

На правах рукописи



Диденкулова Екатерина Геннадьевна

**СОЛИТОННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И АНОМАЛЬНО БОЛЬШИЕ ВОЛНЫ
В СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ
ВРИЗА**

Специальность 1.3.4 - Радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород – 2025

Работа выполнена в Нижегородском филиале федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Факультет информатики, математики и компьютерных наук, Международная лаборатория динамических систем и приложений)

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Пелиновский Ефим Наумович

Официальные оппоненты: **Кузнецов Евгений Александрович**,
академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, г. Москва

Капцов Олег Викторович,
доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий, г. Новосибирск

Булатов Виталий Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт спектроскопии Российской академии наук, г. Москва, г.Троицк

Защита состоится 4 марта 2026 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета 24.2.340.03 на базе ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" по адресу: 603022, г.Нижний Новгород, пр.Гагарина, 23, корп. 1, ауд. 420.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" и на официальном сайте университета по адресу: <https://diss.unn.ru/1569>.

Автореферат разослан «____» _____ г.

Учёный секретарь диссертационного совета
24.2.340.03,
Д.ф.-м.н.



Клюев А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень научной разработанности

Термин «солитон», возникший для объяснения частицеподобных свойств уединенных волн, появился 60 лет назад в знаменитой работе Забуского и Крускала [Zabusky and Kruskal, 1965]. Однако о наблюдениях солитонов в природе сообщалось еще в 19 веке, и известное сообщение Рассела о наблюдении солитона в судоходном канале в 1844 году вошло во все учебники по нелинейным волнам. С тех пор солитоны наблюдались в различных приложениях (плазма, астрофизика, геофизика, электродинамика, твердое тело, оптические волноводы, стратифицированные потоки, метаматериалы, электрические цепи, гранулированные решетки, конденсат Бозе-Эйнштейна), и литература здесь огромна. Особенно приятно отметить, что большой цикл исследований солитонов в нелинейных электрических линиях передачи был выполнен в Горьковской (Нижегородской) школе по радиофизике еще 50 лет назад; см., например, [Островский и др, 1972; Ostrovsky et al, 1979]. Примерно в то же время произошел большой прогресс в теории нелинейных волн, связанный с выделением класса интегрируемых систем, позволивший применить современный математический и физический аппарат. Особое место здесь связано с уравнением Кортевега-де Вриза (КдВ), которое в настоящее время является эталонным уравнением теории нелинейных волн в слабодиспергирующих средах

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Выведенное еще в 1895 году для волн в тонком слое воды под действием гравитации и поверхностного натяжения, оно, начиная с 60-х годов прошлого столетия, получило новую жизнь, описывая слабонелинейные волны в разнообразных физических приложениях (плазма, астрофизика, геофизика, электродинамика, твердое тело, стратифицированные потоки, метаматериалы, электрические цепи, гранулированные решетки, размерно-квантованные пленки, теория поля). Уравнение КдВ обладает рядом удивительных свойств, таких как существование бесконечного набора законов сохранения, L-A пары и устойчивых к взаимодействиям уединенных волн – солитонов. Даже рождение самого термина «солитон» произошло в рамках КдВ уравнения. Начали применяться разнообразные методы нахождения многосолитонных решений: преобразования Бэклунда, Хироты, Дарбу. Апофеозом этого стало рождение метода обратной задачи теории рассеяния – эффективного инструмента решения задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений и понимания основных свойств динамики нелинейных волн. Литература по интегрируемым нелинейным эволюционным уравнениям огромна, и мы перечислим здесь только несколько книг [Абловиц и Сигур, 1987; Захаров и др., 1980; Ньюэлл, 1989; Лэм, 1983; Калоджеро и Дегасперис, 1985; Бутерин и др, 2013, Камчатнов, 2024]. Наконец отметим важные вопросы устойчивости солитонов по отношению к различного рода возмущениям [Кузнецов, 2022; Захаров и Кузнецов, 2012].

Сразу же встал вопрос: насколько эффективными являются такие же подходы к другим уравнениям нелинейной теории волн? Некоторые из этих уравнений также стали эталонными (нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона и др). Одним из результатов исследований упомянутых уравнений стало открытие «дышащих» солитонов или бризеров, которые также ведут себя как частицы, но обладают внутренней степенью свободы. В контексте уравнений типа КдВ вышеупомянутые ме-

тоды исследования применимы при определенных обобщениях (добавление различного рода слагаемых по нелинейности и дисперсии, зачастую со специальными константами, которые нельзя менять, и т.д.). В математике даже возник термин КдВ-иерархии, под которым понимаются уравнения этого типа, точно решаемые методами, перечисленными выше. В настоящей диссертации используется другое определение КдВ-иерархии как уравнений с произвольной нелинейной функцией $f(u)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2)$$

которые и является основой для изучения новых эффектов в теории нелинейных волн, а именно солитонной турбулентности и аномально больших волн (так называемых «волн-убийц»), в настоящей диссертации. Термин «солитонная турбулентность» появился по аналогии с классической гидродинамической турбулентностью, только в качестве частиц выступают солитоны, поведение которых эквивалентно частицам (сохраняются при взаимодействии, упругое соударение). Описание солитонной турбулентности впервые было сделано акад. В.Е. Захаровым, выведшим кинетическое уравнение для параметров солитонного газа из КдВ уравнения [Захаров, 1971]. По аналогии используется термин «бризерная турбулентность», когда волновое поле состоит из ансамбля бризеров.

Солитонная турбулентность активно развивается применительно к точно решаемым нелинейным эволюционным уравнениям – интегрируемым системам, для которых доказано, что солитон ведет себя как частица (см., например, [Zakharov, 2009; El, 2021; Bonnemain et al, 2022; Congy et al, 2023; 2024]). Поэтому иногда солитонную турбулентность называют интегрируемой турбулентностью. В диссертации термин «солитонная турбулентность» применяется к обобщенному уравнению КдВ, и анализируются особенности динамики случайного газа солитонов в неинтегрируемых системах, в которых взаимодействие солитонов носит квазиупругий характер. Сразу заметим, что солитонная турбулентность является предметом экспериментальных исследований в гидродинамике и оптических волноводах [Redor et al, 2019; 2021; Leduque et al, 2024; Suret et al, 2016; Dieli et al, 2024].

Большой интерес в физике сейчас проявляется к возникновению аномально больших волн, получивших название волн-убийц [Kharif et al, 2009; Onorato et al, 2013; Dudley et al, 2019; Слюняев и др, 2023]. Первоначально этот термин применялся только в физике морских волн, где эти волны приводят к большому ущербу и гибели людей. Поскольку нелинейные эволюционные уравнения имеют одинаковую форму (по крайней мере, в низшем порядке теории возмущений) в разнообразных физических приложениях, то примерно 20 лет назад стали говорить о волнах-убийцах (или аномально больших волнах) в оптике, плазме, конденсате Бозе-Эйнштейна и других средах [Akhmediev and Pelinovsky, 2010; Onorato et al, 2013; Dudley et al, 2019]. И здесь уединенные волны (солитоны и бризеры) играют важную роль, а знаменитый бризер Перегрина (точное решение нелинейного уравнения Шредингера) стал математическим образом волны-убийцы. В диссертации волны-убийцы изучаются в контексте солитонной турбулентности в рамках обобщенного уравнения КдВ с произвольной нелинейной функцией, демонстрируя особенности их возникновения в интегрируемых и неинтегрируемых системах. Стоит учитывать, что термин «волны-убийцы» употребляется здесь исходя из общепринятого математического определения, когда такой волной считается волна, амплитуда которой минимум в два раза превосходит фоновую амплитуду окружающих волн. Поэтому этот термин может быть использован применительно к

слабонелинейной теории, в рамках которой, собственно, и выводится обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза.

Для физических приложений важно учитывать неоднородность среды, приводящую к переменным коэффициентам волновых уравнений (типичной задачи радиофизики). Основной эффект неоднородности сводится к рассеянию волновой энергии (хотя и возможна фокусировка волн в отдельных областях). Волновую энергию на большие расстояния можно передать при условии медленности изменения параметров среды, что обычно изучается с помощью асимптотических методов (геометрическая оптика и акустика, метод Маслова, ВКБ). Имеются, однако, и исключения, из которых наиболее известен случай экспоненциальной атмосферы, в которой линейные звуковые и гравитационные волны распространяются без отражения [Госсард и Хук, 1978]. В диссертационной работе показано, что отражение может отсутствовать и в других сильно неоднородных средах, но при определенных условиях на характер неоднородности среды, которые не очень-то специфичны. Так, удастся вывести обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза для слабонелинейных волн в сильно неоднородной среде (для одного частного случая постоянного импеданса), что нельзя сделать при наличии отражения.

Наконец, в диссертации рассмотрен ряд практических задач по применению перечисленных выше идей к волнам в гидродинамике и астрофизической плазме. В частности, приведен каталог наблюдений волн-убийц в Мировом океане, и обсуждается генерация внутренних волн при взрывных извержениях подводных вулканов.

Целью диссертационной работы является развитие представлений о формировании солитонной турбулентности и волн-убийц в нелинейных слабодиспергирующих средах.

Для достижения поставленной цели предлагается решить следующие **задачи**:

- Развить теорию солитонной и бризерности турбулентности в рамках обобщенных уравнений Кортевега-де Вриза;
- Исследовать динамику солитонов в рамках неинтегрируемых моделей, основанных на обобщенном уравнении Кортевега-де Вриза (уравнение Шамеля, иерархия уравнений типа Гарднера);
- Получить условия безотражательного распространения волн в гидродинамике и плазме, в том числе вывести уравнение типа Кортевега-де Вриза для волн в сильно неоднородной среде;
- Рассмотреть ряд практических задач по динамике случайных солитонных ансамблей и возникновению волн-убийц.

Основные положения, выносимые на защиту:

- 1) Взаимодействие солитонов разной полярности ведет к образованию аномально больших волн (волн-убийц) в рамках интегрируемого уравнения Гарднера (уравнению Кортевега-де Вриза с квадратичной и кубической нелинейностью). Даже в разреженном солитонном газе наблюдаются множественные столкновения солитонов.
- 2) Рациональные ограниченные решения (алгебраические солитоны) в рамках обобщенного уравнения Гарднера могут представлять собой кинки, пирамидальные или столообразные солитоны в зависимости от вида нелинейной функции.
- 3) Разнополярные солитоны при взаимодействии передают неупруго энергию друг другу в рамках неинтегрируемых моделей (на примере уравнения Шамеля), так

что она прибавляется у наибольшего солитона. В случае взаимодействия однополярных солитонов излучение (появление диспергирующего хвоста) мало, и процесс качественно похож на взаимодействие однополярных солитонов в рамках интегрируемых моделей КдВ-типа.

- 4) В рамках бездисперсионного предела обобщенного уравнения КдВ-типа с неаналитической скоростью распространения, содержащей модуль функции при переходе через нуль, римановы волны существуют только при определенной гладкости функции скорости распространения, в противном случае волна сразу опрокидывается (градиентная катастрофа).
- 5) Получены условия безотражательного распространения волн в сильно неоднородных средах. Выведено обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза для волн в самосогласованном водном канале переменного сечения, параметры которого могут значительно меняться с расстоянием.
- 6) Составлен объединенный каталог волн-убийц, произошедших в Мировом океане с 2005 по 2021 гг, в который вошло 429 событий. Показано, что критерий модуляционной неустойчивости хорошо применим для волн-убийц из составленного в диссертации каталога наблюдений, если глубина более 20 метров. Уравнение Бенджамина-Бона-Махони лучше описывает вариации донного давления, вызванные прохождением волны-убийцы на морской поверхности по сравнению с КдВ уравнением.
- 7) Предложена аналитическая модель генерации внутренних гравитационных волн при взрывном извержении подводного вулкана.

Соответствие содержания диссертации научной специальности

Тема и содержание диссертации соответствуют научной специальности 1.3.4 — Радиофизика (наименование отрасли науки - физико-математические). Диссертация соответствует следующему направлению исследований из паспорта научной специальности: 2. Изучение линейных и нелинейных процессов излучения, распространения, дифракции, рассеяния, взаимодействия и трансформации волн в естественных и искусственных средах; 4. Исследование флуктуаций, шумов, случайных процессов и полей в сосредоточенных и распределенных стохастических системах (статистическая радиофизика).

Обоснование: В диссертационной работе изучаются процессы взаимодействия и трансформация волн в однородных и неоднородных средах, динамика ансамблей солитонов и бризеров. Солитонная турбулентность является новым объектом в теории турбулентности, который активно развивается в последнее десятилетие. Здесь в качестве частиц выступают солитоны, поведение которых эквивалентно частицам (в интегрируемых системах сохраняются при взаимодействии, упругое соударение; в неинтегрируемых - имеют большое время жизни и квазиупругое соударение). В диссертации развиты аналитические и численные методы исследования формирования аномально больших волн (волн-убийц) в полях нелинейных волн, где доминирующую роль играют уединенные волны (солитоны). Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в статьях в журналах «Известия вузов. Радиофизика», Доклады РАН, Вестник МГУ (Физика), «Physica D: Nonlinear Phenomena», «Chaos, Solitons & Fractals», «Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical», «Physics Letters A» и других общепризнанных научных изданиях. Все вышеуказанное подтверждает соответствие содержания диссертации научной специальности.

Методология и методы исследования

Заявленные в диссертации задачи решаются как аналитически, так и численно. Аналитические результаты получены с использованием точных решений интегрируемых уравнений типа Кортевега – де Вриза. Обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза для сильно неоднородной среды выведено из исходных гидродинамических уравнений с помощью асимптотических рядов. Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах исследуются с применением методов факторизации и сведения к уравнениям с постоянными коэффициентами. Численно уравнения семейства Кортевега – де Вриза решаются псевдо-спектральным методом с использованием нескольких (вплоть до четвертого) сохраняющихся инвариантов для контроля точности вычислений. Данный метод позволяет вычислять с высокой точностью производные по пространственной переменной в пространстве Фурье. Для интегрирования по времени применен конечно-разностный подход. Вероятностные характеристики волновых полей получены с помощью метода Монте-Карло. Анализ результатов стохастического моделирования солитонной и бризерной турбулентности выполнен с помощью методов математической статистики (моменты волнового поля, функции распределения).

Степень достоверности результатов

Достоверность научных результатов подтверждается независимыми численными расчетами, их согласием с имеющимися физическими представлениями и математическими моделями теории нелинейных волн, а также экспериментальными данными. Часть результатов автора позднее была подтверждена в работах других авторов.

Научная новизна результатов и выводов состоит в развитии теории солитонной и бризерной турбулентности в системах КдВ-иерархии; представлении нового механизма образования волн-убийц в неинтегрируемой солитонной турбулентности; получении ранее неизвестных условий среды, где возможно безотражательное распространение волн; в составлении объединенной базы данных наблюдений волн-убийц в Мировом океане и анализе условий их возникновения.

Теоретическая и практическая значимость работы

Полученные характеристики солитонной/бризерной турбулентности расширяют представления о роли нелинейных явлений в теории турбулентности и могут быть использованы для анализа волн-убийц в различных физических приложениях: радиофизика, астрофизика, динамика атмосферы и океана, оптические волноводы, плазма и электрические цепи. Исследования автора по данной проблеме поддерживались следующими грантами:

- Автор диссертации являлся лауреатом стипендиальных конкурсов для молодых физиков Фонда «Династия» и фонда развития теоретической физики и математики «Базис» с проектами (№ 20-1-3-3-1) «Солитонно-бризерная турбулентность в интегрируемых моделях типа Кортевега-де Вриза» и (№ 24-1-3-7-1) «Формирование "солитона-чемпиона" (волны-убийцы) в неинтегрируемых длинноволновых моделях».
- Автор диссертации руководил/-ит тремя грантами РНФ и тремя грантами РФФИ: проект РФФИ (16-32-60012) «Исследование солитонной турбулентности в рамках уравнения Гарднера, описывающего слабонелинейные волны в диспергирующих

средах»; проект РФФИ (16-35-00175) «Нелинейная динамика уединённых поверхностных и внутренних волн в прибрежной зоне»; проект РФФИ (19-35-60022) «Бризеры внутренних волн и возникновение аномально больших волн в стратифицированном океане»; проект РНФ (18-77-00063) «Волны-убийцы в прибрежной зоне моря: их моделирование и анализ натурных наблюдений»; проект РНФ (21-77-00003) «Исследование волн-убийц в Мировом Океане на основе данных наблюдений и моделирования реальных событий», проект РНФ (23-77-01074) «Безотражательное распространение поверхностных и внутренних волн в неоднородном океане».

