

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Логинов Дмитрий Олегович

Исследование решений логистических уравнений с запаздыванием и диффузией

1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Кащенко С.А.

Ярославль – 2024

Оглавление

Введение	3
1 Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием	11
1.1 Постановка задачи	11
1.2 Основная конструкция	13
1.2.1 Переход к двумерному отображению	14
1.2.2 Сведение двумерного отображения (1.12), (1.13) к двум отображениям первого порядка	16
1.3 Случай $m = 0$	17
1.4 Случай $m = 1$	18
1.4.1 Грубая оценка параметров решений	19
1.4.2 Более точная априорная оценка решений	20
1.5 Случай $m = 2$	23
1.5.1 Грубая оценка параметров решений	23
1.5.2 Более точные априорные оценки решений	26
1.6 Выводы	28
2 Влияние коэффициента сопротивления внешней среды на динамику популяции	30
2.1 Постановка задачи	30
2.2 Основные результаты в случае (2.3)	32
2.3 О зависимости периодического решения задачи (2.1), (2.2) от коэффициента диффузии	34
2.4 Основные результаты в случае (2.5)	37

3	Анализ поведения решений логистического уравнения при варьировании коэффициентов граничных условий	40
3.1	Постановка задачи	40
3.2	Линейный анализ при условии (3.3)	41
3.3	Нелинейный анализ при условии (3.3)	47
3.4	Линейный анализ (3.1), (3.2) при $\kappa \neq 0$	49
3.5	Нелинейный анализ в предельном случае	52
3.6	О динамике логистического уравнения с запаздыванием, малой диффузией и с классическими граничными условиями общего вида	53
3.7	Выводы	57
4	Усреднение в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и переменными граничными условиями	58
4.1	Постановка задачи	58
4.2	Построение усредненного уравнения	60
4.3	О решениях вспомогательной краевой задачи (4.6)	62
4.3.1	Вспомогательные построения	62
4.3.2	Формула для решения краевой задачи (4.6), удовлетворяющего оценке (4.8)	64
4.4	Бифуркация из состояния равновесия	66
4.4.1	Бифуркации из состояния равновесия в краевой задаче (4.2), (4.3) при условии	66
4.4.2	Алгоритм вычисления величины $p(\omega)$	67
4.5	Выводы	70
	Заключение	71
	Литература	73
A	Примеры графиков решения уравнения с запаздыванием, диффузией и варьировании коэффициентов граничных условий	81
B	Выдержки из программного кода алгоритма расчета решений логистического уравнения с запаздыванием и диффузией	83

Введение

Исследование поведения решений уравнений с отклонением аргументов демонстрирует значительное разнообразие динамических режимов по сравнению с уравнениями без отклонений. В ряде прикладных задач хорошо известно, что изменение величины отклонения может привести к возникновению колебаний. В зависимости от параметров системы возможно также возникновение динамического хаоса.

Приложения уравнений с отклоняющимися аргументами к изучению вопросов популяционной динамики, теории автоматического регулирования и ряда других областей активно исследовалось начиная с 1934 г. (см, например, [1] – [26]).

Открытие А.А. Андроновым факта, что работа лампового генератора описывается нелинейным дифференциальным уравнением и математическим образом автоколебаний являются предельные циклы, открытые А. Пуанкаре, стало стимулом для развития качественной теории. В направлении развития теории нелинейных колебаний и связанного с ней математического аппарата большую роль сыграло понятие грубой системы, введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным. Грубой называется такая система, общее поведение траекторий которой не меняется при достаточно малых изменениях правых частей уравнений. Понятие бифуркационных значений параметров – значений, при которых нарушается грубость системы – также было введено А.А. Андроновым. Изучению переходов от бифуркационного состояния системы к ближайшим грубым состояниям посвящена значительная литература (см., например, [16] – [30]). Изучение дифференциальных уравнений с правыми частями, имеющими разрывы, позволило получить важные результаты при моделировании работы радиоприборов, а также расчета регулятора Уатта.

"Составление" дифференциальных уравнений для моделирования того или иного процесса, очевидно, выходит за рамки математики и принадлежит самой изучаемой области естествознания. Важно отметить, что рассмотрение дифференциальных уравнений как средства математического описания законов явлений всегда связано с некоторым

упрощением реальной модели и идеализацией действительности.

История моделирования процессов популяционной динамики с помощью математического аппарата насчитывает уже более двух веков исследований. Тем не менее, эта область до сих пор активно развивается. Классическим примером такой модели является логистическое уравнение, предложенное Франсуа Ферхюльстом в 1838 году

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right). \quad (1)$$

Здесь $N(t) > 0$ – отвечает за численность популяции, параметры K и r предполагаются положительными. Изменение K и r позволяет моделировать ухудшение/улучшение условий для обитания особей в окружающей среде. Предложенное Ферхюльстом уравнение обладает двумя важными свойствами:

1. При малых $N(t)$ численность экспоненциально популяции увеличивается;
2. При увеличении t функция $N(t)$ стремится к величине K .

В работе Вольтерра [31] при рассмотрении логистического уравнения было предложено одно из первых интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} - \frac{1}{Q} \int_p^t \omega(t-s)N(s)ds \right). \quad (2)$$

В данном случае параметры r , K и Q положительны, параметр $p = -\infty$ или 0 . Такой вид отклонения называется распределенным. В качестве весовой функции $\omega(t)$ чаще всего рассматривают функцию плотности вероятности нормального распределения

$$\omega(t-s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t-s)^2}{2\sigma^2} \right). \quad (3)$$

Отклонение по времени позволяет рассматривать поведение моделируемого процесса с учетом наследственности.

Исследование поведения решений уравнений с отклонением аргументов демонстрирует значительное разнообразие динамических режимов по сравнению с уравнениями без отклонений. В ряде прикладных задач хорошо известно, что изменение величины отклонения может привести к возникновению колебаний. В зависимости от параметров системы возможно также возникновение динамического хаоса.

Джорджем Хатчинсоном в 1948 году ([32]) было рассмотрено логистическое уравнение с дискретным отклонением временной переменной

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-h)}{K} \right). \quad (4)$$

Чаще всего данное уравнение рассматривают в нормализованном виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = -rN(t-1)(1+N(t)). \quad (5)$$

Для такого уравнения многими авторами (например, [33], [34]) было показано, что при

$$0 < r \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия. При $r > \frac{\pi}{2}$ происходит рождение устойчивого цикла ([35]). В 1957 году Эдвартом Райтом ([34]) была сформулирована гипотеза о том, что нулевое состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво т.е. все решения с положительными начальными условиями стремятся к нулю при

$$0 < r \leq \frac{37}{24}. \quad (7)$$

Однако, в работе эта гипотеза была доказана только для случая

$$0 < r \leq \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Доказательству гипотезы Райта для случая $0 < r \leq \frac{37}{24}$ посвящена первая глава.

Многие авторы (см., например, [34], [36]) рассматривали модификацию классических моделей популяционной динамики добавлением диффузионного слагаемого. Большая часть работ по исследованию данных задач посвящена простейшему случаю, когда миграция особей пропорциональна градиенту концентрации [37]. В книге Джеймса Диксона Мюррея 1993 года ([38]) была рассмотрена модель

$$\frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 N(t, x)}{\partial x^2} + rN(t, x) \left(1 - \frac{N(t, x)}{K} \right) \quad (9)$$

и объяснена роль диффузии в математических моделях, описывающих динамику развития популяции.

Исследование математических моделей популяционной динамики, которые основываются на логистическом уравнении с отклонением временного аргумента и диффузионным слагаемым, связано с рядом технических трудностей ([38]). Трудность вызвана тем, что диффузия, связанная с пространством, и отклонение временного аргумента не являются независимыми друг от друга явлениями. Впервые обстоятельную попытку справиться с этими трудностями предпринял Николас Бритон в 1990 году ([39]). В своей работе Бритон рассматривал уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + ru(t, x) \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t-s)u(s, x)ds \right). \quad (10)$$

Данное уравнение является модификацией уравнения Рональда Фишера, предложенного в 1937 году ([40]). В своей работе Фишер исследовал процесс распространения генной волны в пространстве.

Одной из важных задач в математической биологии является изучение распространения волны в системах с диффузией. Такие системы возникают при моделировании процесса распространения особей определенного вида.

При моделировании процессов популяционной динамики одним из основополагающих вопросов является изучение вопроса об устойчивости положений равновесия. Решению данной задачи посвящена значительная часть работы. Применение современных аналитических методов, а также численных экспериментов позволило получить ряд новых результатов, а также расширить область применимости логистического уравнения с запаздыванием в моделировании процессов экологии.

Еще в XIX веке при исследовании задач небесной механики, где встречаются гамильтоновы системы с малым параметром, были разработаны асимптотические методы, которые позволили найти приближенное решение таких задач, справедливое на длительном промежутке времени. Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов в XX веке внесли большой вклад в развитие асимптотических методов теории дифференциальных уравнений с малым параметром. Ими были разработаны методы, позволяющие отыскать приближенные решения для негамильтоновых систем, близких к интегрируемым. Разработанные методы получили широкое распространение в различных прикладных задачах. Для построения асимптотических разложений систем со многими степенями свободы Н.Н. Боголюбовым был разработан специальный метод, основанный на идее усреднения. Впоследствии этот метод был модифицирован Ю.А. Митропольским, что позволило построить асимптотическое разложение для нелинейных колебательных систем, параметры которых медленно изменяются со временем. Применению принципа усреднения посвящена часть четвертой главы настоящей диссертационной работы.

Цели и задачи исследования

Объектом исследования являются динамические системы с отклонением временного аргумента. Для исследования данного объекта была поставлена цель – изучить асимптотические свойства поведения решений в окрестности состояния равновесия и

провести бифуркационный анализ решений при изменении параметров рассматриваемой системы.

В ходе работы аналитические результаты были подтверждены численными экспериментами. Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Провести оценку параметра логистического уравнения с запаздыванием, при котором все положительные решения стремятся к единичному состоянию равновесия.
2. Изучить вопрос о влиянии коэффициентов граничных условий на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.
3. Исследовать применимость принципа усреднения и построить асимптотические приближения решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими периодическими коэффициентами.
4. Провести асимптотический анализ поведения решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и неоднородным множителем, описывающим сопротивление внешней среды, при запаздывающем слагаемом.

Научная новизна результатов

В ходе исследования были получены следующие новые результаты:

1. Приведено доказательство гипотезы Райта об оценке параметра, при котором положительные решения логистического уравнения с запаздыванием стремятся к единичному состоянию равновесия. Разработан алгоритм последовательного улучшения оценки.
2. Изучено влияние коэффициентов граничных условий на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.
3. Разработан алгоритм построения асимптотики решений и исследования их устойчивости для усредненного логистического уравнения с запаздыванием и диффузией.

4. Установлено влияние коэффициента сопротивления внешней среды на амплитуду популяционных волн. Проведен численный эксперимент в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и неоднородным множителем, описывающим сопротивление внешней среды, при запаздывающем слагаемом.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

Разработанные в работе аналитические методы оценки области устойчивости и построения асимптотики решений могут быть применимы к широкому классу задач математической биологии и физики. Оценка влияния коэффициентов граничных условий на область устойчивости решений может быть использована для изучения различных проблем математической биологии и популяционной динамики.

Методология и методы исследования

В работе для исследования качественного поведения решений задач в работе использовались методы бифуркационного анализа и построения асимптотических приближений. Стоит отметить, что в силу высокой потребности в аналитических методах исследования систем дифференциальных уравнений с отклонением аргументов, в том числе и систем дифференциальных уравнений в частных производных, высокую значимость приобретает разработка новых асимптотических методов.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказана гипотеза Райта для случая $0 < r \leq 37/24$ и разработан метод последовательного улучшения оценки параметра r .
2. Численно-аналитическими методами получены результаты о поведении решений краевой задачи с пространственно неоднородным множителем при слагаемом с запаздыванием.
3. Изучено влияние коэффициентов в граничных условиях на устойчивость нулевого состояния равновесия в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией.

4. На основе принципа усреднения разработан алгоритм построения асимптотического приближения решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими периодическими коэффициентами.

Личный вклад автора

Все основные результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю (соавтору) принадлежит постановка задач. Интерпретация результатов, представленных в диссертационной работе, выполнялась совместно с научным руководителем.

Апробация результатов исследования

Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. 5th International Conference on INTEGRABLE SYSTEMS & NONLINEAR DYNAMICS, October 7 – 11, 2024, Yaroslavl, Russia.
2. The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, June 28 – July 5, 2022, Moscow, Russia.
3. International Conference “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop”, December 9–13, 2019, Nizhny Novgorod, Russia.
4. International Conference “Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics”, June 2–6, 2019, Cheboksary, Russia.
5. Международная молодежная научно-практическая конференция “Путь в науку. Математика”, 22–27 апреля, 2019, г. Ярославль.
6. 7th International conference “Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling”, June 25–27, 2018, Moscow, Russia.
7. Shilnikov Workshop 2017, December 15–16, 2017, Nizhny Novgorod, Russia.
8. Международная молодежная научно-практическая конференция “Путь в науку. Математика”, 20–29 апреля, 2016, г. Ярославль.

Часть результатов получена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Публикации

По теме работы автором опубликовано 14 статей и тезисов докладов, в том числе 8 тезисов докладов и 6 статей из списка ВАК, в том числе 5 статей опубликовано в журналах, индексируемых в системах цитирования Scopus и Web of Science.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 93 страницы. Список литературы содержит 80 наименований.

Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием

Постановка задачи

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u \quad (1.1)$$

возникает во многих прикладных задачах (см., например, [34], [37], [41]). Исследованию его решений посвящена значительная литература. По смыслу задачи коэффициенты r и T положительны. Пространством начальных условий для (1.1) является пространство $C_{[-T,0]}$. Поскольку интерес представляет изучение лишь неотрицательных решений (1.1), то начальные функции из $C_{[-T,0]}$ рассматриваются только неотрицательные. Решение с неотрицательной начальной функцией, заданной при $t = t_0$, остается неотрицательным при всех $t > t_0$. Термин "решение" в дальнейшем применяется только к неотрицательным решениям уравнения (1.1).

Количество параметров в (1.1) можно уменьшить с помощью нормализующей замены времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к уравнению

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t - 1)]u, \quad \lambda = rT. \quad (1.2)$$

В этом уравнении удобно сделать замену $u = 1 + x$. Тогда получаем уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x(t-1)[1+x], \quad x \geq -1. \quad (1.3)$$

Перечислим известные и необходимые для дальнейшего свойства решений (1.3):

1. Каждое решение (1.3) при всех достаточно больших t удовлетворяет неравенству

$$x(t) \leq \exp(\lambda) - 1. \quad (1.4)$$

2. Устойчивость состояния равновесия $x_0 \equiv 0$ определяется расположением корней характеристического квазиполинома (линеаризованного на x_0 уравнения)

$$\mu = -\lambda \exp(-\mu). \quad (1.5)$$

При условии

$$0 < \lambda < \frac{\pi}{2} \quad (1.6)$$

все корни (1.5) имеют отрицательные вещественные части, поэтому состояние равновесия x_0 в (1.3) является асимптотически устойчивым. Отметим, что при $\lambda = \pi/2$ уравнение (1.5) имеет пару чисто мнимых корней, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Нелинейный анализ уравнения (1.3) в малой окрестности x_0 , приведенный в работах многих авторов (см., например, [33], [34]), показал, что при $\lambda = \pi/2$ нулевое состояние равновесия в (1.3) тоже асимптотически устойчиво. Добавим еще, что при $\lambda > \pi/2$ это состояние равновесия неустойчиво и из него бифурцирует устойчивый цикл.

В настоящей главе рассматривается вопрос о глобальной устойчивости состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ в (1.2) или, что то же самое, состояние равновесия $x_0 \equiv 0$ в (1.3). Это означает, что ставится задача нахождения таких значений параметра λ , при которых все решения (1.2) с положительными начальными функциями (или все решения (1.3) с начальными функциями, удовлетворяющими неравенству $x > -1$) стремятся к u_0 (соответственно к x_0) при $t \rightarrow \infty$. В работах [33], [34], [37], [41], [42] было показано, что в область глобальной устойчивости входят все значения параметра λ , удовлетворяющие неравенству $0 < \lambda \leq 3/2$. В [34] высказано предположение, что имеет место более сильный результат, согласно которому множество таких значений λ задается неравенством

$$0 < \lambda \leq 37/24. \quad (1.7)$$

Ниже будет доказана оценка (1.7) и разработан алгоритм последовательного улучшения оценки (1.7). С помощью этого алгоритма открывается возможность получения более точных по сравнению с (1.4) оценок на решения (1.2) при невыполнении условия (1.7). В силу сказанного выше, для значений λ из области глобальной устойчивости заведомо выполнено неравенство $\lambda \leq \pi/2$.

Основная конструкция

Сначала отметим, что для каждого решения $x(t)$ уравнения (1.3) и для каждого целого $n > 1$ найдется такое t_n , что при $t > t_n$ функция $x(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой. Кроме этого из (1.4) открывается возможность нахождения значений коэффициентов a_n и b_n , для которых

$$-b_n \leq x^{(n)}(t) \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Например, при $n = 0$ имеем $b_0 = -1$, $a_0 = \exp(\lambda) - 1$.

Предположим, что решение $x(t)$ уравнения (1.3) для некоторых $\alpha \in (0, 1)$ и $M \in (0, \exp(\lambda) - 1)$ удовлетворяет неравенствам

$$-\alpha \leq x(t) \leq M \quad (t \geq t_0). \quad (1.9)$$

Тогда для каждого n из (1.3) можно получить явные формулы для коэффициентов $a_n = a_n(\alpha, M)$ и $b_n = b_n(\alpha, M)$, фигурирующих в (1.8).

Фиксируем произвольно номер $m \geq 0$. Через $C(m, \alpha, M)$ и $S(m, \alpha, M)$ обозначим экстремумы функционалов

$$C(m, \alpha, M) = \inf \int_0^1 x(s) ds \quad (1.10)$$

и

$$S(m, \alpha, M) = \sup \int_0^1 x(s) ds, \quad (1.11)$$

где нижняя и верхняя грани берутся по всем m раз непрерывно дифференцируемым решениям (1.3), удовлетворяющим неравенствам (1.8) при $n = 1, \dots, m$ и для которых $x(1) = 0$.

Обратим внимание, что условие $\tilde{x}(t) \equiv 0$ решения (1.3) может не выполняться, т.е. некоторое решение может быть знакопостоянным (при $t \geq t_0$). Но тогда это решение, как следует из (1.3), монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и интерес такие решения не

представляют. В этой связи укажем, что такие, т.е. монотонно стремящиеся к нулю, решения могут существовать лишь при условии $0 < \lambda < \exp(-1)$.

Переход к двумерному отображению

Положим

$$M_1 = \exp(-\lambda C(m, \alpha, M)) - 1, \quad (1.12)$$

$$\alpha_1 = 1 - \exp(-\lambda S(m, \alpha, M)). \quad (1.13)$$

Таким образом, возникает двумерное отображение

$$(\alpha, M) \xrightarrow{\Phi(\alpha, M)} (\alpha_1, M_1) \xrightarrow{\Phi(\alpha_1, M_1)} (\alpha_2, M_2) \xrightarrow{\Phi(\alpha_2, M_2)} \dots \quad (1.14)$$

Теорема 1.1. *Для стремления к нулю всех решений уравнения (1.3), удовлетворяющих неравенству $x \geq -1$, достаточно, чтобы при всех $\alpha \in (0, 1)$ и $M \in (0, \exp(\lambda) - 1)$ выполнялись неравенства*

$$\alpha_1 < \alpha, \quad M_1 < M. \quad (1.15)$$

Доказательство. Для произвольно фиксированного решения (1.3) положим

$$\alpha = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} \inf_{t > \tau} x(t), \quad M = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{t > \tau} x(t). \quad (1.16)$$

Для $x(t)$ имеет место формула

$$x(t) = -1 + (1 + x(\tau)) \exp\left(-\int_{\tau-1}^{t-1} x(s) ds\right). \quad (1.17)$$

Как уже отмечалось, достаточно рассмотреть лишь те решения $x(t)$, которые имеют бесконечно много нулей на каждом промежутке (n, ∞) ($n = n_0$; n_0 – достаточно велико).

Важно заметить, что экстремумы $x(t)$ реализуются через отрезок времени длины 1 после обращения в нуль этой функции. Отсюда и из (1.17) сразу вытекает, что

$$0 \leq M \leq \exp(\lambda) - 1; \quad 0 \leq \alpha < 1 - \exp(-\lambda(\exp(\lambda) - 1)).$$

Фиксируем произвольно $m \geq 0$ и $0 < \varepsilon < \min(\alpha, 1 - \alpha)$ и пусть при $t \geq \tau_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$-(\alpha + \varepsilon) \leq x(t) \leq M + \varepsilon. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.3) и оценок (1.18) находим коэффициенты $a_k(\varepsilon) = a_k(\alpha + \varepsilon, M + \varepsilon)$, $b_k(\varepsilon) = b_k(\alpha + \varepsilon, M + \varepsilon)$ ($k = 0, \dots, m$). Очевидно, что $a_k(\varepsilon)$, $b_k(\varepsilon)$, а также $C(m, \alpha + \varepsilon, M + \varepsilon)$ и

$S(m, \alpha + \varepsilon, M + \varepsilon)$ непрерывно зависят от ε . Обозначим через τ_0 и τ^0 какие-то точки локального минимума и локального максимума $x(t)$ соответственно. Из (1.18) при $\tau = \tau_0$ и $\tau = \tau^0$ имеем

$$-\alpha_\varepsilon = x(\tau_0) = -1 + \exp(-\lambda \int_{\tau_0-2}^{\tau_0-1} x(s)ds), \quad (1.19)$$

$$M_\varepsilon = x(\tau^0) = \exp(-\lambda \int_{\tau^0-2}^{\tau^0-1} x(s)ds) - 1, \quad (1.20)$$

где

$$\alpha \leq \alpha_\varepsilon \leq \alpha + \varepsilon \quad \text{и} \quad M \leq M_\varepsilon \leq M + \varepsilon.$$

Формула (1.20) приводит к оценке

$$M_\varepsilon \leq -1 + \exp(-\lambda C(m, \alpha + \varepsilon, M + \varepsilon)).$$

Отсюда следует неравенство

$$M \leq -1 + \exp(-\lambda C(m, \alpha, M)) = M_1.$$

Из (1.19) получаем, что

$$\alpha_\varepsilon \leq 1 - \exp(-\lambda S(m, \alpha, M)) = \alpha_1.$$

Используя произвол в выборе ε и неравенства (1.15), приходим к выводу, что $\alpha = M = 0$, т.е. функция $x(t)$ имеет нулевой предел при $t \rightarrow \infty$. $\square$

Замечание. Вместо условий (1.15) можно на $\Phi(\alpha, M)$ наложить требование существования единственного аттрактора – нулевой неподвижной точки.

Замечание. Рассмотрим итерации (α_n, M_n) ($n = 2, 3, \dots$) отображения $\Phi(\alpha, M)$:

$$(\alpha_{n+1}, M_{n+1}) = \Phi(\alpha_n, M_n). \quad (1.21)$$

Пусть при некотором λ имеем

$$\alpha_0(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} \alpha_k, \quad M_0(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} M_k.$$

Тогда для решений (1.3) выполнены неравенства

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(\tau) \geq -\alpha_0(\lambda), \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} x(\tau) \leq M_0(\lambda). \quad (1.22)$$

Основная роль теоремы 1.1 состоит в том, что она намечает путь получения необходимых оценок. Уже при $m = 2$ для применения этой теоремы необходимо её существенно модернизировать. Этому посвящен следующий раздел 2.2.

Сведение двумерного отображения (1.12), (1.13) к двум отображениям первого порядка

Здесь предполагаем, что $m \geq 2$.

Пусть для некоторого решения $x(t)$ при всех $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$x(t) \geq -\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (1.23)$$

Сначала отметим, что при $m = 1$ выражение $C(1, \alpha, M)$ не зависит от M . Положим $C(\alpha) = C(1, \alpha, M) = \dots$

Пусть

$$M_1 = \exp(-\lambda C(\alpha)) - 1.$$

Рассмотрим выражение $C(m, \alpha, M_1)$ и положим

$$M_2 = \exp(-\lambda C(m, \alpha, M_1)) - 1.$$

Затем определим $M_3, \dots$ по формуле

$$M_{n+1} = \exp(-\lambda C(m, \alpha, M_n)) - 1 \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (1.24)$$

Отметим, что имеют место неравенства

$$M_{n+1} \leq M_n.$$

Обозначим через $M(\alpha)$ предельное значение последовательности M_n :

$$M(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n.$$

Тем самым $M(\alpha)$ – устойчивая неподвижная точка отображения (1.24).

На следующем этапе рассмотрим выражение

$$\alpha_1 = 1 - \exp(-\lambda S(\alpha, M(\alpha)))$$

и

$$\alpha_{n+1} = 1 - \exp(-\lambda S(\alpha_n(\alpha), M(\alpha_n(\alpha)))) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.25)$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 1.2. Пусть при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполнено предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\alpha) = 0.$$

Тогда все решения уравнения (1.3) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Обоснование этой теоремы вытекает из приведенного выше обоснования теоремы 1.1.

Замечание. Для справедливости утверждения теоремы 1.2 достаточно выполнения при всех $\alpha \in (0, 1)$ неравенства $\alpha_1 < \alpha$.

