. Недяк, О. Ю. Рудзейт, А. Р. Зайнетдинов // Вестник евразийской науки. — 2019. — Т. 11, № 6. — С. 78.

21. *Kurzhanskiy, A. A.* Modeling and software tools for freeway operational planning / A. A. Kurzhanskiy. — University of California, Berkeley, 2007.
22. *Куржанский, А. Б.* Роль макро моделирования в активном управлении транспортной сетью / А. Б. Куржанский, А. А. Куржанский, П. Варайя // Труды Московского физико-технического института. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 100—118.
23. Analysis and comparison of traffic flow models: a new hybrid traffic flow model vs benchmark models / F. Storani [et al.] // European transport research review. — 2021. — Vol. 13, no. 1. — P. 1—16.
24. *Chechina, A. A.* Various aspects of development of algorithms for the traffic flow model based on cellular automata theory / A. A. Chechina // Keldysh Institute preprints. — 2024. — No. 23. — P. 1—31.
25. Simulation of traffic flows based on the quasi-gasdynamic approach and the cellular automata theory using supercomputers / V. F. Tishkin [et al.] // Computer Research and Modeling. — 2024. — Vol. 16, no. 1. — P. 175—194.
26. *Зорин, А. В.* Стохастическая модель сообщающихся систем массового обслуживания с повторными вызовами и циклическим управлением в случайной среде / А. В. Зорин // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 6. — С. 100—109.
27. *Fedotkin, M. A.* Dynamic models of heterogeneous traffic flow on highways / M. A. Fedotkin, A. M. Fedotkin, E. V. Kudryavtsev // Automation and Remote Control. — 2020. — Т. 81, № 8. — С. 1486—1498.
28. *Федоткин, А. М.* Циклический алгоритм с продлением и дообслуживанием при управлении конфликтными потоками неоднородных требований / А. М. Федоткин, Н. С. Маркина // Теория вероятностей и ее применения. — 2022. — Т. 67, № 4. — С. 829—830.
29. *Buslaev, A. P.* On dynamical systems for transport logistic and communications / A. P. Buslaev, A. G. Tatashev // Journal of Mathematics Research. — 2016. — Т. 8, № 4. — С. 195.
30. *Buslaev, A. P.* Bernoulli algebra on common fractions and generalized oscillations / A. P. Buslaev, A. G. Tatashev // Journal of Mathematics Research. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 82—93.

31. *Курц, В. В.* Новые микроскопические модели автомобильного трафика / В. В. Курц, И. Е. Ануфриев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. — 2012. — 4 (158). — С. 50—56.
32. *Xu, H.* Modeling the asymmetry in traffic flow (a): Microscopic approach / H. Xu, H. Liu, H. Gong // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37, no. 22. — P. 9431—9440.
33. *Liu, H.* Modeling the asymmetry in traffic flow (b): macroscopic approach / H. Liu, H. Xu, H. Gong // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37, no. 22. — P. 9441—9450.
34. *Kurtc, V. V.* Car-following model with explicit reaction-time delay: linear stability analysis of a uniform solution on a ring / V. V. Kurtc, I. E. Anufriev // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9. — P. 679—687.
35. *Kurts, V. V.* Multi-anticipative car-following model with explicit reaction-time delay / V. V. Kurts, I. E. Anufriev, D. O. Trufanov // Matematicheskoe modelirovanie. — 2021. — Vol. 33, no. 5. — P. 35—46.
36. *Li, S.* Analysis and improvement of car-following stability for connected automated vehicles with multiple information uncertainties / S. Li, B. Zhou, M. Xu // Applied Mathematical Modelling. — 2023. — Vol. 123. — P. 790—809.
37. *Блаватский, В. Д.* Природа и античное общество / В. Д. Блаватский. — М. : Наука, 1976. — 80 с.
38. *Дубелир, Г. Д.* Городские улицы и мостовые / Г. Д. Дубелир // Киев: тип. АМ Пономарева. — 1912.
39. *McClintock, M.* Street traffic control / M. McClintock. — McGraw-Hill Book Company, 1925.
40. *Johannesson, S.* Highway economics / S. Johannesson // Highway Res. Board Proc. — 1928. — Vol. 8.
41. *Greenshields, B. D.* The Photographic Method of Studying Traffic Behavior / B. D. Greenshields, et al. // Highway Res. Board Proc. — 1933. — Vol. 13. — P. 382—399.