- Автор диссертации принимала участие в качестве исполнителя в мегагранте «Нелинейная гидрофизика и природные катастрофы», а также принимала/-ет участие в ряде грантов РНФ и РФФИ, в том числе по физике: проект РФФИ (16-02-00167) «Магнитогидродинамические (МГД) волны в магнитных структурах солнечной атмосферы»; проект РФФИ (18-02-00042) «Статистические характеристики и «волны-убийцы» в солитонном газе»; проект РФФИ (19-02-00111) «Волны в магнитных структурах солнечной атмосферы»; проект РНФ (19-12-00253) «Нелинейные механизмы генерации волн-убийц»; проект РНФ (22-17-00153) «Волны-убийцы в море конечной глубины: моделирование, измерения и прогноз».
- Получено свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2022621037 «База данных описаний волн-убийц в Мировом Океане в 2011-2021».

Апробация работы

Результаты, полученные при написании данной диссертации, представлены на ряде всероссийских и международных конференций, таких как Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, 2015, 2017, 2018, 2019, 2020, 2024); Научная школа "Нелинейные волны" (Нижний Новгород, 2016, 2018, 2020, 2022, 2024); Int. symposium "Extremes-2018" (Ганновер, 2018); Int. Conf. "Frontiers of nonlinear physics" (Россия, 2016); Int. seminar "Extreme events & rogue waves" (Германия, 2016); Int. Conf. "Nonlinear Waves - Theory and Applications" (Китай, 2016); Int. Conf. "Solitons, collapses and turbulence" (Ярославль, 2019); ежегодная ассамблея Европейского Геофизического Союза (EGU, Вена, Австрия: 2015-2022); Всероссийская конференция "Пермские гидродинамические чтения" (Пермь, 2017, 2018, 2019, 2022, 2024); Int. Conf. "Nonlinear Science and Complexity" (Китай, 2024), конференция "Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность" (ИКИ РАН, Москва, 2024), VII Международная конференция "Topological Methods in Dynamics and Related Topics" (Нижний Новгород, 2024), Конференция-семинар с международным участием "Случайные процессы, волны и турбулентность в природных средах", посвященная памяти профессора, Лауреата Государственной премии СССР в области науки и техники, Валерия Исааковича Кляцкина (Москва, 2025), XXIX научная конференция по радиофизике (Нижний Новгород, 2025) и других. Результаты диссертации также докладывались на семинарах в ряде организаций.

В 2020 г. Диденкуловой Е.Г. была присуждена Премия Европейского союза наук о Земле для молодых ученых по направлению «Нелинейные процессы в геофизике» (The 2020 Division Outstanding Early Career Scientist Award). Она награждена Благодарственным письмом Правительства Нижегородской области за добросовестный труд, высокий профессионализм, большой вклад в развитие научно-образовательного комплекса Нижегородской области (2025 г.).

Личный вклад

Автору диссертации принадлежит проведение теоретических и численных расчетов, участие в постановке задачи и обсуждении результатов. Статьи по диссертации опубликованы как в соавторстве (28 работ), так и единолично (5 работ). Роль соавторов в некоторых работах обсуждена ниже.

Dr. M. Flamarion разработал численную схему решения уравнения Шамеля, которая была применена в совместных с ним работах. Численная схема решения уравнения Гарднера разработана к.ф.-м.н. А.В. Кокориной. В работе [Didenkulova et al, 2023] данные реанализа были предоставлены к.ф.-м.н. И.П. Медведевым. Соавторам работ [Petrukhin et al, 2020; Петрухин и др, 2022] д.ф.-м.н. Н.С. Петрухину и М.С. Рудерману принадлежит постановка задач о безотражательном распространении волн в плазме. Д.ф.-м.н. Т.Г. Талиповой принадлежит постановка задач в работах с приложениями к внутренним гравитационным волнам. Д.ф.-м.н. Е.Н. Пелиновский, как научный консультант, принимал участие в постановке задач и обсуждении результатов во многих совместных статьях.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 33 печатных изданиях, опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах, индексируемых в научных базах Web of Science и Scopus, в том числе 12 статей опубликованы в журналах с квартилем Q1.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения, а также списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 255 страниц и включает 189 рисунков и 235 библиографических ссылок.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении описывается основная проблематика работы, обосновывается ее актуальность, формулируются цели и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, новизна и практическая значимость.

Первая глава «Динамика ансамбля солитонов в рамках интегрируемых версий иерархии уравнений Кортевега-де Вриза» посвящена исследованию динамики ансамблей солитонов и бризеров с применением к так называемой интегрируемой турбулентности и проблеме волн-убийц в солитонном газе. Исследования выполнены в рамках уравнения Гарднера, которое объединяет уравнение Кортевега – де Вриза и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (мКдВ) и описывает слабонелинейные волны в диспергирующих средах. **В параграфе 1.2** «Уравнение Гарднера и его солитонные решения» кратко представлена информация об уравнении Гарднера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha u + \alpha_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3)$$

где α - коэффициент квадратичной нелинейности, α_1 - коэффициент кубической нелинейности, β - коэффициент дисперсии. Солитонное решение уравнения Гарднера с коэффициентами $\alpha = 6, \alpha_1 = -6, \beta = 1$ имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{4K^2}{1 + \sqrt{1 - 4K^2} \cosh(2K(x - 4K^2 t - x_0))}, \quad K = \frac{1}{2} \sqrt{2A - A^2}, \quad V = 4K^2, \quad (4)$$

где A – амплитуда солитона, V – скорость солитона, x_0 – фаза. Параметр K изменяется в диапазоне $0 < K < 1/2$. В случае малых амплитуд ($K \ll 1$) солитон принимает вид КдВ-солитона:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2[K(x - 4K^2t - x_0)], \quad A = 2K^2. \quad (5)$$

Солитоны в данном случае имеют положительную полярность.

В случае $\alpha_1 > 0$ ($\alpha = \alpha_1 = 6$, $\beta = 1$) односолитонное решение уравнения Гарднера (3) имеет вид:

$$u = \frac{K}{1 + s\sqrt{1+K} \cosh(\sqrt{K}(x - Kt - x_0))}, \quad K = 2sA + A^2, \quad (6)$$

где $s = \pm 1$ определяет полярность солитона. При $s = 1$, солитоны с малой амплитудой ($K \rightarrow 0$) совпадают с КдВ-солитонами, а по мере увеличения амплитуды приближаются к мКдВ-солитонам:

$$u(x, t) = sA \operatorname{sech}[A(x - ct - x_0)], \quad c = A^2. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение Гарднера имеет богатое семейство солитонных решений, формы которых представлены на рис. 1.

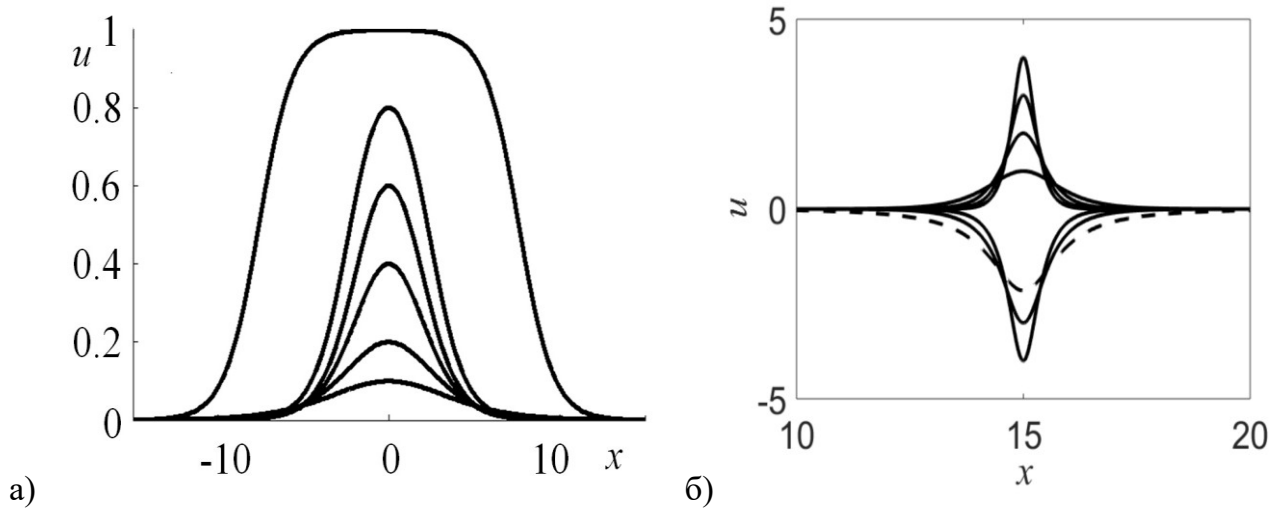


Рис. 1. Формы солитонов в рамках уравнения Гарднера ($\alpha > 0$): а) $\alpha_1 < 0$, б) $\alpha_1 > 0$

Уравнение Гарднера является полностью интегрируемым, и для него может быть решена задача Коши. Оно имеет бесконечное количество сохраняющихся инвариантов [Miura, 1968], первые три из них соответствуют законам сохранения массы, импульса и Гамильтониана (для канонических значений коэффициентов):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \quad (8)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx, \quad (9)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u^3 \pm \frac{u^4}{2} - \frac{1}{2} u_x^2 \right] dx, \quad (10)$$

которые используются в диссертации, в том числе и для контроля численных расчетов.

Параграф 1.3 «Анализ двухсолитонных взаимодействий» посвящен исследованию двухсолитонных взаимодействий как элементарного акта солитонной турбулентности в рамках уравнения Гарднера. Точные двухсолитонные решения как частный случай N -солитонных решений имеют следующий вид.

Для уравнения Гарднера с отрицательной кубической нелинейностью:

$$u(x, t) = 2(K_2^2 - K_1^2) \left(\frac{1}{2K_2 \coth Z_{2+} - 2K_1 \tanh Z_{1+}} - \frac{1}{2K_2 \coth Z_{2-} - 2K_1 \tanh Z_{1-}} \right), \quad (11)$$

$$Z_{1,2\pm} = K_{1,2}(x - 4K_{1,2}^2 t \pm \delta_{1,2}), \quad \delta_{1,2} = \frac{1}{2K_{1,2}} \tanh^{-1}(2K_{1,2}), \quad K_2 > K_1 > 0.$$

и с положительной кубической нелинейностью:

$$u = (K_2 - K_1)(K_2 d_{1+} - K_1 d_{2-}) * \left[K_2 d_{1+} d_{2+} + K_1 d_{1-} d_{2-} + 2\sqrt{K_1 K_2} \left(\sqrt{K_1 K_2} - D_1 D_2 \operatorname{sh}(Z_1) \operatorname{sh}(Z_2) \right) \right]^{-1}, \quad (12)$$

где $d_{i+} = 1 + D_i \operatorname{ch} Z_i$, $d_{i-} = 1 - D_i \operatorname{ch} Z_i$, $D_i = s_i \sqrt{1 + K_i}$, $Z_i = \sqrt{K_i}(x - V_i t - x_{0i})$, $V_i = K_i$, $s_i = \pm 1$, $i = 1, 2$, $\sqrt{K_2} > \sqrt{K_1} > 0$.

Отличительным свойством уравнений из КдВ-иерархии является тот факт, что при взаимодействии однополярных солитонов амплитуда результирующего импульса в момент максимального взаимодействия уменьшается, а разнополярных – увеличивается. Это дает соответствующий вклад в моменты волновых полей, которые обычно вызывают интерес в теории турбулентности:

$$M_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n(x, t) dx. \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

Моменты M_1 и M_2 совпадают с инвариантами (8) и (9) и, следовательно, сохраняются со временем. Моменты M_3 и M_4 , соответствующие асимметрии и эксцессу в теории турбулентности, убывают при взаимодействии солитонов одинаковой полярности и возрастают при столкновении солитонов разной полярности. Эти выводы в частных случаях были получены диссертантом ранее [Шургалина (Диденкулова) и Пелиновский, 2015], а здесь обобщены на случай уравнения Гарднера.

В параграфе 1.4 «Эффект торможения малого солитона (дефекта) в решетке солитонов» исследован эффект смены направления движения пробного солитона в солитонных решетках на примере уравнений типа КдВ, который ранее визуально наблюдался в численных экспериментах [Шургалина (Диденкулова) и Пелиновский, 2015]. Солитонные КдВ и мКдВ решения, записанные в терминах скорости есть:

$$u_{kdv}(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right), \quad (14)$$

$$u_{mkdv}(x, t) = \sqrt{c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(x - ct)). \quad (15)$$

Тогда модуль сдвига фаз при взаимодействии двух солитонов в обоих уравнениях записывается одинаково:

$$\Delta x_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{c_{1,2}}} \ln \left(\frac{\sqrt{c_2} + \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2} - \sqrt{c_1}} \right), \quad (16)$$

причем сдвиг фаз положительный для большого солитона и отрицательный для меньшего. Если рассмотреть движение солитонов кинематически (рис. 2), то можно получить условие на среднюю скорость дефекта вдоль решетки, когда продвижение малого солитона вперед будет компенсироваться отрицательным сдвигом фазы при взаимодействии с большим солитоном:

$$s_d = \frac{(x_d(t^*) - x_d(0))}{t^*} = c_d \frac{1 - \frac{c_l}{c_d} \frac{\Delta x_d}{L}}{1 - \frac{\Delta x_d}{L}} \quad (17)$$

Если же малый солитон (дефект) движется в солитонном газе (ансамбле солитонов с произвольными амплитудами), то условие неподвижности в среднем дефекта в солитонном газе есть $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по ансамблю)

$$s_d = c_d = - \frac{4 \left\langle \frac{1}{\sqrt{c}} \right\rangle}{L \left\langle \frac{1}{c} \right\rangle}. \quad (18)$$

Численное подтверждение полученных критериев в рамках уравнения мКдВ продемонстрировано на рис. 3.