Следующие два раздела посвящены рассмотрению случаев, когда $m = 0$ и $m = 1$ соответственно. Как будет показано, в этих случаях двумерное отображение (1.12), (1.13) сводится к одномерному. Случай $m = 0$ тривиален, а уже при $m = 1$ показана важность получения априорных оценок для решений. В этой связи сначала приведены результаты в случае довольно грубых оценок, а затем показано, что более точные оценки позволяют обосновать существенное расширение области глобальной устойчивости. Наконец, в разделе 1.5 при $m = 2$ сначала на основе теоремы 1.2 учтены только грубые оценки решений, а затем – в случае использования более точных оценок, обоснована оценка (1.7).

Случай $m = 0$

Пусть сначала $m = 0$. В этом случае

$$C(0, \alpha, M) = -\alpha, \quad S(0, \alpha, M) = M.$$

Отсюда получаем, что

$$\alpha_1 = 1 - \exp(-\lambda M), \quad M_1 = \exp(\lambda \alpha) - 1. \quad (1.26)$$

При условии

$$0 < \lambda < 1 \quad (1.27)$$

выполнены неравенства

$$\alpha_1 < \alpha \quad \text{и} \quad M_1 < M,$$

поэтому заключаем, что при условии (1.27) все решения (1.3) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что двумерное отображение (1.26) можно свести к одномерному. Положим $\beta_n = \alpha_{2n}$. Тогда

$$\beta_{n+1} = f(\lambda, \beta_n), \quad f(\lambda, \beta) = 1 - \exp[-\lambda(\exp(\lambda\beta) - 1)]. \quad (1.28)$$

Для функции $f(\lambda, \beta)$ выполнено равенство $\frac{\partial f}{\partial \beta}|_{\beta=0} = \lambda^2$. На рис. 1.1 и рис. 1.2 представлены графики функций $f(\lambda, \beta)$ при различных значениях λ . При $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\lambda = 1$ – рис. 1.1 и при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ – рис. 1.2.

Обозначим через β_0 положительную неподвижную точку отображения (1.28). Ее численное значение близко к $\beta_0 = 0.9974065436$.

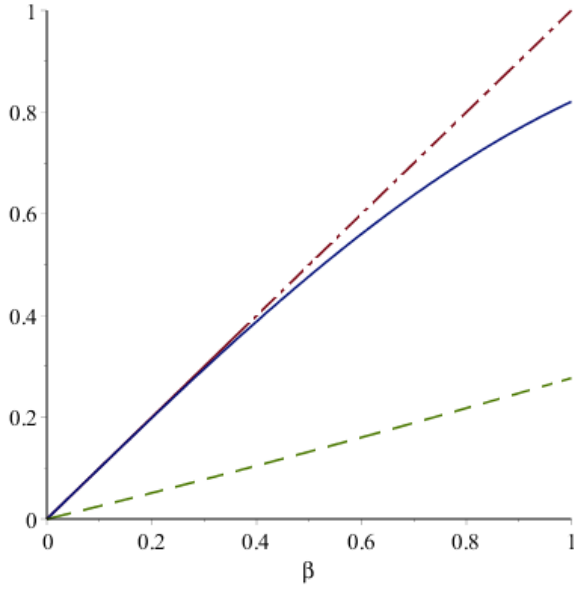


Рис. 1.1: пунктирная линия – $\lambda = \frac{1}{2}$;
штрихпунктирная линия – $\lambda = 1$

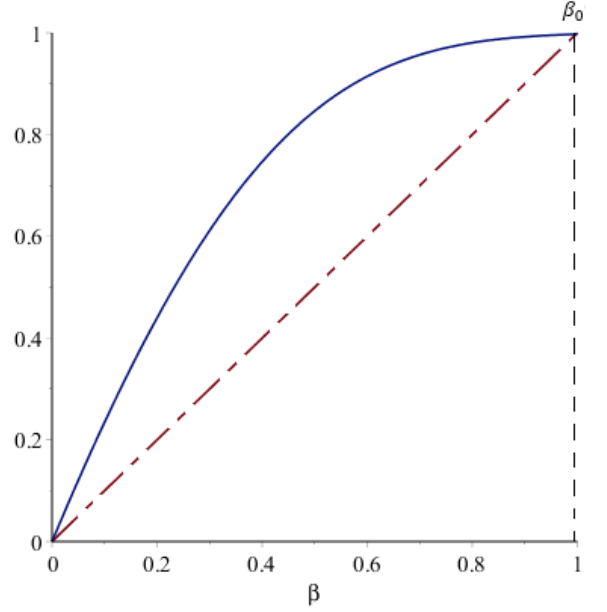


Рис. 1.2: штрихпунктирная линия – $\lambda = \frac{\pi}{2}$
 $\beta_0 = 0.9974065436$

Поскольку $\beta_0 = 0.9974065436 < 1$, то для всех решений (1.3) при всех $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ выполнены при достаточно больших t неравенства

$$x(t) \geq -\beta_0, \quad x(t) \leq \exp\left(\frac{\pi}{2}\beta_0\right) - 1.$$

Таким образом, при $\lambda < 1$ выполнено условие $f(\lambda, \beta) < \beta$, т.е. все итерации α_{2n} стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что при $\lambda < 1$ все решения (1.3) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. При $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ можно утверждать что для решений (1.3) выполнена при больших t оценка $x(t) \geq -\beta_0$.

Случай $m = 1$

Пусть $m = 1$. Согласно предыдущему разделу имеет смысл рассмотреть лишь случай $\lambda \geq 1$.

Грубая оценка параметров решений

Из уравнения (1.3) и оценок (1.9) вытекает, что при достаточно больших $x(t)$ и при условии $x(t) < 0$ имеем $\dot{x}(t) \leq \lambda\alpha$, а при $x(t) > 0$ имеем $\dot{x}(t) \geq -\lambda \cdot M(1 + M)$, т.е.

$$a_1 = \lambda\alpha, \quad b_1 = \lambda \cdot M \cdot (1 + M).$$

Значения $C(1, \alpha, M)$ и $S(1, \alpha, M)$ тогда реализуются соответственно на функциях

$$x_0(t) = \begin{cases} -\alpha, & 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{\lambda}, \\ \lambda\alpha(t - 1), & 1 - \frac{1}{\lambda} < t \leq 1, \end{cases}$$

$$x^0(t) = \begin{cases} M, & 0 < t \leq 1 - (\lambda(1 + M))^{-1}, \\ -\lambda M(1 + M)(t - 1), & 1 - (\lambda M(1 + M))^{-1} < t \leq 1. \end{cases}$$

Примерные графики функций $x_0(t)$ и $x^0(t)$ представлены на рис. 1.3 и рис. 1.4 соответственно.

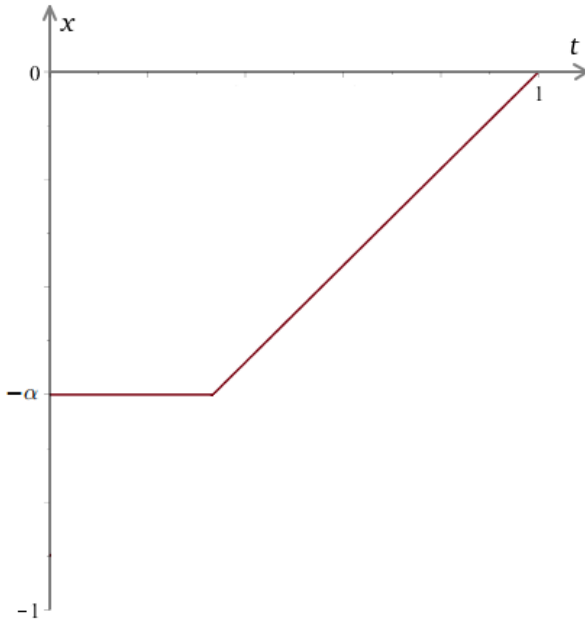


Рис. 1.3: График функции $x_0(t)$

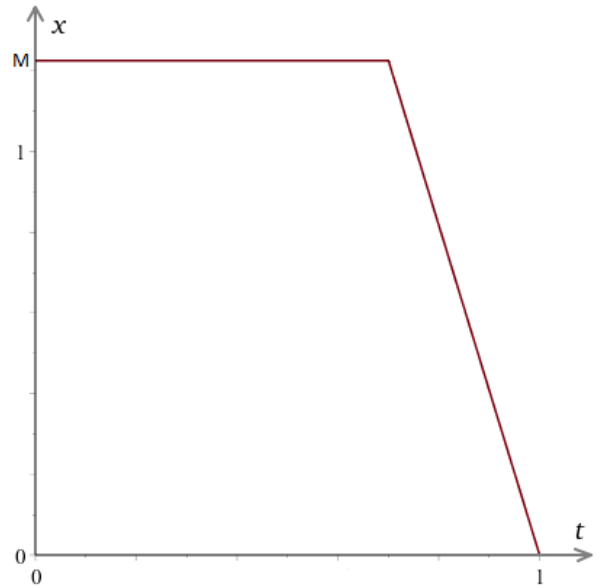


Рис. 1.4: График функции $x^0(t)$

Для $C(1, \alpha, M)$ и $S(1, \alpha, M)$ имеют место формулы

$$C(1, \alpha, M) = -\alpha \left(1 - \frac{1}{2\lambda} \right), \quad S(1, \alpha, M) = M(1 - 2\lambda(1 + M)^{-1}).$$

И в этом случае отображение (1.12), (1.13) можно свести к одномерному отображению

$$\beta_{n+1} = f(\beta_n) \quad (\beta_n = \alpha_{2n}), \quad (1.29)$$

где

$$f(\lambda, \beta) = 1 - \exp[-\lambda m(\beta)(1 - (2\lambda(1 + m(\beta)))^{-1})],$$

$$m(\beta) = 1 - \exp\left(\lambda\beta\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)\right).$$

Отметим, что $f'_\beta(\lambda, 0) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$, поэтому $0 < f'_\beta(\lambda, 0) < 1$ при $0 \leq \lambda < \frac{3}{2}$. При $0 < \lambda < 1.44865$ выполнено неравенство $f(\lambda, \beta) < \beta$. При $\lambda = 1.44865$ график $f(\lambda, \beta)$ приведен на рис. 1.5, а при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ – на рис. 1.6.

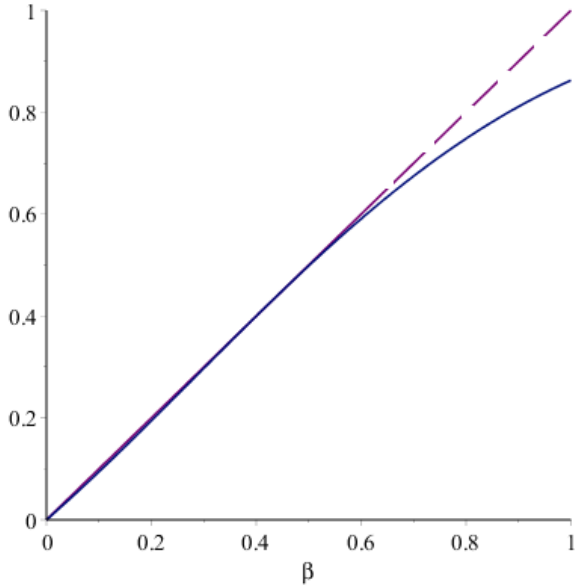


Рис. 1.5: График функции $f(\lambda, \beta)$

при $\lambda = 1.44865$

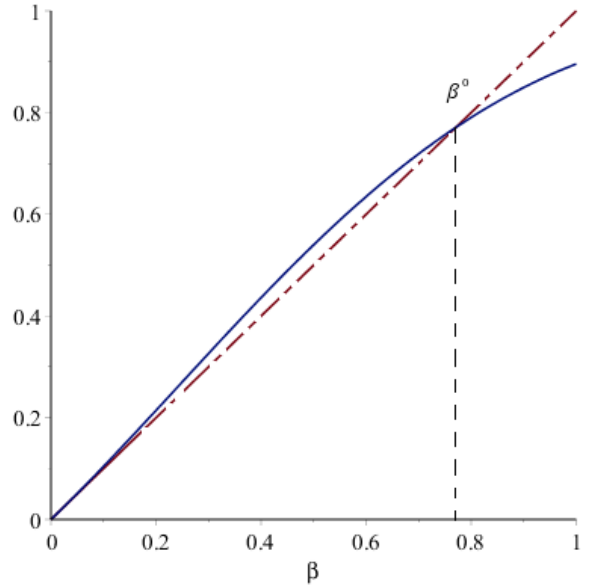


Рис. 1.6: График функции $f(\lambda, \beta)$

при $\lambda = \frac{\pi}{2}, \beta^0 = 0.7710977301$

Таким образом, здесь установлено стремление к нулю всех решений только при

$$0 < \lambda < 1.44865. \quad (1.30)$$

Более точная априорная оценка решений

Покажем, что при более точной априорной оценке решений можно расширить по сравнению с неравенством (1.30) область тех значений λ , при которых имеет место глобальная устойчивость нулевого состояния равновесия в (1.3).

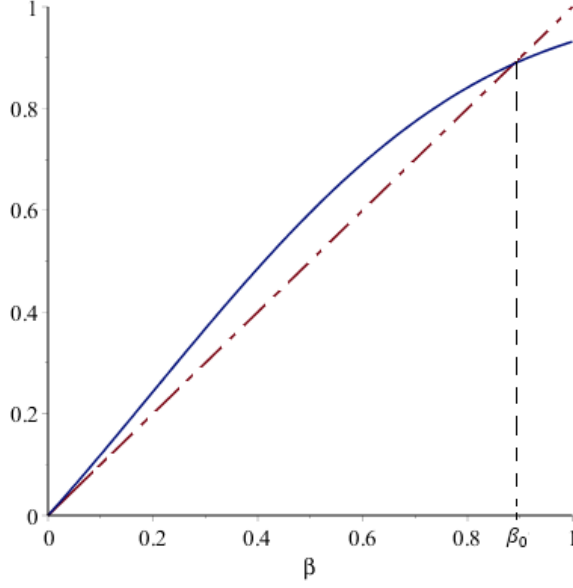


Рис. 1.7: График функции $f(\lambda, \beta)$
при $\lambda = \frac{\pi}{2}, \beta_0 = 0.8876428991$

Теорема 1.3. Пусть

$$0 < \lambda \leq \frac{3}{2}.$$

Тогда все решения уравнения (1.3) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Уравнение (1.3) при $x \neq 0$ эквивалентно уравнению

$$(1+x)^{-1}\dot{x} = -\lambda x(t-1). \quad (1.31)$$

Из оценок (1.9) тогда получаем, что

$$-\lambda M \leq (1+x)^{-1}\dot{x} \leq \lambda \alpha. \quad (1.32)$$

Таким образом для $x(t)$ приходим к более точным оценкам

$$\begin{cases} -\lambda M \exp(-\lambda M(t-1)) \leq \dot{x} \leq \lambda \alpha \exp(\lambda \alpha(t-1)), \\ -1 + \exp(-\lambda \alpha(1-t)) \leq x(t) \leq -1 + \exp(\lambda M(1-t)). \end{cases} \quad (1.33)$$

Отсюда следует, что

$$x_0(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [0, t_0], & t_0 = 1 + (\lambda \alpha)^{-1} \ln(1 - \alpha), \\ -1 + \exp(-\lambda \alpha(1-t)), & t \in (t_0, 1], \end{cases}$$

$$x^0(t) = \begin{cases} M, & t \in [0, t^0], & t^0 = 1 - (\lambda M)^{-1} \ln(1 + M), \\ -1 + \exp(\lambda M(1 - t)), & t \in (t^0, 1]. \end{cases}$$

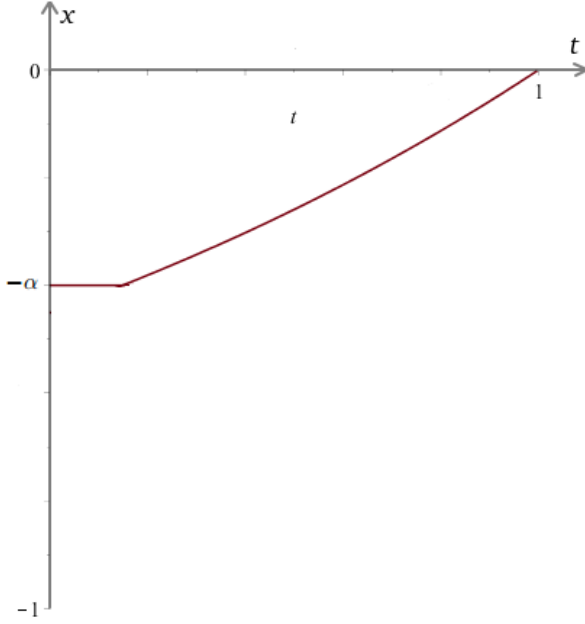


Рис. 1.8: График функции $x_0(t)$

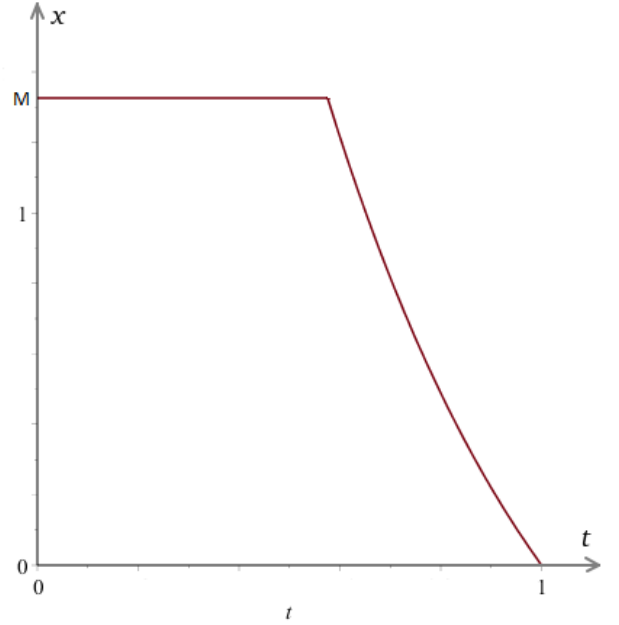


Рис. 1.9: График функции $x^0(t)$

Для $C(1, \alpha, M)$ и $S(1, \alpha, M)$ верны равенства

$$C(1, \alpha, M) = \int_0^1 x_0(s) ds = -\alpha + \frac{1}{\lambda} + (1 - \alpha)(\lambda \alpha)^{-1} \ln(1 - \alpha),$$

$$S(1, \alpha, M) = \int_0^1 x^0(s) ds = M + \frac{1}{\lambda} - (1 + M)(\lambda M)^{-1} \ln(1 + M).$$

И в этой ситуации двумерное отображение (1.12), (1.13) сводится к одномерному отображению (1.29), в котором $f(\lambda, \beta)$ задана равенством

$$f(\lambda, \beta) = 1 - \exp[-1 - \lambda m(\beta) + m^{-1}(\beta)(1 + m(\beta)) \ln(1 + m(\beta))]$$

и

$$m(\beta) = -1 + \exp[-1 + \lambda \beta - \beta^{-1}(1 - \beta) \ln(1 - \beta)].$$

Отметим, что $f'(0) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$, поэтому $f'(0) < 1$ при $\lambda < \frac{3}{2}$.

Таким образом, на основе более точных оценок удалось показать, что при $0 < \lambda < \frac{3}{2}$ все решения (1.3) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Можно показать, что теорема 1.3 остается верной и при $\lambda = \frac{3}{2}$. Для этого достаточно дополнительно воспользоваться свойством локальной асимптотической устойчивости решения (1.2) при $\lambda = \frac{3}{2}$. Подробнее на этом не останавливаемся.

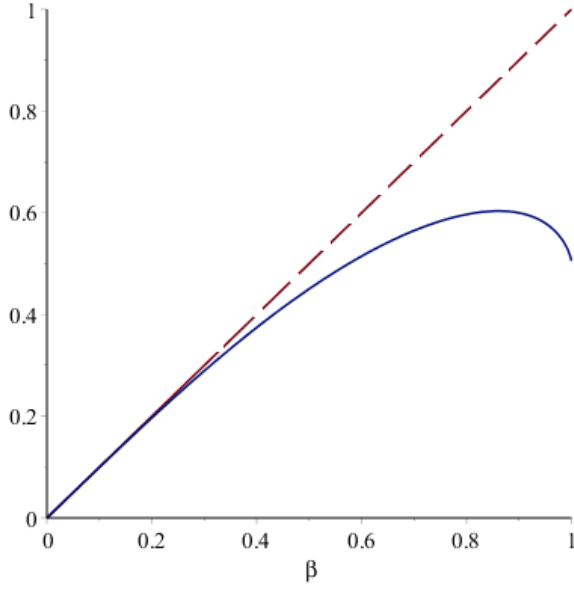


Рис. 1.10: График функции $f(\lambda, \beta)$
при $\lambda = \frac{3}{2}$

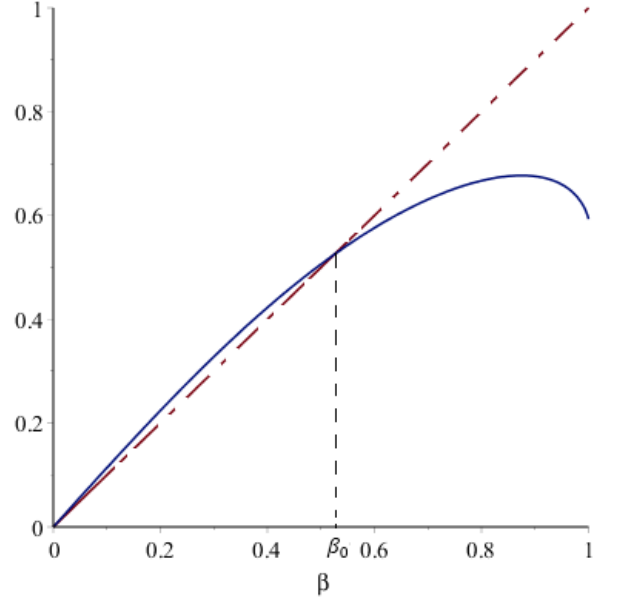


Рис. 1.11: График функции $f(\lambda, \beta)$
при $\lambda = \frac{\pi}{2}, \beta_0 = 0.5254171515$

Отметим, что при $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ для каждого решения при больших t выполнена оценка

$$x(t) \geq -\beta_0 = -0.5254171515.$$

□

Случай $m = 2$

Грубая оценка параметров решений

Фиксируем произвольно решение $x(t)$ уравнения (1.3). Пусть при всех $t \geq t_0$ выполнены оценки

$$x(t) \geq -\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (1.34)$$

Обозначим через M верхнюю грань этого решения, т.е.

$$\sup_{t > t_0} x(t) = M. \quad (1.35)$$

Тогда для величины M из предыдущих построений следует оценка

$$M \leq \exp \left[-\lambda^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{2\lambda} \right) \right] - 1 = M_1(\alpha, \lambda). \quad (1.36)$$

В этом случае можно взять $a_2 = a_2(M_1)$ и с учетом (1.36)

$$a_2 = \lambda^2 M_1 (1 + 2M_1).$$

Функция $x_0(t)$, на которой соответственно реализуется значение $C(2, \alpha, M_1)$ имеет вид

$$x_0(t) = \begin{cases} -\alpha, & 0 \leq t \leq t_1, \\ -\alpha + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2, & t_1 \leq t \leq t_2, \quad t_1 = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda\alpha}{2a_2}, \quad t_2 = 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\alpha}{2a_2}, \\ \lambda\alpha(t - 1), & t_2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Отображение $M_{n+1}(\alpha, M_n, \lambda)$ строится следующим образом:

$$M_{n+1} = \exp[-\lambda C(2, \alpha, M_n)] - 1. \quad (1.37)$$

Последовательные итерации отображения

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$$

приводят к выводу, что искомая оценка сверху решения $x(t)$ не превосходит значения неподвижной точки отображения (1.37). Для примера график этого отображения представлен на рис. 1.12.

