

На правах рукописи

Логинов Дмитрий Олегович

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЛОГИСТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ДИФФУЗИЕЙ**

Специальность 1.1.2 – дифференциальные уравнения и
математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2025

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Научный руководитель:

Кащенко Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра «Центр интегрируемых систем».

Официальные оппоненты:

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа и его приложений ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Волков Владимир Тарасович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита диссертации состоится «22» мая 2025 г. в 16:20 на заседании диссертационного совета 24.2.340.16 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» и на официальном сайте организации:

<https://diss.unn.ru/1504>

Автореферат разослан «_____» _____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.340.16
канд. физ-мат. наук



Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность исследования и степень разработанности темы

Исследование поведения решений уравнений с отклонением аргументов демонстрирует значительное разнообразие динамических режимов по сравнению с уравнениями без отклонений. В ряде прикладных задач хорошо известно, что изменение величины отклонения может привести к возникновению колебаний. В зависимости от параметров системы возможно также возникновение динамического хаоса.

Понятие бифуркационных значений параметров – значений, при которых нарушается грубость системы – было введено А.А. Андроновым. Поиск бифуркационных значений параметров играет важную роль при исследовании качественного поведения траекторий динамических систем. Изучению переходов от бифуркационного состояния системы к ближайшим грубым состояниям посвящена значительная литература (см., например^{1,2}).

Д. Хатчинсоном в 1948 году³ было рассмотрено логистическое уравнение с отклонением временной переменной, которое чаще рассматривают в нормализованном виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = -rN(t-1)(1+N(t)). \quad (1)$$

Для такого уравнения многими авторами (например^{4,5}) было показано, что при

$$0 < r \leq \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия. При $r > \frac{\pi}{2}$ происходит рождение устойчивого цикла⁶. В 1957 году Э. Райтом⁵ была сформулирована гипотеза о том, что нулевое состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво, т.е. все решения с положительными начальными условиями стремятся к нулю, при

$$0 < r \leq \frac{37}{24}. \quad (3)$$

Однако в работе эта гипотеза была доказана только для случая

$$0 < r \leq \frac{3}{2}. \quad (4)$$

¹Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

²Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильясенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. – М.: Наука, 1986. – 480 с.

³Hutchinson G. E. Circular causal systems in ecology // Ecology. – 1948. – Vol. 29. – No. 3. – P. 353–357.

⁴Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // Optics Communications. – 1998. – Vol. 145. – P. 53–58.

⁵Wright E. M. A non-linear difference-differential equation // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1955. – Vol. 194. – P. 66–87.

⁶Jones G. S. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)1 + f(x)$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1962. – Vol. 5. – No. 3. – P. 435–450.

Доказательству этой гипотезы посвящена первая глава диссертационной работы.

Моделирование процессов популяционной динамики нашло свое развитие в применении математических моделей на основе логистического уравнения с отклонением временного аргумента и диффузионным слагаемым. Исследование таких математических моделей связано с рядом технических трудностей¹. Впервые обстоятельную попытку справиться с этими трудностями предпринял Н. Бриттон в 1990 году². В своей работе Бриттон рассматривал уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + ru(t, x) \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t-s)u(s, x)ds \right). \quad (5)$$

Данное уравнение является модификацией уравнения впервые опубликованного в 1937 году советскими учеными-математиками А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым³. В том же году это уравнение рассматривал английский математик Р. Фишер⁴. В работах^{3,4} исследовался процесс распространения генной волны в пространстве.

Одной из важных задач в математической биологии является изучение распространения волны в системах с диффузией. Такие системы возникают при моделировании процесса распространения особей определенного вида.

При моделировании процессов популяционной динамики одним из основополагающих вопросов является изучение вопроса об устойчивости рождающихся режимов. Решению данной задачи посвящены вторая, третья и четвертая главы работы. Применение современных аналитических методов, а также численных экспериментов позволило получить ряд новых результатов, а также расширить область применимости логистического уравнения с запаздыванием в моделировании процессов экологии.

Цели и задачи исследования

Объектом исследования являются динамические системы с отклонением временного аргумента. Для исследования данного объекта была поставлена цель – изучить асимптотические свойства поведения решений в окрестности состояния равновесия и провести бифуркационный анализ решений при изменении параметров рассматриваемой системы.

В ходе работы аналитические результаты были подтверждены численными экспериментами. Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Провести оценку параметра логистического уравнение с запаздыванием, при котором все положительные решения стремятся к единичному состоянию равновесия.

¹*Murray J.D.* Mathematical biology. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993.

²*Britton N. F.* Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 50. – No. 6. – P. 1663–1688.

³*Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. математика и механика. – 1937. – Т. 1(43). – № 6. – С. 1–26.

⁴*Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Annals of Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 355–369.

2. Изучить вопрос о влиянии коэффициентов граничных условий на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.
3. Исследовать применимость принципа усреднения и построить асимптотические приближения решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими периодическими коэффициентами.
4. Провести асимптотический анализ поведения решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и неоднородным множителем, описывающим сопротивление внешней среды, при запаздывающем слагаемом.