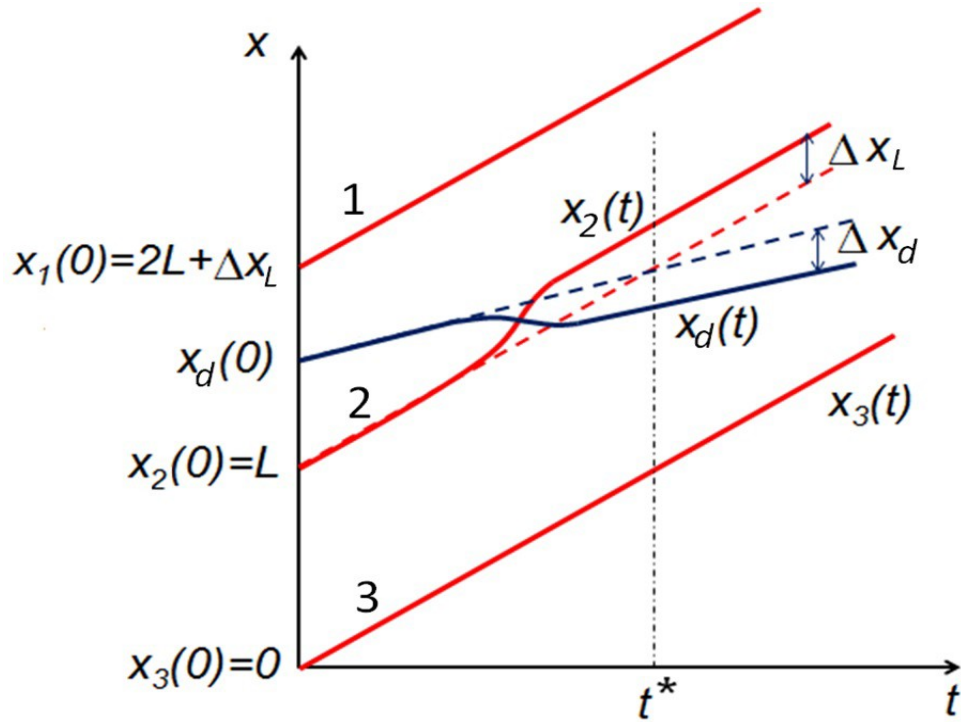


Рис. 2. Траектории солитонов в x - t пространстве. Пунктирными линиями показаны траектории солитонов без учета нелинейного взаимодействия

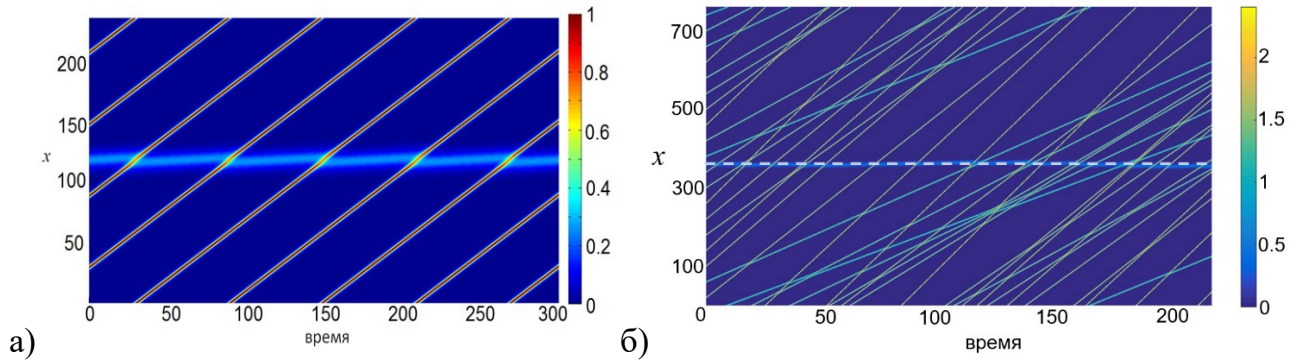


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы волновых полей, где малый солитон имеет нулевую скорость: а) решетка солитонов, б) солитонный газ

В параграфе 1.5 «Гарднеровская солитонная турбулентность» исследуется динамика нерегулярных ансамблей солитонов (солитонная турбулентность) в рамках уравнения Гарднера с периодическими граничными условиями. Сопоставляется динамика солитонных ансамблей, состоящих из однополярных солитонов и солитонов разной полярности. Примеры начальных реализаций солитонных газов приведены на рис. 4.

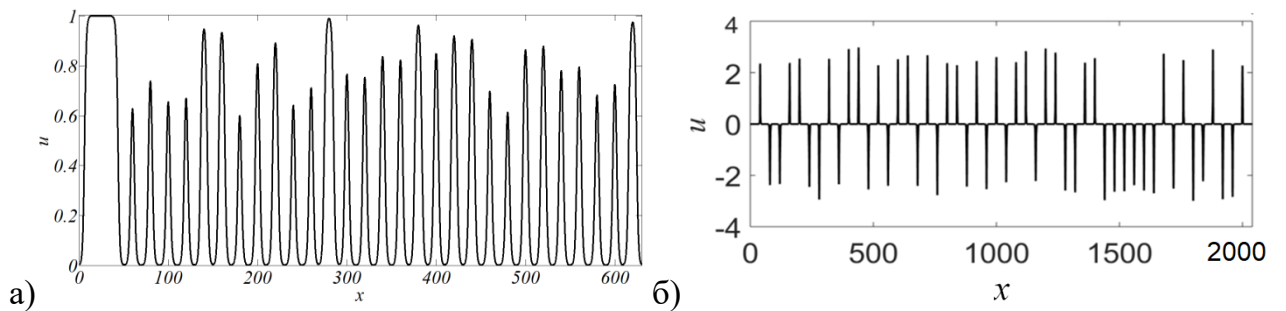


Рис. 4. Солитонные ансамбли при $t=0$, состоящие из а) однополярных солитонов, б) разнополярных солитонов

Отмечена принципиальная разница динамики таких волновых полей. Показано, что случайные взаимодействия большого числа однополярных солитонов приводят к уменьшению коэффициентов асимметрии и эксцесса волнового поля, рассчитываемых по формулам:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx, \quad \sigma^2 = \frac{1}{L} \int_0^L (u(x) - \langle u(x) \rangle)^2 dx, \quad (19)$$

$$Sk = \frac{\frac{1}{L} \int_0^L (u(x) - \langle u(x) \rangle)^3 dx}{\sigma^3}, \quad Kur = \frac{\frac{1}{L} \int_0^L (u(x) - \langle u(x) \rangle)^4 dx}{\sigma^4}, \quad (20)$$

а взаимодействия разнополярных солитонов – к их возрастанию. Функция распределения амплитуд волн становится более крутой по сравнению с исходным распределением в случае однополярного газа и расширяется в область больших значений в случае разнополярного солитонного газа. Исследовано влияние предельного («толстого») солитона на статистические моменты солитонного газа в рамках дефокусирующего уравнения Гарднера (с отрицательной кубической нелинейностью). Когда масса толстого солитона занимает менее 25% «общей массы волнового поля», вклад толстого солитона в высшие статистические моменты минимален (асимметрия и эксцесс солитонного поля без толстого солитона отличаются от данных моментов поля с толстым солитоном менее чем в 1.2 раза). Если масса толстого солитона равна массе всего остального поля,

то значения эксцесса солитонного газа с присутствием толстого солитона и без него отличаются в 3 раза. Показано, что даже в разреженном Гарднеровском солитонном газе встречаются множественные столкновения солитонов (в наших расчетах число сталкивающихся солитонов достигало пяти, что демонстрируется пространственно-временной реализацией на рис. 5).

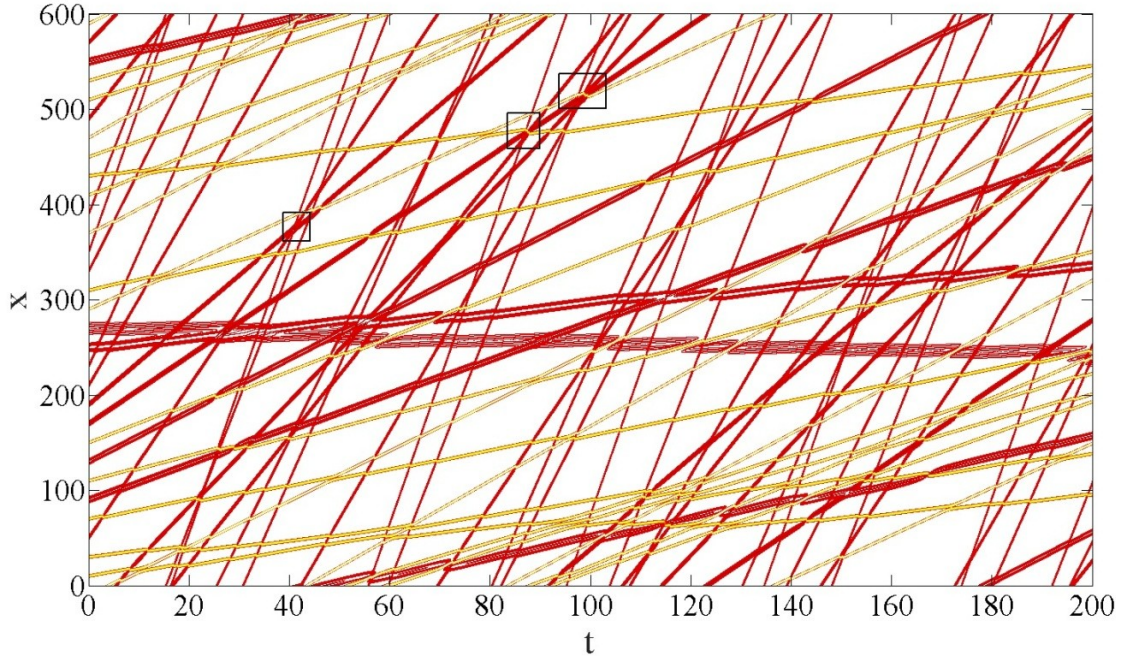


Рис. 5. Траектории взаимодействующих солитонов в Гарднеровском газе (прямоугольниками отмечены примеры множественных столкновений солитонов)

Изучен процесс генерации «волн-убийц» в разнополярном солитонном газе в рамках фокусирующего уравнения Гарднера. Формы волн-убийц достаточно разнообразны, и их полярность совпадает с полярностью наиболее быстрого солитона, участвующего во взаимодействии (даже если его амплитуда меньше остальных).

В параграфе 1.6 «Бризерная турбулентность» анализируются свойства бризеров в рамках мКДВ уравнения, точное решение для которого представлено в виде:

$$u(x, t) = -4q \operatorname{sech}(R) \left[\frac{\cos(f) - \frac{q}{p} \sin(f) \tanh(R)}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \sin^2(f) \operatorname{sech}^2(R)} \right], \quad (21)$$

$$\text{где } R = 2qx + 8q(3p^2 - q^2)t + R_0, \quad f = 2px + 8p(p^2 - 3q^2)t + f_0, \quad (22)$$

p, q, R_0, f_0 – свободные параметры. Физический смысл констант p и q следующий: первая влияет на количество волн в пакете, вторая определяет амплитуду бризера.

Проведен анализ сценариев взаимодействия двух бризеров разной интенсивности, и показано, что амплитуда результирующего импульса в момент взаимодействия волн может достигать значения, равного суперпозиции амплитуд начальных бризеров. Далее исследуется динамика бризерных ансамблей (бризерный газ). Анализируются множественные взаимодействия бризеров в таком газе. Пример реализации бризерного газа в момент образования волны-убийцы приведен на рис. 6.

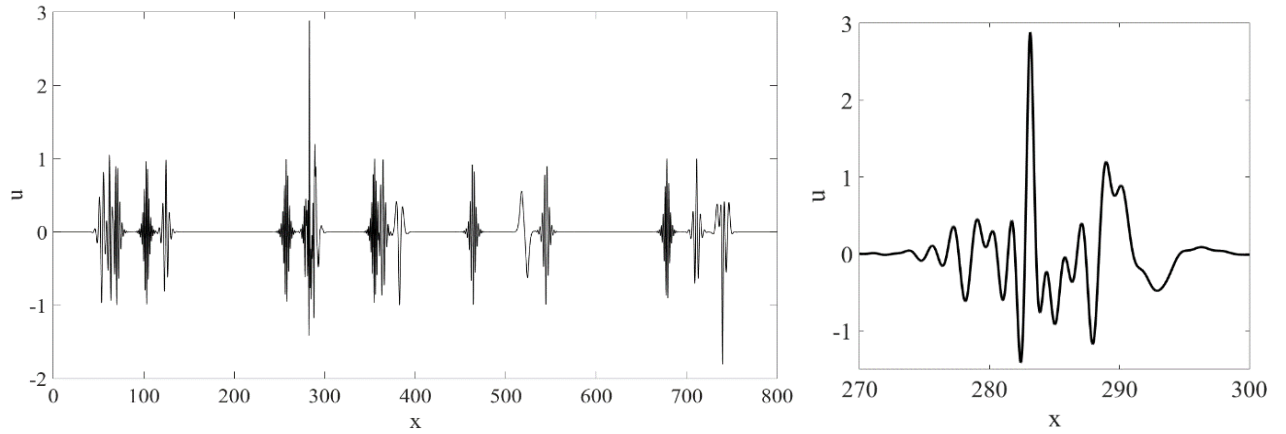


Рис. 6. Волновое поле в момент времени $t = 63$ и увеличенный профиль большой волны

В параграфе 1.7 «Смешанная турбулентность» изучаются особенности различных режимов столкновений солитона и бризера. Проведены две серии экспериментов с разными значениями относительных фаз бризера и солитона. Определены моменты волнового поля, играющие решающую роль в статистике солитонных (бризерных) газов. Проведено исследование бризерной турбулентности на фоне случайного шума, моделируемого квазигармоническими волнами (волновой турбулентности). Показано, что волновые поля со значительной бризерной составляющей являются наиболее экстремальными с точки зрения генерации волн-убийц. Напротив, однородный шум большой интенсивности поглощает бризерную турбулентность.

Во второй главе «Динамика ансамбля солитонов в рамках неинтегрируемых версий уравнений типа Кортевега-де Вриза» проводится исследование динамики солитонов в рамках неинтегрируемых версий уравнений КдВ-иерархии.

Параграф 2.2 «Рациональные решения уравнения типа Гарднера» посвящен исследованию рациональных решений нелинейных эволюционных уравнений КдВ-иерархии, которые в случае интегрируемых моделей рассматриваются в литературе как математический образ волн-убийц. Полученные решения описывают алгебраические солитоны первого порядка, кинки, пирамидальные и столообразные солитоны. Аналитически они найдены в рамках обобщенного уравнения Гарднера с двумя нелинейными слагаемыми, степени которых отличаются в два раза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\alpha u^{1/p} - \beta u^{2/p}) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (23)$$

Например, Гарднеровское обобщение уравнение Шамеля имеет следующий вид ($p = 2$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\alpha u^{1/2} - \beta u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (24)$$

и его рациональное решение записывается как

$$u(x) = \left(\frac{12\alpha / 5\beta}{1 + \frac{16\alpha^2}{76\beta} x^2} \right)^2. \quad (25)$$

Алгебраические солитоны находятся численно при произвольном соотношении степеней нелинейности (типа $u - u^q$).

Если число нелинейных слагаемых больше двух, то возникают новые типы рациональных решений. Модифицированное уравнение Гарднера, имеющего решение в виде кинка, должно иметь как минимум три нелинейных члена:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u^2 \left[1 - \frac{10}{3}u + \frac{5}{2}u^2 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (26)$$

Приведем также пример уравнение Гарднера, решением которого являются пирамидальные и столбообразные солитоны:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left[6(u_1^2 + \varepsilon^2)u - 12(u_1^2 + \varepsilon^2 + 2u_1)u^2 + 20(2u_1 + 1)u^3 - 30u^4 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (27)$$

где нелинейность описывается полиномом пятой степени. Примеры разного вида алгебраических солитонов приведены на рис. 7.

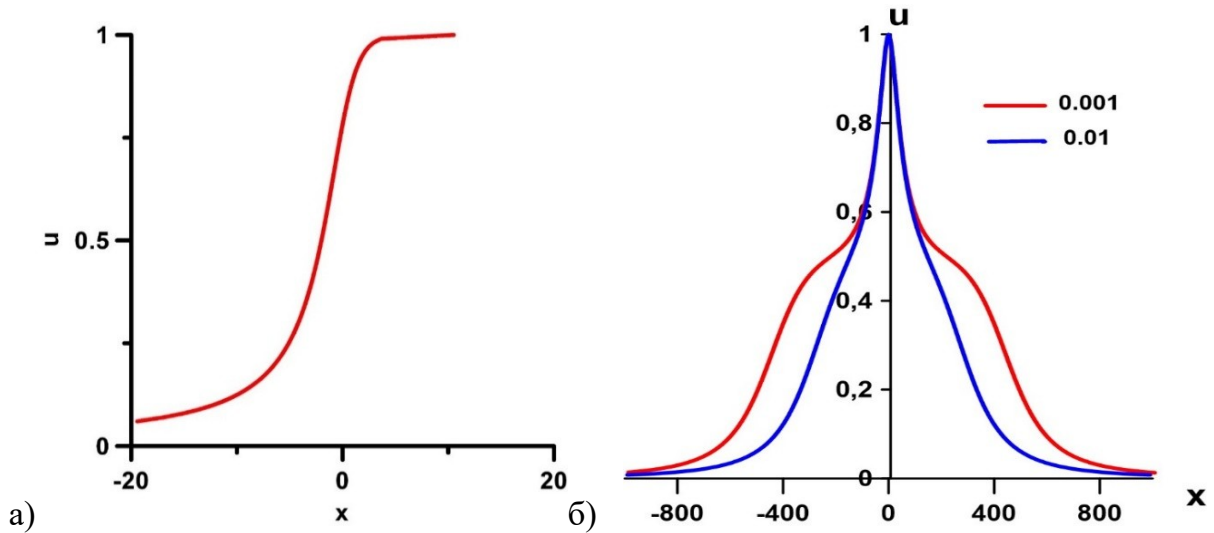


Рис. 7. Рациональные решения обобщенного уравнения Гарднера: а) кинк, б) пирамидальные солитоны для разных ε

Параграф 2.3 «Особенности двухсолитонного взаимодействия в неинтегрируемых системах» посвящен исследованию парных взаимодействий солитонов одинаковой и разной полярности в контексте модульного уравнения Шамеля, которое используется для описания упругих волн в различного рода оболочках, электромагнитных волн в дискретных линиях передачи и многокомпонентной плазме:

$$u_t + \sqrt{|u|}u_x + u_{xxx} = 0. \quad (28)$$

Это уравнение является гамильтоновым с Гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{4}{15}\text{sign}(u)|u|^{\frac{5}{2}} \right] dx. \quad (29)$$

Тогда уравнение (28) будет иметь гамильтонову форму:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\delta H}{\delta u} \right], \quad \text{где} \quad \frac{\delta H}{\delta u} = u_{xx} + \frac{2}{3}\text{sign}(u)|u|^{\frac{3}{2}}. \quad (30)$$

Солитонное решение уравнения (28) есть

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^4(k(x - ct)), \text{ где } c = \frac{8\sqrt{|a|}}{15} \text{ и } k = \sqrt{\frac{c}{16}}. \quad (31)$$

Здесь a представляет собой амплитуду уединенной волны, которая может быть положительной или отрицательной. Параметр c обозначает скорость уединенной волны, а k характеризует волновое число. Солитон, как и во всех уравнениях КдВ – иерархии, бежит направо, то есть он является сверхзвуковым. Поскольку уравнение Шамеля является неинтегрируемым, аналитические методы решения задачи Коши не применимы для анализа волновой динамики. Поэтому приходится прибегать к численному интегрированию, для чего используется псевдоспектральный метод Фурье.