После определения неподвижной точки $M(\alpha)$ функция $x^0(t)$, на которой реализуется искомое значение $S(2, \alpha, M(\alpha))$, имеет вид

$$x^0(t) = \begin{cases} M(\alpha), & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ M(\alpha) + \frac{1}{2}b_2(t - \tau_1)^2, & \tau_1 < t \leq \tau_2, \quad \tau_1 = 1 + \frac{M(\alpha)}{b_1} - \frac{b_1}{2b_2}, \quad \tau_2 = 1 + \frac{M(\alpha)}{b_1} + \frac{b_1}{2b_2}, \\ b_1(t - 1), & \tau_2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Здесь

$$b_1 = -\lambda M(\alpha)(1 + M(\alpha)), \quad b_2 = -\lambda^2 \alpha (1 + M(\alpha))^2.$$

Отсюда

$$C(2, \alpha, M(\alpha)) = \int_0^1 x_0(s) ds = -\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\alpha}{2a_2}\right) - \frac{(\lambda\alpha)^3}{6a_2^2} - \frac{\lambda\alpha}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda\alpha}{2a_2}\right)^2,$$

$$S(2, \alpha, M(\alpha)) = \int_0^1 x^0(s) ds = M(\alpha) \left(1 + \frac{M(\alpha)}{b_1} + \frac{b_1}{2b_2}\right) - \frac{b_1^3}{6b_2^2} - \frac{b_1}{2} \left(\frac{M(\alpha)}{b_1} + \frac{b_1}{2b_2}\right)^2.$$

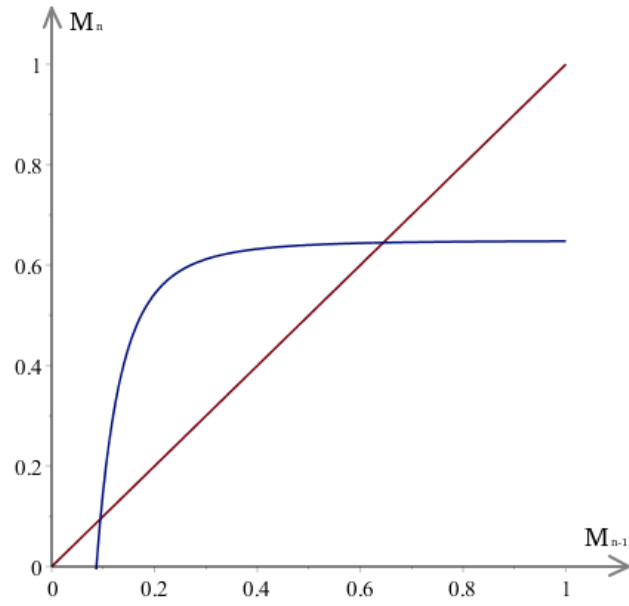


Рис. 1.12: График правой части
отображения $M(\alpha)$ при $\alpha = 0.5, \lambda = \frac{3}{2}$

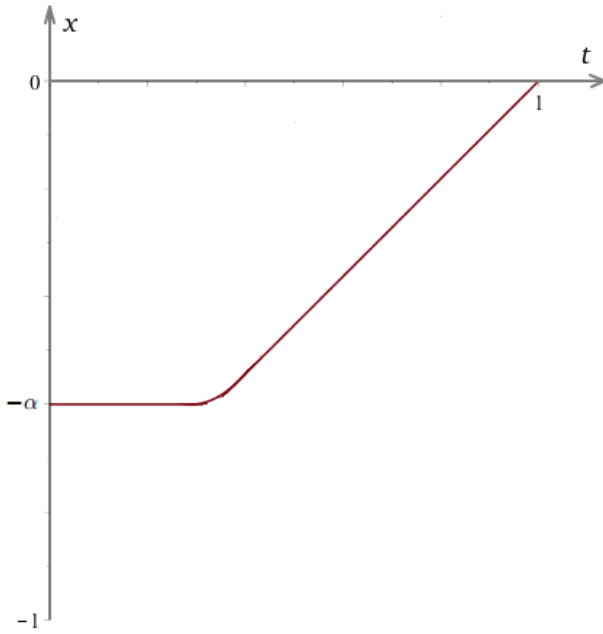


Рис. 1.13: График функции $x_0(t)$

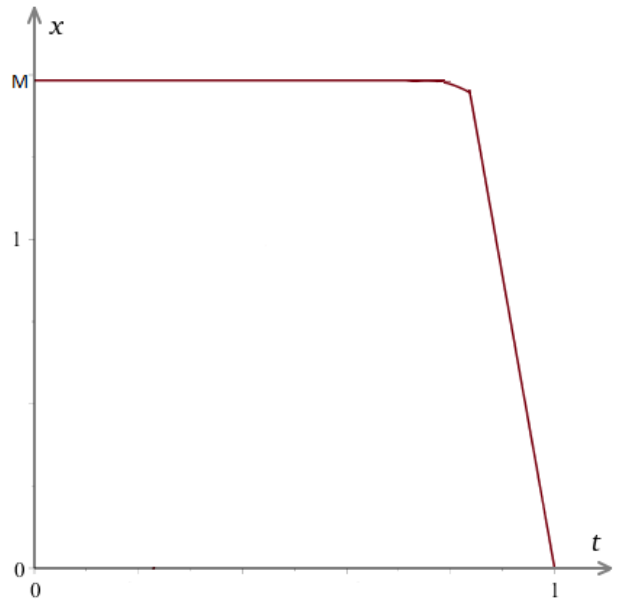


Рис. 1.14: График функции $x^0(t)$

Это означает, что отображение (1.12), (1.13) можно свести к одномерному отображению

$$\alpha_{n+1} = f(\lambda, \alpha_n), \quad (1.38)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $\alpha_1 = 1 - \exp[-\lambda S(2, \alpha, M_1)]$, а для $f(\lambda, \alpha)$ получаем выражение

$$f(\lambda, \alpha) = 1 - \exp \left[-\lambda \left(M(\alpha) \left(1 + \frac{M(\alpha)}{b_1} + \frac{b_1}{2b_2} \right) - \frac{b_1^3}{6b_2^2} - \frac{b_1}{2} \left(\frac{M(\alpha)}{b_1} + \frac{b_1}{2b_2} \right)^2 \right) \right],$$

Отметим, что $f'_\alpha(\lambda, 0) = \left(\lambda - \frac{13}{24} \right)$. Поэтому $f'_\alpha(\lambda, 0) < 1$ при $\lambda < \frac{37}{24}$.

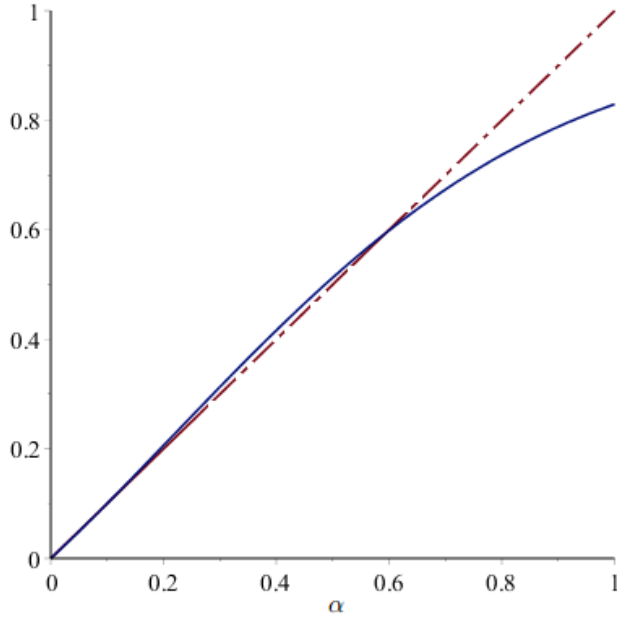


Рис. 1.15: График функции $f(\lambda, \alpha)$
при $\lambda = \frac{3}{2}$

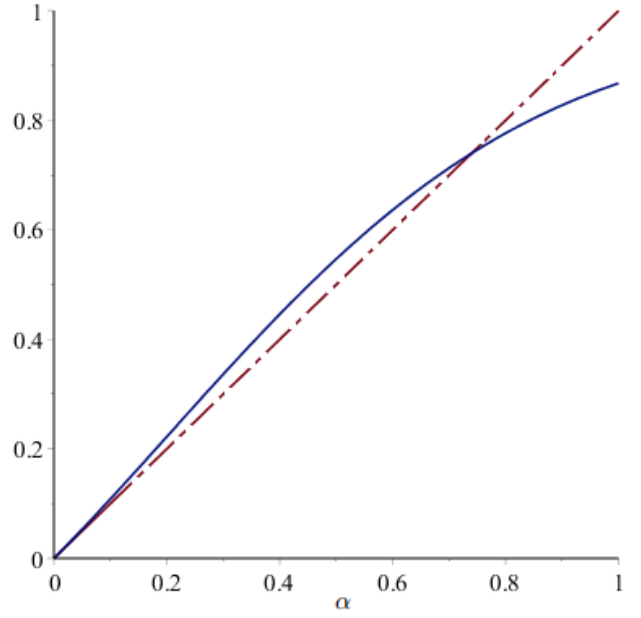


Рис. 1.16: График функции $f(\lambda, \alpha)$
при $\lambda = \frac{37}{24}$

Более точные априорные оценки решений

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.4. Пусть $0 < \lambda < \frac{37}{24}$. Тогда все решения уравнения (1.3), начальные функции которых удовлетворяют оценке $x(s) > -1$, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для того, чтобы улучшить полученную оценку, учтем неравенства (1.33).

Тогда в качестве $x_0(t)$ получаем следующую функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} -\alpha, & -1 \leq t \leq t_1, \\ -\alpha + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ -1 + \exp(\lambda\alpha t), & t_2 < t \leq 0. \end{cases}$$

Здесь

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{a_2\Delta_0^2}{2} - \alpha + 1\right)}{\alpha\lambda}, \quad t_1 = t_2 - \Delta_0, \quad \Delta_0 = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + a_0}}{\alpha\lambda a_2},$$

$$a_0 = 2\alpha^2\lambda^2 a_2(\alpha - 1), \quad a_2 = \lambda^2 M_1(1 + 2M_1).$$

В данном случае отображение (1.36) имеет вид, представленный на рис. 1.17.

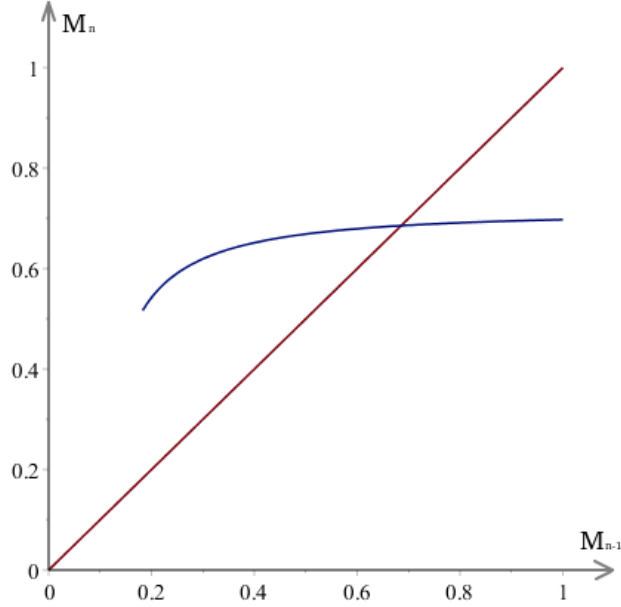


Рис. 1.17: График правой части
отображения $M(\alpha)$ при $\alpha = 0.5, \lambda = \frac{3}{2}$

Функция $x^0(t)$, на которой реализуется значение $S(2, \alpha, M(\alpha))$, в данном случае имеет вид

$$x^0(t) = \begin{cases} M(\alpha), & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ M(\alpha) + \frac{1}{2}b_2(t - \tau_1)^2, & \tau_1 < t \leq \tau_2, \\ -1 + \exp(-\lambda M(\alpha)(t - 1)), & \tau_2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Здесь

$$\tau_2 = 1 - \frac{\ln\left(\frac{b_2\Delta_1^2}{2} + M(\alpha) + 1\right)}{M(\alpha)\lambda}, \quad \tau_1 = \tau_2 - \Delta_1, \quad \Delta_1 = -\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - b_0}}{M(\alpha)\lambda b_2},$$

$$b_0 = 2M(\alpha)^2\lambda^2 b_2(M(\alpha) + 1), \quad b_2 = -\lambda^2\alpha(1 + M(\alpha))^2.$$

Тогда для выражений $C(2, \alpha, M(\alpha))$ и $S(2, \alpha, M(\alpha))$ имеем формулы

$$C(2, \alpha, M(\alpha)) = \int_{-1}^0 x_0(s)ds = [6a_2^2\alpha^2\lambda^2(1 - \alpha) \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(a_2 - \sqrt{a_2^2 + a_0})^2}{(\alpha^2\lambda^2 a_2) - \alpha + 1}\right) +$$

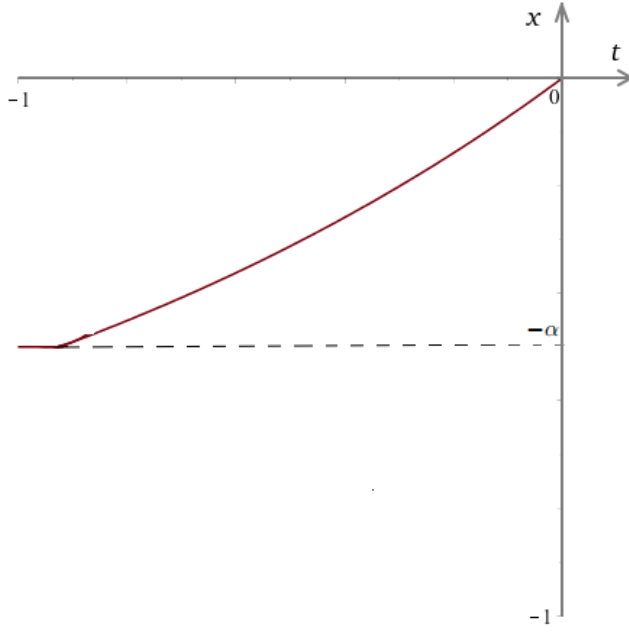


Рис. 1.18: График функции $x_0(t)$

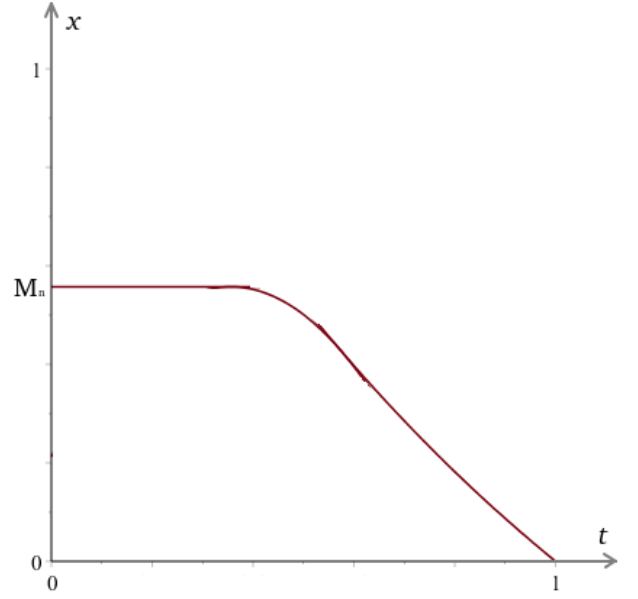


Рис. 1.19: График функции $x^0(t)$

$$+3\sqrt{a_2^2 + a_0 a_2^2 - 2a_2^3} + (-6\alpha^4 \lambda^3 + 6\alpha^3 \lambda^2) a_2^2 - (a_2^2 + a_0)^{\frac{3}{2}} \cdot (6a_2^2 \alpha^3 \lambda^3)^{-1},$$

$$\begin{aligned} S(2, \alpha, M(\alpha)) &= \int_0^1 x^0(s) ds = [6M^2(\alpha) \lambda^2 (M^2(\alpha) + M(\alpha) \lambda - M(\alpha) - 2) b_2^2 - \\ &- 6b_2^2 M^2(\alpha) \lambda^2 (M(\alpha) + 1) \ln \left(\frac{\frac{1}{2}(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - b_0^2})}{M^2(\alpha) \lambda^2 b_2} + M(\alpha) + 1 \right) - \\ &- 9\sqrt{b_2^2 - b_0 b_2^2} - 10b_2^3 + 6b_2 b_0 - (b_2^2 - b_0)^{\frac{3}{2}}] \cdot (6b_2^2 M^3(\alpha) \lambda^3)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $0 < \lambda < \frac{37}{24}$ все траектории отображения (1.37) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. □

Отметим, что $f'_\alpha(\lambda, 0) = \left(\lambda - \frac{13^2}{24} \right)$, поэтому $f'_\alpha(\lambda, 0) < 1$ при $\lambda < \frac{37}{24}$.

Выводы

Доказана гипотеза Райта [34] о том, что при условии (1.7) нулевое состояние равновесия уравнения (1.3) глобально устойчиво. Разработана методика последовательного уточнения соответствующих оценок.

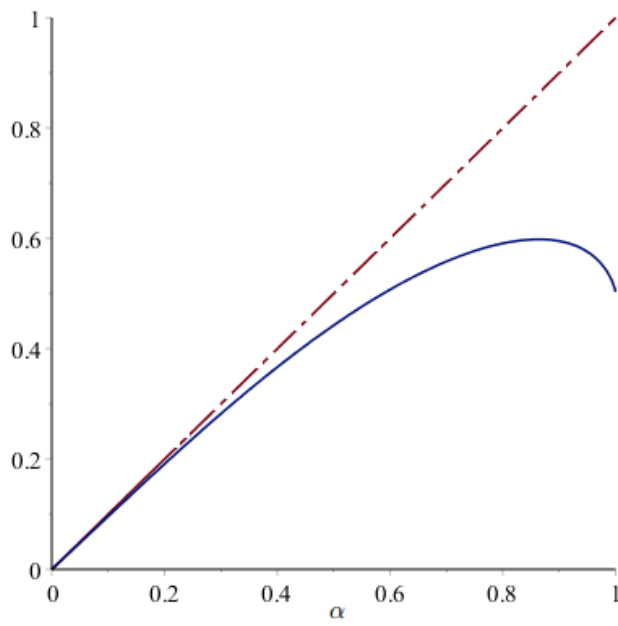


Рис. 1.20: График функции $f(\lambda, \alpha)$
при $\lambda = \frac{3}{2}$

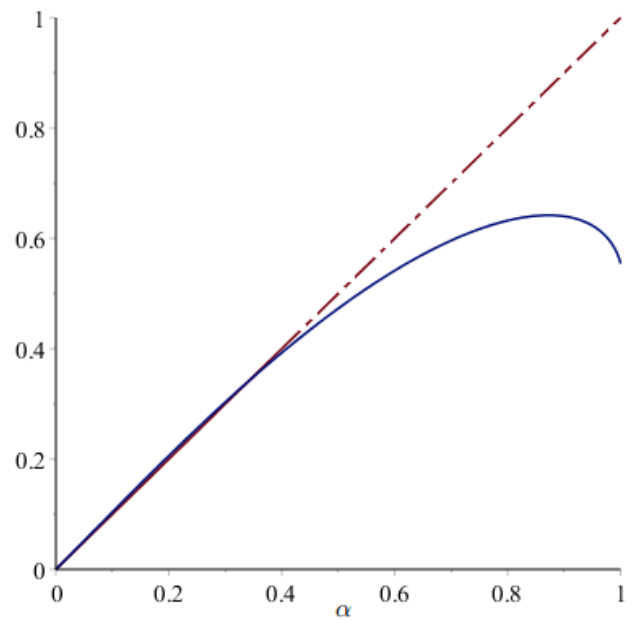


Рис. 1.21: График функции $f(\lambda, \alpha)$
при $\lambda = \frac{37}{24}$

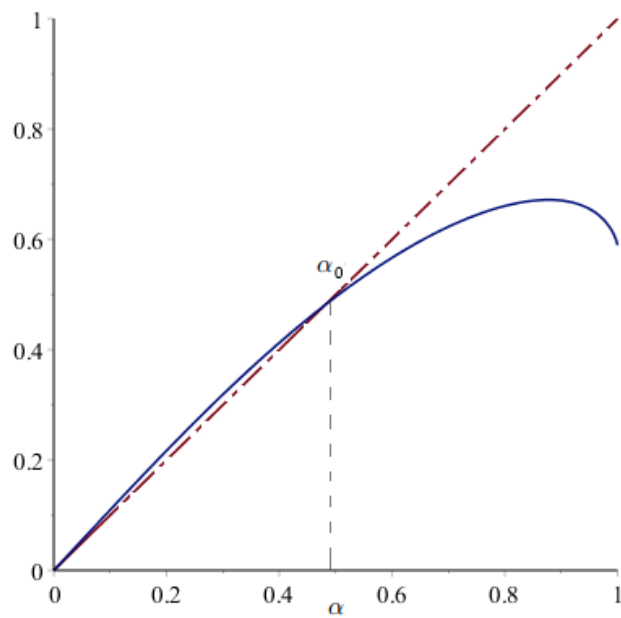


Рис. 1.22: График функции $f(\lambda, \alpha)$
при $\lambda = \frac{\pi}{2}, \alpha_0 = 0.4809292426$

Влияние коэффициента сопротивления внешней среды на динамику популяции

Постановка задачи

Известно, что логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r[1 - au(t - h, x)]u \quad (2.1)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.2)$$

хорошо описывает динамику изменения плотности $u(t, x) \geq 0$ популяции. Здесь $d > 0$ – коэффициент подвижности, $r > 0$ – мальтузианский коэффициент, $h > 0$ – коэффициент запаздывания, который ассоциируется с возрастом половозрелости особей, а положительный коэффициент a характеризует сопротивление внешней среды.

В случае, когда все коэффициенты в (2.1) постоянные, локальная – в окрестности положительного состояния равновесия – динамика (2.1), (2.2) хорошо изучена (см., например, [34], [37], [41], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50]). При $0 < r < \frac{\pi}{2}$ все положительные решения из окрестности состояния равновесия $u_0 = a^{-1}$ стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. Если же $r > \frac{\pi}{2}$, то в (2.1) имеется устойчивый цикл. Его асимптотики при $0 < r - \frac{\pi}{2} \ll 1$ и при $r \gg 1$ приведены в [46]. Ряд задач для переменных коэффициентов уравнения (2.1) были рассмотрены в [51], [52], [53]. Речь шла об уравнениях с близкими к постоянным коэффициентами и уравнениях, коэффициенты которых быстро осциллируют либо по пространственной, либо по временной переменной.

В настоящей главе методами компьютерного анализа изучаются свойства решений краевой задачи (2.1), (2.2) в случаях, когда коэффициент $a = a(x)$ сопротивления внешней среды существенно зависит от пространственной переменной x и является неограниченной функцией на отрезке $[0, 1]$:

$$a(x) = cx^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.3)$$

Биологический смысл такого выбора $a(x)$ обусловлен изучением ситуации, когда существует либо "водная" либо "горная" преграда на левом конце ареала $[0, 1]$. Коэффициент c в (2.3) следует выбрать так, чтобы выполнялось условие нормировки $\int_0^1 a(x)dx = 1$, т.е.

$$c = (1 - \alpha). \quad (2.4)$$

Все построенные в работе графики решений получены с использованием метода Рунге-Кутты 6 и с шагом по пространственной переменной равным 0.01.

Главные вопросы: выявить структуры, установившиеся при различных значениях параметра α в случае (2.3), и исследовать зависимость решений от мальтузианского коэффициента r и от коэффициента диффузии d . Особо подчеркнем, что численно определены пороговые значения параметра r , при превышении которых в краевой задаче (2.1), (2.2) происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

В первом разделе приведены результаты численного исследования в случае (2.3) при постоянном значении коэффициента r . Во втором разделе предполагается, что

$$r(x)a(x) \equiv \rho = const, \text{ т.е. } r(x) = \rho(1 - \alpha)^{-1}x^\alpha. \quad (2.5)$$

Это ограничение тоже биологически осмысленно: мальтузианский коэффициент меньше там, где сопротивление внешней среды выше. В каждом из этих разделов сформулированы выводы.

Приводимые исследования экстремальной с биологической точки зрения ситуации позволят ответить на важный вопрос о корректности использования краевой задачи (2.1), (2.2) для описания динамики изменения численности популяции, обитающей в неоднородной среде.

Основные результаты в случае (2.3)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r[1 - au(t - \varepsilon, x)]u, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.6)$$

с краевыми условиями (2.2). При близости параметра ε к нулю решения задачи (2.6), (2.2) стремятся к положению равновесия. Отметим, что задача (2.1), (2.2) и задача (2.6), (2.2) имеют пару положений равновесия: нулевое и положительное на $[0, 1]$ состояние равновесия, зависящее от пространственной переменной. Обозначим через $K(x, \alpha)$ ненулевое положение равновесия. На рис. 2.1 представлен вид $K(x, \alpha)$ при $r \approx 3.52, \alpha = 0.5$.

Для удобства нормируем время t так, чтобы $h = 1$.

Автоколебания в задаче (2.1), (2.2) при условиях (2.3), (2.4), $\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.5$ рождаются при $r \approx 1.63$ и $r \approx 3.51$ соответственно. Введем в рассмотрение следующие функции

$$M(x, \alpha) = \min_{t \in [t^*, t^* + T(\alpha)]} u(t, x) \quad (2.7)$$

и

$$\tilde{M}(x, \alpha) = \max_{t \in [t^*, t^* + T(\alpha)]} u(t, x). \quad (2.8)$$

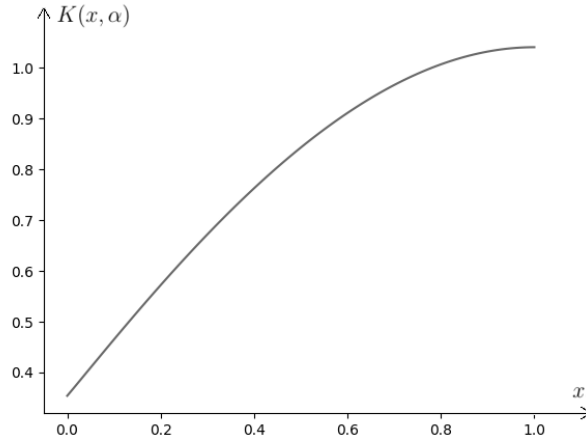


Рис. 2.1: График $K(x, \alpha)$ при
 $r \approx 3.52, \alpha = 0.5$

Здесь t^* – время, когда решение стабилизировалось и вышло на автоколебательный режим, $T(\alpha)$ – период установившегося режима.