Научная новизна результатов

В ходе исследования были получены следующие новые результаты:

1. Приведено доказательство гипотезы Райта об оценке параметра, при котором положительные решения логистического уравнения с запаздыванием стремятся к единичному состоянию равновесия. Разработан алгоритм последовательного улучшения оценки.
2. Изучено влияние коэффициентов граничных условий на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.
3. Разработан алгоритм построения асимптотики решений и исследования их устойчивости для усредненного логистического уравнения с запаздыванием и диффузией.
4. Установлено влияние коэффициента сопротивления внешней среды на амплитуду популяционных волн. Проведен численный эксперимент в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и неоднородным множителем, описывающим сопротивление внешней среды, при запаздывающем слагаемом.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

Разработанные в работе аналитические методы оценки области устойчивости и построения асимптотики решений могут быть применимы к широкому классу задач математической биологии и физики. Оценка влияния коэффициентов граничных условий на область устойчивости решений может быть использована для изучения различных проблем математической биологии и популяционной динамики.

Методология и методы исследования

В работе для исследования качественного поведения решений задач в работе использовались методы бифуркационного анализа и построения асимптотических приближений. Стоит отметить, что в силу высокой потребности в аналитических методах исследования систем

дифференциальных уравнений с отклонением аргументов, в том числе и систем дифференциальных уравнений в частных производных, высокую значимость приобретает разработка новых асимптотических методов.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказана гипотеза Райта для случая $0 < r \leq 37/24$ и разработан метод последовательного улучшения оценки параметра r .
2. Численно-аналитическими методами получены результаты о поведении решений краевой задачи с пространственно неоднородным множителем при слагаемом с запаздыванием.
3. Изучено влияние коэффициентов в граничных условиях на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.
4. На основе принципа усреднения разработан алгоритм построения асимптотического приближения решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими периодическими коэффициентами.

Личный вклад автора

Все основные результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю (соавтору) принадлежит постановка задач. Интерпретация результатов, представленных в диссертационной работе, выполнялась совместно с научным руководителем.

Апробация результатов исследования

Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. 5th International Conference on INTEGRABLE SYSTEMS & NONLINEAR DYNAMICS, October 7 – 11, 2024, Yaroslavl, Russia.
2. The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, June 28 – July 5, 2022, Moscow, Russia.
3. International Conference “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop”, December 9–13, 2019, Nizhny Novgorod, Russia.
4. International Conference “Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics”, June 2–6, 2019, Cheboksary, Russia.
5. Международная молодежная научно-практическая конференция “Путь в науку. Математика”, 22–27 апреля, 2019, г. Ярославль.

6. 7th International conference “Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling”, June 25–27, 2018, Moscow, Russia.
7. Shilnikov Workshop 2017, December 15–16, 2017, Nizhny Novgorod, Russia.
8. Международная молодежная научно-практическая конференция “Путь в науку. Математика”, 20–29 апреля, 2016, г. Ярославль.

Часть результатов получена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Публикации

По теме работы автором опубликовано 14 статей и тезисов докладов, в том числе 8 тезисов докладов и 6 статей из списка ВАК, в том числе 5 статей опубликовано в журналах, индексируемых в системах цитирования Scopus и Web of Science.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 93 страницы. Список литературы содержит 80 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность направления исследования, проводится краткая характеристика библиографии и основных результатов по теме исследования, полученных другими авторами. В разделе также описаны цели и основные задачи работы, проведена характеристика научной новизны и значимости результатов, освещен перечень выносимых на публичное представление результатов.

В **первой части работы** исследуется вопрос об определении области значений параметров, для которых все положительные решения логистического уравнения с запаздыванием стремятся к нулю.

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u \quad (6)$$

возникает во многих прикладных задачах (см., например^{1,2,3}). Исследованию его решений посвящена значительная литература. По смыслу задачи коэффициенты r и T положительны. Пространством начальных условий для (6) является пространство $C_{[-T,0]}$ – пространство непрерывных на $[-T, 0]$ функций со значениями в \mathbb{R} . Поскольку интерес представляет изучение лишь неотрицательных решений (6), то начальные функции из $C_{[-T,0]}$ рассматриваются только неотрицательные. Решение с неотрицательной начальной функцией, заданной на $t \in [t_0 - T, t_0]$, остается неотрицательным при всех $t > t_0$. Термин "решение" в дальнейшем применяется только к неотрицательным решениям уравнения (6).

Количество параметров в (6) можно уменьшить с помощью нормализующей замены времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к уравнению

$$\dot{u} = r[1 - u(t - 1)]u, \quad rT \rightarrow r. \quad (7)$$

В этом уравнении удобно сделать замену $u = 1 + x$. Тогда получаем уравнение

$$\dot{x} = -rx(t - 1)[1 + x], \quad x \geq -1. \quad (8)$$

Сначала отметим, что для каждого решения $x(t)$ уравнения (8) и для каждого целого $n > 1$ найдется такое t_n , что при $t > t_n$ функция $x(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой. Кроме этого, из свойства

$$x(t) \leq \exp(r) - 1$$

следует возможность нахождения значений коэффициентов a_n и b_n , для которых

$$-b_n \leq x^{(n)}(t) \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Например, при $n = 0$ имеем $b_0 = -1$, $a_0 = \exp(r) - 1$.