Показано, что качественно взаимодействие однополярных солитонов происходит по КдВ-сценарию, включающее обгонные, обменные и «промежуточные» взаимодействия. Кроме того, показано, что моменты волнового поля при взаимодействии двух солитонов качественно напоминают результаты для уравнения КдВ. Взаимодействие солитонов является почти упругим, означая, что в результате столкновения волн образуется только небольшой дисперсионный хвост. В случае же взаимодействия разнополярных солитонов этот эффект неупругого взаимодействия проявляется сильнее, в результате чего после взаимодействия амплитуда наибольшего солитона увеличивается, а меньшего – уменьшается. В результате чего после множественных столкновений возможно значительное усиление амплитуды наибольшего солитона.

Параграф 2.4 «Неинтегрируемый солитонный газ и волны-убийцы» посвящен моделированию солитонного газа в рамках уравнения Шамеля. Рассчитаны важные статистические характеристики (функции распределения, моменты и т. д.) для однополярного и разнополярного солитонного газа. Проведено сравнение результатов с интегрируемыми моделями КдВ и мКдВ. Отмечается хорошее согласие результатов в случае однополярных солитонных ансамблей. Однако в разнополярном солитонном газе наблюдается принципиальное отличие от модели мКдВ, особенно в поведении эксцесса. Показано, что в результате перехода части энергии от меньших солитонов к большему усредненный эксцесс растет с течением времени (рис. 8а), в то время как в интегрируемых моделях он выходит на стационарный уровень (рис. 8б).

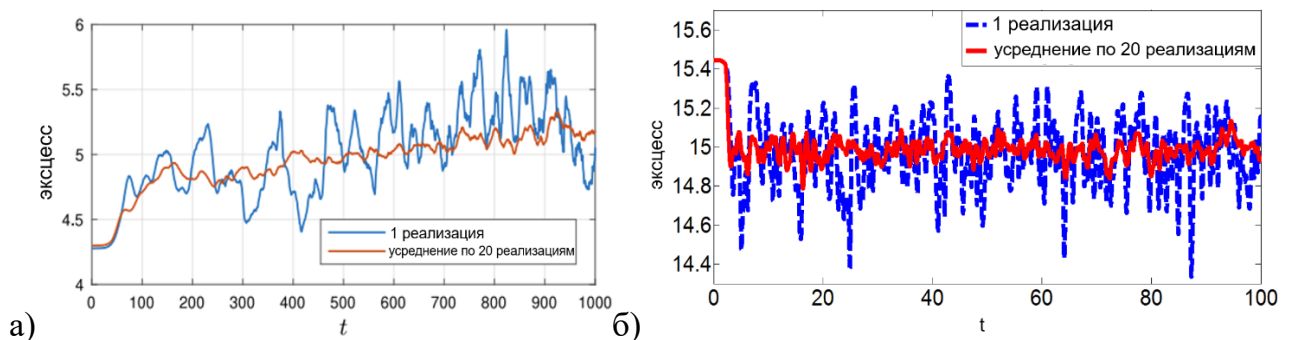


Рис. 8. Эволюция эксцесса солитонного газа в случае: а) разнополярного Шамелевского солитонного газа, б) разнополярного мКдВ газа

Параграф 2.5 «Динамика нерегулярных волн в рамках уравнения Шамеля» посвящен исследованию динамики случайных узкополосных волновых полей (волновой турбулентности) в рамках модульного уравнения Шамеля. Метод Монте-Карло используется для получения большого числа независимых реализаций волновых полей с

целью изучения эволюции следующих статистических характеристик: спектров, моментов и функций распределения. Моделирование проводится для различных значений параметра Урселла (отношения нелинейности к дисперсии), что позволило изучить влияние нелинейности и дисперсии на рассматриваемые процессы. При больших значениях числа Урселла спектры расширяются со временем. Напротив, для волновых полей с относительно малой нелинейностью спектр сужается в области малых волновых чисел, подчеркивая относительную симметрию волновых полей в процессе эволюции. Увеличение нелинейности волнового поля приводит к большей экстремальности, что означает более высокую вероятность наблюдения аномально больших волн. С ростом числа Урселла эксцесс значительно увеличивается вместе с хвостами функций распределения амплитуд волн. Это наблюдение согласуется с аналогичными выводами для интегрируемых систем.

В параграфе 2.6 «Движение солитонов в случайных полях в рамках вынужденного уравнения Бенджамина-Оно» исследуется взаимодействие солитонов с периодической или квазипериодической случайной силой в рамках уравнения Бенджамина-Оно, описывающее гравитационные волны на границе раздела между двумя невязкими жидкостями постоянной плотности, когда нижний слой является бесконечно глубоким:

$$\eta_t + \eta\eta_x + \mathcal{H}[\eta_{xx}] = F(t), \quad (32)$$

где $F(t)$ в общем случае является случайной функцией, а $\mathcal{H}(x, t)$ обозначает преобразование Гильберта, определяемое как

$$\mathcal{H}[\eta(x, t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(z, t)}{z-x} dz. \quad (33)$$

Хотя само уравнение Бенджамина-Оно является полностью интегрируемым, добавление внешней силы делает его неинтегрируемым. Показано, что с помощью замены

$$\eta(x, t) = \zeta(x, t) + Z(t), \text{ где } Z(t) = \int_0^t F(s) ds. \quad (34)$$

это уравнение можно свести к классическому (свободному) уравнению Бенджамена-Оно, которое уже является интегрируемым:

$$\zeta_t + \zeta\zeta_x + \mathcal{H}[\zeta_{xx}] = 0. \quad (35)$$

В результате, можно записать точное стохастическое решение вынужденного уравнения Бенджамена-Оно (32):

$$\eta(X, t) = Z(t) + \frac{A\Delta^2}{\Delta^2 + (X - V(t))^2}, \quad (36)$$

где A - амплитуда солитона, Δ — ширина солитона, а $V(t) = \int_0^t Z(s) ds$.

Значение усредненного поля солитонов вычисляется асимптотически и сравнивается с численными результатами. Например, если функция $V(t)$ является стационарным случайным процессом с равномерно распределенной фазой, то среднее поле есть

$$\langle \eta(X, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 + (X + V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi))^2} \right] d\varphi. \quad (37)$$

На рис. 9 представлены пространственно-временные диаграммы усредненных полей солитона на различных частотах. Слева, когда $V_0 = 1$, усредненный солитон состоит из двух устойчивых импульсов с затухающей амплитудой. Справа же показан один солитон для $V_0 = 0.5$, $\omega_0 = 1$.

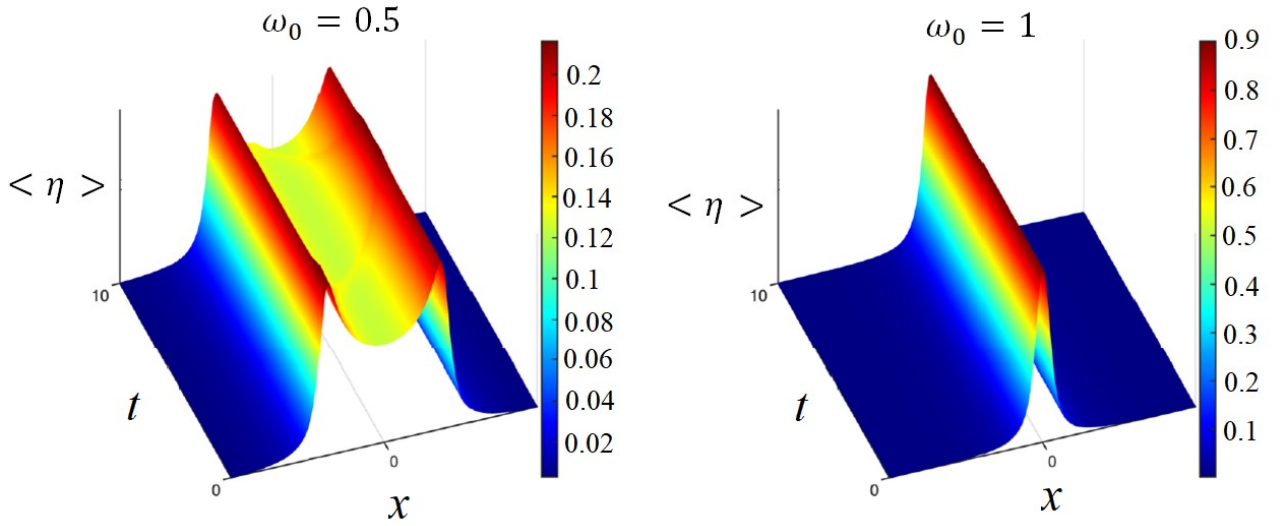


Рис. 9. Усредненное поле солитона

В параграфе 2.7 «Римановы волны в бездисперсионных приближениях модульной КдВ-иерархии» исследуется динамика волн знакопеременной формы в рамках бездисперсионного предела обобщенного уравнения КдВ - модульного уравнения Хопфа ($u_t + Fu_x = 0$) с неаналитической скоростью распространения, содержащей модуль функции при переходе через нуль ($F \sim |u|^\alpha$).

Так, решение модульного уравнения Хопфа для начального периодического возмущения $u(x, 0) = \Psi(x) = |\sin^{\beta-1}(x)| \sin x$ имеет вид

$$u(x, t) = |\sin^{\beta-1}(x - |u|t)| \sin(x - |u|t). \quad (38)$$

Оно существует конечное время $t < T$, где T – время обрушения (градиентной катастрофы)

$$T = \frac{\beta^{\frac{\beta-1}{2}}}{(\beta-1)^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad (39)$$

и разрыв образуется на переднем склоне в точках

$$\sin^2 X = \frac{\beta-1}{\beta}. \quad (40)$$

При $\beta = 3$ градиентная катастрофа происходит на уровне $u = 0.44$ за время $T = 0.866$, как это следует из (39). Этот процесс показан на рис. 10.

Показано, что римановы волны существуют только при определенной гладкости функции $F[u(x)]$ в начальный момент времени, в противном случае волна сразу опрокидывается (градиентная катастрофа). Демонстрируется, что в рамках бездисперсионного уравнения Шамеля и лог-КдВ уравнения римановы волны обрушаются мгновенно. В отличие от классического КдВ уравнения здесь учет дисперсионных эффектов становится принципиальным даже на малых временах.

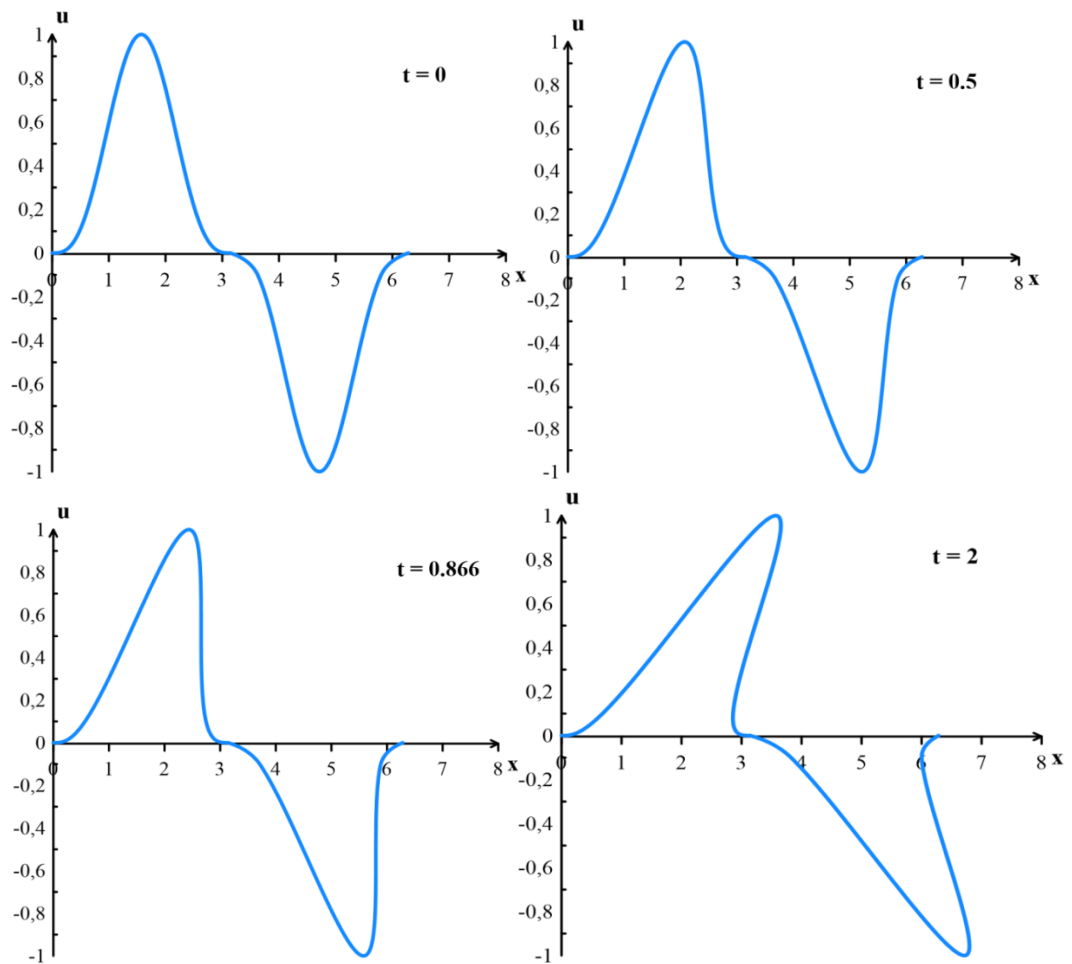


Рис. 10. Трансформация волны ($\beta = 3$) в рамках модульного уравнения Хопфа

Глава 3 «Безотражательные волны в сильно неоднородных средах» посвящена определению условий отсутствия отражения волн (гидродинамических и плазменных) в сильно неоднородных средах (когда параметры среды меняются произвольным образом). Общеизвестным примером является изотермическая атмосфера, в которой волны не испытывают отражения. В данной главе показано, что отражение может отсутствовать и во многих других сильно неоднородных средах, но при определенных условиях на характер неоднородности среды, которые не очень-то и специфичны.

В параграфе 3.2 «Бегущие гравитационные волны в самосогласованных каналах» изучается динамика длинных поверхностных гравитационных волн в так называемых самосогласованных водных каналах (рис. 11).