42. *Greenshields, B. D.* A study of traffic capacity / B. D. Greenshields, et al. // Highway Res. Board Proc. — 1935. — Vol. 14. — P. 448—477.
43. *Иносэ, Х.* Управление дорожным движением / Х. Иносэ, Т. Хамада. — М. : Транспорт, 1983. — С. 248.
44. *Adams, W. F.* Road traffic considered as a random series / W. F. Adams // Journal of the Institution of Civil Engineers. — 1936. — Vol. 4, no. 1. — P. 121—130.
45. *Garwood, F.* An application of the theory of probability to the operation of vehicular-controlled traffic signals / F. Garwood // Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society. — 1940. — Vol. 7, no. 1. — P. 65—77.
46. *Raff, M. S.* The distribution of blocks in an uncongested stream of automobile traffic / M. S. Raff // Journal of the American Statistical Association. — 1951. — Vol. 46, no. 253. — P. 114—123.
47. *Tanner, J. C.* The delay to pedestrians crossing a road / J. C. Tanner // Biometrika. — 1951. — Vol. 38, no. 3/4. — P. 383—392.
48. *Mayne, A. J.* Some further results in the theory of pedestrians and road traffic / A. J. Mayne, J. Alan // Biometrika. — 1954. — Vol. 41, no. 3/4. — P. 375—389.
49. *Петросян, Л. А.* Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. — СПб. : БХВ-Петербург, 2012.
50. *Wardrop, J. G.* Road paper. some theoretical aspects of road traffic research / J. G. Wardrop // Proceedings of the institution of civil engineers. — 1952. — Vol. 1, no. 3. — P. 325—362.
51. *Wardrop, J. G.* Correspondence some theoretical aspects of road traffic research / J. G. Wardrop, J. I. Whitehead // Proceedings of the institution of civil engineers. — 1952. — Vol. 1, no. 5. — P. 767—768.
52. *Beckmann, M.* Studies in the Economics of Transportation : tech. rep. / M. Beckmann, C. B. McGuire, C. B. Winsten. — 1956.
53. *Lighthill, M. J.* On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads / M. J. Lighthill, G. B. Whitham // Proceedings of the royal society of london. series a. mathematical and physical sciences. — 1955. — Vol. 229, no. 1178. — P. 317—345.

54. *Richards, P. I.* Shock waves on the highway / P. I. Richards // Operations research. — 1956. — Vol. 4, no. 1. — P. 42—51.
55. *Хейт, Ф.* Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейт. — М. : Мир, 1966. — 288 с.
56. *Newell, G. F.* Nonlinear effects in the dynamics of car following / G. F. Newell // Operations research. — 1961. — Vol. 9, no. 2. — P. 209—229.
57. *Gazis, D. C.* Car following theory of steady state traffic flow / D. C. Gazis, R. Herman, R. B. Potts // Operations research. — 1959. — Vol. 7. — P. 499—505.
58. *Gazis, D.* The problem of the amber signal light in traffic flow / D. Gazis, R. Herman, A. Maradudin // Operations research. — 1960. — Vol. 8, no. 1. — P. 112—132.
59. *Gazis, D. C.* Nonlinear follow the leader models of traffic flow / D. C. Gazis, R. Herman, R. W. Rothery // Operations research. — 1961. — Vol. 9. — P. 545—567.
60. *Дрю, Д.* Теория транспортных потоков и управление ими / Д. Дрю. — М. : Транспорт, 1972. — 424 с.
61. *Prigogine, I.* A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow / I. Prigogine // Theory of traffic flow. — 1961. — P. 158—164.
62. *Hurst, P. M.* The effects of d-amphetamine on risk taking / P. M. Hurst // Psychopharmacologia. — 1962. — Vol. 3, no. 4. — P. 283—290.
63. *Perchonok, K.* The measurement of driver errors / K. Perchonok // Report division of highway studies. — 1964. — No. 1.
64. *Hulbert, S.* Driving simulator research / S. Hulbert, C. Wojcik // Highway Research Board Bulletin. — 1960. — Vol. 261. — P. 1—13.
65. *Renyi, A.* On two mathematical models of the traffic on a divided highway / A. Renyi // Journal of Applied Probability. — 1964. — Vol. 1, no. 2. — P. 311—320.
66. *Solomon, H.* Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability / H. Solomon, P. C. Wang. — 1972. — P. 383.

67. *Inose, H.* Theory of road-traffic control based on macroscopic traffic model / H. Inose, H. Fujisaki, T. Hamada // *Electronics Letters*. — 1967. — Vol. 8, no. 3. — P. 385—386.
68. *Неймарк, Ю. И.* О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке / Ю. И. Неймарк, М. А. Федоткин // *Автоматика и телемеханика*. — 1966. — Т. 27, № 3. — С. 78—87.
69. *Федоткин, М. А.* Управление уличным движением на перекрестке при периодическом случайном потоке прибывающих машин / М. А. Федоткин // *Изв. АН СССР. Техн. кибернет.* — 1969. — № 3. — С. 66—75.
70. *Неймарк, Ю. И.* Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке / Ю. И. Неймарк, М. А. Федоткин, А. М. Преображенская // *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*. — 1968. — № 5. — С. 129—141.
71. *Федоткин, М. А.* Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. I / М. А. Федоткин // *Литовский математический сборник*. — 1988. — Т. 28, № 4. — С. 783—794.
72. *Федоткин, М. А.* Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. I / М. А. Федоткин // *Литовский математический сборник*. — 1988. — Т. 28, № 4. — С. 783—794.
73. *Пройдакова, Е. В.* Необходимые условия существования стационарного распределения выходных потоков в системе с приоритетным направлением / Е. В. Пройдакова // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. — 2007. — № 1. — С. 167—172.
74. *Ляпунов, А. А.* Теоретические проблемы кибернетики / А. А. Ляпунов, С. В. Яблонский // *Проблемы кибернетики*. — 1963. — Т. 9. — С. 5—22.
75. *Drew, D. R.* Digital simulation of freeway merging operation / D. R. Drew, T. C. Meserole, J. H. Buhr. — 1967.
76. *Payne, H. J.* Models of Freeway Traffic and Control / H. J. Payne // *Mathematical Models of Public Systems*. — 1971. — Vol. 1. — P. 51—61.
77. *Whitham, G. B.* Linear and nonlinear waves / G. B. Whitham. — 1972. — P. 651.