Предположим, что решение $x(t)$ уравнения (8) для некоторых $\alpha \in (0, 1)$ и $M \in (0, \exp(r) - 1)$ удовлетворяет неравенствам

$$-\alpha \leq x(t) \leq M \quad (t \geq t_0). \quad (10)$$

Тогда для каждого n можно получить явные формулы для коэффициентов $a_n = a_n(\alpha, M)$ и $b_n = b_n(\alpha, M)$, фигурирующих в (9).

Фиксируем произвольно номер $m \geq 0$. Через $C(m, \alpha, M)$ и $S(m, \alpha, M)$ обозначим экстремумы функционалов

$$C(m, \alpha, M) = \inf \int_0^1 x(s) ds \quad (11)$$

¹ *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Ecology*. – 1948. – Vol. 29. – No. 3. – P. 353–357.

² *Wright E. M.* A non-linear difference-differential equation // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1955. – Vol. 194. – P. 66–87.

³ *Jones G. S.* The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x - 1)1 + f(x)$ // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1962. – Vol. 5. – No. 3. – P. 435–450.

и

$$S(m, \alpha, M) = \sup \int_0^1 x(s) ds, \quad (12)$$

где нижняя и верхняя грани берутся по всем m раз непрерывно дифференцируемым решениям (8), удовлетворяющим неравенствам (9) при $n = 1, \dots, m$ и для которых $x(1) = 0$.

Осуществим переход к двумерному отображению

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ M_{n+1} \end{pmatrix} = \Phi(\alpha_n, M_n). \quad (13)$$

Положим

$$M_1 = \exp(-rC(m, \alpha, M)) - 1, \quad (14)$$

$$\alpha_1 = 1 - \exp(-rS(m, \alpha, M)). \quad (15)$$

Теорема 1. *Для стремления к нулю всех решений уравнения (8), удовлетворяющих неравенству $x \geq -1$, достаточно, чтобы при всех $\alpha \in (0, 1)$ и $M \in (0, \exp(r) - 1)$ выполнялись неравенства*

$$\alpha_1 < \alpha, \quad M_1 < M. \quad (16)$$

Из доказательства данной теоремы следует замечание.

Замечание 1. *Рассмотрим итерации (α_n, M_n) ($n = 2, 3, \dots$) отображения $\Phi(\alpha, M)$.*

Пусть при некотором r имеем

$$\alpha_0(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \alpha_k, \quad M_0(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} M_k. \quad (17)$$

Тогда для решений (8) выполнены неравенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\tau \geq t} x(\tau) \geq -\alpha_0(r), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq t} x(\tau) \leq M_0(r). \quad (18)$$

Основная роль теоремы 1 состоит в том, что она намечает путь получения необходимых оценок. Уже при $m = 2$ для применения этой теоремы необходимо её существенно модернизировать.

Теорема 2. *Пусть при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполнено предельное равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\alpha) = 0.$$

Тогда все решения уравнения (8) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Далее автором рассматриваются три случая: $m = 0$, $m = 1$ и $m = 2$.

Отметим основные результаты первой части работы. Для случая $m = 0$ при $r < 1$ все итерации α_{2n} стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что при $r < 1$ все решения (8) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. При $r \leq \frac{\pi}{2}$ можно утверждать, что для решений (8) выполнена при больших t оценка $x(t) \geq -\alpha_0$. В результате численного эксперимента

по формуле (17) получено, что $\alpha_0 \approx 0.99741$. Рассмотрение случая $m = 1$ произведено в два этапа: "грубой" оценки параметров решений и последующего уточнения. В результате "грубой" оценки установлено стремление к нулю всех решений только при

$$0 < r < 1.44865. \quad (19)$$

На основании уточнения оценок удалось показать, что при $0 < r < \frac{3}{2}$ все решения (8) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что при $r \leq \frac{\pi}{2}$ для каждого решения при больших t выполнена оценка

$$x(t) \geq -\alpha_0 = -0.52542.$$

Случае $m = 2$ в работе аналогично рассматривается в два этапа. "Грубая" оценка не позволяет улучшить полученный ранее результат. В свою очередь уточнение оценки доказывает гипотезу Райта.