На рис. 2.2 и 2.3 представлены графики $M(x, \alpha)$ и $\tilde{M}(x, \alpha)$ при $\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.5$.

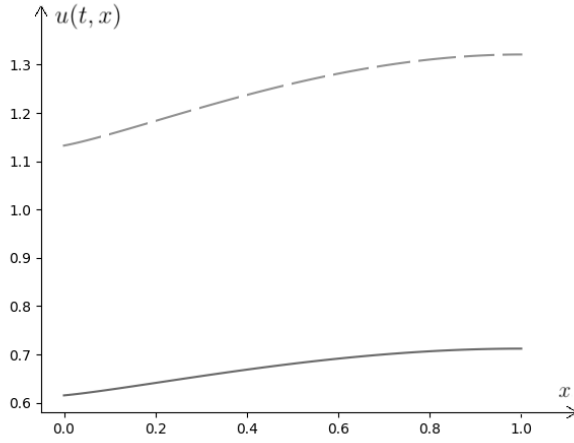


Рис. 2.2: «— — —» — график $\tilde{M}(x, \alpha)$ при $r \approx 1.63, \alpha = 0.25$; сплошная линия — график $M(x, \alpha)$ при $r \approx 1.63, \alpha = 0.25$

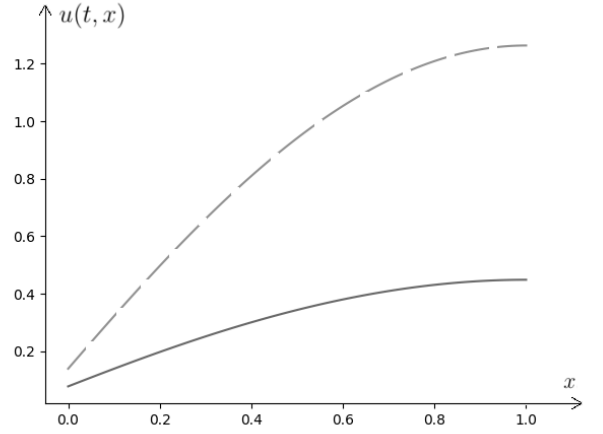


Рис. 2.3: «— — —» — график $\tilde{M}(x, \alpha)$ при $r \approx 3.51, \alpha = 0.5$; сплошная линия — график $M(x, \alpha)$ при $r \approx 3.51, \alpha = 0.5$

Отметим, что при всех $\alpha \in (0, 1)$ амплитуда колебаний у левой границы ареала обитания меньше, чем у правой.

Обозначим через $r(\alpha, d)$ первое бифуркационное значение параметра r , т.е. при $r < r(\alpha, d)$ все решения из окрестности $K(x, \alpha)$ стремятся к положению равновесия $K(x, \alpha)$ при $t \rightarrow \infty$, а при $r > r(\alpha, d)$ из состояния равновесия $K(x, \alpha)$ бифурцирует устойчивый цикл. Схематичный график $r(\alpha, d)$ представлен на рис. 2.4. На рис. 2.5 приведен примерный график периода $T(\alpha)$ периодического решения при $r \approx r(\alpha, d)$.

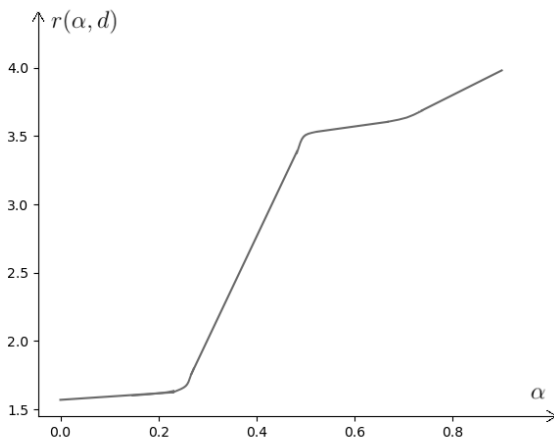


Рис. 2.4: Зависимость $r(\alpha, d)$, при $d = 1$

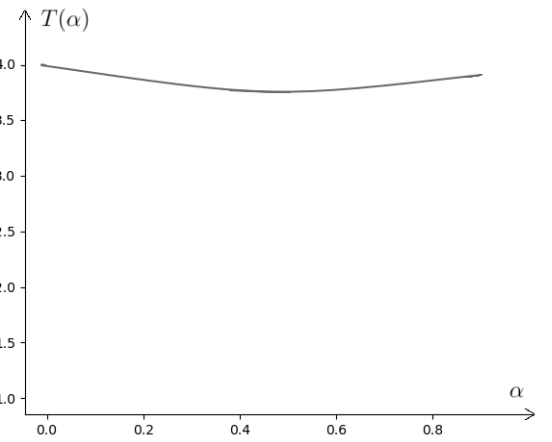


Рис. 2.5: Зависимость $T(\alpha)$, при $d = 1$

Рассмотрим зависимость амплитуды колебаний от величины r . На рис. 2.6 представлен

график сравнения зависимости амплитуды решения задачи (2.1), (2.2) от x при изменении коэффициента r . Разница между $r = 3.52$ и $r = 4.0$ в точке $u(t, 1)$ составляет примерно 2.586. Разница между $r = 4.0$ и $r = 4.5$ в точке $u(t, 1)$ составляет примерно 4.2012. Разница между $r = 4.5$ и $r = 5.0$ в точке $u(t, 1)$ составляет примерно 7,277.

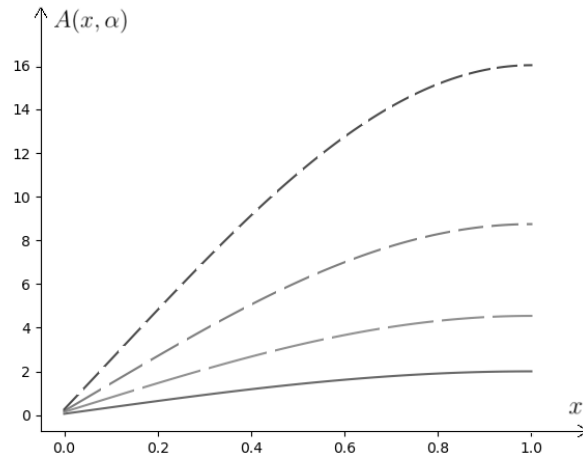


Рис. 2.6: Зависимость амплитуды $u(t, x)$ при увеличении r и $\alpha = 0.5$

«—» — $r = 3.52$

«— — —» — $r = 4.0$

«- - -» — $r = 4.5$

«- - -» — $r = 5.0$

При больших r амплитуда колебаний периодического режима значительно возрастает. На рис. 2.7 представлен график решения задачи (2.1), (2.2) при условии (2.3), когда значение r относительно велико.

О зависимости периодического решения задачи (2.1), (2.2) от коэффициента диффузии

Как оказывается, пороговые бифуркационные значения мальтузианского коэффициента $r(\alpha)$ существенно зависят от параметра d . График зависимости $r(\alpha, d)$ от этого параметра при $\alpha = 0.5$ представлен на рис. 2.8.

Графики решений задачи (2.1), (2.2) при условиях (2.3), (2.4) и $\alpha = 0.5$ при $d = 0.01$, $d = 1$ и $r \approx r(\alpha)$ представлены на рис. 2.9, 2.10 соответственно.

Основные выводы представлены в таблице 2.1.

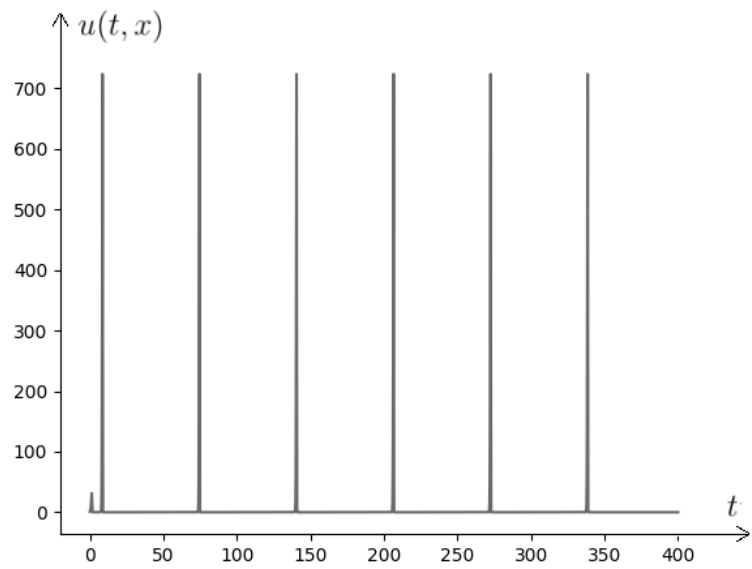


Рис. 2.7: График $u(t, x)$ при $r = 7$, $\alpha = 0.5$ и $x = 1$

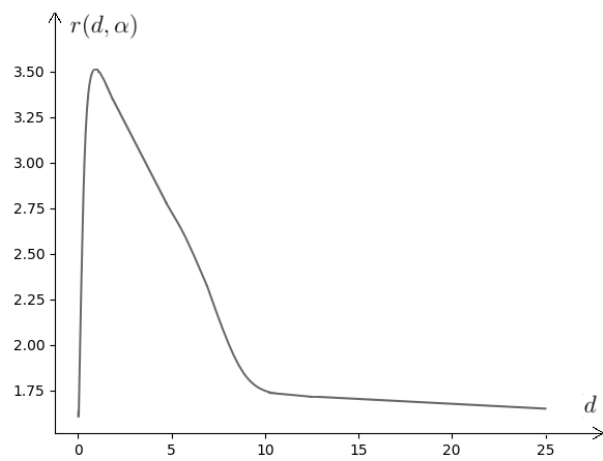


Рис. 2.8: Зависимость $r(\alpha, d)$ при $\alpha = 0.5$

Объект исследования	Выводы
------------------------	--------

Состояния равновесия $K(x, \alpha)$	Состояние равновесия $K(x, \alpha)$ решения (2.1), (2.2) в окрестности точки $x = 0$ стремится к нулю при увеличении параметра α . При уменьшении коэффициента d можно наблюдать "подъем" положения равновесия $K(x, \alpha)$ относительно нуля. При этом амплитуды установившихся колебательных режимов близки при всех $x \in [0, 1]$.
Функция $r = r(\alpha, d)$	Значение бифуркационного параметра $r = r(\alpha, d)$, при фиксированном d существенно растет при увеличении α от 0 до 1.
Функция $A(x, \alpha)$	При $r > r(\alpha, d)$ амплитуда $A(x, \alpha)$ устойчивого цикла качественно повторяет поведение $K(x, \alpha)$: она монотонно растет по x и вблизи точки $x = 0$ амплитуда $A(x, \alpha)$ существенно меньше, чем вблизи точки $x = 1$. При увеличении коэффициента d до некоторого d^* амплитуда решения колебательного режима уменьшается, а при выполнении условия $d > d^*$ начинает расти. В работе [51] показано, что при $d \rightarrow \infty$ решение задачи (2.1), (2.2) становится не зависящим от пространственной переменной x и $r(\alpha, d) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
Функция $T(\alpha)$	Период $T(\alpha)$ цикла в окрестности точки бифуркации $r(\alpha, d)$ слабо зависит от α .
Поведение решений задачи (2.1), (2.2)	При значительном увеличении коэффициента диффузии (коэффициента подвижности) решения стабилизируются около устойчивого цикла и слабо зависят от пространственной переменной.

Таблица 2.1: Выводы о поведении решений задачи (2.1), (2.2) и их основные характеристики

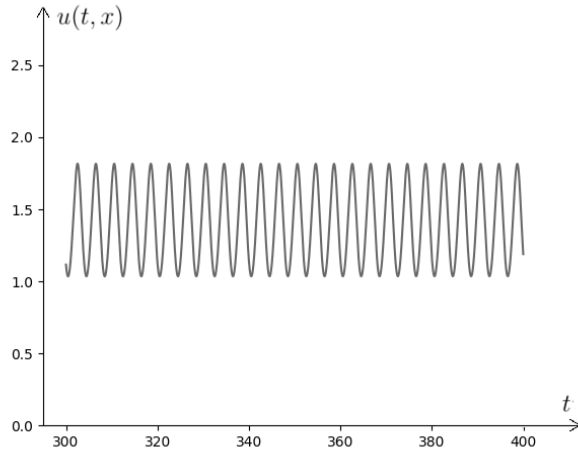


Рис. 2.9: График $u(t, x)$ при
 $r \approx 1.61, \alpha = 0.5, x = 0.5, d = 0.01$

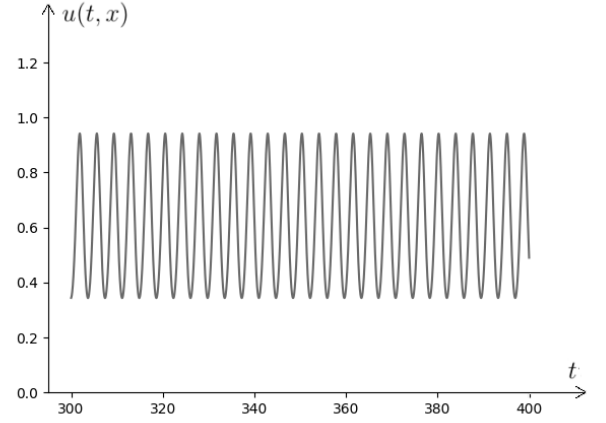


Рис. 2.10: График $u(t, x)$ при
 $r \approx 3.52, \alpha = 0.5, x = 0.5, d = 1.0$

Основные результаты в случае (2.5)

Рассмотрим уравнение (2.1), (2.2) при условии (2.5). Отметим, что данная задача также имеет пару положений равновесия: нулевое и положение равновесия $K(x, \alpha, \rho)$, зависящее от пространственной переменной. На рис. 2.11 представлен вид $K(x, \alpha, \rho)$ при $\rho \approx 1.17, \alpha = 0.5$.

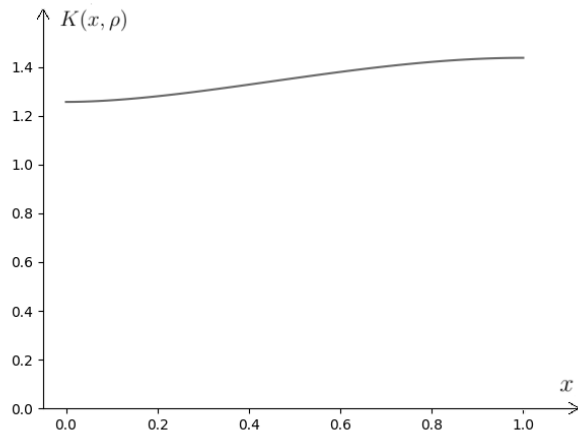


Рис. 2.11: График $K(x, \alpha, \rho)$ при
 $\rho = 1.17, \alpha = 0.5$

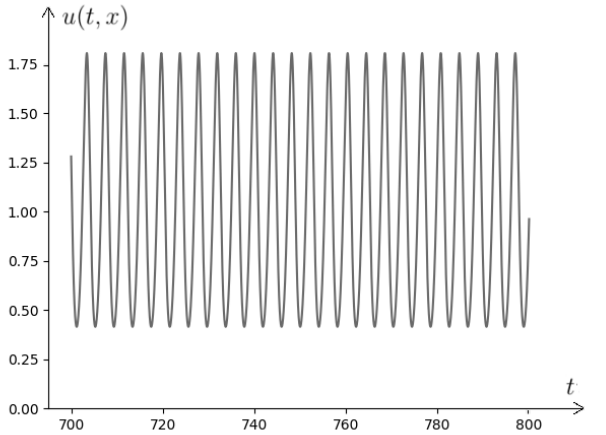


Рис. 2.12: График $u(t, x)$ при
 $\rho = 1.17, \alpha = 0.5, x = 0.5, d = 1$

Автоколебания в задаче (2.1), (2.2) при условиях (2.5), $\alpha = 0.5$ рождаются при $\rho > 1.16$. На рис. 2.12 представлен график $u(t, x)$ при $\alpha = 0.5, \rho = 1.17$.

Обозначим через $\rho(\alpha, d)$ первое бифуркационное значение параметра ρ , т.е. при $\rho < \rho(\alpha, d)$

все решения стремятся к положению равновесия $K(x, \alpha, \rho)$ при $t \rightarrow \infty$, а при $\rho > \rho(\alpha, d)$ из состояния равновесия бифурцирует устойчивый цикл. График $\rho(\alpha, d)$ представлен на рис. 2.13.

Рассмотрим зависимость амплитуды колебаний от величины ρ . На рис. 2.14 представлен график сравнения зависимости амплитуды решения задачи (2.1), (2.2) от x при изменении коэффициента ρ . «—» линией представлен график амплитуды при $\rho = 1.17$, «— — —» при $\rho = 1.57$, «- - -» при $\rho = 2.17$ и «- - -» при $\rho = 2.67$.

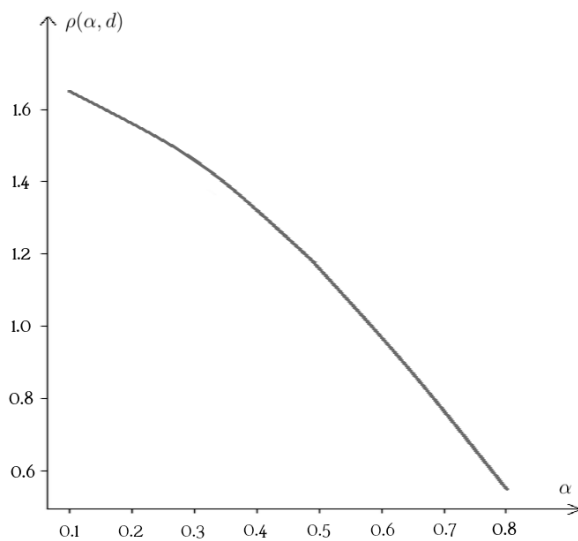


Рис. 2.13: Зависимость $\rho(\alpha, d)$ при $d = 1$

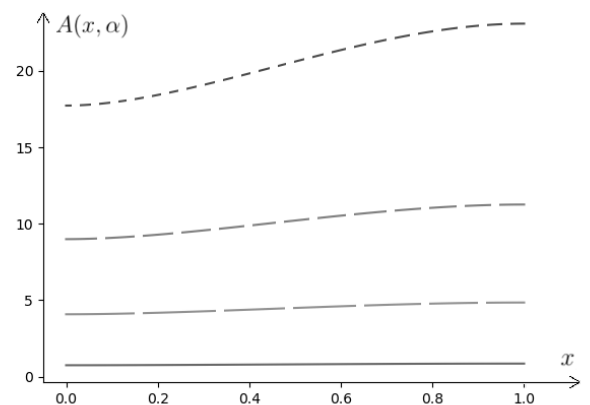


Рис. 2.14: Зависимость амплитуды $u(t, x)$ при $\alpha = 0.5$ и при увеличении ρ

Разница между $\rho = 1.17$ и $\rho = 1.57$ в точке $u(t, 1)$ составляет примерно 4, между $\rho = 1.57$ и $\rho = 2.17$ примерно 6.4121.

Рассмотрим задачу (2.1), (2.2) при условии (2.5) и $d \gg 1$. Графики решения данной задачи и $d = 25$ представлены на рис. 2.15 и 2.16.

Сформулируем основные выводы.

1. Состояние равновесия $K(x, \alpha, \rho)$ решения (2.1), (2.2) при условии (2.5), в отличие от задачи (2.1), (2.2) при условии (2.3), не приближается к нулю вблизи точки $x = 0$, в том числе и при увеличении параметра α . Таким образом, решения слабо зависят от пространственной переменной x .
2. Значение бифуркационного параметра $\rho = \rho(\alpha)$ существенно уменьшается при $\alpha \rightarrow 1$.
3. Период $T(\alpha)$ цикла в окрестности точки бифуркации $\rho(\alpha, d)$ слабо зависит от α .

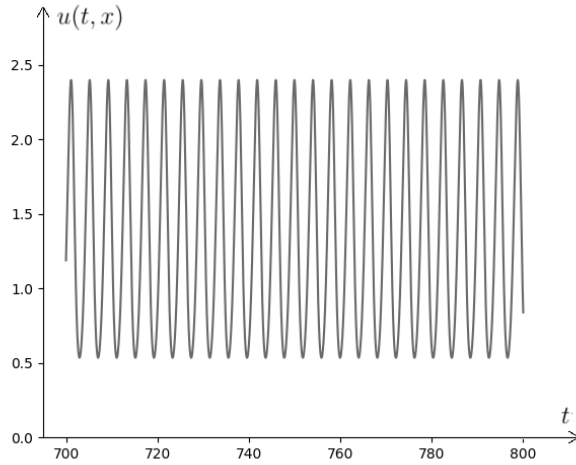


Рис. 2.15: График $u(t, x)$ при $\rho \approx 1.25, \alpha = 0.5, x = 0.01, d = 25$

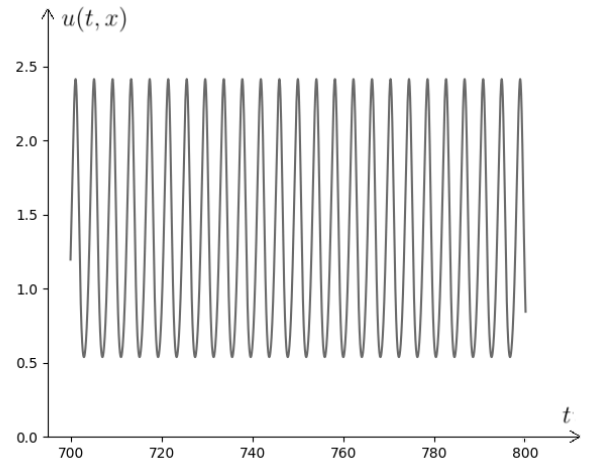


Рис. 2.16: График $u(t, x)$ при $\rho \approx 1.25, \alpha = 0.5, x = 0.9, d = 25$

4. Отметим, что при уменьшении коэффициента d можно наблюдать "подъем" положения равновесия $K(x, \alpha, \rho)$ относительно нуля. При этом амплитуды установившихся колебательных режимов близки при всех $x \in [0, 1]$.
5. При значительном увеличении коэффициента диффузии, как и в задаче (2.1), (2.2) при условии (2.3), решения стабилизируются около устойчивого цикла и слабо зависят от пространственной переменной.

На основании приведенных результатов можно сформулировать итоговый вывод биологического характера: краевая задача (2.1), (2.2) адекватно описывает динамику изменения численности популяции, обитающей в неоднородной среде.

Анализ поведения решений логистического уравнения при варьировании коэффициентов граничных условий

Постановка задачи

Рассмотрим логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(x, t-1)(1+u), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

и с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \kappa u|_{x=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma u|_{x=1}. \quad (3.2)$$

Краевая задача (3.1), (3.2) является одной из базовых моделей математической экологии [44]. Коэффициенты d и r в (3.1) положительны. Краевая задача (3.1), (3.2) имеет четкий биологический смысл. Она описывает, например, изменение численности популяции в случае, когда через границы возможна миграция. Эта миграция определяется коэффициентами κ и γ .

Исследуем вопрос о поведении всех решений (3.1), (3.2) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

При $\kappa = \gamma = 0$ результаты приведены, например, в [42]. Напомним, что при условии $0 < r < \frac{\pi}{2}$ нулевое решение (3.1), (3.2) экспоненциально устойчиво, и при $r > \frac{\pi}{2}$ – неустойчиво. При $r = \frac{\pi}{2} + \varepsilon r_1$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, в фазовом пространстве $C_{[-1,0]} \times W_2^2(0,1)$ существует двумерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие [57], [58], на котором (3.1), (3.2) можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha_0 \xi + \beta_0 \xi |\xi|^2 + O(\varepsilon), \quad \text{где } \tau = \varepsilon t, \alpha_0 = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - i\right) r_1,$$

$$\beta_0 = -\frac{\pi}{2} [3\pi - 2 + i(\pi + 6)] \left(10 \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\right)^{-1}$$

и $u(x, t) = \varepsilon^{1/2} [\xi(\varepsilon t) \exp(i\frac{\pi}{2}t) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \exp(-i\frac{\pi}{2}t)] + O(\varepsilon)$. Отсюда и из неравенства $\operatorname{Re} \beta_0 < 0$ следует, что при $r_1 < 0$ все решения (3.1), (3.2) из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нуля стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а при $r_1 > 0$ в такой окрестности существует устойчивый цикл.

В первых трех разделах главы исследуется вопрос о поведении решений (3.1), (3.2) из малой окрестности нуля при всех значениях γ при условии

$$\kappa = 0. \tag{3.3}$$

Часть этих результатов была анонсирована в [59].

В четвертом и пятом разделах проведен анализ влияния изменения коэффициента κ на устойчивость нулевого состояния равновесия.

Линейный анализ при условии (3.3)

Линеаризуем в нуле краевую задачу (3.1), (3.2). Выполним замену Эйлера

$$u(t, x) = e^{t\lambda} w(x).$$

Положим $d\mu = \lambda + r \exp(-\lambda)$. Рассмотрим краевую задачу

$$w'' = \mu w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=1} = \gamma w|_{x=1}, \tag{3.4}$$

Заметим, что для $\mu(\gamma)$ является корнем уравнения

$$\operatorname{th}(\sqrt{\mu(\gamma)}) = \frac{\gamma}{\sqrt{\mu(\gamma)}}.$$

Через $\mu_0(\gamma) > \mu_1(\gamma) > \dots$ обозначим все собственные значения краевой задачи (3.4).