78. *Кисляков, В. М.* Математическое моделирование и оценка условий движения автомобилей и пешеходов / В. М. Кисляков, В. В. Филиппов, И. А. Школяренко. — М. : Транспорт, 1979. — 200 с.
79. *Wolfram, S.* A new kind of science / S. Wolfram, M. Gad-el-Hak // Applied Mechanics Reviews. — 2003. — Vol. 56, no. 2. — B18—B19.
80. *Nagel, K.* A cellular automaton model for freeway traffic / K. Nagel, M. Schreckenberg // Journal de physique I. — 1992. — Vol. 2, no. 12. — P. 2221—2229.
81. *Daganzo, C. F.* The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory / C. F. Daganzo // Transportation research part B: methodological. — 1994. — Vol. 28, no. 4. — P. 269—287.
82. *Varaiya, P.* Max pressure control of a network of signalized intersections / P. Varaiya // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. — 2013. — Vol. 36. — P. 177—195.
83. *Kurzhanskiy, A. A.* Active traffic management on road networks: a macroscopic approach / A. A. Kurzhanskiy, P. Varaiya // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2010. — Vol. 368, no. 1928. — P. 4607—4626.
84. *Kerner, B. S.* Three-phase traffic theory and highway capacity / B. S. Kerner // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2004. — Vol. 333. — P. 379—440.
85. *Kerner, B. S.* Probabilistic breakdown phenomenon at on-ramp bottlenecks in three-phase traffic theory / B. S. Kerner, S. L. Klenov // Transportation research record. — 2006. — Vol. 1965, no. 1. — P. 70—78.
86. *Kerner, B. S.* Phase transitions in traffic flow on multilane roads / B. S. Kerner, S. L. Klenov // Physical Review E. — 2009. — Vol. 80, no. 5. — P. 056101.
87. *Nesterov, Y.* Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives / Y. Nesterov, A. De Palma // Networks and spatial economics. — 2003. — Vol. 3. — P. 371—395.
88. Как бороться с пробками? / А. Гасников [и др.] // Троицкий вариант. — 2012. — № 117. — С. 6—7.

89. О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков / А. В. Гасников [и др.] // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 6. — С. 34—70.
90. *Treiber, M.* Explanation of observed features of self-organization in traffic flow / M. Treiber, H. A. D. Helbing // Physical Review E. — 1999. — Vol. 59, no. 1. — P. 239.
91. *Treiber, M.* Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations / M. Treiber, A. Hennecke, D. Helbing // Physical review E. — 2000. — Vol. 62, no. 2. — P. 1805.
92. Traffic flow on networks / M. Garavello, B. Piccoli, [et al.]. — American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2006.
93. *Elefteriadou, L.* An introduction to traffic flow theory / L. Elefteriadou. — Springer, 2014.
94. *Wang, T.* Stability analysis of heterogeneous traffic flow influenced by memory feedback control signal / T. Wang, R. Cheng, Y. Wu // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 109. — P. 693—708.
95. *Zhai, C.* Stability analysis of two-lane lattice hydrodynamic model considering lane-changing and memorial effects / C. Zhai, W. Wu // Modern Physics Letters B. — 2018. — Vol. 32, no. 20. — P. 1850233.
96. *Zhai, C.* Lattice hydrodynamic modeling with continuous self-delayed traffic flux integral and vehicle overtaking effect / C. Zhai, W. Wu // Modern Physics Letters B. — 2020. — Vol. 34, no. 05. — P. 2050071.
97. *Zhai, C.* Designing continuous delay feedback control for lattice hydrodynamic model under cyber-attacks and connected vehicle environment / C. Zhai, W. Wu // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2021. — Vol. 95. — P. 105667.
98. *Zhai, C.* Cooperative car-following control with electronic throttle and perceived headway errors on gyroidal roads / C. Zhai, W. Wu, Y. Xiao // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 108. — P. 770—786.
99. *Уизем, Д.* Линейные и нелинейные волны / Д. Уизем. — М. : Мир, 1977. — 624 с.

100. *Gartner, N. H.* Traffic flow theory-A state-of-the-art report: revised monograph on traffic flow theory / N. H. Gartner, C. J. Messer, A. Rathi. — 2002. — 386 p.
101. *Бабков, В. Ф.* Дорожные условия и безопасность движения / В. Ф. Бабков. — М. : Транспорт, 1982.
102. *Куликовский, А. Г.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — М. : Физматлит, 2012.
103. *Prigogine, I.* A boltzmann-like approach for traffic flow / I. Prigogine, A. F. C. // Operations Research. — 1960. — Vol. 8. — P. 789—797.
104. *Prigogine, I.* Kinetic theory of vehicular traffic / I. Prigogine, R. Herman. — 1971. — 100 p.
105. *Lampis, M.* On the Prigogine theory of traffic flow: Driver's program independent of concentration / M. Lampis // Meccanica. — 1977. — Vol. 12, no. 4. — P. 187—193.
106. *Пышный, В. А.* Моделирование загрузки транспортной сети / В. А. Пышный // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2012. — № 2. — С. 457—473.
107. *Paveri-Fontana, S. L.* On Boltzmann-like treatments for traffic flow: a critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis / S. L. Paveri-Fontana // Transportation research. — 1975. — Vol. 9, no. 4. — P. 225—235.
108. *Helbing, D.* Gas-kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations / D. Helbing // Physical Review E. — 1996. — Vol. 53, no. 3. — P. 2366.
109. *Tampère, C.* Human-kinetic multiclass traffic flow theory and modelling / C. Tampère. — 2004. — 333 p.
110. *Helbing, D.* Social force model for pedestrian dynamics / D. Helbing, P. Molnar // Physical review E. — 1995. — Vol. 51, no. 5. — P. 4282.
111. *Helbing, D.* Self-organizing pedestrian movement / D. Helbing, P. Molnár, I. J. Farkas // Environment and planning B: planning and design. — 2001. — Vol. 28, no. 3. — P. 361—383.