Во второй части работы аналитическими методами и методами компьютерного анализа изучаются свойства решений краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r[1 - au(t-1, x)]u, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (21)$$

в случаях, когда коэффициент $a = a(x)$ сопротивления внешней среды существенно зависит от пространственной переменной x и является неограниченной функцией на отрезке $[0, 1]$:

$$a(x) = cx^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (22)$$

Функция $u(t, x)$ описывает плотность численности особей нормированную относительно средней плотности популяции. Краевые условия отражают, что на границах ареала обитания отсутствует миграция особей. Биологический смысл такого выбора $a(x)$ обусловлен изучением ситуации, когда существует либо "водная", либо "горная" преграда на левом конце ареала $[0, 1]$. Коэффициент c в (22) следует выбрать так, чтобы выполнялось условие нормировки $\int_0^1 a(x) dx = 1$, т.е.

$$c = (1 - \alpha). \quad (23)$$

Рассматриваются задачи: выявить структуры, установившиеся при различных значениях параметра α в случае (22), и исследовать зависимость решений от мальтузианского коэффициента r и от коэффициента диффузии d .

В первом разделе приведены результаты численного исследования в случае (22) при постоянном значении коэффициента r .

Отметим, что задача (20), (21) имеет пару положений равновесия: нулевое и положительное на $[0, 1]$, зависящее от пространственной переменной. Обозначим через $K(x, \alpha)$ ненулевое положение равновесия.

Автоколебания в задаче (20), (21) при условиях (22), (23), $\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.5$ рождаются при $r \approx 1.63$ и $r \approx 3.51$ соответственно. Отметим, что при всех $\alpha \in (0, 1)$ амплитуда у левой границы ареала обитания меньше, чем у правой.

Обозначим через $r(\alpha, d)$ первое бифуркационное значение параметра r , т.е. при $r < r(\alpha, d)$ все решения из окрестности $K(x, \alpha)$ стремятся к положению равновесия $K(x, \alpha)$ при $t \rightarrow \infty$, а при $r > r(\alpha, d)$ из состояния равновесия $K(x, \alpha)$ бифурцирует устойчивый цикл. Отметим, что при больших r амплитуда колебаний периодического режима значительно возрастает. На рис. 1 представлен график решения задачи (20), (21) при условии (22), когда значение r относительно велико.

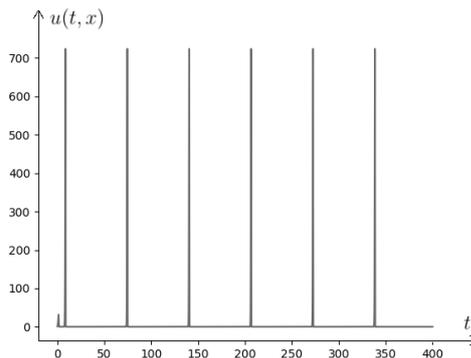


Рис. 1: График $u(t, x)$ при $r = 7$, $\alpha = 0.5$ и $x = 1$

Во втором разделе предполагается, что

$$r(x, \alpha)a(x) \equiv \rho = const, \text{ т.е. } r(x, \alpha) = \rho(1 - \alpha)^{-1}x^\alpha. \quad (24)$$

Это ограничение тоже биологически осмысленно: мальтузианский коэффициент меньше там, где сопротивление внешней среды выше. В каждом из этих разделов сформулированы выводы.

Как оказывается, пороговые бифуркационные значения мальтузианского коэффициента $r(x, \alpha)$ существенно зависят от параметра d . Графики решений задачи (20), (21) при условиях (22), (23) и $\alpha = 0.5$ при $d = 0.01$, $d = 1$ и $r \approx r(x, \alpha)$ представлены на рис. 2 ,3 соответственно.

В третьем разделе рассмотрено уравнение (20), (21) при условии (24). Отметим, что данная задача также имеет пару положений равновесия: нулевое и положение равновесия $K(x, \alpha, \rho)$, зависящее от пространственной переменной.

Автоколебания в задаче (20), (21) при условиях (24), $\alpha = 0.5$ рождаются при $\rho \approx 1.16$. На рис. 4 представлен график $u(t, x)$ при $\alpha = 0.5$, $\rho = 1.17$.

Далее построены решения задачи (20), (21) при условии (24) и $d \gg 1$.

Основные результаты **второй части работы**:

1. Состояние равновесия $K(x, \alpha, \rho)$ задачи (20), (21) при условии (24), в отличие от задачи (20), (21) при условии (22), не приближается к нулю вблизи точки $x = 0$, в том числе