Рассмотрим уравнение

$$d\mu_0(\gamma) = \lambda + r \exp(-\lambda) \quad (3.5)$$

Положим $\lambda = i\sigma$ и перейдем к системе

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{d\mu_0(\gamma)} = \operatorname{tg}(\sigma), \\ r^2 = \sigma^2 + (d\mu_0(\gamma))^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Пусть σ_0 – корень уравнения $\operatorname{tg}\sigma = -4\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий в интервале $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим $r^* = \sqrt{(\sigma_0^2 + \frac{1}{16}(d\pi^2)^2)}$.

Приведем четыре утверждения в виде лемм. Их доказательства простые, но громоздкие, поэтому их опустим.

Лемма 3.1. *Имеет место асимптотическое равенство $\mu_0(\gamma) = O(\gamma^2)$ при $\gamma \rightarrow \infty$.*

Лемма 3.2. *Имеет место предельное равенство $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \mu_0(\gamma) = -\pi^2/4$.*

График зависимости $\mu_0(\gamma)$ при $d = 1$ приведен на рис. 3.1.

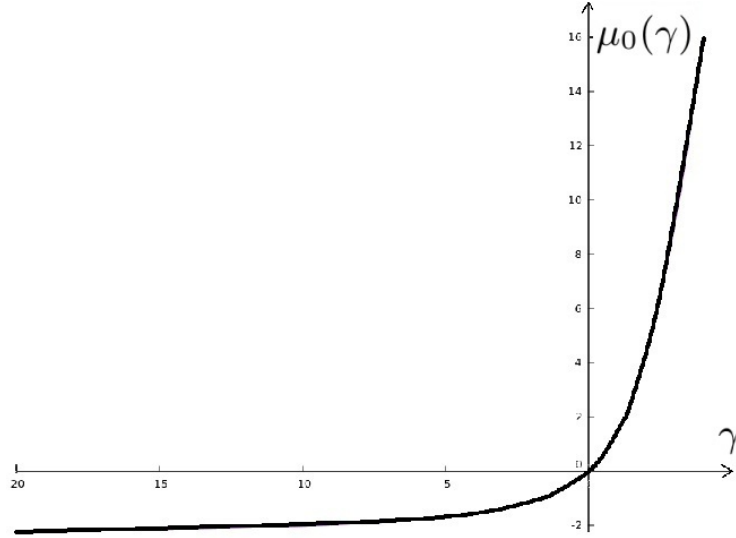


Рис. 3.1: График зависимости $\mu_0(\gamma)$ при $d = 1$

Лемма 3.3. *Пусть $r > r^*$. Тогда при любом γ уравнение $d\mu_0(\gamma) = \lambda + r \exp(-\lambda)$ имеет корень с положительной вещественной частью.*

Отметим, что $\mu_0(\gamma) = -\pi^2/4$ является собственным значением краевой задачи

$$w'' = \mu w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=1} = 0. \quad (3.7)$$

Лемма 3.4. Пусть $0 < r < r^*$. Тогда существует и единственно такое $\gamma = \gamma(r)$, что при $\gamma < \gamma(r)$ все корни уравнения (3.5) имеют отрицательные вещественные части, а при $\gamma > \gamma(r)$ у (3.5) есть корень с положительной вещественной частью.

График $\gamma(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 3.2.

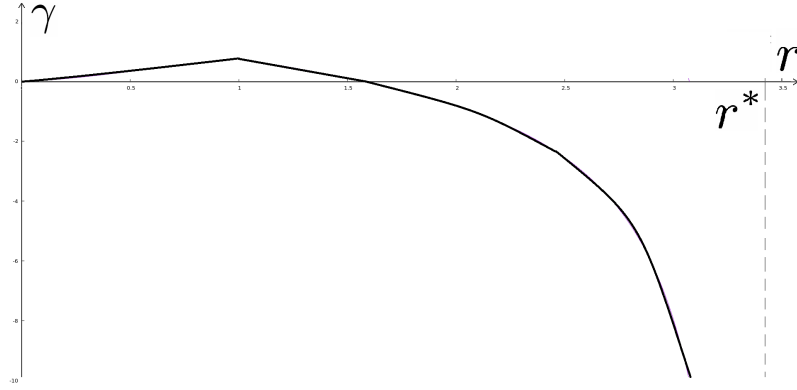


Рис. 3.2: График зависимости $\gamma(r)$ при $d = 1$.

$$r^* \approx 3.43$$

Таким образом, при $0 < r < r^*$ и $\gamma < \gamma(r)$ нулевое состояние равновесия в (3.1), (3.2) экспоненциально устойчиво, а при $r > r^*$ или при $r < r^*$ и $\gamma > \gamma(r)$ – неустойчиво.

Фиксируем произвольно γ_1 и положим

$$\gamma = \gamma(r) + \varepsilon \gamma_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.8)$$

При $\varepsilon = 0$ и при $0 < r < 1$ квазиполином (3.5) имеет простой нулевой корень, а при $1 < r < r^*$ – пару чисто мнимых корней $\pm i\sigma$ ($\sigma > 0$), все остальные корни (3.5) имеют отрицательные вещественные части.

Ниже рассмотрим случай $0 < r < r^*$.

Лемма 3.5. Пусть $0 < r < 1$, тогда при условии (3.8) у (3.5) есть корень

$$\lambda_0(\varepsilon) = \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.9)$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{2\gamma_1 d^2 \mu_0(r) (e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} + 1)^2}{(r-1) \left(4e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} r + \sqrt{\mu_0(r)} d (e^{4\sqrt{\mu_0(r)}} - 1) \right)} \quad (3.10)$$

и $\mu_0(r) = \frac{r}{d}$.

Доказательство. При выполнении условия (3.9)

$$\mu = \frac{\varepsilon \lambda_1 + r \exp(-\varepsilon \lambda_1)}{d}.$$

Задача (3.4) приобретает вид

$$w'' = \left(\frac{\varepsilon \lambda_1 + r \exp(-\varepsilon \lambda_1)}{d} \right) w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=1} = \gamma w|_{x=1}.$$

Решая краевую задачу, переходим к уравнению

$$\sqrt{\frac{\varepsilon \lambda_1 + r \exp(-\varepsilon \lambda_1)}{d}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon \lambda_1 + r \exp(-\varepsilon \lambda_1)}{d}} \right) = \gamma(r) + \varepsilon \gamma_1$$

Разложим правую и левую часть этого уравнения в ряд по степеням ε :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{r}{d}} \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} - 1 \right)}{e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} + 1} - \left(\frac{2\lambda_1(r-1)e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}}}{d \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} + 1 \right)^2} + \right. \\ & \left. \frac{\lambda_1(r-1)\sqrt{\frac{r}{d}} \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} - 1 \right)}{2r \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} + 1 \right)} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \gamma(r) + \varepsilon \gamma_1. \end{aligned}$$

При ε приходим к уравнению

$$\frac{2\lambda_1(r-1)e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}}}{d \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} + 1 \right)^2} + \frac{\lambda_1(r-1)\sqrt{\frac{r}{d}} \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} - 1 \right)}{2r \left(e^{2\sqrt{\frac{r}{d}}} + 1 \right)} + \gamma_1 = 0.$$

Решая уравнение получаем

$$\lambda_1 = - \frac{2\gamma_1 d^2 \mu_0(r) (e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} + 1)^2}{(r-1) \left(4e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} r + \sqrt{\mu_0(r)} d (e^{4\sqrt{\mu_0(r)}} - 1) \right)},$$

где $\mu_0(r) = r/d$. □

Лемма 3.6. Пусть $1 < r < r^*$ и выполнено условие (3.8), тогда пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{\pm}(\varepsilon)$ ($\lambda_{-}(\varepsilon) = \overline{\lambda_{+}(\varepsilon)}$) имеет асимптотику

$$\lambda_{+}(\varepsilon) = i\sigma + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\lambda_1 = - \frac{\gamma_1 d^2 \mu_0(r) (e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} + 1)^2}{2(re^{-i\sigma_0(r)} - 1) \left(\frac{d\sqrt{\mu_0(r)}e^{4\sqrt{\mu_0(r)}}}{4} + d\mu_0(r)e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} - \frac{d\sqrt{\mu_0(r)}}{4} \right)}.$$

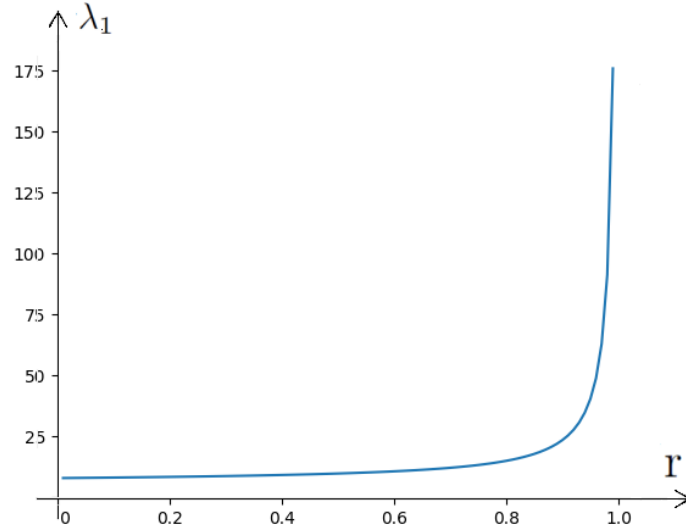


Рис. 3.3: График λ_1 при $\gamma_1 = 1, d = 1$,

Доказательство. При выполнении условия (3.9)

$$\mu = \frac{i\sigma + \varepsilon\lambda_1 + r \exp(i\sigma + \varepsilon\lambda_1)}{d}.$$

Задача (3.4) приобретает вид

$$w'' = \left(\frac{i\sigma + \varepsilon\lambda_1 + r \exp(-(i\sigma + \varepsilon\lambda_1))}{d} \right) w, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=1} = \gamma w|_{x=1}.$$

Решая краевую задачу, переходим к уравнению

$$\sqrt{\frac{i\sigma + \varepsilon\lambda_1 + r \exp(-(i\sigma + \varepsilon\lambda_1))}{d}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{i\sigma + \varepsilon\lambda_1 + r \exp(-(i\sigma + \varepsilon\lambda_1))}{d}} \right) = \gamma(r) + \varepsilon\gamma_1$$

Разложим правую и левую часть уравнения в ряд по степеням ε .

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}} \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} - 1 \right)}{\left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} + 1 \right)} - \left(\frac{2\lambda_1(e^{-\sigma i} - 1)e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}}}{d \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} + 1 \right)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_1(r e^{-\sigma i} - 1)\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}} \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} - 1 \right)}{2(\sigma i + r e^{-\sigma i}) \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} + 1 \right)} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \gamma(r) + \varepsilon\gamma_1. \end{aligned}$$

При ε приходим к уравнению

$$\frac{2\lambda_1(e^{-\sigma i} - 1)e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}}}{d \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} + 1 \right)^2} + \frac{\lambda_1(r e^{-\sigma i} - 1)\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}} \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} - 1 \right)}{2(\sigma i + r e^{-\sigma i}) \left(e^{2\sqrt{\frac{\sigma i + r e^{-\sigma i}}{d}}} + 1 \right)} + \gamma_1 = 0.$$

Решая уравнение получаем

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma_1 d^2 \mu_0(r) (e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} + 1)^2}{2(re^{-i\sigma_0(r)} - 1) \left(\frac{d\sqrt{\mu_0(r)} e^{4\sqrt{\mu_0(r)}}}{4} + d\mu_0(r) e^{2\sqrt{\mu_0(r)}} - \frac{d\sqrt{\mu_0(r)}}{4} \right)},$$

где $\mu_0(r) = (\sigma_0(r)i + re^{-\sigma_0(r)i})/d$.

□

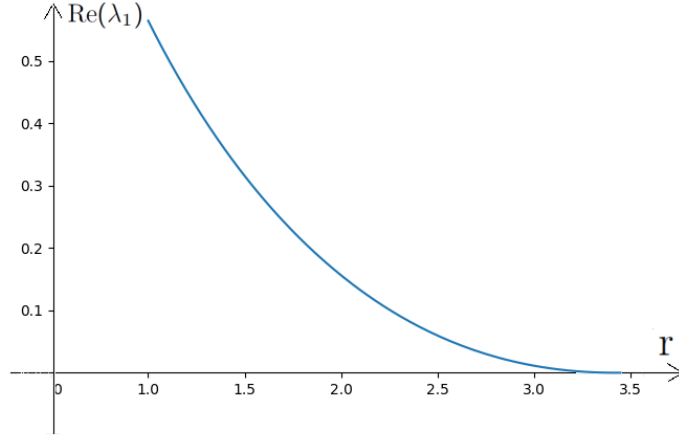


Рис. 3.4: График $\text{Re}(\lambda_1)$ при $\gamma_1 = 1, d = 1$

Отметим, что для собственного значения $\lambda_0(\varepsilon)$ краевой задачи Дирихле (3.7) для λ_1 верно утверждение

Лемма 3.7. Пусть $\gamma \rightarrow -\infty$ и выполнены условия

$$r = r^* + \varepsilon r_1, \quad (3.11)$$

$$\lambda_+(\varepsilon) = i\sigma + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.12)$$

где $0 \ll \varepsilon < 1, r_1 \in \mathbb{R}$. Тогда для собственного значения $\lambda_+(\varepsilon)$ краевой задачи Дирихле (3.7) выполнено равенство

$$\lambda_1 = r_1 \frac{r^* - \cos(\sigma_0)}{(r^*)^2 - 2r^* \cos(\sigma_0) + 1} + ir_1 \frac{\sin(\sigma_0)}{(r^*)^2 - 2r^* \cos(\sigma_0) + 1}.$$

Здесь σ_0 – корень уравнения $\text{tg} \sigma = -4\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий в интервале $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $r^* = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{1}{16}(d\pi^2)^2}$.

Нелинейный анализ при условии (3.3)

При условии (3.8) исследуем поведение решений из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (3.1), (3.2) при условии (3.3). Соответствующие результаты приведем в виде теорем 3.8–3.10.

Ниже полагаем $\tau = \varepsilon t$, а через $\varphi_0(x)$ обозначим собственную функцию краевой задачи (3.4), отвечающую собственному значению $\mu_0(\gamma)$: $\varphi_0(x) = \text{ch}(\mu_0^{1/2}(\gamma)x)$.

Теорема 3.8. Пусть $0 < r < 1$ и выполнено условие (3.8). Тогда краевая задача (3.1), (3.2) имеет в окрестности нуля устойчивое локальное одномерное интегральное многообразие, на котором (3.1), (3.2) с точностью до $O(\varepsilon)$ представима в виде ОДУ первого порядка

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b(r)\xi + c(r)\xi^2, \quad (3.13)$$

где

$$b(r) = -\frac{\gamma_1 \text{ch}(\sqrt{rd^{-1}})}{1-r},$$

$$c(r) = -\frac{4rd^{-1}(2\sqrt{rd^{-1}}+2)(9\text{sh}(\sqrt{rd^{-1}})+\text{sh}(3\sqrt{rd^{-1}}))}{(1-rd^{-1})(\text{sh}(2\sqrt{rd^{-1}})+2\sqrt{rd^{-1}})},$$

и $u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon \varphi_0(x) \xi(\varepsilon t) + O(\varepsilon^2)$.

График $c(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 3.5.

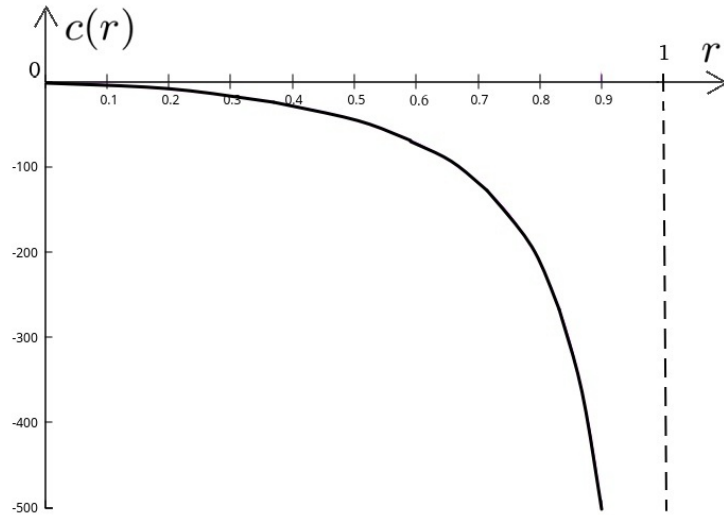


Рис. 3.5: График $c(r)$ при $d = 1$

Теорема 3.9. Пусть $1 < r < r^*$ и выполнено условие (3.8). Тогда в окрестности нуля краевая задача (3.1), (3.2) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором задача (3.1), (3.2) с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ представима в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha(r)\xi + \beta(r)\xi|\xi|^2, \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= -\frac{\gamma_1 ch(\sqrt{\mu_0})}{1 - r \exp(-i\sigma)}, \\ \beta(r) &= -r \left\{ (1 + e^{-i\sigma}) \left[\frac{A_1}{2\sqrt{\frac{r}{d}} \left(\frac{r}{d} - 4\mu_0\right)} \left(sh\left(\sqrt{\frac{r}{d}}\right) \left(\frac{r}{d} ch(2\sqrt{\mu_0}) + \frac{r}{d} - 4\mu_0\right) - \right. \right. \right. \\ &\quad - 2\sqrt{\mu_0 \frac{r}{d}} ch\left(\sqrt{\frac{r}{d}}\right) sh(2\sqrt{\mu_0}) \Big) + \frac{A_2}{16} \left(\frac{4sh(2\sqrt{\mu_0}) + sh(4\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 4 \right) + \\ &\quad \left. \left. + \frac{A_3}{4} \left(\frac{sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 2 \right) \right] + (e^{i\sigma} + e^{-2i\sigma}) \left[\frac{B_1}{2\sqrt{\rho}(\rho - 4\mu_0)} \times \right. \right. \\ &\quad \times (sh(\sqrt{\rho})(\rho ch(2\sqrt{\mu_0}) + \rho - 4\mu_0) - 2\sqrt{\mu_0 \rho} ch(\sqrt{\rho}) sh(2\sqrt{\mu_0})) + \\ &\quad \left. \left. + \frac{B_2}{16} \left(\frac{4sh(2\sqrt{\mu_0}) + sh(4\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 4 \right) + \frac{B_3}{4} \left(\frac{sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\mu_0}} + 2 \right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left(\frac{sh(2\sqrt{\mu_0})}{4\sqrt{\mu_0}} + \frac{1}{2} \right)^{-1}, \\ A_1 &= \frac{\gamma (A_2 ch(2\sqrt{\mu_0}) + A_3) - 2A_2 \sqrt{\mu_0} sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\frac{r}{d}} sh\left(\sqrt{\frac{r}{d}}\right) - \gamma ch\left(\sqrt{\frac{r}{d}}\right)}, \\ A_2 &= \frac{\cos(\sigma)}{4\mu_0 d - r}, \quad A_3 = -\cos(\sigma), \quad \rho = \frac{r \exp(-2i\sigma) + 2i\sigma}{d}, \\ B_1 &= \frac{\gamma (B_2 ch(2\sqrt{\mu_0}) + B_3) - 2B_2 \sqrt{\mu_0} sh(2\sqrt{\mu_0})}{\sqrt{\rho} sh(\sqrt{\rho}) - \gamma ch(\sqrt{\rho})}, \\ B_2 &= \frac{r \exp(-i\sigma)}{2d(4\mu_0 - \rho)}, \quad B_3 = -\frac{r \exp(-i\sigma)}{2d\rho} \end{aligned}$$

$$u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\xi(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon).$$

График $\text{Re}\beta(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 3.6.

Сформулируем еще один важный результат.

Положим

$$r = r^* + \varepsilon r_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.15)$$

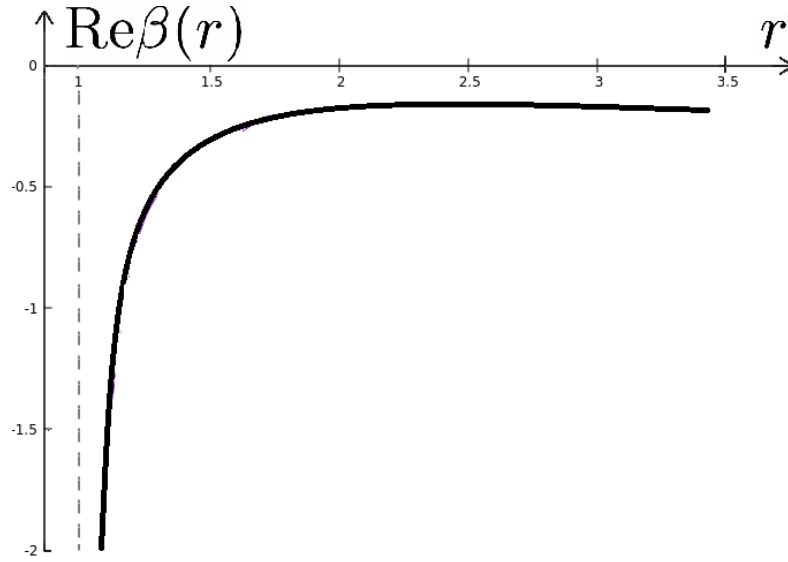


Рис. 3.6: График зависимости $\text{Re}\beta(r)$ при $d = 1$

Теорема 3.10. Пусть выполнено условие (3.15). Тогда при всех достаточно больших значениях параметра γ в окрестности нуля краевая задача (3.1), (3.2) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (3.1), (3.2) с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ представима в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = r_1\alpha^*\xi + \beta^*\xi|\xi|^2, \quad (3.16)$$

где

$$\alpha^* = (0.46 + 0.43i), \beta^* = -(1.07 - 0.15i), \tau = \varepsilon t$$

$$u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\varepsilon t)\varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t)\varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon).$$

Локальная динамика (3.1), (3.2) при условии (3.8) и $0 < r < 1$ определяется уравнением (3.13), а при $1 < r < r^*$ – уравнением (3.14). Таким образом, получаем, что при $\gamma_1 > 0$ и $0 < r < 1$ в (3.1), (3.2) устойчиво состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon b(r)c^{-1}(r)\text{ch}(x\sqrt{\mu_0}) + O(\varepsilon^2)$, а при $1 < r < r^*$ – цикл, определенный из (3.14).

Линейный анализ (3.1), (3.2) при $\kappa \neq 0$

Как было показано ранее, отрицательные значения коэффициента γ расширяют диапазон изменения параметра r , при котором нулевое состояние равновесия устойчиво. На рис. 3.7 представлен график зависимости при $\gamma(\kappa)$ при $d = 1$, $r = 0.01$. «+» обозначена область неустойчивости нулевого состояния равновесия, «-» – устойчивости. На рис. 3.8 показана

динамика изменения $\gamma(\kappa)$ при увеличении коэффициента r , графики представлены при $d = 1$, $r = 0.01$ и $r = 3.43$.

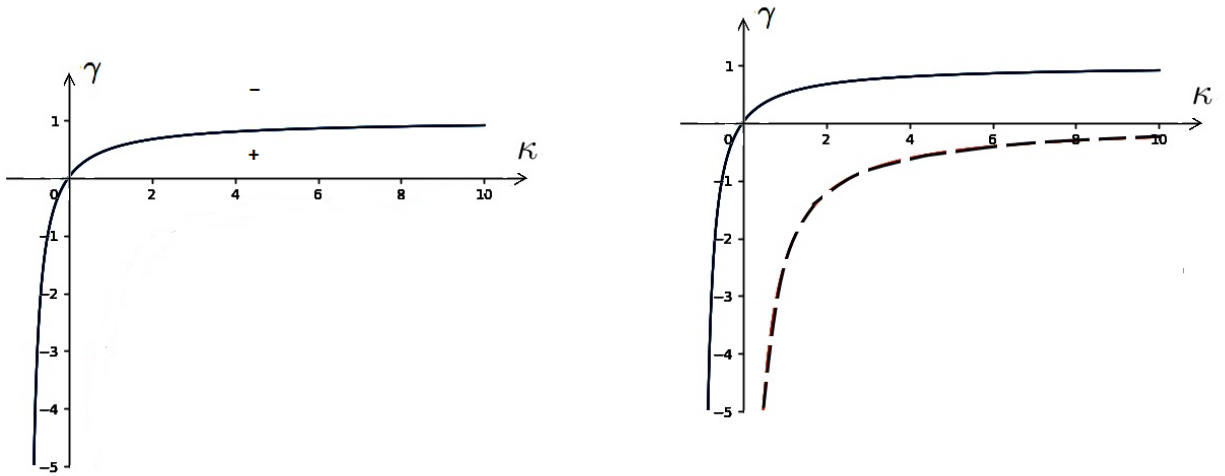


Рис. 3.8: График динамики изменения $\gamma(\kappa)$

Рис. 3.7: Графики зависимости $\gamma(\kappa)$ при $d = 1$ при увеличении коэффициента r при $d = 1$.

и $r = 0.01$.

сплошная линия – $r = 0.01$,

штриховая линия – $r = 3.43$

Для дальнейшего анализа сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 3.11. *Имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \mu(\gamma, \kappa) = \mu(\kappa).$$

Отметим, что в пределе при $\gamma \rightarrow -\infty$ краевые условия задачи (3.1), (3.2) могут быть сведены к

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \kappa u|_{x=0}, \quad u|_{x=1} = 0. \quad (3.17)$$

Рассмотрим линеаризованное уравнение

$$w'' = \mu w, \quad \text{где } d\mu = \lambda + r \exp(-\lambda) \quad (3.18)$$

с краевыми условиями

$$w'|_{x=0} = \kappa w|_{x=0}, \quad w|_{x=1} = 0. \quad (3.19)$$

Как и ранее через $\mu_0(\kappa) > \mu_1(\kappa) > \dots$ обозначим все собственные значения краевой задачи (3.18), (3.19). График зависимости $\mu_0(\kappa)$ при $d = 1$ и $\kappa > 0$ приведен на рис. 3.9.

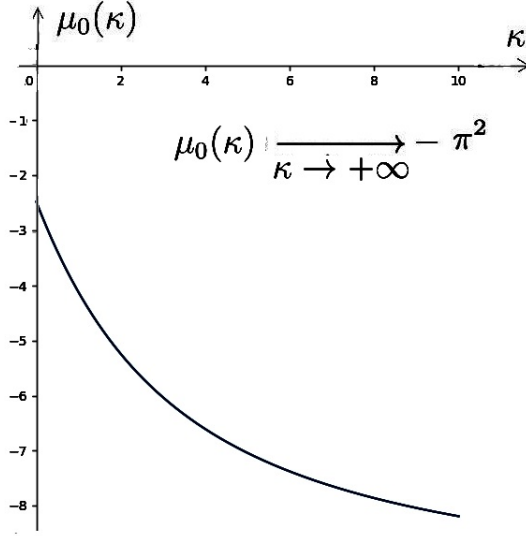


Рис. 3.9: График $\mu_0(\kappa)$ при $d = 1$

Пусть σ_0 – корень уравнения $\operatorname{tg} \sigma = -\sigma(d\pi^2)^{-1}$, лежащий на интервале $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим

$$r^{**} = \sqrt{(\sigma_0^2 + \frac{1}{4}(d\pi^2)^2)}.$$

Рассмотрим уравнение

$$d\mu_0(\kappa) = \lambda + r \exp(-\lambda). \quad (3.20)$$

Лемма 3.12. Пусть $r^* < r < r^{**}$. Тогда существует и единственно такое $\kappa = \kappa(r)$, что при $\kappa > \kappa(r)$ все корни уравнения (3.20) имеют отрицательные вещественные части, а при $\kappa < \kappa(r)$ у (3.20) есть корень с положительной вещественной частью.

Лемма 3.13. Пусть $r > r^{**}$. Тогда при любом κ уравнение (3.20) имеет корень с положительной вещественной частью.

График $\kappa(r)$ при $d = 1$ представлен на рис. 3.10.

Таким образом, при $r^* < r < r^{**}$ и $\kappa < \kappa(r)$ нулевое состояние равновесия в (3.1), (3.2) экспоненциально устойчиво, а при $r > r^{**}$ или при $r < r^{**}$ и $\kappa > \kappa(r)$ – неустойчиво.

Фиксируем произвольно κ_1 и положим

$$\kappa = \kappa(r) + \varepsilon \kappa_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.21)$$

При $\varepsilon = 0$ и при $r^* < r < r^{**}$ квазиполином (3.20) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\sigma$ ($\sigma > 0$), все остальные корни (3.20) имеют отрицательные вещественные части.

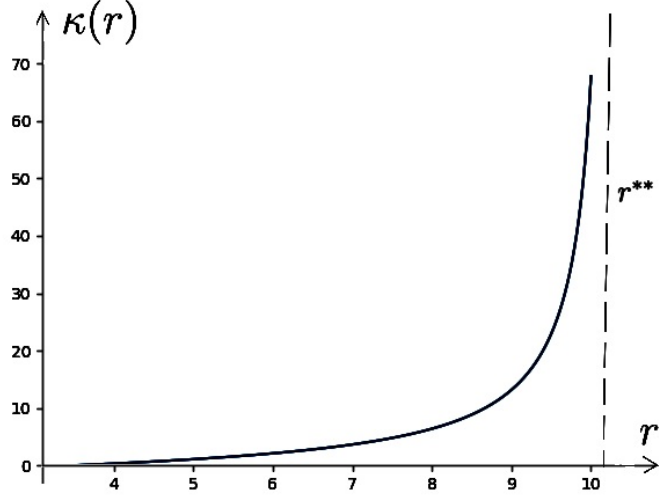


Рис. 3.10: График $\kappa(r)$ при $d = 1$,
 $r^{**} \approx 10.28$

Нелинейный анализ в предельном случае

Рассмотрим предельный случай, когда для уравнения (3.1) краевые условия имеют вид

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (3.22)$$

Положим

$$r = r^{**} + \varepsilon r_1, \text{ где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.23)$$

Теорема 3.14. Пусть выполнено условие (3.23). Тогда в окрестности нуля краевая задача (3.1), (3.22) имеет двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором (3.1), (3.22) с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ представимо в виде скалярного комплексного ОДУ

$$\frac{d\xi}{d\tau} = r_1 \alpha^{**} \xi + \beta^{**} \xi |\xi|^2, \quad (3.24)$$

где $\alpha^{**} = -(0.18 - 0.61i)$, $\beta^{**} = -(1.17 + 1.97i)$, $\tau = \varepsilon t$ и

$$u(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\xi(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(i\sigma t) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \varphi_0(x) \exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon).$$

Локальная динамика (3.1), (3.22) при условии (3.23) и при $r_1 > 0$ определяется уравнением (3.24). Таким образом, получаем, что при $r_1 > 0$ и $r = r^{**}$ в (3.1), (3.22) цикл, определенный из (3.24), является устойчивым.

О динамике логистического уравнения с запаздыванием, малой диффузией и с классическими граничными условиями общего вида

Результаты этого раздела опираются на выводы, полученные в [59], [60], [61], [62], [63].

Рассматривается задача о локальной динамике логистического уравнения с запаздыванием, с малыми коэффициентами диффузии, адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 b \frac{\partial u}{\partial x} - ru(t-1, x)[1+u], \quad x \in [0, 1] \quad (3.25)$$

и с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \kappa u \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma u \Big|_{x=1}. \quad (3.26)$$

Все коэффициенты в (3.25), (3.26) вещественные, $r > 0$, а ε — малый положительный параметр

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.27)$$

Построение характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 b \frac{\partial v}{\partial x} - rv(t-1, x), \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \kappa v \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma v \Big|_{x=1} \quad (3.29)$$

связано с собственными значениями стационарной краевой задачи

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + b \frac{d\varphi}{dx} = \mu \varphi, \quad \varphi'(0) = \kappa \varphi(0), \quad \varphi'(1) = \gamma \varphi(1). \quad (3.30)$$

Все собственные значения μ_j ($j = 0, 1, \dots$) этой краевой задачи вещественные и их можно расположить в порядке убывания. Собственные функции $\varphi_j(x)$, отвечающие μ_j тоже вещественные. Заметим, что они образуют полную систему в соответствующем пространстве.

Для каждого номера j рассмотрим вопрос о корнях квазиполинома

$$\lambda + r \exp(-\lambda) = \varepsilon^2 \mu_j. \quad (3.31)$$

Сформулируем несколько стандартных утверждений.

Лемма 3.15. Пусть $0 < r < \frac{\pi}{2}$. Тогда при всех достаточно малых ε вещественные части всех корней уравнения (3.31) отрицательны и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 3.16. Пусть $r > \frac{\pi}{2}$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (3.31) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Лемма 3.17. При условии $r = \frac{\pi}{2}$ Уравнение (3.31) при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ имеет пару комплексных корней $\lambda_j^\pm(\varepsilon)$ ($\lambda_j^-(\varepsilon) = \overline{\lambda_j^+(\varepsilon)}$) и

$$\lambda_j^+(\varepsilon) = +i\pi(2)^{-1} + \varepsilon^2 \lambda_{j1} + \dots,$$

$$\lambda_{j1} = 2\mu_j \frac{2 + i\pi}{4 + \pi^2},$$

а все остальные корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ниже предполагаем, что для произвольно фиксированного значения r_1 выполнено равенство

$$r = \frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 r_1. \quad (3.32)$$

Линейная краевая задача (3.28), (3.29) имеет совокупность решений

$$v = \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \exp((\lambda_{j1} + o(\varepsilon))\tau) \right) \exp(i\pi(2)^{-1}t) = \xi(\tau, x) \exp(i\pi(2)^{-1}t),$$

где c_j — произвольны, а коэффициенты Фурье $c_j(\tau, x)$ функции $\xi(\tau, x)$ имеют вид $c_j(\tau, x) = c_j \exp((\lambda_{j1} + o(\varepsilon))\tau)$.

Основываясь на этом представлении «критических» решений линейной задачи (3.28), (3.29), решения нелинейной краевой задачи (3.25), (3.26) ищем в виде

$$u = \varepsilon (\xi(\tau, x) \exp(i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}}) + \varepsilon^2 u_2(t, \tau, x) + \dots \quad (3.33)$$

Здесь и ниже через $\overline{c\bar{c}}$ обозначено выражение, комплексно сопряженное к предыдущему слагаемому. Неизвестная функция $\xi(\tau, x)$ достаточно гладкая и удовлетворяет граничным условиям (3.26). Зависимость от аргумента t в правой части (3.33) является 4-периодической.

Выражение (3.33) подставим в (3.25) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При первой степени ε получаем верное равенство, а на следующем шаге для u_2 приходим к уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -ru_2(t-1, x) - r \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \xi^2(\tau, x) \exp(i\pi t) + \overline{c\bar{c}}.$$

Отсюда находим, что

$$u_2 = u_{20} \xi^2 \exp(i\pi t), \quad u_{20} = ir [i\pi - r]^{-1}. \quad (3.34)$$

Однако граничные условия (3.26) для функции u_2 вообще говоря не выполнены. Для того, чтобы добиться выполнения этих краевых условий для слагаемых порядка ε^2 , выражение при ε^3 в (3.33) будем искать в виде

$$u_3 = u_3(t, \tau, x) + w_{31}(t, \tau, y_1) + w_{32}(t, \tau, y_2), \quad (3.35)$$

где $y_1 = x\varepsilon^{-1}$, $y_2 = (1-x)\varepsilon^{-1}$. По переменной t все функции 4-периодические, а каждая из функций w_{31} и w_{32} по своему третьему аргументу является экспоненциально убывающей: для некоторых $p_0 > 0$ и $c_0 > 0$ выполнены оценки

$$|w_{3j}(t, \tau, y_j)| \leq c_0 \exp(-p_0 y_j), \quad (j = 1, 2). \quad (3.36)$$

Тогда после подстановки в (3.25), (3.26)

$$u = \varepsilon (\xi \exp(i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}}) + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 (u_3 + w_{31} + w_{32}) \quad (3.37)$$

при степени ε^2 в граничных условиях (3.26) получаем соотношения

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial w_{31}}{\partial y_1} \right|_{y_1=0} = \kappa u_2 \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=1} + \left. \frac{\partial w_{32}}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} = \gamma u_2 \Big|_{x=1}. \quad (3.38)$$

Учитывая здесь равенство (3.34), находим, что

$$\left. \frac{\partial w_{31}}{\partial y_1} \right|_{y_1=0} = u_{20} \exp(i\pi t) \left[\kappa \xi^2 \Big|_{x=0} - 2\xi \Big|_{x=0} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] + \overline{c\bar{c}}, \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial w_{32}}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} = u_{20} \exp(i\pi t) \left[\gamma \xi^2 \Big|_{x=1} - 2\xi \Big|_{x=1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=1} \right] + \overline{c\bar{c}}. \quad (3.40)$$

Сделаем еще один шаг. Выпишем соотношение для коэффициентов при ε^3 , которое получается после подстановки (3.35) в (3.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial w_{31}}{\partial t} + \frac{\partial w_{32}}{\partial t} + r(u_3(t-1, x) + w_{31}(t-1, \tau, y_1) + w_{32}(t-1, \tau, y_2)) = \\ = B_1 \exp(i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}} + B_3 \exp(3i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} B_1 &= -(1-ir) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} + ir_1 \xi + r(1-i)u_{20} \xi |\xi|^2, \\ B_3 &= r(1+i)u_{20} \xi^3. \end{aligned}$$

Фигурирующие в (3.41) функции естественно искать в виде

$$u_3 = u_{31} \exp(i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}} + u_{33} \exp(3i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}}, \quad (3.42)$$

$$w_{31} = w_{31}^{\circ} \exp(2i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}}, \quad (3.43)$$

$$w_{32} = w_{32}^{\circ} \exp(2i\pi(2)^{-1}t) + \overline{c\bar{c}}. \quad (3.44)$$

Тогда от уравнения (3.41) приходим к системе из четырех уравнений

$$B_1 = 0, \quad (3.45)$$

$$[3i\pi(2)^{-1} + r \exp(-3i\pi(2)^{-1})] u_{33} = B_3, \quad (3.46)$$

$$[i\pi + r \exp(-i\pi)] w_{3j}^{\circ} + \frac{\partial^2 w_{31}^{\circ}}{\partial y_j^2} = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (3.47)$$

Из (3.42) следует, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (1 - ir)^{-1} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} + ir_1 \xi + \sigma_0 \xi |\xi|^2 \right], \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = \kappa \xi \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma \xi \Big|_{x=1}. \quad (3.49)$$

Из (3.43) получаем, что

$$u_{33} = C \xi^3 \quad (3.50)$$

и

$$C = [3i\pi 2^{-1} + r \exp(-3i\pi 2^{-1})]^{-1} \cdot r(1 + i)u_{20}. \quad (3.51)$$

Из (3.44) и из условий (3.36), (3.39) и (3.40) находим, что

$$w_{3j}^{\circ} = C_j \exp(\delta_0 y_j), \quad j = 1, 2, \quad (3.52)$$

$$C_1 = u_{20} \left[\kappa \xi^2 \Big|_{x=0} - 2\xi \Big|_{x=0} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} \right], \quad (3.53)$$

$$C_2 = u_{20} \left[\kappa \xi^2 \Big|_{x=1} - 2\xi \Big|_{x=1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=1} \right], \quad (3.54)$$

а через δ_0 обозначен тот из корней $(i\pi + r \exp(-i\pi))^{1/2}$, вещественная часть которого отрицательна.

Подведем итог.

Теорема 3.18. Пусть выполнено условие (3.32) и пусть $\xi(\tau, x)$ — ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение краевой задачи (3.48), (3.49). Тогда функция (3.37), в которой $\tau = \varepsilon^2 t$, $y_1 = x\varepsilon^{-1}$, $y_2 = (1 - x)\varepsilon^{-1}$, функция u_2 определена в (3.34), функция u_3 — в (3.42)–(3.44) и (3.51)–(3.54), удовлетворяет уравнению (3.25) с точностью до $O(\varepsilon^4)$, а граничным условиям (3.26) — с точностью до $O(\varepsilon^3)$.

Сделаем одно замечание. Приведенный здесь алгоритм построения асимптотики решения краевой задачи (3.25), (3.26) может быть неограниченно продолжен.

Выводы

Показано, что отрицательные значения параметра γ и положительные значения κ расширяют диапазон изменения значений параметра r , при которых нулевое состояние равновесия в (3.1), (3.2) устойчиво, а положительные γ и отрицательные κ – сужают.

Получены предельные значения параметра r , при которых нулевое состояние равновесия устойчиво.

В случаях, близких к критическим в задаче об устойчивости нулевого решения, приведен анализ локальной динамики краевой задачи (3.1), (3.2). В предельном случае, при $\gamma \rightarrow -\infty$ и $\kappa \rightarrow \infty$, проведен анализ локальной динамики краевой задачи (3.22).

При достаточно малых значениях коэффициента диффузии локальная динамика краевой задачи (3.1), (3.2) определяется нелокальным поведением решений комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау. Краевая задача (3.48), (3.49) может обладать богатой динамикой. Поэтому можно сделать вывод о том, что при уменьшении коэффициента диффузии локальная динамика (3.1), (3.2) может усложняться. В частности, возможна мультистабильность и существование нерегулярных колебаний.

Предложенный здесь подход можно распространить на более общие краевые задачи, в том числе и на уравнения с размерностью фазовой переменной больше, чем 1.

Усреднение в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и переменными граничными условиями

Постановка задачи

Принцип усреднения Крылова-Боголюбова [64], [65], [66], [67] – мощный аппарат исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Распространение этого принципа на уравнения с запаздыванием приведено в [66], [67], [68], [69]. В работах [54], [55] детально изучены вопросы применения принципа усреднения, в том числе для исследования бифуркационных задач, для важного с точки зрения приложений (см., например, [48]) логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{u} = -ru(t - T)(u + 1). \quad (4.1)$$

Коэффициенты r и T предполагались положительными периодическими и быстро осциллирующими по t функциями. Для различных случаев в [54], [55] были построены усредненные уравнения и сформулированы выводы о связи между решениями исходного и усредненного уравнений. Особо отметим, что осцилляции коэффициента запаздывания T , например, могут приводить к появлению разнообразных классов нелинейных усредненных уравнений.

Для систем параболических уравнений обоснование принципа усреднения приводилось в работах многих авторов (см., например, [70], [71], [72], [73]). Исследования здесь относительно

менее продвинуты, поскольку, вообще говоря, усреднение в случае быстро осциллирующих коэффициентов диффузии не является корректным. В [77] выделен класс уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, в которых матрицы диффузии являются произведением скалярной быстро осциллирующей функцией и постоянной матрицы. При этом рассмотрены задачи, в которых граничные условия тоже являются быстро осциллирующими по времени.

В настоящей главе результаты из [54], [55] вместе с результатами [77] применяются для исследования динамики нелинейного логистического уравнения с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(\omega t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r(\omega t) u(t - T(\omega t), x) [1 + u] \quad (4.2)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma(\omega t) u|_{x=1}. \quad (4.3)$$

Положительные коэффициенты $d(s)$, $r(s)$, $T(s)$, а также коэффициент $\gamma(s)$ предполагаются 2π -периодическими. В качестве пространства начальных условий для (4.2), (4.3) удобно выбрать пространство $W = C[-\max_s T(s), 0] \times \overset{\circ}{W}_2^2(t)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2(t) \subset W_2^2[0, 1]$ и функции из $\overset{\circ}{W}_2^2(t)$ удовлетворяют граничным условиям (4.3). Ряд результатов о динамических свойствах решений уравнений с запаздыванием и диффузией приведены в [37].

Сразу отметим, что для простоты здесь ограничиваемся рассмотрением случая, когда коэффициенты в (4.2) не зависят от пространственной переменной $x \in [0, 1]$. С этим же обстоятельством связано и наличие осцилляции только на одном из концов в граничных условиях. Задача об усреднении в логистическом параболическом уравнении с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами рассмотрена в [61].

О структуре главы. В разделе 2 будет построено усредненное уравнение и приведены основные утверждения общего плана. Интересно отметить, что при построении усредненной краевой задачи важную роль играет среднее от произведения $d(s)\gamma(s)$. Второй важный факт, отличающий уравнения с диффузией от обыкновенных дифференциальных уравнений, связан с тем, что в асимптотических приближениях для решений (4.2), (4.3) появляются погранслойные асимптотики в граничных точках отрезка $[0, 1]$. Здесь существенно используется методика работ [61], [62], [76]. Раздел 3 посвящен построению решений специального вспомогательного уравнения, которое возникает в разделе 2. В разделе 4 рассмотрен вопрос о бифуркации Андронова-Хопфа для краевой задачи (4.2), (4.3). На конкретных примерах будет изучена роль осцилляций в коэффициенте диффузии $d(s)$ и

коэффициенте граничного условия $\gamma(s)$ в задачах бифуркации из состояния равновесия краевой задачи (4.2), (4.3).

Введем несколько обозначений. Через $M(*)$ будем обозначать среднее значение по $s = \omega t$ выражения, являющегося аргументом оператора M . Через $M_0(v)$ будем обозначать среднее по s "бездиффузионной" части

$$M_0(v) = -M(r(s)v(t - T(s), x)[1 + v(t, x)]).$$

Явные выражения $M_0(v)$ для наиболее интересных и значимых функций $r(s)$ и $T(s)$ приведены в [54], [55].

Построение усредненного уравнения

Введем в рассмотрение краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + M(v), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}. \quad (4.5)$$

Через d_0 и γ_0 обозначены выражения

$$d_0 = M(d(s)), \quad \gamma_0 = d_0^{-1} M(d(s)\gamma(s)).$$

Нам понадобится еще одна вспомогательная краевая задача для 2π -периодической по s и экспоненциально убывающей по y при $y \rightarrow \infty$ функции $v(s, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f(s, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = g(s), \quad (4.6)$$

где $f(s, y)$ и $g(s)$ – 2π -периодичны по s и для некоторых положительных постоянных f_0 и δ_0 выполнена оценка

$$|f(s, y)| \leq f_0 \exp(-\delta_0 y), \quad y \geq 0.$$

Лемма 4.1. *Для существования 2π -периодического по s решения $v(s, y)$ краевой задачи (4.6), удовлетворяющего для некоторых положительных постоянных v_0 и δ_0 оценке*

$$|v(s, y)| \leq v_0 \exp(-\delta_0 y), \quad y \geq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$M \left[d(s)g(s) + \int_0^\infty f(s, y)dy \right] = 0.$$

Таким образом, из леммы 4.1 следует, что у краевой задачи

$$\frac{\partial w}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \gamma(s) - \gamma_0 \quad (4.7)$$

существует и единственно такое решение $w(s, y)$, определенное при $s \in [0, \infty)$, $y \in [0, \infty)$, которое 2π -периодично по s и для некоторых универсальных положительных постоянных c_0 и δ_0 выполнено неравенство

$$|w(s, y)| \leq c_0 \exp(-\delta_0 y), \quad y \geq 0. \quad (4.8)$$

Обоснование этой леммы стандартно. Все необходимые в техническом плане построения приводятся в разделе 3. Подробнее на этом не останавливаемся.

Пусть $v(t, x)$ – некоторое решение краевой задачи (4.4), (4.5). Через $z(s, t, x, \omega)$ обозначим 2π -периодическую по s функцию

$$z(s, t, x, \omega) = [1 + v(t, x)] \int_0^s \left\{ (d(s) - d_0) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + M_0(v) - \right. \\ \left. - r(s)v(t - T(s), x) \right\} ds. \quad (4.9)$$

Пусть $\psi(t, x)$ произвольная непрерывная по $t \in [-\max_s T(s) + t_0, t_0]$ и непрерывно дифференцируемая по $x \in [0, 1]$ функция. Через $u(t, x, \omega)$ и $v(t, x, \omega)$ обозначим решения краевых задач (4.4), (4.5) и (4.6) соответственно с начальным условием $\psi(t, x)$, заданным при $t = t_0$. Наконец, через $\mu > 0$ обозначим произвольное достаточно малое и независящее от ω значение.

Теорема 4.2. *Для каждой фиксированных $\mu > 0$ и $c > 0$ при $t \in [t_0 + \mu, t_0 + c]$ имеет место асимптотическое представление*

$$u(t, x, \omega) = v(t, x, \omega) + \omega^{-1/2} w(\omega t, (1 - x)\omega^{1/2}, t, \omega) + \\ + \omega^{-1} Z(\omega t, x, t, \omega), \quad (4.10)$$

в котором

$$v(t, x, \omega) = v(t, x) + \omega^{-1/2} v_1(t, x, \omega) + \dots, \quad (4.11)$$

$$w(x, y, t, \omega) = w(s, y)v(t, 1) + \omega^{-1/2} w_1(s, y, t, \omega) + \dots, \quad (4.12)$$

$$Z(s, x, t, \omega) = z(s, t, x, \omega) + \omega^{-1/2} z_1(s, t, x, \omega) + \dots \quad (4.13)$$

Рассмотрим затем вопрос о периодических решениях краевой задачи (4.2), (4.3).

Теорема 4.3. Пусть $v_0(t, x)$ – h -периодическое решение краевой задачи (4.4), (4.5), и только один мультипликатор линеаризованной на $v_0(t, x)$ краевой задачи равен по модулю 1. Тогда существует такая функция $\alpha(\omega)$ параметра ω , для которой $\alpha(\omega) = O(\omega^{-1/2})$ и краевая задача (4.2), (4.3) имеет почти периодическое решение $u_0(t, x, \omega)$ той же, что и $v_0(t, x)$ устойчивости и выполнено асимптотическое равенство

$$u_0(t, x, \omega) = v_0((1 + \alpha(\omega))t, x) + \omega^{-1/2}w(s, y)v_0((1 + \alpha(\omega))t, 1) + O(\omega^{-1}). \quad (4.14)$$

Отметим, что коэффициенты формальных рядов (4.11), (4.12), (4.13) по степеням $\omega^{-1/2}$ еще и ограниченным образом зависят от параметра ω . Этот эффект является следствием присутствия в (4.2) запаздывания по времени. Обоснования теорем 4.2 и 4.3 стандартно (см., например, [77]), поэтому на них не останавливаемся.

О решениях вспомогательной краевой задачи (4.6)

Вспомогательные построения

Из равенства $\int_0^s d(s)ds = d_0(s + a(s))$ ($s > 0$) следует, что функция $a(s)$ – 2π -периодическая.

Из условия $d(s) > 0$ следует, что

$$a'(s) > -1 \quad (4.15)$$

В (4.6) произведем замену времени

$$\tau = s + a(s). \quad (4.16)$$

В силу (4.15), значение s можно выразить через τ :

$$s = \tau + b(\tau), \quad (4.17)$$

где $b(\tau)$ – 2π -периодическая. Из (4.16), (4.17) следует, что для нахождения $b(\tau)$ можно воспользоваться функциональным уравнением

$$b(\tau) = -a(\tau + b(\tau)). \quad (4.18)$$

Отсюда следует, что

$$b(0) = -a(b(0)),$$

$$a'(s + b(s)) = -b'(1 + b'(s))^{-1},$$

$$\begin{aligned}
b'(0) &= -a'(b(0))(1 + a'(b(0))), \\
a''(s + b(s)) &= -b''(s)(1 + b'(s)), \quad b''(0) = -a''(b(0))(1 + b'(0)), \\
&\dots, \\
a^{(n)}(s + b(s)) &= P_n(b'(s), \dots, b^{(n)}(s)).
\end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос о нахождении 2π -периодического решения уравнения (4.18). Из (4.18) непосредственно приходим к следующему утверждению.

Лемма 4.4. Пусть $a(\tau)$ является 2π -периодическим решением некоторого уравнения n -ого порядка

$$\frac{d^n a}{d\tau^n} = F(a, a', \dots, a^{(n-1)}). \quad (4.19)$$

Тогда функция $b(\tau)$ является 2π -периодическим решением уравнения

$$\frac{d^n b}{ds^n} = G(b, b', \dots, b^{(n)}), \quad (4.20)$$

где

$$G(b, b', \dots, b^{(n)}) = F(-b, -\frac{b'}{1+b'}, P_2(b', b''), \dots, P_n(b', \dots, b^{(n)}))$$

с начальными условиями

$$b(0) = a(b(0)) = 0, \quad a^{(j)}(b(0)) = P_j(b'(0), \dots, b^{(j)}(0)), \quad 1 \leq j \leq n.$$

На выражение (4.18) для определения $b(\tau)$ можно смотреть как на оператор Π , который 2π -периодической функции $a(\tau)$ ставит в соответствие 2π -периодическую функцию $b(\tau)$:

$$b(\tau) = \Pi(a(\tau)). \quad (4.21)$$

Верно и обратное, т.е.

$$a(\tau) = \Pi(b(\tau)). \quad (4.22)$$

Рассмотрим один пример. Пусть

$$a(s) = a_0 \sin(s) \quad (|a_0| < 1). \quad (4.23)$$

Тогда

$$a'' + a = 0, \quad (4.24)$$

а значит

$$b'' + b(1 + b')^{-2} = 0, \quad b(0) = 0, \quad b'(0) = -a_0(1 + a_0)^{-1}. \quad (4.25)$$

Фазовые траектории для (4.24) и (4.25) приведены на рис. 4.1 и рис. 4.2, а на рис. 4.3 приведены графики для $b(\tau)$ при различных a_0 .

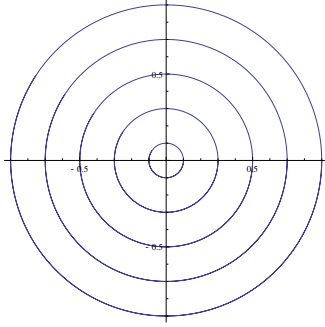


Рис. 4.1: Фазовые траектории (4.24)

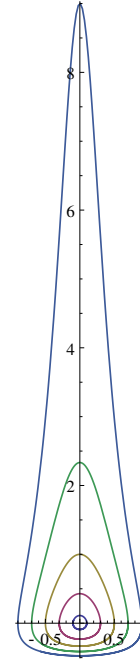


Рис. 4.2: Фазовые траектории (4.25)

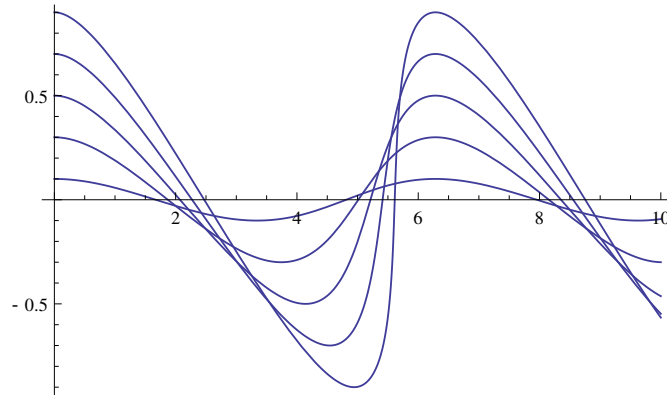


Рис. 4.3: График $b(\tau)$

Формула для решения краевой задачи (4.6), удовлетворяющего оценке (4.8)

В (4.6) произведем замену "времени" (4.17). В результате получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = \gamma(\tau + b(\tau)) - \gamma_0. \quad (4.26)$$

Разложим $\gamma(\tau + b(\tau))$ в ряд Фурье

$$\gamma(\tau + b(\tau)) = \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \exp(ik\tau) \quad (4.27)$$

и положим в (4.26)

$$v = \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} v_k(y) \exp(ik\tau). \quad (4.28)$$

Тогда для $v_k(y)$ приходим к уравнению второго порядка

$$d_0 v_k'' - ikv_k = 0, \quad v_k'(0) = \gamma_k. \quad (4.29)$$

Отсюда и из условия $v_k \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ вытекает, что

$$v_k(y) = -\gamma_k i (\delta_k)^{-1} \exp(\delta_k y), \quad (4.30)$$

где

$$\delta_k^2 = ikd_0^{-1}, \quad (4.31)$$

т.е. δ_k – тот корень уравнения (4.31) для которого $\operatorname{Re} \delta_k < 0$:

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{(kd_0^{-1})^{1/2}}{2} \sqrt{2}(-1+i), & \text{при } k > 0, \\ \frac{(-kd_0^{-1})^{1/2}}{2} \sqrt{2}(-1-i), & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

В итоге получаем, что искомое решение имеет вид

$$v = - \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} i \delta_k^{-1} \gamma_k \exp(ik\tau + \delta_k y). \quad (4.32)$$

Отсюда уже просто получить оценку (4.8). Лемма 4.4 доказана.

Из формул (4.27) и (4.32) приходим к выводу о том, что

$$\int_0^{2\pi} \gamma(s + \varphi(s)) v(s + \varphi(s), 0) ds = 0. \quad (4.33)$$

Отметим, что для $v(s, y)$ можно было бы воспользоваться и формулами (30) и (38) на стр. 236 и стр. 240 соответственно в [78].

Приведем еще две полезные формулы для вычисления средних значений. Пусть $g(\tau)$ – произвольная 2π -периодическая функций. Тогда

$$\begin{cases} M(g(\tau + b(\tau))) d^{-1}(\tau + b(\tau)) = M(g(\tau)) d_0^{-1}, \\ M(g(\tau + b(\tau))) = M(g(\tau) d(\tau)). \end{cases} \quad (4.34)$$

Бифуркация из состояния равновесия

Положим в (4.2), (4.3)

$$d(s) = d_0(1 + a \cos(s)), \quad \gamma(s) = b \cos(s + \phi), \quad (4.35)$$

а значения r и T от s не зависят. Без потери общности можно считать, что $T \equiv 1$.

Исследуем зависимость локальной динамики краевой задачи (4.2), (4.3) от коэффициентов $d(s)$ и $\gamma(s)$ на примере (4.35). Рассмотрим поведение всех решений (4.2), (4.3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (но независимой от ω) окрестности нулевого состояния равновесия.

Согласно приведенным выше результатам, определяющую роль при описании решений краевой задачи (4.2), (4.3) в условии (4.35) играет усредненное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(t-1, x)[1 + v], \quad (4.36)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}ab \cos(\varphi). \quad (4.37)$$

В свою очередь локальная – в окрестности нулевого состояния равновесия этой краевой задачи – динамика во многом зависит от свойств решений (линеаризованной в нуле) краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(t-1, x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma_0 v|_{x=1}. \quad (4.38)$$

Бифуркации из состояния равновесия в краевой задаче (4.2), (4.3) при условии

$$\gamma_0 = \gamma(r). \quad (4.39)$$

При $0 < r < 1$, как и в краевой задаче (4.36), (4.37), все решения из малой окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (4.2), (4.3) (при достаточно больших значениях ω) стремятся к одномерному интегральному многообразию, на котором эта краевая задача может быть представлена в "близком" к уравнению (3.13) виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = p(\omega)\xi + (c(r) + O(\omega^{-1/2}))\xi^2 + O(\omega^{-1/2}) \quad (\tau = \omega^{-1/2}t). \quad (4.40)$$

Если же $1 < r < r^*$, то соответствующее интегральное многообразие двумерно и на нем краевая задача (4.2), (4.3) имеет "близкий" к (3.14) вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = p(\omega)\xi + (\beta(r) + O(\omega^{-1/2}))\xi|\xi|^2 \quad (\tau = \omega^{-1/2}t). \quad (4.41)$$

Для определения поведения решений (4.2), (4.3) из малой окрестности нулевого состояния равновесия осталось выписать асимптотику величин $p(\omega)$.

Таким образом, приходим к задаче исследования устойчивости линейной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t-1, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma(s)u \Big|_{x=1} \quad (s = \omega t). \quad (4.42)$$

Алгоритм вычисления величины $p(\omega)$

Этот алгоритм базируется на результатах работ [54], [55], [77].

При условии (4.39) усредненная краевая задача (4.42)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t-1, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma_0(r)u \Big|_{x=1} \quad (4.43)$$

имеет периодическое (при $0 < r < 1$ – постоянное по t) решение

$$u_0(t, x) = ch \left(x \sqrt{\mu_0(r) d_0^{-1}} \right) \exp(i\delta t) \quad (\delta \equiv 0 \text{ при } 0 < r < 1).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x, \omega) = [u_0(t, x) + U(t, x, \omega) + V_0(s, z, \omega) + V_1(s, y, \omega) + W(s, x, \omega)] \times \\ \times \exp \left[(i\delta + \omega^{-1/2} p_1(\omega) + \omega^{-1} p_2(\omega) + \dots) t \right], \quad (4.44)$$

где

$$U(t, x, \omega) = \omega^{-1/2} u_1(t, x, \omega) + \omega^{-1} u_2(t, x, \omega) + \dots, \quad (4.45)$$

$$V_0(s, z, \omega) = \omega^{-1/2} v_{01}(s, z, \omega) + \omega^{-1} v_{02}(s, z, \omega) + \dots, \quad s = \omega t, \quad z = \omega^{1/2} x, \quad (4.46)$$

$$V_1(s, y, \omega) = \omega^{-1/2} v_{11}(s, y, \omega) + \omega^{-1} v_{12}(s, y, \omega) + \dots, \quad y = \omega^{-1/2}(1 - x), \quad (4.47)$$

$$W(s, x, \omega) = \omega^{-1} w_2(s, x, \omega) + \omega^{-3/2} w_3(s, x, \omega) + \dots \quad (4.48)$$

При этом все элементы фигурирующих здесь рядов являются ограниченными функциями от ω при $\omega \rightarrow \infty$. Еще раз отметим, зависимость элементов этих рядов от ω связана с наличием запаздывания в (4.43).

Подставим формальные ряды (4.44)-(4.48) в (4.42) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ω .

На первом шаге получаем краевые задачи для определения функций $v_{01}(s, z)$ и $v_{11}(s, y)$:

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v_{01}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v_{01}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial y} \Big|_{y=0} = (\gamma(s) - \gamma_0(r)) ch \left(\sqrt{\mu_0(r)} \right). \quad (4.50)$$

Согласно лемме 4.5 отсюда 2π -периодические по s и экспоненциально убывающие по y и z при $y \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$ функции $v_{01}(s, z)$ и $v_{11}(s, y)$ однозначно определяются, причем $v_{01} \equiv 0$.

На втором шаге получаем уравнения

$$\frac{\partial w_2}{\partial s} = (d(s) - d_0) \frac{d}{dx^2} \left(ch \left(x \sqrt{\mu_0(r)} \right) \right), \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \mu_0(r) u_1(t-1, x) - p_1(1 - \mu_0(r) + i\delta) ch \left(x \sqrt{\mu_0(r)} \right), \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma_0(r) u_1|_{x=1} + \Delta_0, \quad (4.53)$$

$$\Delta_0 = d_0^{-1} M(d(s) \gamma(s) v_{11}(s, 0, \omega)), \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial v_{02}}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v_{20}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v_{02}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial s} = d(s) \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_{12}}{\partial y} \Big|_{y=0} = (\gamma(s) - \gamma_0(r) u_1(t, 1) + \gamma(s) v_{11}(s, 0, \omega)). \quad (4.56)$$

Из (4.51), (4.55) и (4.56) определяются функции $w_2(s, x, \omega)$, $v_{02}(s, z, \omega) \equiv 0$, $v_{12}(s, y, \omega)$.

Отметим, что из (4.50) следует полезное для определения величины Δ_0 соотношение

$$M(d(s) [\gamma(s) - \gamma_0(r)] v_{11}(s, 0)) ch \sqrt{\mu_0(r)} = M \left(d(s) \int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right) > 0.$$

Для нахождения $w_3(t, x)$ используем следующее простое утверждение.

Лемма 4.5. *Для того чтобы все решения краевой задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_0(r) u(t-1, x) + p(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \gamma_0(r) u|_{x=1} + q_1$$

были ограниченными при $t \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 p(x) ch(x \sqrt{\mu_0}) dx - d_0 q_0 + d_0 q_1 ch(\sqrt{\mu_0}) = 0. \quad (4.57)$$

Из этой леммы вытекает, что для ограниченности по t решения краевой задачи (4.52), (4.53) необходимо и достаточно, чтобы

$$p_1 = (1 - d_0 \mu_0 + i\delta)^{-1} c_0 \Delta_0 d_0, \quad \text{где } c_0 = \left(\int_0^1 ch^2(x \sqrt{\mu_0}) dx \right)^{-1} ch(\sqrt{\mu_0(r)}). \quad (4.58)$$

После этого получаем соответствующие соотношения на третьем шаге и определяем функции $w_3(s, x, \omega)$, $u_2(t, x, \omega)$, $v_{03}(s, z, \omega)$, $v_{13}(s, y, \omega)$ и, что самое главное, величину $p_2(\omega)$, и т.д.

Сформулируем итоговый результат. Пусть

$$Re(p_1(\omega)) \equiv Re(p_2(\omega)) \equiv \dots \equiv Re(p_{m-1}(\omega)) \equiv 0, \quad Re(p_m(\omega)) \neq 0 \quad (4.59)$$

и на некоторой последовательности $\omega_n \rightarrow \infty$ для некоторой положительной постоянной $c > 0$ и $0 < \varepsilon \ll 1$ выполнено неравенство $|p_m(\omega_n)| \geq \varepsilon^{\frac{m}{2}} c$. Тогда устойчивость решений краевой задачи (4.42) при достаточно больших n определяется знаком величины $Re(p_m(\omega_n))$.

Согласно приведенным выше построениям, динамика логистической краевой задачи с запаздыванием (4.36), (4.37) при таких ω_n описывается при $0 < r < 1$ уравнением (4.40), а при $1 < r < r^*$ – уравнением (4.41) для $p(\omega_n) = p_m(\omega_n) + o(\omega^{-\frac{m}{2}})$.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\pi}{2} u(t-1, x)[1+u], \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = b \cos(s) u|_{x=1}, \quad s = \omega t. \quad (4.61)$$

В результате усреднения приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\pi}{2} u(t-1, x)[1+u], \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (4.62)$$

В ней $\gamma_0 = \mu_0 = 0$, $\delta = \frac{\pi}{2}$. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова-Хопфа: характеристическое уравнение для линеаризованной краевой задачи (4.61)

$$\lambda + \frac{\pi}{2} \exp(-\lambda) = -\pi^2 k^2 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{\pm} = \pm i\delta$, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. В уравнении (4.41) для рассматриваемого случая верно представление

$$\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}[3\pi - 2 + i(\pi + 6)] \left(10 \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\right)^{-1}, \quad Re\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Определим значение $p_1(\omega)$. Согласно (4.45)-(4.58) имеем

$$u_0(t, x) \equiv 1, \quad w_2(s, x, 0) \equiv 0, \quad v_{01}(s, z, 0) \equiv 0,$$

а функция $v_{11}(s, y)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial s} = \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial y} \Big|_{y=0} = b \cos(s). \quad (4.63)$$

Отсюда получаем, что $v_{11}(s, y) = A(y) \cos(s) + B(y) \sin(s)$, где

$$A(y) = 2^{-\frac{1}{2}} b \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} y\right) \left[\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y\right) \right],$$

$$B(y) = -2^{-\frac{1}{2}} b \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} y\right) \left[\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y\right) \right].$$

Здесь $\mu_0(r) = 0$, $c_0 = 1$, $\delta = \frac{\pi}{2}$. Для величины Δ_0 тогда получаем равенство

$$\Delta_0 = -b^2 \left(2\sqrt{2}\right)^{-1},$$

поэтому

$$p_1 = -\left(2^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)\right)^{-1} \left(1 - i\frac{\pi}{2}\right) b^2.$$

Таким образом, получаем, что при $b \neq 0$ выполнено неравенство $\text{Re} p_1 < 0$. Отсюда следует интересный вывод о том, что быстрые осцилляции граничных условий в логистической краевой задаче (4.43) стабилизируют состояния равновесия.

Отметим, что здесь прослеживаются аналогии с хорошо известной (см., например, [80]) задачей об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса.

Выводы

Построено усредненное уравнение для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и переменными граничными условиями. Следует отметить, что усреднение в граничных условиях во многом зависит от осцилляций коэффициента диффузии. Сформулированы результаты о связи решений исходного и усредненного уравнений. Рассмотрен вопрос о локальной динамике в окрестности состояния равновесия усредненного уравнения в критических случаях. Разработан алгоритм, позволяющий получить асимптотические разложения коэффициентов нормальной формы, которые определяют динамику исходной задачи. В частности, показано, что соответствующие асимптотические разложения содержат как регулярные составляющие, характерные для теории усреднения в случае ОДУ, так и погранслойные асимптотики, играющие важную роль в теории сингулярных возмущений. Показано, что осцилляции в граничных условиях обладают ярко выраженным стабилизирующим эффектом.

Заключение

В работе предложен метод последовательного приближения оценок решения логистического уравнения с запаздыванием. С использованием этого метода доказана гипотеза Райта, что нулевое положение равновесия устойчиво при $0 < \lambda \leq 37/24$.

Для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и нелнейным множителем при запаздывающем слагаемом с помощью аналитических методов и методов компьютерного анализа показано, что состояние равновесия при условии $a(x) = (1 - \alpha)x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ при увеличении параметра α в окрестности точки $x = 0$ стремится к нулю. При этом амплитуды установившихся колебательных режимов близки на всем отрезке $x \in [0, 1]$ и слабо зависят от коэффициента диффузии d . Отметим, что значение бифуркационного параметра $r = r(\alpha, d)$, при фиксированном d , существенно растет при увеличении α от 0 до 1. При r больших критического значения амплитуда устойчивого цикла качественно повторяет поведение положения равновесия: она монотонно растет по x и вблизи точки $x = 0$ амплитуда существенно меньше, чем вблизи точки $x = 1$. При увеличении коэффициента d до некоторого d^* амплитуда решения колебательного режима уменьшается, а при выполнении условия $d > d^*$ начинает расти. Показана также слабая зависимость периода установившихся режимов от параметра α в окрестности точки бифуркации. При значительном увеличении коэффициента диффузии решения стабилизируются около устойчивого цикла и слабо зависят от пространственной переменной.

При условии $r(x) = \rho(1 - \alpha)^{-1}x^\alpha$ решение не приближается к нулю вблизи точки $x = 0$ вне зависимости от параметра α . Таким образом, решения слабо зависят от пространственной переменной x . При этом амплитуды установившихся колебательных режимов близки на всем отрезке $x \in [0, 1]$ и слабо зависят от коэффициента диффузии d . Отметим, что значение бифуркационного параметра $\rho = \rho(\alpha)$ существенно уменьшается при $\alpha \rightarrow 1$.

На основании приведенных результатов можно сформулировать итоговый вывод биологического характера: краевая задача (2.1), (2.2) адекватно описывает динамику

изменения численности популяции, обитающей в неоднородной среде.

Для логистического уравнения с запаздыванием и диффузией показано, что коэффициенты граничных условий могут расширять/сужать зону устойчивости нулевого положения равновесия. В случаях, близких к критическим в задаче об устойчивости нулевого решения, приведен анализ локальной динамики краевой задачи. Краевая задача с малой диффузией может обладать богатой динамикой. Поэтому можно сделать вывод о том, что при уменьшении коэффициента диффузии локальная динамика исходной задачи может усложняться. В частности, возможна мультистабильность и существование нерегулярных колебаний. Проведены численные эксперименты в задаче линейного и нелинейного слагаемого с запаздыванием. Доказанное влияние коэффициента граничных условий на устойчивость в краевой задаче с диффузией и вариацией на границе позволяет расширить область применимости логистического уравнения с запаздыванием в задачах популяционной динамики.

В работе также исследовано уравнение с быстро осциллирующими по времени коэффициентами. Построено усредненное уравнение для логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и переменными граничными условиями. Следует отметить, что усреднение в граничных условиях во многом зависит от осцилляций коэффициента диффузии. Сформулированы результаты о связи решений исходного и усредненного уравнений. Разработан алгоритм, позволяющий получить асимптотические разложения коэффициентов нормальной формы, которые определяют динамику исходной задачи. В частности, показано, что соответствующие асимптотические разложения содержат как регулярные составляющие, характерные для теории усреднения в случае ОДУ, так и погранслойные асимптотики, играющие важную роль в теории сингулярных возмущений. Показано, что осцилляции в граничных условиях обладают ярко выраженным стабилизирующим эффектом. Разработанный алгоритм, асимптотического разложения коэффициентов нормальной формы в усредненном уравнении, может быть использован для исследования обширного класса задач математической физики и биологии.

Литература

- [1] Вуккер Д. А. Динамика автоматических регуляторов напряжения // Электричество. 1934. № 9. С. 26–30.
- [2] Frisc R., Holme H. The Characteristic Solutions of a Mixed Difference and Differential Equation Occuring in Economic Dynamics // Econometrica. 1935. III. P. 225–230.
- [3] Kalecki M. A Macrodynamic Theory of Business Cycles // Econometrica. 1935. III. P. 327–334.
- [4] Bowschewerow V. Systemes auto-oscillatoires regis par des equations fonctionnelles // Physik. Zeit. Sowjetunion. 1936. 9(5). P. 523–532.
- [5] Callender A., Hartree D. R., Porter A. Time-Lag in a Control System // Philos. Trans. Roy. Soc. London (A). 1936. 235(756). P. 415–444.
- [6] James R. W., Beiz M. H. On a Mixed Difference and Differential Equation // Econometrica. 1936. 4. P. 157–160.
- [7] Вуккер Д. А. Эффект запаздывания в процессах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1937. № 6. С. 59–76.
- [8] Герасимов С. Г. Физические основы динамики регулирования тепловых процессов. М.: Энергоизд, 1937. С. 71–75.
- [9] Hartree D. R., Porter A., Callender A., Stevenson A. B. Time-Lag in a Control System, II // Proc. Roy. Soc. London (A). 1937. 161(907). P. 460–476.
- [10] Горелик Г. К теории запаздывающей обратной связи // Журнал технической физики. 1939. IX. С. 450–454.

- [11] *Кошечев П. С.* К теории следящих систем // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 77–88.
- [12] *Рубин Б. И., Хейман Ю. Г.* Основы авиационной автоматики. Изд. ЛИИГВФ, 1940. С. 27–32.
- [13] *Чистяков Н. И.* Об учёте влияния фазового запаздывания в усилителе на автоматическую подстройку // Электросвязь. 1940. № 7. С. 27–29.
- [14] *Silberstein L.* On a Hystero-Differential Equation Arising in a Probability Problem // Phil. Mag. (7). 1940. 29(192). P. 75–84.
- [15] *Богомолов В. А.* Автоматическое регулирование мощности гидростанций по водотоку // Автоматика и телемеханика. 1941. № 4–5. С. 103–129.
- [16] *Андронов А. А., Майер А. Г.* Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. VII(2–3). С. 95–106.
- [17] *Цыпкин Я. З.* Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика. 1946. VII(2–3). С. 107–129.
- [18] *Hole N.* On the Statistical Treatment of Counting Experiments in Nuclear Physics // Ark. Mat. Astr. Fys. 1946. 33A(11). P. 1–11.
- [19] *Цыпкин Я. З.* Степень устойчивости систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика. 1947. VIII(3). С. 145–155.
- [20] *Hole N.* On the Distribution on Counts in a Counting Apparatus // Ark. Mat. Astr. Fys. 1947. 33(3B)(8). P. 1–8.
- [21] *Волошин Н.* Учёт явления запаздывания // Автоматика и телемеханика. 1948. VIII(4). P. 285–292.
- [22] *Лурь А. И., Фиалко Г. М.* Об устойчивости регулирования при наличии запаздывания в измерительном органе регулирования // Инженерный сборник. 1948. IV(2). С. 109–112.
- [23] *Свирский И. В.* Определение числа корней, лежащих в правой полуплоскости, для функций вида $F(e^z, z)$, где $F(e^z, z)$ —рациональная функция от аргументов e^z и z

- и применение результатов к исследованию автоматического регулирования паровых турбин // Известия Казанского филиала АН СССР (физ.-мат.). 1948. № 1. С. 51–61.
- [24] *Фиалко Г. М.* Динамика регулирования концентрации сернистого газа на сернокислых заводах при наличии в схеме электрического газоанализатора // Автоматика и телемеханика. 1948. IX(6). С. 432–452.
- [25] *Minorsky N.* Sur une classe d'oscillations auto-entretenues // C.R. Acad. Sci. Paris. 1948. 226. P. 1122–1124.
- [26] *Minorsky N.* Self-Excited Mechanical Oscillations // Journ. Appl. Phys. 1948. 19. P. 332–338.
- [27] *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
- [28] *Аносов Д. В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 4. С. 707–709.
- [29] *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука (Труды МИАН СССР), 1967. Т. 90.
- [30] *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // Успехи математических наук. 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185.
- [31] *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. Blackie & Son Limited, 1930.
- [32] *Hutchinson G. E.* Circular Causal in Ecology // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1948. № 50. P. 221–246.
- [33] *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Regular and Chaotic Pulsations in Laser Diode with Delayed Feedback // Int. J. Bifur. Chaos. 1993. Vol. 3. № 3. P. 1515–1528.
- [34] *Wright E.M.* A non-linear difference-differential equation // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal). 1955. Vol. 106. P. 66–87.
- [35] *Jones G. S.* The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1 + f(x)\}$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1962. Vol. 5. P. 435–450.
- [36] *Britton N.F.* Reaction-diffusion equations and their applications to biology. New York: Academic Press, 1986.