112. *Якимов, М. Р.* Основные подходы к моделированию движения пешеходных потоков / М. Р. Якимов // Мир транспорта. — 2015. — Т. 13, № 4. — С. 166—173.
113. *Daganzo, C. F.* The cell transmission model, part II: network traffic / C. F. Daganzo // Transportation Research Part B: Methodological. — 1995. — Vol. 29, no. 2. — P. 79—93.
114. *Chowdhury, D.* Statistical physics of vehicular traffic and some related systems / D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider // Physics Reports. — 2000. — Vol. 329, no. 4—6. — P. 199—329.
115. *Nagatani, T.* The physics of traffic jams / T. Nagatani // Reports on progress in physics. — 2002. — Vol. 65, no. 9. — P. 1331.
116. *Нейман, Д. фон.* Теория самовоспроизводящихся автоматов / Д. фон Нейман. — М. : Мир, 1971. — 384 с.
117. *Nagel, K.* Deterministic models for traffic jams / K. Nagel, H. J. Herrmann // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1993. — Vol. 199, no. 2. — P. 254—269.
118. *Sauermann, G.* A 1d traffic model with threshold parameters / G. Sauermann, H. J. Herrmann // Traffic and granular flow. — 1998. — P. 481—486.
119. *Brilon, W.* Evaluation of cellular automata for traffic flow simulation on freeway and urban streets / W. Brilon, N. Wu. — 1999.
120. *Benassi, A.* Hydrodynamical limit for the asymmetric simple exclusion process / A. Benassi, J.-P. Fouque // The Annals of Probability. — 1987. — P. 546—560.
121. *Kipnis, C.* Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes / C. Kipnis, S. Olla, S. S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. 42, no. 2. — P. 115—137.
122. *Nishinari, K.* Two-dimensional Burgers cellular automaton / K. Nishinari, J. Matsukidaira, D. Takahashi // Journal of the Physical Society of Japan. — 2001. — Vol. 70, no. 8. — P. 2267—2272.
123. *Буслаев, А. П.* О свойствах решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений на графах / А. П. Буслаев, А. Г. Таташев, М. В. Яшина // Владикавказский математический журнал. — 2004. — Т. 6, № 4. — С. 17—24.

124. *Назаров, А. И.* Об устойчивости стационарных режимов в одной системе нелинейных ОДУ, возникающей при моделировании автотранспортных потоков / А. И. Назаров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2006. — № 3. — С. 35—42.
125. *Кокс, Д. Р.* Теория восстановления / Д. Р. Кокс, В. Л. Смит. — М. : Советское радио, 1967. — 300 с.
126. *Рюэль, Д.* Статистическая механика / Д. Рюэль. — М. : Мир, 1971. — 367 с.
127. *Малышев, В. А.* Гиббсовские случайные поля / В. А. Малышев, Р. А. Минлос. — М. : Наука, 1985. — 288 с.
128. *Кингман, Д.* Пуассоновские процессы / Д. Кингман. — М. : МЦНМО, 2007. — 136 с.
129. *Севастьянов, Б. А.* Теория восстановления / Б. А. Севастьянов // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». — 1974. — Т. 11, № 0. — С. 99—128.
130. *Швецов, В. И.* Математическое моделирование транспортных потоков / В. И. Швецов // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 11. — С. 3—46.
131. *Кравченко, П. С.* Микроскопические математические модели транспортных потоков. Аналитический обзор / П. С. Кравченко, Г. А. Омарова // Проблемы информатики. — 2014. — 1 (22). — С. 24—31.
132. *Kerner, B. S.* Introduction to modern traffic flow theory and control: the long road to three-phase traffic theory / B. S. Kerner. — 2009.
133. *Helbing, D.* Traffic and related self-driven many-particle systems / D. Helbing // Reviews of modern physics. — 2001. — Vol. 73, no. 4. — P. 1067.
134. *Gazis, D. C.* Traffic theory. Vol. 50 / D. C. Gazis. — 2006.
135. *Pipes, L. A.* An operational analysis of traffic dynamics / L. A. Pipes // Journal of applied physics. — 1953. — Vol. 24, no. 3. — P. 274—281.
136. *Chandler, R. E.* Traffic dynamics: studies in car following / R. E. Chandler, R. Herman, E. W. Montroll // Operations research. — 1958. — Vol. 6, no. 2. — P. 165—184.
137. *Gazis, D. C.* Car-following theory of steady-state traffic flow / D. C. Gazis, R. Herman, R. B. Potts // Operations research. — 1959. — Vol. 7, no. 4. — P. 499—505.