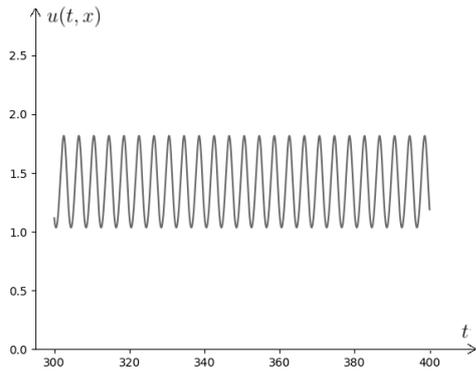


Рис. 2: График $u(t, x)$ при $r \approx 1.61, \alpha = 0.5, x = 0.5, d = 0.01$

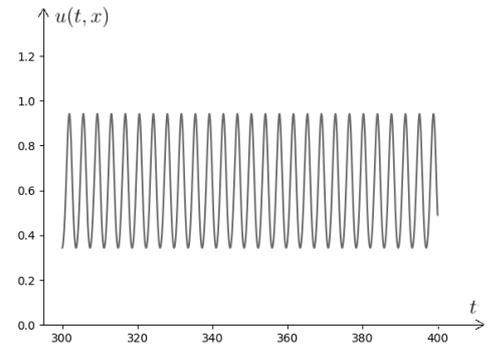


Рис. 3: График $u(t, x)$ при $r \approx 3.52, \alpha = 0.5, x = 0.5, d = 1.0$

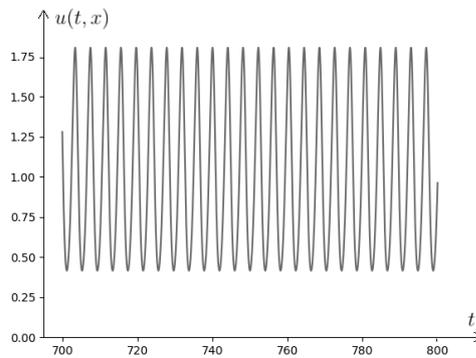


Рис. 4: График $u(t, x)$ при $\rho = 1.17, \alpha = 0.5, x = 0.5, d = 1$

и при увеличении параметра α . Таким образом, решения слабо зависят от пространственной переменной x .

2. Значение бифуркационного параметра $\rho = \rho(\alpha)$ существенно уменьшается при $\alpha \rightarrow 1$.
3. Период $T(\alpha)$ цикла в окрестности точки бифуркации $\rho(\alpha, d)$ слабо зависит от α .
4. Отметим, что при уменьшении коэффициента d можно наблюдать "подъем" положения равновесия $K(x, \alpha, \rho)$ относительно нуля. При этом амплитуды установившихся колебательных режимов близки при всех $x \in [0, 1]$.
5. При значительном увеличении коэффициента диффузии, как и в задаче (20), (21) при условии (22), решения стабилизируются около устойчивого цикла и слабо зависят от пространственной переменной.

В третьей главе работы рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r(1 - u(x, t))u(x, t - 1), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad r > 0, \quad d > 0, \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \kappa u|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma u|_{x=1}. \quad (26)$$

Отметим, что $u(x, t + s) \in W_2^2{}_{[0,1]} \times C_{[-1,0]}$, где $s \in [-1, 0]$. Краевая задача (25), (26) имеет четкий биологический смысл. Она описывает, например, изменение численности популяции в случае, когда через границы возможна миграция пропорциональная плотности численности на соответствующей границе ареала обитания. Эта миграция определяется коэффициентами κ и γ .

В этой главе исследуется вопрос о поведении всех решений (25), (26) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Во втором и третьем параграфе проведен анализ краевой задачи (25), (26) при условии $\kappa = 0$.

Линеаризуем в нуле краевую задачу (25), (26) и выполним замену $u(x, t) = w(x) \exp(\lambda t)$. Положим $d\mu = \lambda + r \exp(-\lambda)$ и рассмотрим задачу

$$w'' = \mu w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=1} = \gamma w|_{x=1}. \quad (27)$$

Через $\mu_0(\gamma) > \mu_1(\gamma) > \dots$ обозначим все собственные значения краевой задачи (27).

Отметим, что $\mu_k(\gamma)$ является корнем уравнения

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\mu_k(\gamma)}} = \text{th}(\sqrt{\mu_k(\gamma)}).$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$d\mu_0(\gamma) = \lambda + r \exp(-\lambda) \quad (28)$$

Пусть σ_0 – корень уравнения $\text{tg} \sigma = -4\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий в интервале $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим $r^* = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{1}{16}(d\pi^2)^2}$.

Ниже полагаем $\tau = \varepsilon t$, $\varphi_0(x) = \text{ch}(\mu_0^{1/2}(\gamma)x)$ – собственная функция краевой задачи (27), отвечающая собственному значению $\mu_0(\gamma)$. Предположим также, что выполнено условие

$$\gamma = \gamma(r) + \varepsilon \gamma_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (29)$$

Теорема 3. Пусть $0 < r < 1$ и выполнено условие (29). Тогда краевая задача (25), (26) имеет в окрестности нуля устойчивое локальное одномерное интегральное многообразие, на котором (25), (26) с точностью до $O(\varepsilon)$ представима в виде ОДУ первого порядка

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b(r)\xi + c(r)\xi^2, \quad (30)$$

где

$$b(r) = -\frac{\gamma_1 \text{ch}(\sqrt{rd^{-1}})}{1-r}, \quad (31)$$

$$c(r) = -\frac{4rd^{-1}(2\sqrt{rd^{-1}}+2)(9\text{sh}(\sqrt{rd^{-1}})+\text{sh}(3\sqrt{rd^{-1}}))}{(1-rd^{-1})(\text{sh}(2\sqrt{rd^{-1}})+2\sqrt{rd^{-1}})}, \quad (32)$$

и $u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon \varphi_0(x) \xi(\varepsilon t) + O(\varepsilon^2)$.