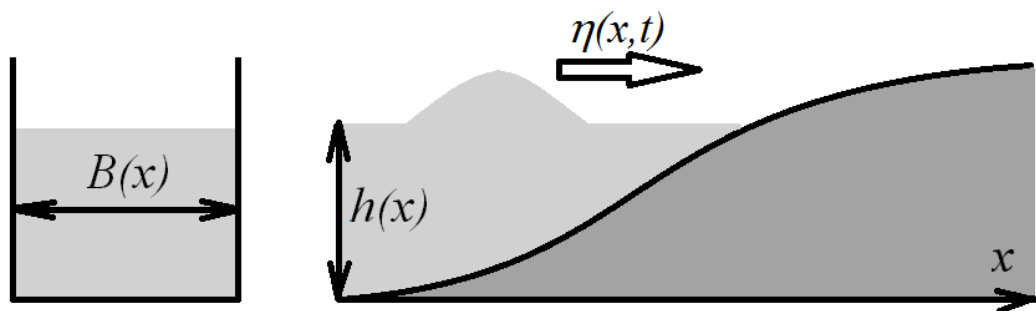


Рис. 11. Профиль водного канала

Самосогласованным будем называть канал, для которого выполняется условие (этому условию в радиофизике соответствует постоянство импеданса):

$$B(x)c(x)=const, \quad (41)$$

где $B(x)$ – переменная ширина канала и $c(x) = \sqrt{gh(x)}$ – скорость распространения длинных волн.

При пренебрежении дисперсией и нелинейными членами исходные уравнения мелкой воды сводятся к уравнению

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (42)$$

($\eta(x,t)$ – вертикальное смещение водной поверхности, g – ускорение свободного падения) которое, в свою очередь, при выполнении условия (41) сводится к волновому уравнению с постоянными коэффициентами, общее решение которого описывается суперпозицией двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Пример эволюции гауссовского импульса в самосогласованном канале с сильно изменяющейся шириной и глубиной в рамках (41) и (42) показан на рис. 12.

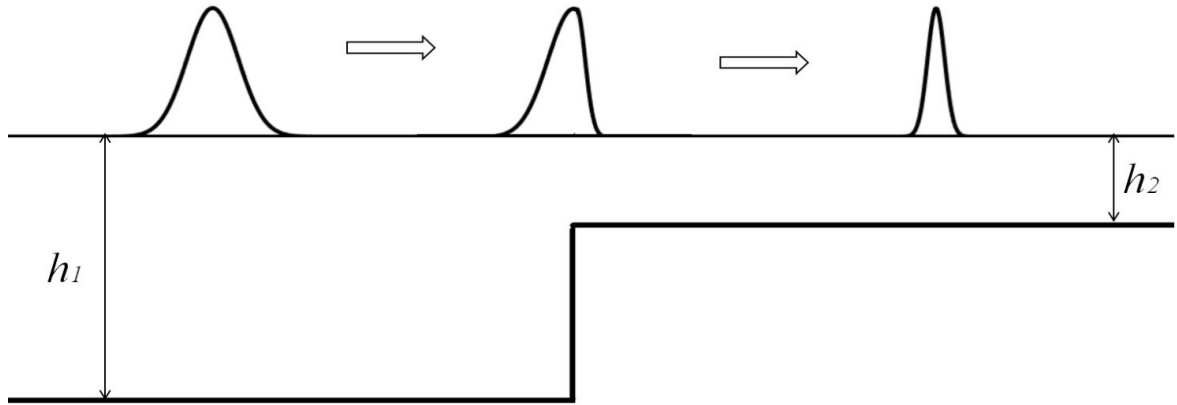


Рис. 12. Трансформация гауссова импульса вдоль самосогласованного канала с сильно изменяющейся шириной и глубиной

Наряду со смещением водной поверхности можно вычислить поле скоростей течения

$$u(x,t) = \frac{g}{c(x)} \eta[t - \tau(x)] = \sqrt{\frac{g}{h(x)}} \eta[t - \tau(x)], \quad (43)$$

$$\text{где } \tau = \int \frac{dx}{c(x)}.$$

Как видно, временная форма вариаций течения также не меняется с дистанцией, однако ее амплитуда уже меняется с расстоянием.

При учете как слабой нелинейности, так и дисперсии выведено обобщенное уравнение КдВ с переменными коэффициентами, в котором $h(x)$ может быть любой функцией (но при сохранении условия (41)):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \left[1 + \frac{ch}{4} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{3\eta}{2h} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c}{6h} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = \frac{c\eta^2}{4h^2} \frac{dh}{dx}. \quad (44)$$

Насколько нам известно, это пока единственный случай вывода уравнения КдВ для сильно неоднородной среды, и единственно, что для этого потребовалось, это самосогласованность параметров канала, так называемое постоянство импеданса (и, конечно, малость нелинейности и дисперсии).

В общем случае глубина может меняться по произвольному закону в пространстве. Рассмотрим пример трансформации уединенной волны над уступом в самосогласованном канале. После уступа нелинейность и дисперсия приводят к трансформации солитона, что может быть описано в рамках уравнения Кортевега-де Вриза. До скачка солитон имеет форму $\eta_1(x)$, а после него волна описывается аналогичным выражением, но с другим масштабом $\eta_2(x)$:

$$\eta_1(x) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3A_0}{4h_1}} \frac{x}{h_1} \right], \quad \eta_2(x) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3A_0}{4h_2}} \frac{x}{h_1} \right]. \quad (45)$$

В результате изменяется число Урселла, характеризующее отношение нелинейности к дисперсии

$$U = \frac{A\lambda^2}{h^3}, \quad (46)$$

которое теперь равно

$$U_2 = \frac{A_2 \lambda_2^2}{h_2^3} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2. \quad (47)$$

Поскольку волна после скачка имеет солитоноподобную форму (но не солитон), то расчет амплитуд возникающих солитонов относительно простой, основанный на точном решении обратной задачи рассеяния. Амплитуды вторичных солитонов находятся в явном виде

$$\frac{A_{n+1}}{A_0} = \frac{1}{4U_2} \left[\sqrt{1+8U_2} - (1+2n) \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (48)$$

где N – максимальное число солитонов. В частности, амплитуда лидирующего солитона равна

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \left[\sqrt{1+8 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2} - 1 \right]^2. \quad (49)$$

Зависимость амплитуд вторичных солитонов от перепада глубин показана на рис. 13.

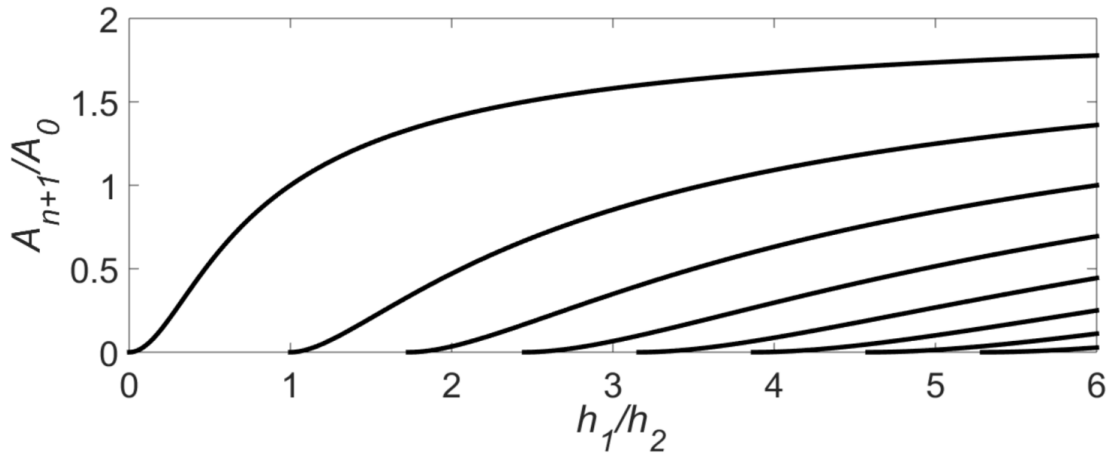


Рис. 13. Амплитуды вторичных солитонов в зависимости от перепада глубин

В параграфе 3.3 «Безотражательное распространение цилиндрических волн» найдены бегущие кольцевые волны в среде с переменной скоростью распространения в рамках уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\rho) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), \quad (50)$$

где $c(\rho)$ – переменная скорость распространения, на гладкость которой не накладываются никаких условий.

Для этого применялась трансформационная техника [Капцов и Капцов, 2023; Manganaro and Rizzo, 2024] с использованием преобразования

$$u = A(\rho)G[t, \tau(\rho)], \quad (51)$$

где $A(\rho)$, $G(t, \tau)$, $\tau(\rho)$ - неизвестные функции. После подстановки (51) в уравнение (50), оно принимает вид уравнения Клейн-Гордона с переменными коэффициентами:

$$A \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2(\rho) \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \right) - c^2(\rho) \left(2 \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A \frac{d^2 \tau}{d\rho^2} + A \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} \right) \frac{\partial G}{\partial \tau} - c^2(\rho) \left(\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \right) G = 0. \quad (52)$$

Данное уравнение содержит переменные коэффициенты и ничем не проще исходного уравнения (50). Однако, как и в предыдущем параграфе, оно сводится к уравнению с постоянными коэффициентами с решениями в виде бегущих волн для скорости распространения ($c(\rho) \sim \rho$ и $c(\rho) \sim \rho \ln^2 \rho$). Специальное внимание уделено сингулярностям, возникающим в решении в точках $c(\rho) = 0$. Исследована трансформация цилиндрической волны в такой неоднородной среде.

В параграфе 3.4 «Безотражательные магнитогидродинамические (мгд) волны в неоднородной плазме» исследуется существование бегущих МГД волн в сильно неоднородной замагниченной плазме различной размерности.

Уравнения магнитной гидродинамики для волн в плоском слое с неоднородным магнитным полем, записанное в криволинейных ортогональных координатах ϕ (магнитный потенциал) и ψ (магнитная потоковая функция), может быть сведено к одномерному волновому уравнению [Ruderman and Petrukhin, 2017]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{B^2}{B_0^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right). \quad (53)$$

Здесь v - скорость течения магнитного поля направлена вдоль координаты y , $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$ - невозмущенное магнитное поле, где V_A – альфеновская скорость. Эта ситуация представляется уникальной, когда, несмотря на двумерность исходной задачи, волновое уравнение является одномерным, что обусловлено спецификой движения плазмы в магнитном поле. Применяя трансформацию типа (51) мы получили, что для существования бегущих волн должна выполняться следующая связь между магнитным полем и плотностью плазмы

$$\rho(\psi, \phi) = \frac{\rho_0(\psi)}{\left[1 + a(\psi) \int_0^\phi (B_0 / B)^2 d\phi \right]^4}, \quad (54)$$

где $\rho_0(\psi)$ и $a(\psi)$ - произвольные функции. В качестве примера определим магнитный потенциал ϕ и магнитную потоковую функцию ψ в слое как

$$\psi = H \exp(-z / H) \sin(x / H), \quad \phi = -H \exp(-z / H) \cos(x / H), \quad (55)$$

где H – постоянная величина размерности длины и $|x / H| < \pi / 2$.

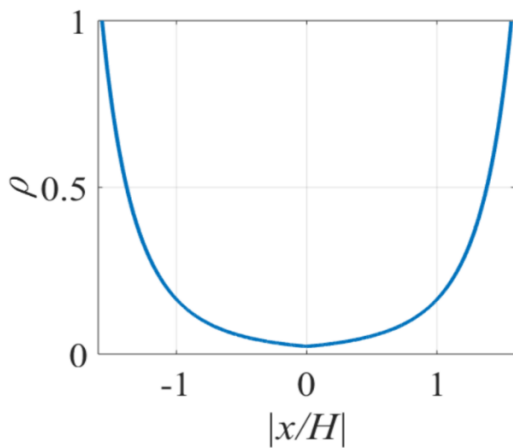


Рис. 14. Безотражательный» профиль плотности плазмы

Изменение плотности плазмы в таком случае приведено на рис. 14.

Итак, в плоском слое с плотностью плазмы, зависящей только от поперечной координаты, и магнитным полем, изменяющимся вдоль слоя, как и поперек его, может распространяться бегущая волна вдоль слоя, причем ее амплитуда переменна только в поперечном направлении, пропорциональна плотности плазмы в степени минус четыре.

Также показано, что случай безотражательного распространения МГД волн возможен при распространении альфеновских волн в осесимметричной расходящейся трубке, заполненной неоднородной несжимаемой плазмой.

Глава 4 «Волны-убийцы в гидродинамике: наблюдения и анализ» посвящена приложениям теории нелинейных волн к поверхностным и внутренним гравитационным волнам в водной среде. В параграфе 4.2 «Каталог наблюдений волн-убийц в Мировом океане и их анализ» проведена классификация и собрана статистика происшествий с волнами-убийцами за период с 2005 по 2021 год на основе описаний событий в средствах массовой информации и научной литературе. Получено свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2022621037 «База данных описаний волн-убийц в Мировом Океане в 2011-2021». Большинство отобранных событий волн-убийц основывались на описаниях очевидцев. Однако все они соответствовали общепринятому

описанию волны-убийцы: аномально большая волна, сильно возвышающаяся над окружающими волнами, ставшая неожиданностью для людей и судов, оказавшихся на ее пути, а также нанесящая ущерб. Карта событий приведена на рис. 16.

Распределение глубоководных, мелководных и прибрежных волн-убийц оказалось следующим: 81 (19%) событие произошло на глубокой воде (глубина более 50 метров), 124 (29%) события - на мелкой воде (глубина менее 50 метров) и 224 события (52%) - на побережье, включая 82 (19%) – внезапные затопления пологих пляжей и 142 (33%) – внезапные заплески на высоких скалах и прибрежных конструкциях. Еще один критерий, объединяющий все рассматриваемые волны-убийцы, — причиненный ущерб. Перечисленные события привели к травмам (575) и гибели (658) людей, повреждениям судов (102) и затоплению судов (55), включая малые рыболовные суда и крупные суда.

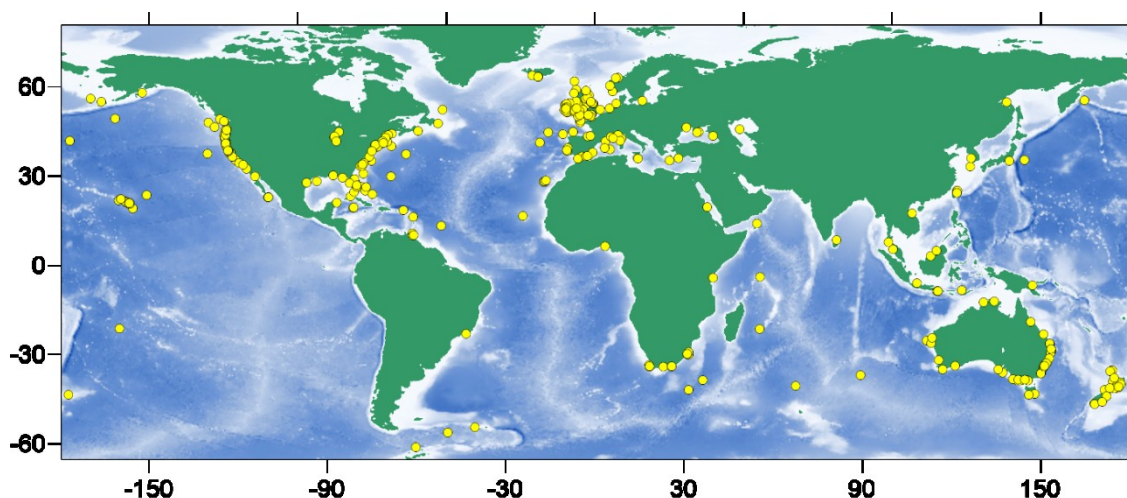


Рис. 16. Карта происшествий с волнами-убийцами с 2005 по 2021 год

Особое внимание было уделено анализу физического механизма возбуждения волн-убийц, связанного с нелинейным эффектом модуляционной неустойчивости (неустойчивости Бенджамина-Фейра), который для однонаправленных волн, как известно, проявляется при $kh > 1.63$. Показано, что данный критерий хорошо применим на глубинах более 20 метров для наблюдавшихся волн-убийц (рис. 17).