138. *Gazis, D. C.* Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow / D. C. Gazis, R. Herman, R. W. Rothery // Operations research. — 1961. — Vol. 9, no. 4. — P. 545—567.
139. *Коноплянко, В. И.* Организация и безопасность дорожного движения / В. И. Коноплянко. — М. : Высшая школа (ВШ), 2007. — 387 с.
140. *Суворов, Ю. Б.* Судебная дорожно-транспортная экспертиза / Ю. Б. Суворов. — М. : Экзамен, 2003. — 102 с.
141. *Медведева, Н. Б.* Динамика логистической функции / Н. Б. Медведева // Соросовский образовательный журнал. — 2000. — Т. 4. — С. 4.
142. *Кравец, В. Н.* Теория автомобиля / В. Н. Кравец. — Н. Новгород. : НГТУ, 2013. — 423 с.
143. *Плескунов, М. А.* Операционное исчисление / М. А. Плескунов. — Екб. : УФУ, 2014. — 146 с.
144. Постановление Правительства РФ от 23.10.1993 N 1090 (ред. от 21.12.2019) «О Правилах дорожного движения» (вместе с «Основными положениями по допуску транспортных средств к эксплуатации и обязанности должностных лиц по обеспечению безопасности дорожного движения»).
145. *Neal, H. E.* Reaction time / H. E. Neal // Highway Res. Abstr. — 1956. — Vol. 134. — P. 6—7.
146. *Мишури́н, В. М.* Психологические основы труда водителей автомобилей / В. М. Мишури́н, А. Н. Романов, Н. А. Игнатов. — М. : МАДИ, 1982. — 254 с.
147. *Гюлев, Н. У.* Об изменении времени реакции водителя вследствие пребывания в транспортном заторе / Н. У. Гюлев // Весник Национального технического университета. — 2011. — № 2. — С. 117—120.
148. *Гюлев, Н. У.* Влияние транспортного затора на время реакции водителей разных темпераментов / Н. У. Гюлев, В. К. Доля // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2012. — Т. 6, 3 (60). — С. 69—71.
149. *Атаманов, Ю. Е.* Эксплуатационные свойства электрического транспорта при торможении / Ю. Е. Атаманов, В. Н. Плищ. — БНТУ, 2022. — 194 с.
150. *Дубровский, В. И.* Биомеханика / В. И. Дубровский, В. Н. Федорова. — М. : Владос-пресс, 2008. — 669 с.

151. *Деньгуб, В. М.* Единицы величин / В. М. Деньгуб, В. Г. Смирнов. — М. : Изд-во стандартов, 1990. — 240 с.
152. *Порватов, И. Н.* Классификация и маркировка автомобилей. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Основы конструкции автомобилей» / И. Н. Порватов, С. Р. Кристальный. — М. : МАДИ, 2010. — 50 с.
153. *Пожидаев, С. П.* Оценка времени разгона автомобилей / С. П. Пожидаев // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. — 2014. — 5 (49). — С. 74—76.
154. *Стуканов, В. А.* Основы теории автомобильных двигателей и автомобиля / В. А. Стуканов. — М. : Форум, 2004. — 367 с.
155. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.
156. *Vanderbilt, T.* Traffic: Why we drive the way we do (and what it says about us) / T. Vanderbilt. — Vintage, 2009.
157. *Groeger, J. A.* Understanding driving: Applying cognitive psychology to a complex everyday task / J. A. Groeger. — Routledge, 2013.
158. Ярнет. — URL: <https://yar-net.ru/video> (дата обр. 01.05.2024).
159. *Bagui, S.* Database design using entity-relationship diagrams / S. Bagui, R. Earp. — Auerbach Publications, 2003.
160. *Kerner, B. S.* A theory of traffic congestion at heavy bottlenecks / B. S. Kerner // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2008. — Vol. 41, no. 21. — P. 215101.
161. Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam / Y. Sugiyama [et al.] // New journal of physics. — 2008. — Vol. 10, no. 3. — P. 033001.
162. *Mueller, J. P.* C# 10.0 All-in-One For Dummies / J. P. Mueller. — John Wiley & Sons, 2022.
163. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука, 1973. — 632 с.
164. *Hildebrand, F. B.* Introduction to numerical analysis / F. B. Hildebrand. — Courier Corporation, 1987.

165. Introduction to probability and statistics / W. Mendenhall [et al.]. — Duxbury press North Scituate, MA, 1975.
166. *Johnson, R. A.* Probability and statistics for engineers / R. A. Johnson, I. Miller, J. E. Freund. — Pearson Education London, 2000.
167. *Manual, H. C.* Highway capacity manual / H. C. Manual // Washington, DC. — 2000. — Vol. 2, no. 1. — P. 1.
168. *Gillespie, T.* Fundamentals of vehicle dynamics / T. Gillespie. — SAE international, 2021.
169. *Коломиец, Л. В.* Метод наименьших квадратов / Л. В. Коломиец, Н. Ю. Поникарова. — Самар. : Изд-во Самар. ун-та, 2017. — 32 с.
170. *Глухов, А. К.* Психологические аспекты безопасности дорожного движения в России / А. К. Глухов. — М. : Логос, 2013. — 64 с.
171. ГОСТ Р 50597-2017 Дороги автомобильные и улицы. Требования к эксплуатационному состоянию, допустимому по условиям обеспечения безопасности дорожного движения. Методы контроля (с Поправками) Применяется с 01.09.2018. Заменяет ГОСТ Р 50597-93.
172. *Сосюк, Д. И.* К вопросу об искусственных дорожных неровностях / Д. И. Сосюк, В. В. Скутельник // iPolytech Journal. — 2018. — Т. 22, 11 (142). — С. 241—250.
173. Urban traffic congestion estimation and prediction based on floating car trajectory data / X. Kong [et al.] // Future Generation Computer Systems. — 2016. — Vol. 61. — P. 97—107.
174. *Овсянников, Л. В.* Введение в механику сплошных сред: классические модели / Л. В. Овсянников. — Новосиб. : НГУ, 1977. — 69 с.
175. *Григорьев, Д. А.* Причины неэффективности расширения дорог в борьбе с заторами / Д. А. Григорьев // Коррекционно-педагогическое образование. — 2022. — № 4. — С. 24—27.
176. *Стрельцов, С. В.* Исследование проблемы загруженности автомобильных дорог / С. В. Стрельцов, О. С. Толмачева // Современные прикладные исследования. — 2022. — С. 113.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка рекомендованных ВАК и индексируемых в международных базах данных

177. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 10. — С. 95—109.
178. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели транспортного потока / М. А. Погребняк // Математическое моделирование. — 2024. — Т. 36, № 1. — С. 131—140.
179. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока на участках с различными скоростными режимами / М. А. Погребняк // Теоретическая и математическая физика. — 2024. — Т. 220, № 2. — С. 339—349.
180. *Pogrebnyak, M.* Traffic flow model considering the dynamics prediction of the leading vehicle / M. Pogrebnyak // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2024. — Vol. 649. — P. 129946.

Зарегистрированные базы данных

181. *Свидетельство о гос. регистрации базы данных.* «TrafficFlowDatabase»: база данных пропускной способности светофоров / М. А. Погребняк. — № 2024622039 ; заявл. 26.07.2024 ; опубл. 14.08.2024, 2024622315 (Рос. Федерация).

Зарегистрированные программы для ЭВМ

182. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для моделирования движения транспортного потока «TrafficFlowSimulation» версия 1.0 / М. А. Погребняк. — № 2023610182 ; заявл. 09.01.2023 ; опубл. 19.01.2023, 2023611363 (Рос. Федерация).
183. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для моделирования движения транспортного потока «TrafficFlowSimulation» версия 2.0 / М. А. Погребняк. — № 2024611506 ; заявл. 24.01.2024 ; опубл. 02.02.2024, 2024612637 (Рос. Федерация).

184. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программный комплекс для моделирования движения транспортного потока в различных дорожных ситуациях* / М. А. Погребняк. — № 2024667948 ; заявл. 26.07.2024 ; опубл. 14.08.2024, 2024669058 (Рос. Федерация).

В сборниках трудов конференций

185. *Погребняк, М. А. Моделирование движения транспортного потока* / М. А. Погребняк // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Второе издание: переработанное и дополненное. — 2020.
186. *Pogrebnyak, M. Traffic flow model* / М. Pogrebnyak // International Scientific Students' Conference Science Drive 2021 : Book of Abstracts. — 2021.
187. *Погребняк, М. А. Моделирование движения транспортного потока* / М. А. Погребняк // Семьдесят четвертая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием сб. материалов конф. В. 2 ч. Ч. 1. — 2021.
188. *Погребняк, М. А. Моделирование движения транспортного потока* / М. А. Погребняк // Путь в науку. Математика: Материалы всероссийской молодежной конференции. — 2021.
189. *Погребняк, М. А. Модель движения транспортного потока* / М. А. Погребняк // Международная конференция «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышева : Материалы конференции. — 2021.
190. *Pogrebnyak, M. Traffic flow model* / М. Pogrebnyak // Third International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, and School «Integrable and Nonlinear Days» : Book of Abstracts. — 2021.
191. *Погребняк, М. А. Моделирование движения транспортного потока* / М. А. Погребняк // Всероссийская научно-практическая конференция им. Жореса Алферова: сборник тезисов статей. — 2021.
192. *Погребняк, М. А. Математическое моделирование движения транспортного потока* / М. А. Погребняк // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — 2021.

193. *Погребняк, М. А.* Математическое моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Казанские научные чтения студентов и аспирантов имени В.Г. Тимирязова – 2021: материалы XI Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов. Том 1. — 2021.
194. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Семьдесят пятая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием : сб. материалов конф. В. 3 ч. Ч. 1. — 2022.
195. *Pogrebnyak, M.* Traffic flow model / M. Pogrebnyak // International Scientific Students' Conference Science Drive 2021 : Book of Abstracts. — 2022.
196. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022». — 2022.
197. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Инжиниринг: теория и практика : материалы II международной научно-практической конференции. — 2022.
198. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Путь в науку. Математика: Материалы всероссийской молодежной конференции. — 2022.
199. *Погребняк, М. А.* Поведение решений математической модели движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко. — 2022.
200. *Pogrebnyak, M.* Behaviour of the solutions of a traffic flow mathematical model / M. Pogrebnyak // Nonlinear dynamics, integrability (NDI-2022) : Abstracts. — 2022.
201. *Pogrebnyak, M.* Behaviour of the solutions of a traffic flow mathematical model / M. Pogrebnyak // The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. — 2022.
202. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Международная школа молодых ученых «Моделиро-

- вание и оптимизация сложных систем». Аннотации лекций и докладов. — 2022.
203. *Pogrebnyak, M.* Behaviour of the solutions of a traffic flow mathematical model / М. Pogrebnyak // XXI International Conference Foundations, Advances in Nonlinear Science. — 2022.
 204. *Погребняк, М. А.* Поведение решений математической модели движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Тезисы докладов XX научной школы Нелинейный волны – 2022. — 2022.
 205. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели автомобильного трафика / М. А. Погребняк // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — 2023.
 206. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели автомобильного трафика / М. А. Погребняк // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023». — 2023.
 207. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели автомобильного трафика / М. А. Погребняк // Семьдесят пятая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием : сб. материалов конф. В. 3 ч. Ч. 1. — 2023.
 208. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели автомобильного трафика / М. А. Погребняк // Материалы конференции «Современные методы теории краевых задач. Понtryгинские чтения XXXIV». — 2023.
 209. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели автомобильного трафика / М. А. Погребняк // Путь в науку. Математика: Материалы всероссийской молодежной конференции. — 2023.
 210. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XV Международной конференции. — 2023.
 211. *Pogrebnyak, M.* Parameters estimation in the traffic flow model / М. Pogrebnyak // Integrable systems, nonlinear dynamics (ISDN–2023) : Abstracts. — 2023.
 212. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». — 2023.