- [37] *Gourley S.A., So J., Wu J.* Non-locality of reaction–diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 124. № 4. P. 5119–5153.
- [38] *Murray J.D.* Mathematical biology. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993.
- [39] *Britton N.F.* Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50. P. 1663–1688.
- [40] *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика*. 1937. № 1. С. 6.
- [41] *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. In: *Mathematics in Science and Engineering*. New York: Academic Press, 1993. Vol. 191.
- [42] *Kakutani S., Markus L.* On the nonlinear difference differential equation $y'(t) = [A + By(t - \gamma)]y(t)$ // *Contributions Theory Nonlinear Oscillations*. Princeton, 1958. 4. P. 411–418.
- [43] *Кащенко С.А.* К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона // *Нелинейные колебания в задачах экологии*. ЯрГУ, Ярославль, 1985. С. 55–62.
- [44] *Кащенко С.А.* Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2012. Т. 19. № 13. С. 32–61. (Перевод на английский: *Kashchenko S.A.* Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013. Vol. 47. № 7. P. 470–494.)
- [45] *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
- [46] *Саватеев Е.Г.* О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения // *Сиб. матем. журн.* 1995. Т. 36. № 1. С. 177–185.
- [47] *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием // *Известия вузов. Математика*. 2020. № 9. С. 39–55. (Перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* Estimation

- of the region of global stability of the equilibrium state of the logistic equation with delay // Russian Mathematics. 2020. Vol. 64. P. 34–49.)
- [48] *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer Verlag, 1996.
- [49] *Cushing J. M.* Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1977. Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 20.
- [50] *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. 3rd Ed. New York: Springer Verlag, 2001. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 18.
- [51] *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Труды МИАН. Под ред. Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1993. Т. 199. С. 126.
- [52] *Oster G., Guckenheimer J.* Bifurcation Phenomena in Population Models // Jerrold Eldon Marsden, Marjorie F. McCracken, Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1976. Vol. 19. P. 327–353.
- [53] *Кащенко С. А.* Усреднение по пространственной переменной в нелинейных параболических системах // Труды Московского математического общества. 2019. Т. 80. № 1. С. 63–86.
- [54] *Кащенко С. А.* Применение принципа усреднения к исследованию динамики логистического уравнения с запаздыванием // Математические заметки. 2018. Т. 104. № 2. С. 216–230.
- [55] *Кащенко С. А.* Динамика систем с запаздыванием и быстро осциллирующими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 15–29.
- [56] *Marsden J. E., McCracken M. F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1976. Vol. 19.
- [57] *Hale J.* Theory of functional differential equations. New York: Springer, 1977.
- [58] *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. Appl. Math. Sci., 1964.
- [59] *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркация Андронова-Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием, диффузией и быстро осциллирующими коэффициентами //

- Математические заметки. 2020. Т. 108, № 1. С. 47–63. (перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.* Andronov-Hopf Bifurcation in Logistic Delay Equations with Diffusion and Rapidly Oscillating Coefficients // *Mathematical Notes*. 2020. Vol. 108, No. 1. pp. 47–63.)
- [60] *Kaschenko S. A.* Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 2005. 15. С. 3595–3606.
- [61] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [62] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [63] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
- [64] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [65] *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.
- [66] *Митропольский Ю.А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Киев: АН УССР, 1955.
- [67] *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.
- [68] *Колесов Ю.С., Колесов В.С., Федик И.И.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979.
- [69] *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // *Дифференциальные уравнения*. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778–1788.

- [70] *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures // Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [71] *Кленцина М.Л., Пятницкий А.Л.* Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии // Успехи математических наук. 2002. Т. 57, № 4. С. 95–118.
- [72] *Marušić-Paloka E., Piatnitski A.L.* Homogenization of a Nonlinear Convection-Diffusion Equation with Rapidly Oscillating Coefficients and Strong Convection // Journal of the London Mathematical Society. Second Series. 2005. 72(2). P. 391–409.
- [73] *Allaire G., Pankratova I., Piatnitski A.* Homogenization of a Nonstationary Convection-Diffusion Equation in a Thin Rod and in a Layer // SeMA Journal. 2012. 58(1). P. 53–95.
- [74] *Левенштам В.Б.* Асимптотическое интегрирование параболических задач с большими высокочастотными слагаемыми // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 4. С. 805–821.
- [75] *Кащенко С.А.* Асимптотика установившихся режимов параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами и переменной областью определения // Украинский математический журнал. 1987. Т. 39, № 5. С. 578–582.
- [76] *Бутузов В.Ф., Левенштам В.Б.* О системе типа реакция-диффузия-перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43, № 7. С. 1005–1017.
- [77] *Кащенко С.А.* Асимптотика периодических решений автономных параболических уравнений с малой диффузией // Сибирский математический журнал. 1986. Т. 27, № 6. С. 116–127.
- [78] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1977.
- [79] *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Математические заметки. 2019. Т. 106, № 1. С. 138–143. (перевод на английский: *Kaschenko S.A., Loginov D.O.*

Bifurcations Due to the Variation of Boundary Conditions in the Logistic Equation with Delay and Diffusion // Mathematical Notes. 2019. Vol. 106, No. 1. pp. 47–63.)

- [80] *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21, № 5. С. 588.

Примеры графиков решения уравнения с запаздыванием, диффузией и варьировании коэффициентов граничных условий

На рис. A.1 и A.2 представлены графики решения задачи (3.1), (3.2) при фиксированном $x = 0.5$. Значение r , при котором происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия в данном случае, $r = 2.19$.

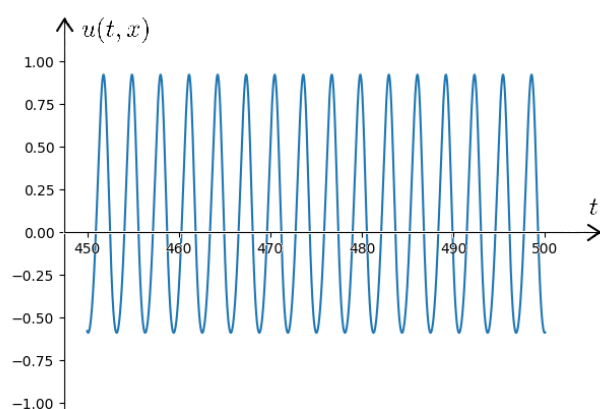
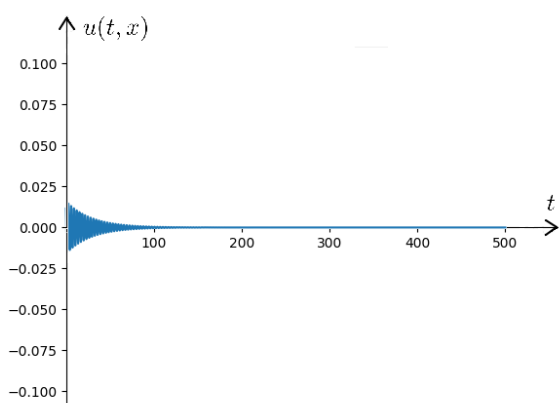


Рис. A.1: График решения задачи (3.1), (3.2) при $x = 0.5, d = 1$,
 Рис. A.2: График решения задачи (3.1), (3.2) при $x = 0.5, d = 1$,

$$r = 2.1, \kappa = 0, \gamma = -1.36$$

$$r = 2.3, \kappa = 0, \gamma = -1.36$$

На рис. A.3 представлен график решения задачи (3.1), (3.2). Значение r , при котором происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия в данном случае, $r = 1.19$.

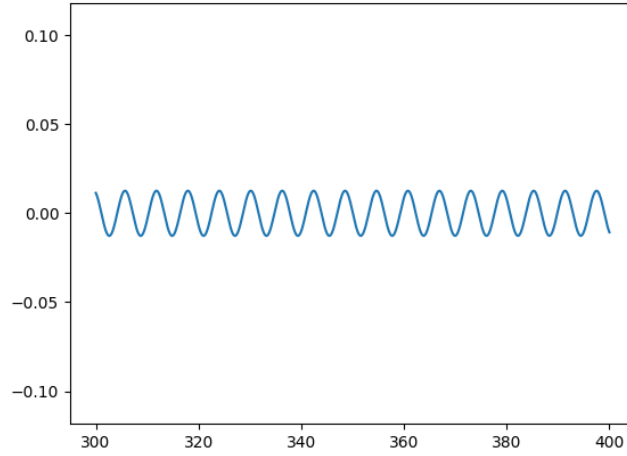


Рис. A.3: График решения задачи (3.1), (3.2) при $x = 0.5, d = 1$,
 $r = 1.2, \kappa = 0.6, \gamma = 0.74516$

На рис. A.4 и A.5 представлены графики решения задачи (3.1), (3.2) при $\gamma \rightarrow -\infty$. Значение r при котором происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия в данном случае $r = 3.43$.

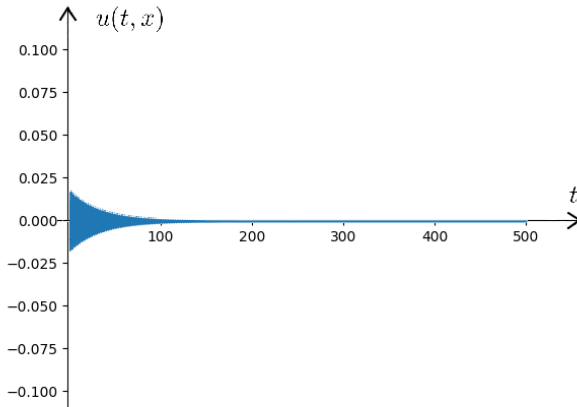


Рис. A.4: График решения задачи (3.1), (3.2) при $x = 0.5, d = 1$,
 $r = 3.3, \kappa = 0$

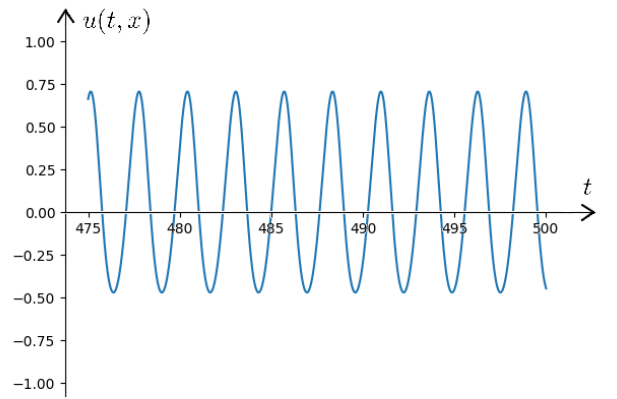


Рис. A.5: График решения задачи (3.1), (3.2) при $x = 0.5, d = 1$,
 $r = 3.5, \kappa = 0$

Выдержки из программного кода алгоритма расчета решений логистического уравнения с запаздыванием и диффузией

Для проведения численных экспериментов в задачах глав 2 и 3 было написано программное обеспечение. Ниже представлен алгоритмическая часть программной реализации на примере задачи (3.1), (3.2).

```
use crate::constants::{D, DELTA_X, DELTA_T, SIZE};
use rayon::prelude::*;

fn get_equation_value(u_prev: f64, u_cur: f64, u_next: f64, u_del: f64,
r: f64, is_linear: bool) -> f64 {
    if is_linear {
        return DELTA_T * (D * (u_prev - 2.0 * u_cur + u_next) / DELTA_X.powf(2.0)
            - r * u_del);
    }
    DELTA_T * (D * (u_prev - 2.0 * u_cur + u_next) / DELTA_X.powf(2.0)
        - r * u_del * (u_cur + 1.0))
}

fn get_u_minus_one_value(u_zero: f64, u_one: f64, kappa: f64) -> f64 {
```

```

u_one - 2.0 * DELTA_X * kappa * u_zero
}

fn get_u_n_value(u_penultimate: f64, u_last: f64, gamma: f64) -> f64 {
u_penultimate + 2.0 * DELTA_X * gamma * u_last
}

fn get_k1_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, kappa: f64, gamma: f64,
r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {
(0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
if i == 0 {
if kappa == f64::INFINITY {
return 0.0
}
return get_equation_value(get_u_minus_one_value(u[0], u[1], kappa),
u[0],
u[1],
u_del[0],
r, is_linear)
}
if i == SIZE - 1 {
if gamma == f64::INFINITY {
return 0.0
}
return get_equation_value(u[SIZE - 2],
u[SIZE - 1],
get_u_n_value(u[SIZE - 2], u[SIZE - 1], gamma),
u_del[SIZE - 1],
r, is_linear)
}
get_equation_value(u[i - 1], u[i], u[i + 1], u[i], r, is_linear)
}
).collect()
}

```

```

fn get_k2_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, k1: Vec<f64>,
kappa: f64, gamma: f64, r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {
  (0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
    if i == 0 {
      if kappa == f64::INFINITY {
        return 0.0
      }
      return get_equation_value(
        get_u_minus_one_value(u[0] + 0.5 * k1[0], u[1] + 0.5 * k1[1], kappa),
        u[0] + 0.5 * k1[0],
        u[1] + 0.5 * k1[1],
        u_del[0],
        r, is_linear)
    }
    if i == SIZE - 1 {
      if gamma == f64::INFINITY {
        return 0.0
      }
      return get_equation_value(u[SIZE - 2] + 0.5 * k1[SIZE - 2],
        u[SIZE - 1] + 0.5 * k1[SIZE - 1],
        get_u_n_value(u[SIZE - 2] + 0.5 * k1[SIZE - 2],
        u[SIZE - 1] + 0.5 * k1[SIZE - 1], gamma),
        u_del[SIZE - 1],
        r, is_linear)
    }
    get_equation_value(u[i - 1] + 0.5 * k1[i - 1], u[i] + 0.5 * k1[i],
      u[i + 1] + 0.5 * k1[i + 1], u[i], r, is_linear)
  })
  .collect()
}

fn get_k3_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, k1: Vec<f64>,
k2: Vec<f64>, kappa: f64, gamma: f64, r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {

```

```

(0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
  if i == 0 {
    if kappa == f64::INFINITY {
      return 0.0
    }
    return get_equation_value(
      get_u_minus_one_value(u[0] + 0.25 * (k1[0] + k2[0]),
        u[1] + 0.25 * (k1[1] + k2[1]), kappa),
      u[0] + 0.25 * (k1[0] + k2[0]),
      u[1] + 0.25 * (k1[1] + k2[1]),
      u_del[0],
      r, is_linear)
  }
  if i == SIZE - 1 {
    if gamma == f64::INFINITY {
      return 0.0
    }
    return get_equation_value(u[SIZE - 2] + 0.25 * (k1[SIZE - 2] + k2[SIZE - 2]),
      u[SIZE - 1] + 0.25 * (k1[SIZE - 1] + k2[SIZE - 1]),
      get_u_n_value(u[SIZE - 2] + 0.25 * (k1[SIZE - 2] + k2[SIZE - 2]),
        u[SIZE - 1] + 0.25 * (k1[SIZE - 1] + k2[SIZE - 1]), gamma),
      u_del[SIZE - 1],
      r, is_linear)
  }
  get_equation_value(u[i - 1] + 0.25 * (k1[i - 1] + k2[i - 1]),
    u[i] + 0.25 * (k1[i] + k2[i]),
    u[i + 1] + 0.25 * (k1[i + 1] + k2[i + 1]), u[i], r, is_linear)
})
).collect()
}

fn get_k4_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, k2: Vec<f64>, k3: Vec<f64>,
  kappa: f64, gamma: f64, r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {

```

```

(0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
  if i == 0 {
    if kappa == f64::INFINITY {
      return 0.0
    }
    return get_equation_value(
      get_u_minus_one_value(u[0] - k2[0] + 2.0 * k3[0],
        u[1] - k2[1] + 2.0 * k3[1], kappa),
      u[0] - k2[0] + 2.0 * k3[0],
      u[1] - k2[1] + 2.0 * k3[1],
      u_del[0],
      r, is_linear)
  }
  if i == SIZE - 1 {
    if gamma == f64::INFINITY {
      return 0.0
    }
    return get_equation_value(u[SIZE - 2] - k2[SIZE - 2] + 2.0 * k3[SIZE - 2],
      u[SIZE - 1] - k2[SIZE - 1] + 2.0 * k3[SIZE - 1],
      get_u_n_value(u[SIZE - 2] - k2[SIZE - 2] + 2.0 * k3[SIZE - 2],
        u[SIZE - 1] - k2[SIZE - 1] + 2.0 * k3[SIZE - 1], gamma),
      u_del[SIZE - 1],
      r, is_linear)
  }
  get_equation_value(u[i - 1] - k2[i - 1] + 2.0 * k3[i - 1],
    u[i] - k2[i] + 2.0 * k3[i],
    u[i + 1] - k2[i + 1] + 2.0 * k3[i + 1], u[i], r, is_linear)
}).collect()
}

fn get_k5_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, k1: Vec<f64>, k2: Vec<f64>,
  k4: Vec<f64>, kappa: f64, gamma: f64, r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {

```

```

(0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
    if i == 0 {
        if kappa == f64::INFINITY {
            return 0.0
        }
        return get_equation_value(
            get_u_minus_one_value(u[0] + (7.0 * k1[0] + 10.0 * k2[0] + k4[0]) / 27.0,
            u[1] + (7.0 * k1[1] + 10.0 * k2[1] + k4[1]) / 27.0, kappa),
            u[0] + (7.0 * k1[0] + 10.0 * k2[0] + k4[0]) / 27.0,
            u[1] + (7.0 * k1[1] + 10.0 * k2[1] + k4[1]) / 27.0,
            u_del[0],
            r, is_linear)
        }
        if i == SIZE - 1 {
            if gamma == f64::INFINITY {
                return 0.0
            }
            return
            get_equation_value(
                u[SIZE - 2] + (7.0 * k1[SIZE - 2] + 10.0 * k2[SIZE - 2] + k4[SIZE - 2]) / 27.0,
                u[SIZE - 1] + (7.0 * k1[SIZE - 1] + 10.0 * k2[SIZE - 1] + k4[SIZE - 1]) / 27.0,
                get_u_n_value(
                    u[SIZE - 2] + (7.0 * k1[SIZE - 2] + 10.0 * k2[SIZE - 2] + k4[SIZE - 2]) / 27.0,
                    u[SIZE - 1] + (7.0 * k1[SIZE - 1] + 10.0 * k2[SIZE - 1] + k4[SIZE - 1]) / 27.0,
                    gamma),
                u_del[SIZE - 1],
                r, is_linear)
            }
            get_equation_value(
                u[i - 1] + (7.0 * k1[i - 1] + 10.0 * k2[i - 1] + k4[i - 1]) / 27.0,
                u[i] + (7.0 * k1[i] + 10.0 * k2[i] + k4[i]) / 27.0,
                u[i + 1] + (7.0 * k1[i + 1] + 10.0 * k2[i + 1] + k4[i + 1]) / 27.0, u[i],

```

```

r, is_linear)
}
).collect()
}

fn get_k6_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, k1: Vec<f64>, k2: Vec<f64>,
k3: Vec<f64>, k4: Vec<f64>, k5: Vec<f64>, kappa: f64, gamma: f64,
r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {
(0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
if i == 0 {
if kappa == f64::INFINITY {
return 0.0
}
return get_equation_value(
get_u_minus_one_value(
u[0]
+ (28.0 * k1[0] - 125.0 * k2[0] + 546.0 * k3[0] + 54.0 * k4[0] - 378.0 * k5[0])
/ 625.0, u[1]
+ (28.0 * k1[1] - 125.0 * k2[1] + 546.0 * k3[1] + 54.0 * k4[1] - 378.0 * k5[1])
/ 625.0, kappa),
u[0]
+ (28.0 * k1[0] - 125.0 * k2[0] + 546.0 * k3[0] + 54.0 * k4[0] - 378.0 * k5[0])
/ 625.0, u[1]
+ (28.0 * k1[1] - 125.0 * k2[1] + 546.0 * k3[1] + 54.0 * k4[1] - 378.0 * k5[1])
/ 625.0,
u_del[0],
r, is_linear)
}
if i == SIZE - 1 {
if gamma == f64::INFINITY {
return 0.0
}
return get_equation_value(

```

```

u[SIZE - 2] + (28.0 * k1[SIZE - 2] - 125.0 * k2[SIZE - 2] + 546.0 * k3[SIZE - 2]
+ 54.0 * k4[SIZE - 2] - 378.0 * k5[SIZE - 2]) / 625.0,
u[SIZE - 1] + (28.0 * k1[SIZE - 1] - 125.0 * k2[SIZE - 1] + 546.0 * k3[SIZE - 1]
+ 54.0 * k4[SIZE - 1] - 378.0 * k5[SIZE - 1]) / 625.0,
get_u_n_value(
u[SIZE - 2] + (28.0 * k1[SIZE - 2] - 125.0 * k2[SIZE - 2] + 546.0 * k3[SIZE - 2]
+ 54.0 * k4[SIZE - 2] - 378.0 * k5[SIZE - 2]) / 625.0,
u[SIZE - 1] + (28.0 * k1[SIZE - 1] - 125.0 * k2[SIZE - 1] + 546.0 * k3[SIZE - 1]
+ 54.0 * k4[SIZE - 1] - 378.0 * k5[SIZE - 1]) / 625.0,
gamma),
u_del[SIZE - 1],
r, is_linear)
}

get_equation_value(
u[i - 1] + (28.0 * k1[i - 1] - 125.0 * k2[i - 1] + 546.0 * k3[i - 1]
+ 54.0 * k4[i - 1] - 378.0 * k5[i - 1]) / 625.0,
u[i] + (28.0 * k1[i] - 125.0 * k2[i] + 546.0 * k3[i]
+ 54.0 * k4[i] - 378.0 * k5[i]) / 625.0,
u[i + 1] + (28.0 * k1[i + 1] - 125.0 * k2[i + 1] + 546.0 * k3[i + 1]
+ 54.0 * k4[i + 1] - 378.0 * k5[i + 1]) / 625.0, u[i], r, is_linear)
}

).collect()
}

fn get_defect_value(k_one: f64, k_three: f64, k_four: f64,
k_five: f64, k_six: f64) -> f64 {
-(42.0 * k_one + 224.0 * k_three + 21.0 * k_four - 162.0 * k_five - 125.0 * k_six)
/ 336.0
}

pub fn get_next_layer_values(u: Vec<f64>, u_del: Vec<f64>, kappa: f64,
gamma: f64, r: f64, is_linear: bool) -> Vec<f64> {
let k1 = get_k1_values(u.clone(), u_del.clone(), kappa, gamma, r, is_linear);
let k2 = get_k2_values(u.clone(), u_del.clone(), k1.clone(),

```

```

kappa, gamma, r, is_linear);
let k3 = get_k3_values(u.clone(), u_del.clone(), k1.clone(), k2.clone(),
kappa, gamma, r, is_linear);
let k4 = get_k4_values(u.clone(), u_del.clone(), k2.clone(), k3.clone(),
kappa, gamma, r, is_linear);
let k5 = get_k5_values(u.clone(), u_del.clone(), k1.clone(),
k2.clone(), k4.clone(), kappa, gamma, r, is_linear);
let k6 = get_k6_values(u.clone(), u_del.clone(), k1.clone(), k2.clone(),
k3.clone(), k4.clone(), k5.clone(), kappa, gamma, r, is_linear);
(0..SIZE).into_par_iter().map(|i| {
if i == 0 && kappa == f64::INFINITY {
return 0.0;
}
if i == SIZE - 1 && gamma == f64::INFINITY {
return 0.0;
}
u[i] + (k1[i] + 4.0 * k3[i] + k4[i]) / 6.0
+ get_defect_value(k1[i], k3[i], k4[i], k5[i], k6[i])
}).collect()
}

```