Теорема 4. Пусть $1 < r < r^*$ и выполнено условие (29). Тогда в окрестности нуля краевая задача (25), (26) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (25), (26) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ представимо в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha(r)\xi + \beta(r)\xi|\xi|^2 \quad (33)$$

и $u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\varepsilon t)\varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t)\varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon)$.

График $\operatorname{Re}\beta(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 5.

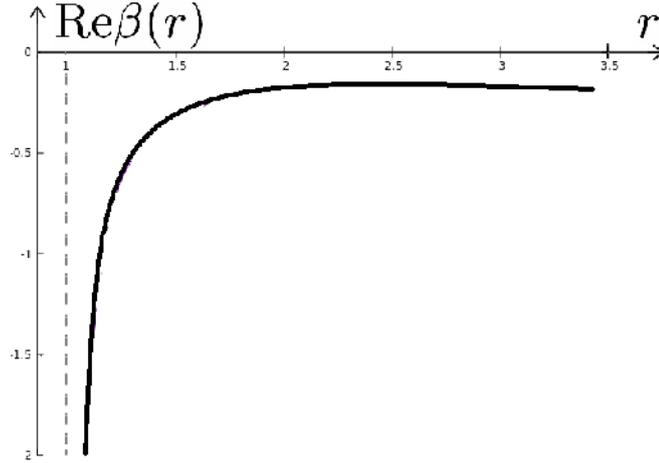


Рис. 5: График зависимости $\operatorname{Re}\beta(r)$ при $d = 1$

Сформулируем еще один важный результат.

Положим

$$r = r^* + \varepsilon r_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (34)$$

Теорема 5. Пусть выполнено условие (34). Тогда при всех достаточно больших значениях параметра γ в окрестности нуля краевая задача (25), (26) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (25), (26) с точностью до $O(\varepsilon^2) + O(|\gamma^{-1}|)$ представимо в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = r_1\alpha^*\xi + \beta^*\xi|\xi|^2, \quad (35)$$

где

$$\alpha^* \approx (0.46 + 0.43i), \beta^* \approx -(1.07 - 0.15i), \tau = \varepsilon t.$$

и $u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\varepsilon t)\varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t)\varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon)$.

Формулы расчета коэффициентов α и β представлены в диссертационной работе.

Локальная динамика (25), (26) при условии (29) и $0 < r < 1$ определяется уравнением (30), а при $1 < r < r^*$ – уравнением (33). Таким образом, получаем, что при $\gamma_1 > 0$ и $0 < r < 1$

в (25), (26) устойчиво состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon b(r)c^{-1}(r)\text{ch}(x\sqrt{\mu_0}) + O(\varepsilon^2)$, где $b(r)$ и $c(r)$ определяются из формул (31) и (32), а при $1 < r < r^*$ – цикл, определенный из (33).

В четвертом и пятом параграфах проведен анализ (25), (26) при $\kappa \neq 0$.

Пусть σ_0 – корень уравнения $\text{tg}\sigma = -\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий на интервале $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим

$$r^{**} = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}(d\pi^2)^2}$$

и

$$d\mu_0(\gamma, \kappa) = \lambda + r \exp(-\lambda), \quad (36)$$

где $\mu_0(\gamma, \kappa) > \mu_1(\gamma, \kappa) > \dots$ все собственные значения линеаризованной краевой задачи (25), (26).

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \mu(\gamma, \kappa) = \mu(\kappa).$$

Отметим, что в пределе при $\gamma \rightarrow -\infty$ краевые условия задачи (25), (26) могут быть сведены к

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \kappa u|_{x=0}, \quad u|_{x=1} = 0. \quad (37)$$

Рассмотрим предельный случай, когда для уравнения (25) краевые условия имеют вид

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (38)$$

Положим

$$r = r^{**} + \varepsilon r_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (39)$$

Теорема 6. *Пусть выполнено условие (39). Тогда в окрестности нуля краевая задача (25), (38) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (25), (38) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ представимо в виде скалярного комплексного ОДУ*

$$\frac{d\xi}{d\tau} = r_1 \alpha^{**} \xi + \beta^{**} \xi |\xi|^2, \quad (40)$$

где $\alpha^{**} \approx -(0.18 - 0.61i)$, $\beta^{**} \approx -(1.17 + 1.97i)$, $\tau = \varepsilon t$ и

$$u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\xi(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon).$$

Локальная динамика (25), (38) при условии (39) и при $r_1 > 0$ определяется уравнением (40). Таким образом, получаем, что при $r_1 > 0$ и $r = r^{**}$ в (25), (38) цикл, определенный из (40), является устойчивым.

В пятом параграфе проведен анализ динамики решений краевой задачи (25), (26) при малом коэффициенте диффузии.

Сформулируем основные выводы **третьей главы работы.**

Показано, что отрицательные значения параметра γ и положительные значения κ расширяют диапазон изменения значений параметра r , при которых нулевое состояние равновесия в (25), (26) устойчиво, а положительные γ и отрицательные κ – сужают.