213. *Погребняк, М. А.* Оценка параметров в модели транспортного потока / М. А. Погребняк // Всероссийская научно-практическая конференция им. Жореса Алфёрова: сборник тезисов статей. — 2023.
214. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока на участках с различными скоростными режимами / М. А. Погребняк // Труды 66-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — 2024.
215. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока на участках с различными скоростными режимами / М. А. Погребняк // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2024». — 2024.
216. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока на участках с различными скоростными режимами / М. А. Погребняк // Понtryгинские чтения — XXXV : материалы Международной Воронежской весенней математической школы. — 2024.
217. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока на участках с различными скоростными режимами / М. А. Погребняк // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам : сб. тез. докл. междунар. конф. — 2024.
218. *Pogrebnyak, M.* Traffic flow model considering the dynamics prediction of the leading vehicle / M. Pogrebnyak // Integrable systems, nonlinear dynamics (ISDN-2024) : Abstracts. — 2024.
219. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока с учетом прогнозирования динамики движения впередиидущего транспортного средства / М. А. Погребняк // Тезисы докладов XX научной школы Нелинейный волны – 2024. — 2024.

В прочих изданиях

220. *Погребняк, М. А.* Моделирование движения транспортного потока / М. А. Погребняк // Современные проблемы математики и информатики : сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. — 2020. — Т. 20. — С. 55.

Приложение А

Свидетельство о государственной регистрации базы данных
«TrafficFlowDatabase»: база данных пропускной способности
светофоров

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации базы данных

№ 2024622315

"TrafficFlowDatabase": база данных пропускной
способности светофоров

Правообладатель: *Погребняк Максим Анатольевич (RU)*Автор(ы): *Погребняк Максим Анатольевич (RU)*

Заявка № 2024622039

Дата поступления 20 мая 2024 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре баз данных 28 мая 2024 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 429b6a0fe3853164ba96f83b73b4aa7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 18.05.2023 по 02.08.2024

Ю.С. Зубов

Приложение Б

Свидетельство о государственной регистрации программы
«Программный комплекс для моделирования движения
транспортного потока в различных дорожных ситуациях»

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024669058

Программный комплекс для моделирования движения
транспортного потока в различных дорожных
ситуациях

Правообладатель: *Погребняк Максим Анатольевич (RU)*Автор(ы): *Погребняк Максим Анатольевич (RU)*

Заявка № 2024667948

Дата поступления 26 июля 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 14 августа 2024 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 0692e7610b300b1542504670bca2026
Владелец: *Зубов Юрий Сергеевич*
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

Приложение В

Количество автомобилей, проезжающих по улице Магистральной в Ярославле (57.636941, 39.793694) за одну минуту

№	Дата	Кол-во по 1-ой полосе	Кол-во по 2-ой полосе	Общее кол-во
1	02.09.24 07:24	30	28	58
2	02.09.24 07:25	30	30	60
3	02.09.24 07:26	31	32	63
4	02.09.24 07:27	31	31	62
5	02.09.24 07:28	29	33	62
6	03.09.24 07:36	26	27	53
7	03.09.24 07:37	27	30	57
8	03.09.24 07:38	28	28	56
9	03.09.24 07:39	29	30	59
10	03.09.24 07:40	29	27	56
11	04.09.24 07:17	27	27	54
12	04.09.24 07:18	28	30	58
13	04.09.24 07:19	29	29	58
14	04.09.24 07:20	30	31	61
15	04.09.24 07:21	30	31	61
16	05.09.24 07:23	28	35	63
17	05.09.24 07:24	29	30	59
18	05.09.24 07:25	32	30	62
19	05.09.24 07:26	29	30	59
20	05.09.24 07:27	33	30	63
21	06.09.24 07:40	29	30	59
22	06.09.24 07:41	27	32	59
23	06.09.24 07:42	29	30	59
24	06.09.24 07:43	28	29	57
25	06.09.24 07:44	30	30	60
26	09.09.24 07:12	27	34	61
27	09.09.24 07:13	32	33	65
28	09.09.24 07:14	27	27	54
29	09.09.24 07:15	28	30	58
30	09.09.24 07:16	34	29	63
31	12.09.24 08:01	29	30	59
32	12.09.24 08:02	31	31	62
33	12.09.24 08:03	30	29	59
34	12.09.24 08:04	32	30	62
35	12.09.24 08:05	28	28	56
36	17.09.24 07:30	30	32	62
37	17.09.24 07:31	31	32	63
38	17.09.24 07:32	28	30	58
39	17.09.24 07:33	28	29	57
40	17.09.24 07:34	30	28	58
41	20.09.24 07:13	29	30	59
42	20.09.24 07:14	29	32	61
43	20.09.24 07:15	32	33	65
44	20.09.24 07:16	30	31	62
45	20.09.24 07:17	29	28	57
46	25.09.24 07:58	30	27	57
47	25.09.24 07:59	31	32	63
48	25.09.24 08:00	29	26	55
49	25.09.24 08:01	30	31	61
50	25.09.24 08:02	29	28	57

№	Дата	Кол-во через узкое место
1	02.09.24 07:37	29
2	02.09.24 07:38	23
3	02.09.24 07:39	30
4	02.09.24 07:40	28
5	02.09.24 07:41	26
6	03.09.24 07:52	32
7	03.09.24 07:53	34
8	03.09.24 07:54	28
9	03.09.24 07:55	26
10	03.09.24 07:56	25
11	04.09.24 07:30	30
12	04.09.24 07:31	26
13	04.09.24 07:32	22
14	04.09.24 07:33	32
15	04.09.24 07:34	29
16	05.09.24 07:51	25
17	05.09.24 07:52	27
18	05.09.24 07:53	28
19	05.09.24 07:54	26
20	05.09.24 07:55	25
21	06.09.24 07:31	28
22	06.09.24 07:32	28
23	06.09.24 07:33	25
24	06.09.24 07:34	26
25	06.09.24 07:35	24
26	09.09.24 07:47	29
27	09.09.24 07:48	27
28	09.09.24 07:49	30
29	09.09.24 07:50	28
30	09.09.24 07:51	25
31	12.09.24 07:48	28
32	12.09.24 07:49	25
33	12.09.24 07:50	28
34	12.09.24 07:51	34
35	12.09.24 07:52	25
36	17.09.24 07:41	22
37	17.09.24 07:42	26
38	17.09.24 07:43	32
39	17.09.24 07:44	29
40	17.09.24 07:45	29
41	20.09.24 07:24	28
42	20.09.24 07:25	23
43	20.09.24 07:26	30
44	20.09.24 07:27	27
45	20.09.24 07:28	26
46	25.09.24 07:43	27
47	25.09.24 07:44	29
48	25.09.24 07:45	28
49	25.09.24 07:46	34
50	25.09.24 07:47	27

Приложение Г

Фрагменты исходного кода программы

```

using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using EvaluationKernel.Equations;
using EvaluationKernel.Models;
5 namespace EvaluationKernel
{
    public class RungeKuttaMethod
    {
        private const double _h = 0.001;
        private readonly int _n;
        private readonly Equation _equation;
        private readonly List<List<double>> x;
        private readonly List<List<double>> y;
        private List<double> t;
        private readonly List<int> N;
        public RungeKuttaMethod(ModelParameters modelParameters,
            Equation equation)
        {
            _equation = equation;
            _n = modelParameters.n;
            t = new List<double>();
            x = new List<List<double>>();
            y = new List<List<double>>();
            N = new List<int>();
            SetInitialConditions(modelParameters);
        }
        private void SetInitialConditions(ModelParameters
modelParameters)
        {
            for (var i = 0; i < _n; i++)
            {
                x.Add(new List<double>());
                y.Add(new List<double>());
            }
            foreach (var tau in modelParameters.tau)
            {
                N.Add((int)(tau / _h));
            }
        }
    }
}
35

```

```

    }
    for (var i = 0; i < N.Max(); i++)
    {
        t.Add((i - N.Max()) * _h);
        for (var j = 0; j < _n; j++)
        {
            x[j].Add(modelParameters.lambda[j]);
            y[j].Add(modelParameters.Vn[j]);
        }
    }
}

public void SetInitialConditions(List<double> Vn, List<
double> lambda)
{
    for (var i = 0; i < N.Max(); i++)
    {
        for (var j = 0; j < _n; j++)
        {
            x[j].Add(lambda[j]);
            y[j].Add(Vn[j]);
        }
    }
}

public List<double> T
{
    get { return t; }
    set => t = value;
}

public List<double> X(int i)
{
    return x[i];
}

public List<double> Y(int i)
{
    return y[i];
}

double f(int i)
{
    return y[i][y[i].Count - 1];
}

double g(int i)
{
    return _equation.GetEquation(i, x, y, N);
}

```

```

    }
    public void Solve()
80  {
        var k1 = new double[_n];
        var k2 = new double[_n];
        var k3 = new double[_n];
        var k4 = new double[_n];
85  var q1 = new double[_n];
        var q2 = new double[_n];
        var q3 = new double[_n];
        var q4 = new double[_n];
        for (var i = 0; i < _n; i++)
90  {
            k1[i] = _h * f(i);
            k2[i] = _h * (f(i)+k1[i] / 2);
            k3[i] = _h * (f(i)+k2[i] / 2);
            k4[i] = _h * (f(i)+k3[i]);
95  q1[i] = _h * g(i);
            if (i == 0)
            {
                q2[i] = _h * (g(i)-q1[i] / 2);
                q3[i] = _h * (g(i)-q2[i] / 2);
100 q4[i] = _h * (g(i)-q3[i]);
            }
            else
            {
                q2[i] = _h * (g(i)+q1[i - 1] / 2 - q1[i] / 2);
105 q3[i] = _h * (g(i)+q2[i - 1] / 2 - q2[i] / 2);
                q4[i] = _h * (g(i)+q3[i - 1] - q3[i]);
            }
            x[i].Add(x[i][x[i].Count - 1] + (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 *
k3[i] + k4[i]) / 6);
            y[i].Add(y[i][y[i].Count - 1] + (q1[i] + 2 * q2[i] + 2 *
q3[i] + q4[i]) / 6);
110
            x[i].RemoveAt(0);
            y[i].RemoveAt(0);
        }
        t.Add(t[t.Count - 1] + _h);
115 t.RemoveAt(0);
    }
}
}

```