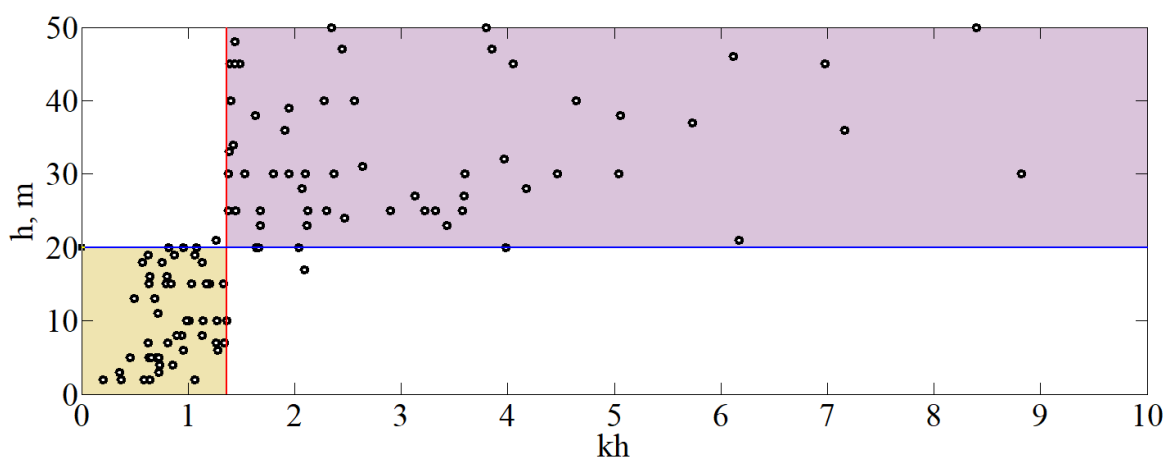


Рис. 17. Зависимость параметра kh от глубины воды (красная линия соответствует порогу критерия модуляционной неустойчивости):

В параграфе 4.3 «Пример расчета волн-убийц на поверхности океана» приведен пример расчета волн-убийц на поверхности океана с использованием конкретной информации о наблюдаемой волне-убийце. **В параграфе 4.4 «Аналитические выражения для донного давления, сопряженные с нелинейными эволюционными уравнениями»** обсуждается роль различных длинноволновых аппроксимаций в описании волнового поля и донного давления, вызываемого поверхностными волнами, и их связь с эволюционными уравнениями. В качестве эволюционных уравнений используются уравнение Уизема [Уизем, 1977]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3c_0}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{D}(x-y) \frac{\partial \eta(y,t)}{\partial y} dy = 0, \quad \hat{D}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}} \exp(ik\xi), \quad (56)$$

уравнение Кортевега-де Вриза в размерных переменных:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (57)$$

и уравнение Бенджамина-Бона-Махони (ББМ):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (58)$$

Эти уравнения асимптотически одинаковы в пределе длинных волн, но ведут к разным эффектам для коротких волн. Рассмотрены различные образы волны-убийцы в вариациях донного давления. Показано, что данное давление лучше вычисляется с помощью уравнения ББМ, чем уравнения КдВ. Так, например, если на поверхности задать волну в следующем виде

$$\eta(x) = A_0 \left[1 + \left(\frac{h}{l} \right)^2 - \frac{2h^2 x^2}{l^4} \right] \exp \left[- \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (59)$$

то расчеты донного давления в длинноволновом линейном приближении дают следующие выражения:

$$\xi_{BBM}(x) = A_0 \exp \left[- \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (60)$$

$$\xi_{KdV}(x) = A_0 \left[1 - \frac{3h^4}{l^4} + \frac{12h^4 x^2}{l^6} - \frac{4h^4 x^4}{l^8} \right] \exp \left[- \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]. \quad (61)$$

Если волна очень длинная ($l/h = 5$), то разница в предсказаниях ББМ и КдВ моделях незначительна (рис. 18а), что можно было ожидать для волн, весь спектр которых сосредоточен в длинных волнах. Однако для более коротких волн ($l/h = 2$) разница становится заметной (рис. 18б).

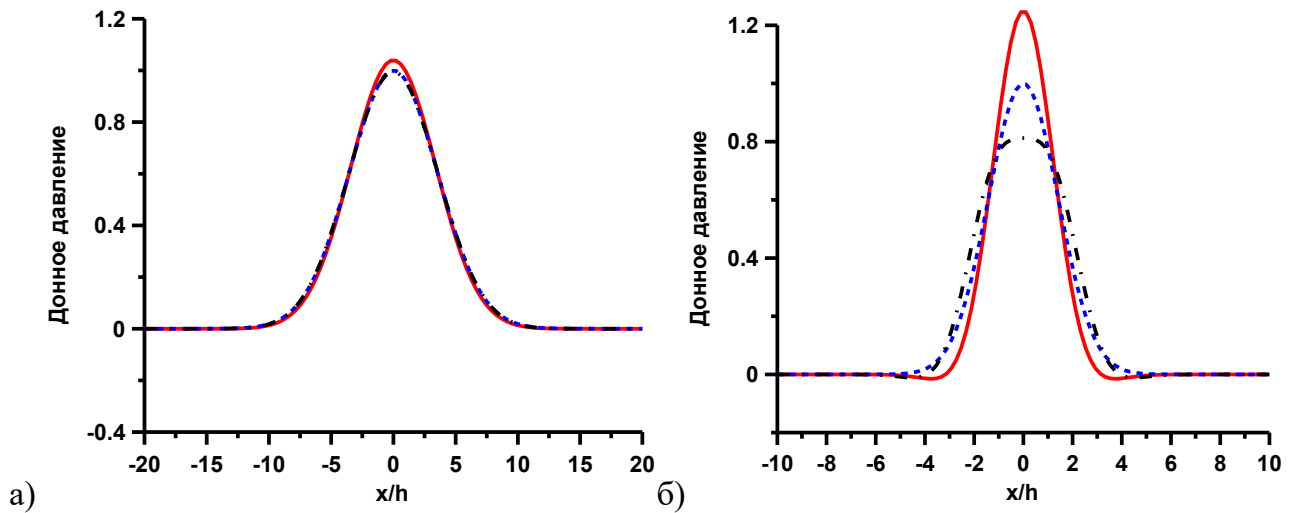


Рис. 18. Отклик длинной волны гладкой формы в вариациях донного давления (сплошная кривая – смещение поверхности, штриховая – ББМ приближение и штрих-пунктирная – КдВ приближение): а) $l/h = 5$, б) $l/h = 2$

Параграф 4.5 «Интенсивные внутренние волны и уравнение Гарднера» посвящен расчетам параметров солитонных ансамблей внутренних волн на одном из океанических шельфов с учетом стратификации в рамках уравнения Гарднера, для которого эволюционной переменной является координата, а не время. Такое преобразование делается переходом в движущую систему координат с «бегущим» времени $\tau = t - x/c$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\alpha}{c^2} \eta + \frac{\alpha_1}{c^2} \eta^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\beta}{c^4} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^3} = 0. \quad (62)$$

В результате граничные условия ставятся не в пространстве (что привычно), а во времени. Выбраны периодические граничные условия на интервале длительностью 12.4 часа, что соответствует так называемому бароклинному приливу. В качестве «начальных» ($x = 0$) условий принимаются ансамбли солитонов вида:

$$\eta_0(t) = \sum_{i=1}^{13} \frac{a_i \left(2 - \frac{a_i}{a_{\text{lim}}} \right)}{1 + \left(1 - \frac{a_i}{a_{\text{lim}}} \right) \cosh(\gamma_i V_i t + \varphi_i)} \quad \gamma_i = \sqrt{\frac{\alpha a_i}{6\beta} \left(2 - \frac{a_i}{a_{\text{lim}}} \right)} \quad V_i = \frac{\alpha a_i}{6} \left(2 - \frac{a_i}{a_{\text{lim}}} \right). \quad (63)$$

Трансформация волнового поля в одной из начальных реализаций на разных расстояниях показана на рис. 19.

В процессе эволюции солитоны объединяются в импульсы сложной формы, в результате чего количество импульсов может заметно сокращаться вдоль трассы, что хорошо видно на гистограммах амплитуд волн в точках $x=10$ км и 250 км (рис. 20).

Также были построены высшие статистические моменты (асимметрия и эксцесс) и их усредненные по 50 реализациям значения. Отмечено уменьшение усредненных моментов до 20% с расстоянием.

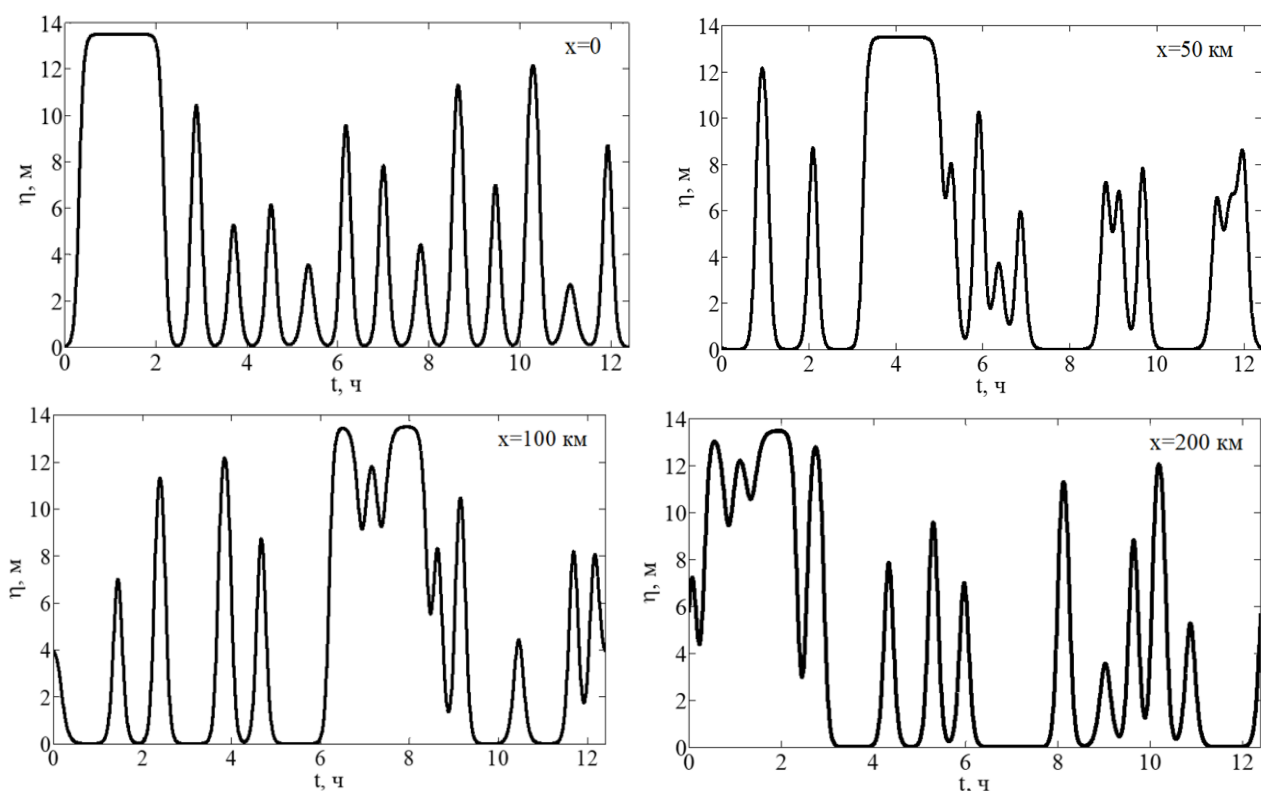


Рис. 19. Эволюция ансамбля солитоноподобных внутренних волн на разных расстояниях

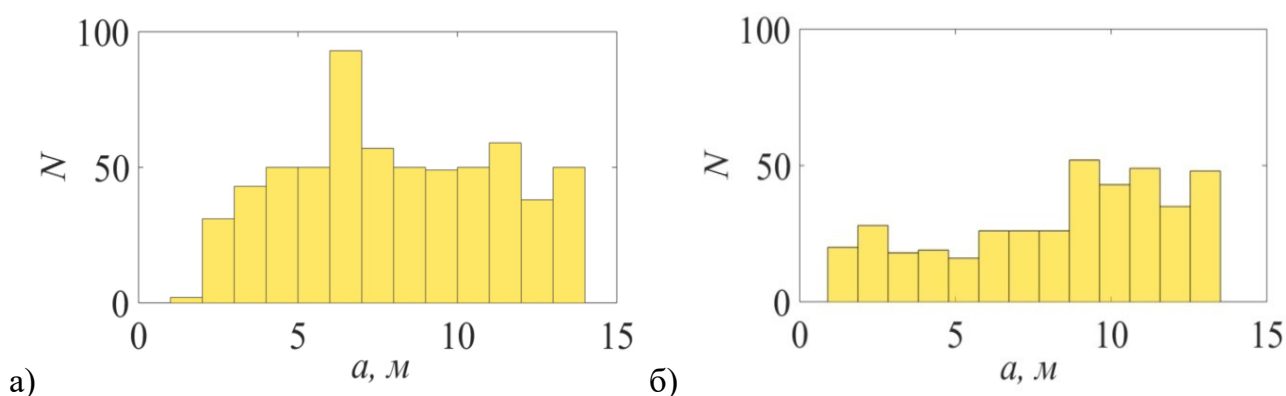


Рис. 20. Гистограммы амплитуд импульсов по уровню 1.5 м, усредненные по 50 реализациям в двух локациях: а) $x=10$ км, б) $x=250$ км. N – количество импульсов

В параграфе 4.6 «Внутренние волны цунами, вызванные эксплозивным извержением подводного вулкана» выполнен анализ динмики внутренних волн, возникающих в двухслойной жидкости при эксплозивном извержении подводного вулкана. Эта задача возникла после публикации наблюдений внутренних волн во время извержения вулкана на архипелаге Тонга 15.01.2022. Геометрия задачи изображена на рис. 21.

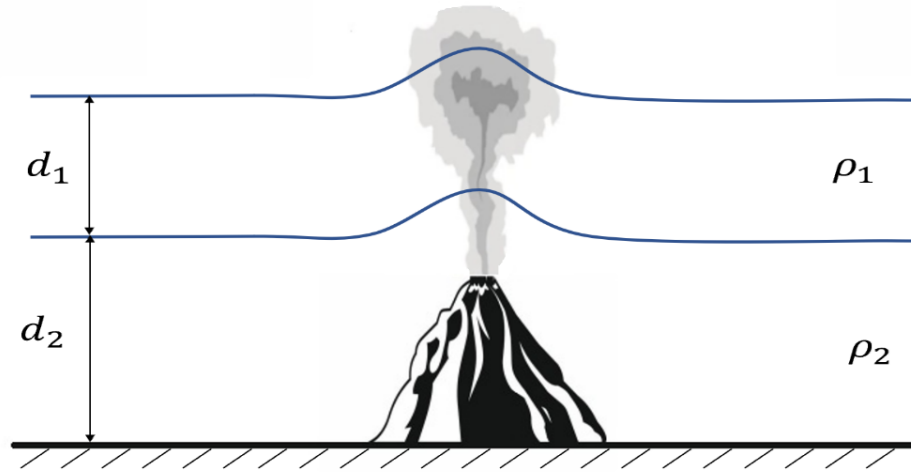


Рис. 21. Геометрия задачи

Процессы, происходящие в ближней зоне, параметризуются начальным очагом в виде смещения водного столба, как это предложено Ле Меоте для взрывных источников [Le Mehaute, 1971]. В качестве начального условия наиболее часто используется параболическая каверна следующего типа (рис. 22)

$$\eta_e(r) = h \begin{cases} 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (64)$$

с нулевой массой, для которой получаются относительно простые формулы для волнового поля. Ее параметры (h и R) опытным путем связаны с энергией (мощностью) взрыва и глубины его залегания.