Получены предельные значения параметра r , при которых нулевое состояние равновесия устойчиво.

В случаях близких к критическим в задаче об устойчивости нулевого решения приведен анализ локальной динамики краевой задачи (25), (26). В предельном случае, при $\gamma \rightarrow -\infty$ и $\kappa \rightarrow \infty$, проведен анализ локальной динамики краевой задачи (38).

В четвертой главе работы рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(\omega t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r(\omega t) u(t - T(\omega t), x) [1 + u] \quad (41)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma(\omega t) u|_{x=1}. \quad (42)$$

Положительные коэффициенты $d(s)$, $r(s)$, $T(s)$, а также коэффициент $\gamma(s)$ предполагаются 2π -периодическими. В качестве пространства начальных условий для (41), (42) удобно выбрать пространство $W = C[-\max_s T(s), 0] \times \overset{\circ}{W}_2^2(t)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2(t) \subset W_2^2[0, 1]$ и функции из $\overset{\circ}{W}_2^2(t)$ удовлетворяют граничным условиям (42).

Во втором параграфе рассматривается алгоритм построения усредненного уравнения. Через d_0 и γ_0 обозначим выражения

$$d_0 = M(d(s)) = \langle d(s) \rangle, \quad \gamma_0 = d_0^{-1} M(d(s)\gamma(s)) = d_0^{-1} \langle d(s)\gamma(s) \rangle.$$

Введем в рассмотрение краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + M(v), \quad (43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}. \quad (44)$$

Нам понадобится еще одна вспомогательная краевая задача для 2π -периодической по s и экспоненциально убывающей по y при $y \rightarrow \infty$ функции $v(s, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f(s, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = g(s), \quad (45)$$

где $f(s, y)$ и $g(s)$ – 2π -периодичны по s и для некоторых положительных постоянных f_0 и δ_0 выполнена оценка

$$|f(s, y)| \leq f_0 \exp(-\delta_0 y).$$

Пусть $\psi(t, x)$ произвольная непрерывная по $t \in [-\max_s T(s) + t_0, t_0]$ и непрерывно дифференцируемая по $x \in [0, 1]$ функция. Через $u(t, x, \omega)$ и $v(t, x)$ обозначим решения краевых задач (41), (42) и (45) соответственно с начальным условием $\psi(t, x)$, заданным при $t = t_0$. Наконец, через $\mu > 0$ обозначим произвольное достаточно малое и независимое от ω значение.

Теорема 7. Для каждой фиксированных $\mu > 0$ и $c > 0$ при $t \in [t_0 + \mu, t_0 + c]$ имеет место асимптотическое представление

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) = & v(t, x, \omega) + \omega^{-1/2}w(\omega t, (1-x)\omega^{1/2}, t, \omega) + \\ & + \omega^{-1}Z(\omega t, x, t, \omega), \end{aligned} \quad (46)$$

в котором

$$v(t, x, \omega) = v(t, x) + \omega^{-1/2}v_1(t, x, \omega) + \dots, \quad (47)$$

$$w(x, y, t, \omega) = w(s, y)v(t, 1) + \omega^{-1/2}w_1(s, y, t, \omega) + \dots, \quad (48)$$

$$Z(s, x, t, \omega) = z(s, t, x, \omega) + \omega^{-1/2}z_1(s, t, x, \omega) + \dots \quad (49)$$

В третьем параграфе подробно рассмотрены решения вспомогательной краевой задачи (45).

В четвертом параграфе проведен бифуркационный анализ нулевого состояния равновесия задачи (41), (42).

Положим в (41),(42)

$$d(s) = d_0(1 + a \cos(s)), \quad \gamma(s) = b \cos(s + \varphi), \quad (50)$$

а значения r и T от s не зависят. Без потери общности можно считать, что $T \equiv 1$.

Исследуем зависимость локальной динамики краевой задачи (41), (42) от коэффициентов $d(s)$ и $\gamma(s)$ на примере (50). Рассмотрим поведение всех решений (41), (42) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (но независимой от ω) окрестности нулевого состояния равновесия.

Согласно приведенным выше результатам определяющую роль при описании решений краевой задачи (41),(42) в условии (50) играет усредненное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(t-1, x)[1+v], \quad (51)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}ab \cos(\varphi). \quad (52)$$

В свою очередь, локальная – в окрестности нулевого состояния равновесия этой краевой задачи – динамика во многом зависит от свойств решений (линеаризованной в нуле) краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(t-1, x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}. \quad (53)$$

При $0 < r < 1$, как и в краевой задаче (51), (52), все решения из малой окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (41), (42) (при достаточно больших значениях ω) стремятся к одномерному интегральному многообразию, на котором эта краевая задача может быть представлена в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = p(\omega)\xi + (c(r) + O(\omega^{-1/2}))\xi^2 + O(\omega^{-1/2}) \quad (\tau = \omega^{-1/2}t). \quad (54)$$

Если же $1 < r < r^*$, то соответствующее интегральное многообразие двумерно и на нем краевая задача (51), (52) имеет вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = p(\omega)\xi + (\beta(r) + O(\omega^{-1/2}))\xi|\xi|^2 \quad (\tau = \omega^{-1/2}t). \quad (55)$$

Для определения поведения решений (51), (52) из малой окрестности нулевого состояния равновесия осталось выписать асимптотику величин $p(\omega)$.

Таким образом, приходим к задаче исследования устойчивости линейной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t-1, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \gamma(s)u\Big|_{x=1} \quad (s = \omega t). \quad (56)$$

Далее предложен алгоритм вычисления коэффициента $p(\omega)$ и приведен пример использования данного алгоритма.

Сформулируем основные выводы **четвертой главы**.

В главе построено усредненное уравнение для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и переменными граничными условиями. Следует отметить, что усреднение в граничных условиях во многом зависит от осцилляций коэффициента диффузии. Сформулированы результаты о связи решений исходного и усредненного уравнений. Рассмотрен вопрос о локальной динамике в окрестности состояния равновесия усредненного уравнения в критических случаях. Разработан алгоритм, позволяющий получить асимптотические разложения коэффициентов нормальной формы, которые определяют динамику исходной задачи.

В **заключении** работы проведено обобщение результатов исследования, обозначены возможные направления развития по рассматриваемой теме и сформулированы выводы.

В **приложении А** приводятся примеры графиков решений уравнения с запаздыванием, диффузией при изменении коэффициентов граничных условий.

В **приложении В** приводятся фрагменты программной реализации алгоритмов разработанного программного обеспечения для проведения численных экспериментов по рассматриваемым задачам.

Список публикаций по теме работы

Публикации в перечне ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК

1. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Влияние коэффициента сопротивления внешней среды на динамику популяции // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2022. – №1. – С. 65–73. (перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* The Influence of External Environment Resistance Coefficient on Population Dynamics // Russian Mathematics. – 2022. – Vol. 56. – No. 1. – P. 53–61.)
2. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием // Известия вузов. Математика. – 2020. – Т. 9. – С. 39–55. (перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* Estimation of the region of global stability of the equilibrium state of the logistic equation with delay // Russian Mathematics. – 2020. – Vol. 64. – No. 9. – P. 34–49.)
3. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркация Андронова-Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими коэффициентами // Математические заметки. – 2020. – Т. 108. – №1. – С. 47–63. (перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* Andronov-Hopf Bifurcation in Logistic Delay Equations with Diffusion and Rapidly Oscillating Coefficients // Mathematical Notes. – 2020. – Vol. 108. – No. 1. – P. 50–63.)
4. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Математические заметки. – 2019. – Т. 106. – №1. – С. 138–143. (перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* Bifurcations Due to the Variation of Boundary Conditions in the Logistic Equation with Delay and Diffusion // Mathematical Notes. – 2019. – Vol. 106. – No. 1 – 2. - P. 136–141.)
5. *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* About Global Stable of Solutions of Logistic Equation with Delay // Journal of Physics: Conference Series 6. Ser. "VI International Conference Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling". – 2017. – No. 937.
6. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркации высококомодовых автоколебаний в параболическом уравнении с малой диффузией и отклонением пространственной переменной // Вестник НИЯУ МИФИ. – 2017. – №5. – С.425–443.

Работы, опубликованные в других изданиях

7. *Loginov D.O.* On the influence of boundary condition coefficients on the dynamic properties of the logistic equation with delay and diffusion // INTEGRABLE SYSTEMS & NONLINEAR DYNAMICS. – Yaroslavl. – 2024. – P. 71.
8. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркация Андронова–Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими коэффициентами // The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. – Moscow. – 2022. – С. 147–148.
9. *Loginov D.O.* About the Bifurcations of the Logistic Equation with Diffusion and Non-linear Multiplier of Delay // International Conference "Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop". – Nizhny Novgorod. – 2019. – P. 47.
10. *Loginov D.O.* Analysis of Bifurcations at Varying Boundary Conditions in a Logistic Equation with Delay and Diffusion // International Conference "Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics" . – Cheboksary. – 2019. – P. 136–137.
11. *Логинов Д.О.* Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Международная молодежная научно-практическая конференция "Путь в науку. Математика" . – Ярославль. – 2019.
12. *Loginov D.O.* Bifurcation as the Coefficients of the Boundary Conditions Change in the Logistic Equation with Delay and Diffusion // 7th International conference "Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling". - Moscow. – 2018. – P. 187.
13. *Loginov D.O.* About Bifurcations in a Parabolic Equation with Small Diffusion and Deflection Space Variable // Shilnikov WorkShop 2017. – Nizhny Novgorod. – 2017. – P. 22.
14. *Логинов Д.О.* Свойства переходного фронта уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // Международная молодежная научно-практическая конференция "Путь в науку. Математика" . – Ярославль. – 2016.