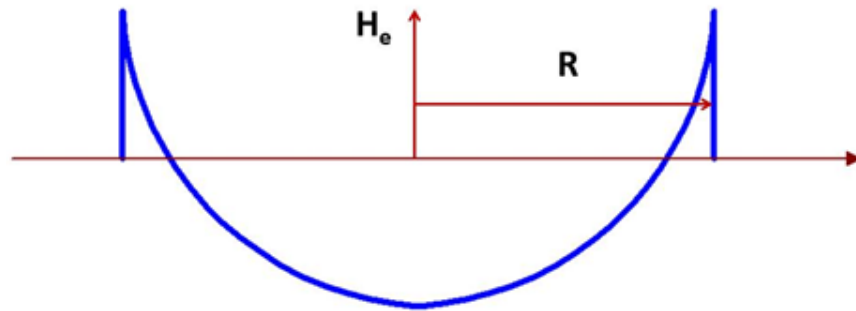


Рис. 22. Начальная каверна параметрического очага

Решение линейной задачи для начального условия (64) получается с использованием преобразования Ханкеля

$$\eta(r, t) = hR \int_0^{\infty} J_3(kR) J_0(kr) \cos(\omega t) dk, \quad (65)$$

где J_0 и J_3 - функции Бесселя нулевого порядка и третьего порядка соответственно. Эта формула приводилась неоднократно в статьях, посвященных поверхностным волнам от данного типа начальных условий (см., например, [Le Mehaute, 1971; Mirchina and Pelinovsky, 1988]). Для анализа волнового поля в дальней зоне на больших расстояниях

от вулкана удобно применить метод стационарной фазы, что приводит к системе параметрических уравнений, аналогичных по виду для поверхностных волн

$$\eta(r, t) \approx \frac{\eta_e R}{r} \sqrt{\frac{c_{gr}(k)}{k |dc_{gr}/dk|}} J_3(kR) \cos \left[kr - \omega(k)t - \frac{\pi}{4} \right], \quad c_{gr}(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{r}{t}, \quad (66)$$

где c_{gr} – групповая скорость внутренних волн. Задавая расстояние от вулкана, из (66) находится $k(t)$, а затем и само волновое поле.

Формулы (66) являются универсальными для волн цунами, связанных с извержением подводного вулкана, и описывают как поверхностные волны, так и внутренние на границе раздела двух слоев. Однако в силу разных законов дисперсии, решения для поверхностных и внутренних волн будут различны. В безразмерных переменных волновое поле (66) записывается системой уравнений

$$\xi(x, \tau) \approx \frac{1}{x} B(K, l, \mu) \cos \left[Kx - \Omega(K)\tau - \frac{\pi}{4} \right], \quad B(K, l, \mu) = \mu \sqrt{\frac{c_{gr}(K)}{K |dc_{gr}/dK|}} J_3(K\mu),$$

$$c_{gr}(K) = \frac{d\Omega}{dK} = \frac{x}{\tau}. \quad (67)$$

Здесь безразмерная амплитуда $B(K, l, \mu)$ зависит от двух параметров: отношения толщин слоев ($l = d_2/d_1$) и отношения радиуса очага к толщине слоя ($\mu = R/d_1$). Зависимость $B(k)$ показана на рис. 23 в широком диапазоне изменения параметров. Волны распадаются на группы различной длины. Увеличение толщины нижнего слоя (следовательно, полной глубины бассейна) ведет к уменьшению амплитуды, а увеличение радиуса очага – к ее увеличению.

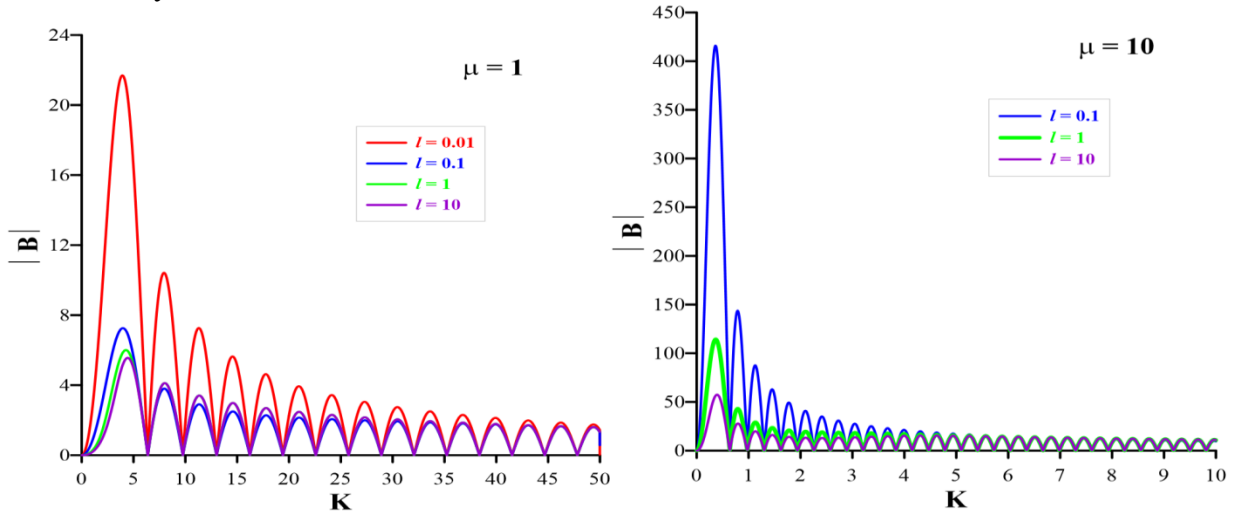


Рис. 23. Зависимость модуля амплитуды внутренней волны цунами от волнового числа для различных значений параметров задачи

Осциллограммы волнового поля (мареограммы) показаны на рис. 24 на расстоянии $r = 100 R$ (в размерных переменных). Как уже предсказывалось, волновое поле состоит из нескольких цугов, из которых максимальным является первый цуг. Хотя время прихода волны определяется максимальной скоростью длинных волн, волны максимальной амплитуды приходят значительно позднее, что дает возможность подготовиться к их приходу.

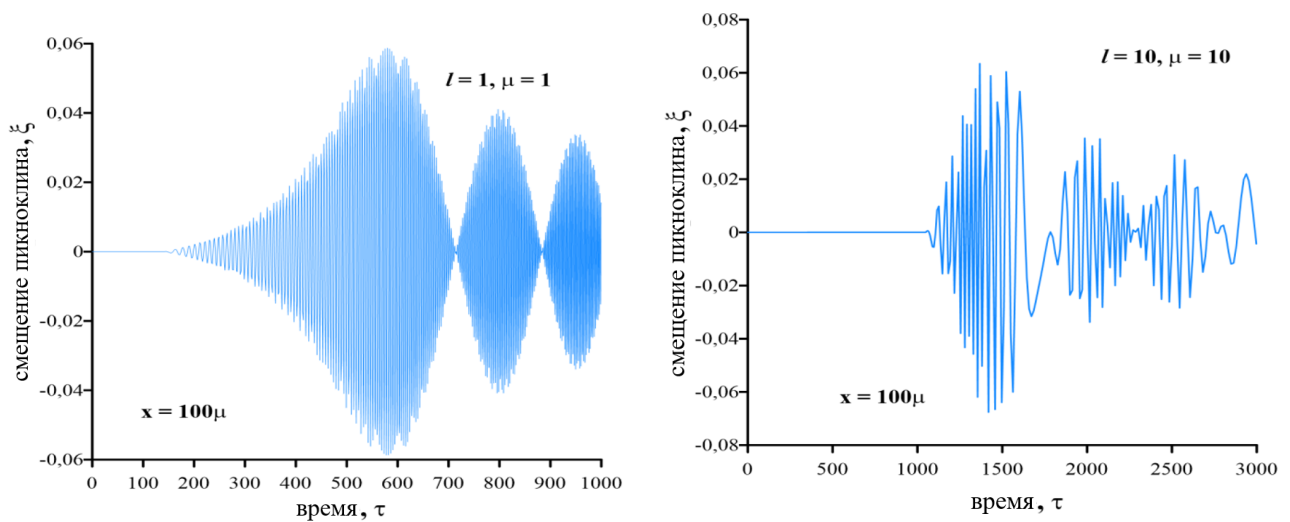


Рис. 24. Мареограммы колебаний пикноклина во внутренней волне при различных значениях параметров l и μ в точке $x = 100\mu$ ($r = 100R$)

При большом размере очага (больших μ) периоды волн возрастают, поскольку длина волны пропорциональна размеру очага. Амплитуды волн в дальней зоне составляют проценты от высоты в очаге, но в переводе на реальные цифры могут соответствовать нескольким метрам. Так, эквивалентный очаг извержения вулкана Кракатау в 1883 году имел высоту в 200 м, а радиус 3 км [Choi et al, 2003]. Из наших расчетов следует, что высота внутренней волны на расстоянии 300 км может быть порядка 10 м и оставаться опасной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты:

- 1) Определено влияние полярности солитонов на характеристики интегрируемого Гарднеровского солитонного газа. В случае дефокусирующего уравнения Гарднера, когда возможно существования солитонов только одной полярности, рассмотрено влияние предельного («толстого») солитона на статистические моменты солитонного газа, которое существенно, если интенсивность «толстого» солитона сравнима с интенсивностью солитонов «умеренной» амплитуды. В случае фокусирующего уравнения Гарднера взаимодействие разнополярных солитонов ведет к росту статистических моментов и сдвигу функции распределения амплитуд волн в область больших значений.
- 2) Изучен процесс генерации волн-убийц в разнополярном интегрируемом Гарднеровском солитонном газе. Их амплитуда зависит от количества сталкивающихся солитонов. Формы волн-убийц достаточно разнообразны, и их полярность совпадает с полярностью наиболее быстрого солитона, участвующего во взаимодействии (даже если его амплитуда меньше остальных). Аналитически выведен и численно подтвержден критерий перехода к отрицательной скорости малого солитона как в периодической решетке больших солитонов, так и в солитонном газе со случайными амплитудами.
- 3) Исследовано влияние однородного шума на динамику бризерной турбулентности. Показано, что волновые поля со значительной бризерной составляющей яв-

ляются наиболее оптимальными с точки зрения генерации волн-убийц. Напротив, однородный шум большой интенсивности поглощает бризерную турбулентность.

- 4) Найдены рациональные ограниченные решения (алгебраические солитоны) обобщенного уравнения Гарднера. Аналитические выражения получены для уравнения, в котором имеются два нелинейных слагаемых, степени которых отличаются в два раза. Если число нелинейных слагаемых больше двух, то показано, что возникают новые типы рациональных решений, представляющих собой кинки, пирамидальные или столообразные солитоны.
- 5) Проведено исследование парных солитонных взаимодействий в рамках уравнения Шамеля. Они происходят по сценарию взаимодействия мКдВ-солитонов, однако вследствие появления диспергирующих хвостов солитонов исходное состояние восстанавливается с небольшой погрешностью. Показано, что в процессе взаимодействия солитонов разных полярностей амплитуда результирующего импульса увеличивается, но она меньше суммы амплитуд солитонов до взаимодействия. Новым результатом здесь является неупругая передача части энергии от меньшего солитона к большему, поэтому амплитуда большего солитона становится еще больше, чем была до взаимодействия.
- 6) Проведено исследование динамики Шамелевского однополярного солитонного газа, вероятностные характеристики которого аналогичны соответствующим характеристикам интегрируемого КдВ-солитонного газа, что связано с малой величиной излучения. В случае же ансамблей разнополярных солитонов показано, что по сравнению с интегрируемой турбулентностью, где усредненные статистические моменты на больших временах выходили на стационар, здесь наблюдается рост усредненного эксцесса во времени. Накопление энергии в наибольших солитонах и нелинейное взаимодействие разнополярных солитонов в неинтегрируемых системах являются новыми механизмами образования аномально больших волн – волн-убийц.
- 7) Получено точное решение и исследована динамика волн знакопеременной формы в рамках бездисперсионного предела уравнения КдВ-типа с неаналитической скоростью распространения, содержащей модуль функции при переходе через нуль. Показано, что римановы волны существуют только при определенной гладкости функции скорости распространения в начальный момент времени, в противном случае волна сразу опрокидывается (градиентная катастрофа). В качестве примеров рассмотрены модульное уравнение Хопфа, бездисперсионный предел уравнения Шамеля и логарифмического уравнения Кортевега-де Вриза.
- 8) Выведено модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза для поверхностных гравитационных волн в самосогласованном водном канале переменного сечения, параметры которого могут значительно меняться с расстоянием. Исследован процесс возникновения вторичных солитонов в зоне резкого изменения сечения канала. Получен новый класс бегущих радиально симметричных волн в среде с переменной по радиусу скоростью распространения волны.
- 9) Проведен анализ бегущих магнитогидродинамических (МГД) волн в сильно неоднородной плазме, где возможно значительное усиление волновой энергии. Найдены пространственные конфигурации магнитного поля и плотности плазмы, соответствующие реальным условиям солнечной плазмы.

- 10) Составлена объединенная база данных волн-убийц, произошедших в Мировом океане с 2005 по 2021 гг, в который вошло 429 событий. Отдельно отмечены случаи происшествий с волнами-убийцами в морях, окружающих Россию. Проведен анализ выполнимости критерия модуляционной неустойчивости и причастности данного механизма к образованию конкретной волны-убийцы. Показано, что данный критерий хорошо применим на глубинах более 20 метров для наблюдавшихся волн-убийц.
- 11) Выполнен расчет вариаций донного давления, вызванных прохождением волны-убийцы на морской поверхности, и показано, что наилучшие результаты дает уравнение Бенджамина-Бона-Махони по сравнению с уравнением Кортевега – де Вриза.
- 12) Развита аналитическая модель генерации внутренних волн при эксплозивном извержении подводного вулкана. В рамках двухслойной жидкости рассчитаны характеристики волнового поля. Волновое поле содержит цуги волн, причем головной цуг имеет наибольшую амплитуду.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- Д - 1. **Didenkulova, E.** Mixed turbulence of breathers and narrowband irregular waves: mKdV framework / E. Didenkulova // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2022. – V. 432. – 133130.
- Д - 2. Pelinovsky, E. KDV soliton gas: interactions and turbulence / E. Pelinovsky, **E. Shurgalina (Didenkulova)** // Book: *Challenges in Complexity: Dynamics, Patterns, Cognition, Series: Nonlinear Systems and Complexity*. Eds.: I. Aronson, A. Pikovsky, N. Rulkov, L. Tsimring. – Berlin: Springer, 2017. – V. 20. – P. 295-306.
- Д - 3. **Didenkulova, E.G.** Numerical modeling of soliton turbulence within the focusing Gardner equation: rogue wave emergence / E.G. Didenkulova (Shurgalina) // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2019. – V. 399. – P. 35-41.
- Д - 4. Flamarion, M.V. Investigating overtaking collisions of solitary waves in the Schamel equation / M.V. Flamarion, E.N. Pelinovsky, **E. Didenkulova** // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2023. – V. 174. – 113870.
- Д - 5. Flamarion, M.V. Non-integrable soliton gas: The Schamel equation framework / M.V. Flamarion, E.N. Pelinovsky, **E. Didenkulova** // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2024. – V. 180. – 114495.
- Д - 6. Pelinovsky, E. Interfacial long traveling waves in a two-layer fluid with variable depth / E. Pelinovsky, T. Talipova, I. Didenkulova, **E. Didenkulova** // *Stud Appl Math*. – 2019. – V. 142. – № 4. – P. 513-527.
- Д - 7. Pelinovsky, E. Nonlinear wave dynamics in self-consistent water channels / E. Pelinovsky, I. Didenkulova, **E. Shurgalina (Didenkulova)**, N. Aseeva // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2017. – V 50. – 505501.
- Д - 8. Petrurhin, N.S. Phase mixing of Alfven waves in axisymmetric non-reflective magnetic plasma configurations / N.S. Petrurhin, M.S. Ruderman, **E.G. Shurgalina (Didenkulova)** // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2018. – V. 474. – № 2. – P. 2289–2301.

- Д - 9. Talipova, T. Internal tsunami waves in the stratified ocean, induced by explosive volcano eruption: parametric source / T. Talipova, E. Pelinovsky, **E. Didenkulova** // *Phys. Fluids*. – 2024. – V. 36. – 042110.
- Д - 10. **Didenkulova, E.** Breather's Properties within the Framework of the Modified Korteweg–de Vries Equation / E. Didenkulova, E. Pelinovsky // *Symmetry*. – 2020. – V. 12. – 638.
- Д - 11. **Didenkulova, E.** Soliton-breather interaction: the modified Korteweg - de Vries equation framework / E. Didenkulova, E. Pelinovsky // *Symmetry*. – 2020. – V. 12. – № 9. – 1445.
- Д - 12. **Didenkulova, E.** Bipolar Solitary Wave Interactions within the Schamel Equation / E. Didenkulova, E. Pelinovsky, M.V. Flamarion // *Mathematics*. – 2023. – V. 11. – 4649.
- Д - 13. Pelinovsky, E.N. The Hopf equation with certain modular nonlinearities / E.N. Pelinovsky, T.G. Talipova, **E.G. Didenkulova** // *Physics Letters A*. – 2024. – V. 507. – 129489.
- Д - 14. **Shurgalina (Didenkulova), E.G.** Nonlinear dynamics of a soliton gas: Modified Korteweg-de Vries equation framework / E.G. Shurgalina, E.N. Pelinovsky // *Physics Letters A*. – 2016. – V. 380. – № 24. P. 2049-2053.
- Д - 15. **Didenkulova, E.** Long-wave approximations in the description of bottom pressure / E. Didenkulova, E. Pelinovsky, J. Touboul // *Wave Motion*. – 2021. – V. 100. – 102668.
- Д - 16. Пелиновский, Е.Н. Формирование волн-убийц в солитонном газе, описываемом модифицированным уравнением Кортевега - де Вриза / Е.Н. Пелиновский, **Е.Г. Шургалина (Диденкулова)** // *Доклады Академии Наук (Физика)*. – 2016. – Т. 470. – № 1. – С. 26-29.
- Д - 17. **Шургалина (Диденкулова), Е.Г.** Особенности двухсолитонного взаимодействия в рамках уравнения Гарднера / Е.Г. Шургалина // *Известия вузов. Радиофизика*. – 2017. – Т. 60. – № 9. – С. 787-792.
- Д - 18. **Диденкулова, Е.Г.** Роль «толстого» солитона в динамике солитонного газа в рамках уравнения Гарднера / Е.Г. Диденкулова, Е.Н. Пелиновский // *Известия Вузов. Радиофизика*. – 2018. – Т. 61. – № 8-9. – С. 700–710.
- Д - 19. **Шургалина (Диденкулова), Е.Г.** Эффект отрицательной скорости частиц в солитонном газе в рамках уравнений типа Кортевега-де Вриза / Е.Г. Шургалина, Е.Н. Пелиновский, К.А. Горшков // *Вестник МГУ (Физика)*. – 2017. – сер. 3. – № 5. – С. 10-16.
- Д - 20. **Диденкулова, Е.Г.** Статистические характеристики ансамбля солитонов внутренних волн / Е.Г. Диденкулова, Е.Н. Пелиновский, Т.Г. Талипова // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. – 2020. – Т. 56. – № 6. – С.638–646.
- Д - 21. Петрухин, Н.С. Безотражательные магнитогидродинамические волны в неоднородной плазме / Н.С. Петрухин, Е.Н. Пелиновский, **Е.Г. Диденкулова** // *Изв. вузов. Радиофизика*. – 2020. – Т. 63. – № 1. – С. 32–43.
- Д - 22. **Didenkulova, E.** Catalogue of rogue waves occurred in the World Ocean from 2011 to 2018 reported by mass media sources / E. Didenkulova // *Ocean & Coastal Management*. – 2020. – V. 188. – 105076.
- Д - 23. **Didenkulova, E.** Freak wave events in 2005–2021: statistics and analysis of favourable wave and wind conditions / E. Didenkulova, I. Didenkulova, I. Medvedev // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* – 2023. – V. 23. – P. 1653–1663.

- Д - 24. Talipova, T. Internal waves generated by explosive eruptions of underwater volcanoes and their effect on the sea surface / T. Talipova, E. Pelinovsky, **E. Didenkulova** // *Natural Hazards*. – 2025. – V. 121. – P. 661-675.
- Д - 25. **Didenkulova, E.** Interaction Features of Internal Wave Breathers in a Stratified Ocean / E. Didenkulova, E. Pelinovsky // *Fluids*. – 2020. – V. 5. – 205.
- Д - 26. **Didenkulova, E.G.** Numerical simulation of random bimodal wave systems in the KdV framework / E.G. Didenkulova, A.V. Slunyaev, E.N. Pelinovsky // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. – 2019. – V. 78. – 21-31.
- Д - 27. Talipova, T. Internal Wave Breathers in the Slightly Stratified Fluid / T. Talipova, O. Kurkina, A. Kurkin, **E. Didenkulova**, E. Pelinovsky // *Microgravity Sci. Technol.* – 2020. – V. 32. – P. 69–77.
- Д - 28. Pelinovsky, E. Rational Solitons in the Gardner-Like Models / E. Pelinovsky, T. Talipova, **E. Didenkulova** // *Fluids*. – 2022. – V. 7. – 294.
- Д - 29. **Didenkulova, E.** Estimation of a Freak Wave Lifetime in the Shallow Sea / E. Didenkulova, E. Pelinovsky // *J. Mar. Sci. Eng.* – 2023. – V. 11. – 482.
- Д - 30. **Диденкулова, Е.Г.** Волны-убийцы в 2011-2018 годах / Е.Г. Диденкулова, Е.Н. Пелиновский // *Доклады Российской Академии Наук. Науки о Земле*. – 2020. – Т. 491. – № 1. – С. 97–100.
- Д - 31. **Шургалина (Диденкулова), Е.Г.** Механизм образования волн-убийц в результате взаимодействия солитонов внутренних волн в стратифицированном водоеме / Е.Г. Шургалина // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2018. – Т. 1. – С. 61-67.
- Д - 32. Flamarion, M.V. Soliton dynamics in random fields: The Benjamin-Ono equation framework / M.V. Flamarion, E.N. Pelinovsky, **E. Didenkulova** // *Applied Mathematical Modelling*. – 2025. – V. 144. – 116092.
- Д - 33. Flamarion, M.V. Dynamics of Irregular Wave Fields in the Schamel Equation Framework / M.V. Flamarion, E.N. Pelinovsky, **E. Didenkulova** // *Phys. Wave Phen.* – 2025. – V. 33. – P. 9–19.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) **Zabusky, N.J.** Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // *Physical Review Letters*. – 1965. – 15. – P. 240–243.
- 2) **Островский, Л.А.** Уединенные электромагнитные волны в нелинейных линиях передачи / Л.А. Островский, В.В. Папко, Е.Н. Пелиновский // *Изв. Вузов. Радиофизика*. – 1972. – Т. 15. – № 4. – С. 580-591.
- 3) **Ostrovsky, L.A.** Solitons in Radiophysics / L.A. Ostrovsky, K.A. Gorshkov, V.V. Papko // *Phys. Scr.* – 1979. – V. 20. – P. 357-363.
- 4) **Абловиц, М.** Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва: Мир, 1987. – 479 с.
- 5) **Захаров, В.Е.** Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манакон, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.
- 6) **Ньюэлл, А.** Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – Москва: Мир, 1989. – 323 с.
- 7) **Лэм, Дж.** Введение в теорию солитонов / Дж. Лэм. – Москва: Мир, 1983. – 294 с.
- 8) **Калоджеро, Ф.** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – Москва: Мир, 1985. – 472 с.

- 9) **Бутерин, С.А.** Метод обратной задачи в теории нелинейных волн / С.А. Бутерин, М.Ю. Игнатъев, С.Н. Кабанов, Ю.В. Курьшова, Д.С. Лукомский, С.И. Поликарпов. – Саратов: Саратовский гос. ун-т, 2013. – 115 с.
- 10) **Камчатнов, А.М.** Теория нелинейных волн / А.М. Камчатнов. – Москва: Издательский дом НИУ ВШЭ, 2024. — 792 с.
- 11) **Кузнецов, Е.А.** Неустойчивость солитонов и коллапс звуковых волн в средах с положительной дисперсией / Е.А. Кузнецов // ЖЭТФ, 2022. – Т. 162. – № 1. – С. 143–160.
- 12) **Захаров, В.Е.** Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем / В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов // Успехи физических наук, 2012. – Т. 182. – № 6. – С. 569–592.
- 13) **Захаров, В.Е.** Кинетическое уравнение для солитонов / В.Е. Захаров // ЖЭТФ, 1971. – Т. 60. – С. 993–1000.
- 14) **Zakharov, V.E.** Turbulence in integrable systems / V. E. Zakharov // Stud. Appl. Math., 2009. – V. 122. – № 3. – P. 219–234.
- 15) **El, G.** Soliton gas in integrable dispersive hydrodynamics / G. El // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2021. – 114001.
- 16) **Bonnemain, T.** Generalized hydrodynamics of the KdV soliton gas / T. Bonnemain, B. Doyon, G. El // J. Phys. A: Math. Theor., 2022. – V. 55. – 374004.
- 17) **Congy, T.** Statistics of Extreme Events in Integrable Turbulence / T. Congy, G. A. El, G. Roberti, A. Tovbis, S. Randoux, and P. Suret // Phys. Rev. Lett., 2024. – V. 132. – 207201.
- 18) **Congy, T.** Dispersive Hydrodynamics of Soliton Condensates for the Korteweg–de Vries Equation / T. Congy, G.A. El, G. Roberti, A. Tovbis // J Nonlinear Sci., 2023. – V. 33. – 104.
- 19) **Redor, I.** Experimental Evidence of a Hydrodynamic Soliton Gas / I. Redor, E. Barthélemy, H. Michallet, M. Onorato, N. Mordant // Phys. Rev. Lett. – 2019. – V. 122. – 214502.
- 20) **Redor, I.** Experimental study of integrable turbulence in shallow water / I. Redor, H. Michallet, N. Mordant, E. Barthélemy // Physical Review Fluids. – 2021. – V. 6. – № 12. – 124801.
- 21) **Leduque, T.** Space-time statistics of 2D soliton gas in shallow water studied by stereoscopic surface mapping / T. Leduque, E. Barthélemy, H. Michallet, J. Sommeria, N. Mordant // Experiments in Fluids. – 2024. – V. 65. – № 6. – 84.
- 22) **Suret, P.** Single-shot observation of optical rogue waves in integrable turbulence using time microscopy / Suret, P., Koussaifi, R., Tikan, A., C. Evain, S. Randoux, Ch. Szwaj, S. Bielawski // Nat Commun. – 2016. – V. 7. – 13136.
- 23) **Dieli, L.** Observation of two-dimensional dam break flow and a gaseous phase of solitons in a photon fluid / L. Dieli, D. Pierangeli, E. DelRe, C. Conti // Phys. Rev. Lett. – 2024. – V. 133. – 183801.
- 24) **Kharif, Ch.** Rogue Waves in the Ocean / Ch. Kharif, E. Pelinovsky, A. Slunyaev. – Springer, 2009. – 216 p.
- 25) **Onorato, M.** Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts / M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montinad, F.T. Arecchi // Phys. Rep., 2013. – V. 528. – P. 47–89.
- 26) **Dudley, J.M.** Rogue waves and analogies in optics and oceanography / J.M. Dudley, G. Genty, A. Mussot, A. Chabchoub, F. Dias // Nat Rev Phys. – 2019. – V. 1. – P. 675–689.
- 27) **Слюняев, А.В.** Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика / А.В. Слюняев, Д.Е. Пелиновский, Е.Н. Пелиновский // Успехи физических наук, 2023. – Т. 193. – С. 155–181.

- 28) **Akhmediev, N.** Editorial – Introductory remarks on “Discussion & Debate: Rogue Waves – Towards a Unifying Concept?” / N. Akhmediev, E. Pelinovsky // *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2010. – V. 185. – P. 1-4.
- 29) **Госсард, Э.** Волны в атмосфере / Э. Госсард, У. Хук. – Москва: Мир, 1978. – 540 с.
- 30) **Miura, R.M.** Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation / R.M. Miura // *J. Math. Phys.* – 1968. – V. 9. – P. 1202-1204.
- 31) **Шургалина (Диденкулова) Е.Г.,** Пелиновский Е.Н. Динамика ансамбля нерегулярных волн в прибрежной зоне. Нижний Новгород: НГТУ, 2015. – 179 с.
- 32) **Капцов, О.В.** Решения некоторых волновых моделей механики / О. В. Капцов, Д. О. Капцов // *Прикладная математика и механика.* – 2023. – Т. 87. – Вып.2. – С. 176–185.
- 33) **Manganaro, N.** A reduction procedure for determining exact solutions of second order hyperbolic equations / N. Manganaro, A. Rizzo // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2024. – V. 138. – 108240.
- 34) **Ruderman, M.S.** Phase mixing of Alfvén waves propagating in non-reflective magnetic plasma configurations / M.S. Ruderman, N.S. Petrukhin // *Astronomy and Astrophysics.* – 2017. – V. 600. – №. A122. – P. 1-11.
- 35) **Уизем, Дж.** Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 638 с.
- 36) **Le Mehaute, B.** Theory of explosion-generated water waves / B. Le Mehaute // *Advances in Hydrosience.* – 1971. – V. 7. – P. 1-79.
- 37) **Mirchina, N.R.** Estimation of underwater eruption energy based on tsunami wave data / N.R. Mirchina, E.N. Pelinovsky // *Nat. Hazards*, 1988. – V.1. – P. 277-283.
- 38) **Choi, B.H.** Simulation of the trans-oceanic tsunami propagation due to the 1883 Krakatau volcanic eruption / B.H. Choi, E. Pelinovsky, K.O. Kim, J.S. Lee // *Nat Hazard.* – 2003. – V.3. – № 5. – P. 321–332.

Оглавление диссертации

Введение

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА АНСАМБЛЯ СОЛИТОНОВ В РАМКАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ВЕРСИЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

- 1.1. Введение
- 1.2. Уравнение Гарднера и его солитонные решения
- 1.3. Анализ двухсолитонных взаимодействий
- 1.4. Эффект торможения малого солитона (дефекта) в решетке солитонов
- 1.5. Гарднеровская солитонная турбулентность
 - 1.5.1 Роль толстого солитона в солитонном газе
 - 1.5.2. Волны-убийцы в солитонном газе
- 1.6. Бризерная турбулентность
 - 1.6.1 Особенности бризеров
 - 1.6.2. Анализ взаимодействия двух бризеров
 - 1.6.3. Динамика ансамблей бризеров
- 1.7. Смешанная турбулентность
 - 1.7.1 Взаимодействие солитона и бризера
 - 1.7.2 Взаимодействия бризеров со случайным квазигармоническим полем
- 1.8. Выводы к Главе 1

ГЛАВА 2. ДИНАМИКА АНСАМБЛЯ СОЛИТОНОВ В РАМКАХ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ВЕРСИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

- 2.1 Введение
- 2.2 Рациональные решения уравнения типа Гарднера
- 2.3 Особенности двухсолитонного взаимодействия в неинтегрируемых системах
 - 2.3.1. Взаимодействия однополярных солитонов Шамеля
 - 2.3.2. Взаимодействия разнополярных солитонов Шамеля
- 2.4. Неинтегрируемый солитонный газ и волны-убийцы
- 2.5. Динамика нерегулярных волн в рамках уравнения Шамеля
- 2.6. Движение солитонов в случайных полях в рамках вынужденного уравнения Бенджамина-Оно
- 2.7. Римановы волны в бездисперсионных приближениях модульной КдВ-иерархии
- 2.8. Выводы к Главе 2

ГЛАВА 3. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

- 3.1 Введение
- 3.2 Бегущие гравитационные волны в самосогласованных каналах
- 3.3 Безотражательное распространение цилиндрических волн
- 3.4 Безотражательные магнитогидродинамические (мгд) волны в неоднородной плазме
 - 3.4.1. Мгд волны в неоднородной по плотности плазме
 - 3.4.2. Альвеновские волны в плоском слое с неоднородным магнитным полем (двумерная задача)
 - 3.4.3. Волны в неоднородном магнитном поле (осесимметричный случай)
- 3.5 Выводы к Главе 3

ГЛАВА 4. ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ: НАБЛЮДЕНИЯ И АНАЛИЗ

- 4.1 Введение
- 4.2 Каталог наблюдений волн-убийц в Мировом океане и их анализ
- 4.3 Пример расчета волн-убийц на поверхности океана
- 4.4 Аналитические выражения для донного давления, сопряженные с эволюционными уравнениями
- 4.5 Интенсивные внутренние волны и уравнение Гарднера
- 4.6. Внутренние волны цунами, вызванные взрывным извержением подводного вулкана
- 4.7. Выводы к Главе 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Диденкулова Екатерина Геннадьевна

**СОЛИТОННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И АНОМАЛЬНО БОЛЬШИЕ ВОЛНЫ В
СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ
ВРИЗА**

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук