

Емелин Максим Денисович

Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре информатики и автоматизации научных исследований Института информационных технологий, математики и механики «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород)

Научный руководитель: **Афраймович Лев Григорьевич**

Доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», профессор кафедры информатики и автоматизации научных исследований

Официальные оппоненты: **Калягин Валерий Александрович**

Доктор физико-математических наук, заслуженный профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде (НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде), заведующий кафедрой, профессор кафедры прикладной математики и информатики

Егорова Евгения Кирилловна

Кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН), научный сотрудник

Ведущая организация: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН)

Защита состоится 24.09.2026 на заседании диссертационного совета 24.2.340.16 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2 в 14:40.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на сайте <https://diss.unn.ru/1658>

Автореферат разослан _____

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.340.16

Кандидат физико-математических наук

Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Большое количество прикладных задач формализуется в виде многоиндексных аксиальных задач о назначениях:

- оптимизация логистических процессов и планирования – при управлении цепочками поставок, распределении ресурсов и планировании производства;
- многоцелевое отслеживание объектов – при обработке координатной информации, поступающей от множества разнородных сенсоров;
- многопараметрическое связывание записей – при разрешении сущностей и связывании данных из нескольких независимых крупномасштабных наборов данных;
- организация спутниковой связи – при маршрутизации каналов и распределении ресурсов в группировках высокопроизводительных спутников;
- компьютерное зрение – при межкадровом сопоставлении дескрипторов, отслеживании множества объектов и реконструкции трехмерных сцен;
- управление человеческими ресурсами – при оптимальном распределении исполнителей по проектам и задачам с учетом их компетенций;
- теория расписаний – при формировании неконфликтных графиков учебных занятий и распределении аудиторий в образовательных учреждениях;
- роботизированная логистика – при бесконфликтной диспетчеризации роботов на автоматизированных складах;
- биомедицина – для перепрофилирования лекарственных средств;
- молекулярный спектральный анализ – при назначении метильных групп для минимизации затрат на результирующее резонансное назначение.

Обзор результатов анализа подклассов многоиндексных задач о назначениях приведен в работе ¹. Известно, что класс многоиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным уже в трехиндексном случае ¹. Более того, не существует полиномиальных ε -приближенных алгоритмов решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях (здесь ε – произвольная константа), в противном случае $P = NP$. Данный результат справедлив также в случае, когда матрица стоимостей задачи о назначениях имеет декомпозиционную структуру (т.е. матрица стоимостей представима в виде суммы трех двухиндексных матриц). При этом задача о назначениях в случае, когда декомпозиционная матрица стоимостей удовлетворяет неравенству треугольника, остается NP-трудной, однако для такого частного случая задачи о назначениях могут существовать и разработаны ε -приближенные алгоритмы решения задачи.

Известны различные приближенные и эвристические алгоритмы решения NP-трудной аксиальной задачи о назначениях. Такие алгоритмы, как правило, строят серию допустимых решений задачи. На финальном шаге таких алгоритмов общепринятым подходом является выбор рекорда среди построенных допустимых решений. В диссертационной работе в качестве улучшения финального шага выбора рекорда предлагается решение задачи оптимального комбинирования найденных допустимых решений.

В различных работах исследуются аксиальные задачи о назначениях со специальной структурой многоиндексной матрицы стоимостей, обсуждаются вопросы построения потоковых алгоритмов решения многоиндексных задач, описывается метод ветвей и границ решения аксиальной задачи о назначениях, строятся генетические алгоритмы, обсуждается нижняя оценка задачи, исследуются асимптотически оптимальные решения, исследуется задача о

¹ Spieksma F.C.R. Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications / P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.

назначениях в планарной постановке, в стохастической постановке и в многокритериальной постановке.

Известен алгоритм, применимый при решении задач с декомпозиционной матрицей системы ограничений. Т.е. с матрицей стоимостей представимой в виде суммы трех двухиндексных матриц, т.е. $c_{ijk} = u_{ij}^1 + u_{ik}^2 + u_{jk}^3$, $i \in I, j \in J, k \in K$. Данный алгоритм основан на решении пары зависимых двухиндексных задач. Всего существует 3 таких пары, таким образом, предложенный алгоритм позволяет построить 3 различных допустимых решения. Кроме того, известно, что рекорд из данных 3 решений является ε -приближенным решением задачи в случае, когда декомпозиционная матрица стоимостей удовлетворяет неравенству треугольника: $u_{ij}^1 \leq u_{ik}^2 + u_{jk}^3$, $u_{ik}^2 \leq u_{ij}^1 + u_{jk}^3$, $u_{jk}^3 \leq u_{ij}^1 + u_{ik}^2$, $i \in I, j \in J, k \in K$. Известен эвристический подход, основанный на аппроксимации матрицы стоимостей исходной задачи матрицей стоимостей заданной структуры и решении задачи с аппроксимационной матрицей стоимостей. Для ряда аппроксимаций строятся оценки отклонения от оптимума.

В различных работах предлагаются эвристические подходы с последовательным решением двухиндексных задач о назначениях, как для решения трехиндексных задач о назначениях, так и для решения многоиндексных задач о назначениях, рассматриваются различные стратегии для порядка выбора решаемых задач. Известен гибридный генетический алгоритм решения задачи о назначениях, интерес представляет предложенная стратегия локальной оптимизации, которая может быть применена к любым допустимым решениям (в том числе полученных случайной генерацией). Во множестве других работ представлены различные алгоритмы, которые могут быть использованы в качестве алгоритма локальной оптимизации, в частности, известен алгоритм с разбиением задачи на подклассы, на каждом подклассе решается трехиндексная задача о назначениях, специфика алгоритма предполагает возможность его использования в качестве стратегии локальной

оптимизации. В качестве ещё одного подхода к решению задачи о назначениях в различных работах рассматривается подход с решением двойственной задачи.

Значительный вклад в становление и развитие теории многоиндексных задач о назначениях внесли фундаментальные труды таких зарубежных и отечественных исследователей, как Гимади Э.Х., Емеличев В.А., Коркишко Н.М., Кравцов М.К., Медведева О.А., Медведев С.Н., Перепелица В.А., Прилуцкий М.Х., Тизик А.П., Цурков В.И., Balas E., Bandelt H.J., Burkard R.E., Crama Y., Frieze A.M., Gabrovšek B., Garey M.R., Gutin G., Hahn P.M., Huang G., John M., Johnson D.S., Kammerdiner A.R., Karapetyan D., Kim B.J., Lim A., Magos D., Nagi R., Otting G., Pasiliao E.L., Pattipati K.R., Poore A.B., Rudolf R., Saltzman M.J., Semenov A., Vadrevu S., Spieksma F.C.R., Veenman C.J., Woeginger G., Yadegar J., Zhang L., Zhang Y. и др.

Цель и задачи работы

Целью диссертационной работы является построение математических моделей комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, улучшение точности решений, полученных различными эвристическими и приближенными алгоритмами. Для достижения целей поставлены и решены следующие задачи:

- разработка полиномиальных алгоритмов решения поставленных задач комбинирования;
- определение классов NP-трудных задач комбинирования;
- разработка программного комплекса решения трехиндексных аксиальных задач о назначениях с использованием разработанных алгоритмов комбинирования.

Научная новизна

Построены математические модели комбинирования допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Разработаны полиномиальные алгоритмы комбинирования, на основе которых предложен подход для постобработки допустимых решений трехиндексной аксиальной

задачи о назначениях, демонстрирующий повышение точности решений, полученных различными эвристическими и приближенными алгоритмами. Выделены классы NP-трудных задач комбинирования.

Теоретическая и практическая ценность

Определены классы NP-трудных задач комбинирования. Найдены классы задач, для которых существуют полиномиальные алгоритмы решения этих задач. Разработанные алгоритмы позволяют улучшить качество исходных решений аксиальных задач о назначениях при применении их к практическим задачам. Предложенный подход применен при разработке программного модуля для моделирования выполнения производственного плана при различных графиках работы производства, входящий в состав АИС «Окаплан». Экономический эффект от внедрения результатов диссертации заключается в снижении затрат на проведение планирования работ по изготовлению изделий микроэлектроники на величину до 5%. Акт внедрения представлен в приложении 3 диссертационной работы.

Методология и методы исследования

В работе используются методы теории графов, дискретной оптимизации, а также теория вычислительной сложности.

Положения, выносимые на защиту

Предложен подход для постобработки допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, основанный на комбинировании решений, в рамках которого построены математические модели комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Для реализации данного подхода разработаны следующие алгоритмы:

- алгоритм решения задачи комбинирования допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях;
- алгоритм решения задачи комбинирования допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях с минимаксным критерием;

- эвристический алгоритм решения задачи комбинирования допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях с квадратичным критерием, показан подкласс задачи, в котором алгоритм находит оптимальное решение задачи;

- алгоритм решения задачи комбинирования допустимых решений многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях в случае лексикографической свертки критериев;

- алгоритм построения подмножества Парето-оптимальных решений задачи комбинирования допустимых решений многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

Доказана NP-трудность следующих задач:

- комбинирование четырех допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях;

- комбинирование двух допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях с минимаксным критерием;

- комбинирование четырех допустимых решений многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях в случае лексикографической и линейной сверток критериев.

Разработан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы комбинирования, обеспечивающий автоматизацию решения задач о назначениях и подтвердивший эффективность разработанных методов в ходе вычислительных экспериментов.

Личный вклад автора

Все основные результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю (соавтору) принадлежит постановка задач. Интерпретация результатов, представленных в диссертационной работе, выполнялась совместно с научным руководителем.

Раздел 4.1 диссертационной работы выполнен при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках

Государственного задания по технологическому запросу (соглашение FSWR-2026-0019).

Соответствие паспорту специальности

Соответствие паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: в диссертационной работе представлены новые математические модели комбинирования допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, что соответствует п. 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки)», разработаны алгоритмы для решения новых задач комбинирования, что соответствует п. 2. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», разработан комплекс программ, что соответствует п. 3. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Достоверность и апробация результатов

Достоверность результатов обусловлена строгостью математических доказательств. Основные результаты диссертационной работы представлены в 5 статьях, опубликованных в ведущих рецензируемых научных журналах (Автоматика и телемеханика, Mathematics) из списка, рекомендованного ВАК [1,2,3,4,5]. Полученные в диссертационной работе результаты обсуждались на XIII Международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 2019) [6], Международной школе-конференции «Высокопроизводительные вычисления и искусственный интеллект» (Нижний Новгород, 2019), 13-й Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации» (Москва, 2020) [7], Российском форуме «МОЛОДЁЖЬ и НАУКА» (Нижний Новгород, 2021), Форуме молодых ученых государств – участников СНГ «НАУКА БЕЗ ГРАНИЦ» (Нижний Новгород, 2022), XIV Международном семинаре «Дискретная математика и её

приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 2022) [8]. Разработанный комплекс программ зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ) [9].

Краткое содержание работы

Во введении описывается основная проблематика работы, обосновывается ее актуальность, формулируются цели и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, новизна и практическая значимость

Первая глава содержит математические модели комбинирования решений однокритериальных трехиндексных задач о назначениях с различными видами критериев. Приведены примеры прикладных задач (**Раздел 1.1**). Рассмотрены классический, минимаксный и квадратичный критерии (**Раздел 1.2**). Сама трехиндексная задача о назначениях заключается в выборе n троек (i, j, k) , в которых первый индекс i выбран из первого множества индексов I , второй индекс j из второго множества индексов J и третий индекс k из третьего множества индексов K и каждый индекс выбран не более, чем в одной тройке, среди всех таких, выбирается множество троек, оптимальное по значению критерия. Новая математическая модель задачи комбинирования ставится в **разделе 1.3**. Дополнительными входными данными для задачи комбинирования являются m допустимых решений исходной задачи о назначениях. Задача комбинирования заключается в выборе n троек, каждая из которых входила в хотя бы одно из данных m допустимых решений, то есть если обозначить входные решения как $x^1, x^2, \dots, x^m$, множество назначений решения x как $W(x) = \{(i, j, k) | x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}$, множество разрешенных назначений как $W(x^1, x^2, \dots, x^m) = \bigcup_{t=1}^m W(x^t)$. Тогда математическая модель задачи комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях имеет вид:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, k \in K,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} &= 1, j \in J, \\
\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} &= 1, i \in I, \\
x_{ijk} &\in \{0,1\}, i \in I, j \in J, k \in K, \\
x_{ijk} &= 0, (i, j, k) \notin W, \\
\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} &\rightarrow \min.
\end{aligned}$$

Вторая глава содержит математические модели комбинирования решений многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях (**Раздел 2.2**). Постановка многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях приведена в **разделе 2.1**. Рассмотрены различные варианты сверток критериев в качестве схем компромисса: лексикографическая свертка (**Раздел 2.3**), минимаксная свертка (**Раздел 2.4**) и линейная свертка (**Раздел 2.5**). Поставлена задача нахождения Парето-оптимальных решений (**Раздел 2.6**).

Третья глава содержит разработанные алгоритмы комбинирования и описание классов NP-трудных задач комбинирования. В **разделе 3.1** описан алгоритм решения задачи комбинирования двух решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

Алгоритм 3.1.

Шаг 1. Построить граф $G = (V, A)$, где $V = \{I \cup J \cup K\}$, $A = \{(i, j), (i, k), (j, k) | (i, j, k) \in W(x^1, x^2)\}$.

Шаг 2. Найти компоненты связности графа $G_l = (V_l, A_l)$, $l = \overline{1, q}$.

Шаг 3. Построить следующие множества:

$$D_l^1 = \{(i, j, k) | (i, j, k) \in W(x^1), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\},$$

$$D_l^2 = \{(i, j, k) | (i, j, k) \in W(x^2), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\}.$$

Шаг 4. Оптимальное значение критерия задачи определяется как

$$c^* = \sum_{l=1}^q \min \left(\sum_{(i,j,k) \in D_l^1} c_{ijk}, \sum_{(i,j,k) \in D_l^2} c_{ijk} \right).$$

Шаг 5. Оптимальное решение задачи определяется по следующему алгоритму. Пусть $x_{ijk} := 0, i \in I, j \in J, k \in K$. Далее для каждого $l = \overline{1, q}$ выполнить

$$x_{ijk} := 1, (i, j, k) \in D_l^{p^*}, \text{ где } p^* = \operatorname{argmin}_{p \in \{1, 2\}} \sum_{(i, j, k) \in D_l^p} c_{ijk}.$$

На первом шаге алгоритма строится граф G , у которого множество вершин V это объединение множеств индексов I, J и K , а ребро между парой вершин проводится, если соответствующая пара индексов входила в какую-либо из троек входных решений. На втором шаге находятся компоненты связности графа. На третьем шаге строятся множества троек D_l^w , входивших в решение w , соответствующие вершины которых принадлежат компоненте связности l . Оптимальное значение критерия задачи определяется на шаге четыре. На пятом шаге строится оптимальное решение задачи, для каждой компоненты связности соответствующие тройки выбираются только из первого решения или только из второго в соответствии с критерием оптимальности.

Доказывается теорема 3.1, показывающая, что алгоритм находит оптимальное решение задачи, и теорема 3.2, показывающая, что алгоритм требует $O(n)$ вычислительных операций.

В разделе 3.2 показывается, что задача комбинирования более, чем двух решений, не может быть сведена к задаче комбинирования двух решений (Теорема 3.3). В связи с этим, предлагаются различные эвристические стратегии комбинирования.

Алгоритм решения задачи комбинирования двух решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях с отличием в критерии оптимальности для выбора троек в компоненте связности работает также для задачи с минимаксным критерием (**Раздел 3.3**), в случае лексикографической свертки критериев (**Раздел 3.5**), для задачи с квадратичным критерием (**Раздел 3.4**) в теореме 3.4 описан подкласс задачи, для которого алгоритм находит оптимальное решение задачи. **В разделе 3.5** доказывается теорема 3.5,

показывающая, что алгоритм находит оптимальное решение задачи в случае лексикографической свертки критериев.

В разделе 3.6 описан алгоритм построения подмножества Парето-оптимальных решений задачи комбинирования двух решений двухкритериальной задачи о назначениях.

Алгоритм 3.6.

Шаг 1. Построить граф $G = (V, A)$, где $V = \{I \cup J \cup K\}$, $A = \{(i, j), (i, k), (j, k) | (i, j, k) \in W(x^1, x^2)\}$.

Шаг 2. Найти компоненты связности $G_l = (V_l, A_l), l = \overline{1, q}$.

Шаг 3. Построить следующие множества:

$$D_l^1 = \{(i, j, k) | (i, j, k) \in W(x^1), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\},$$

$$D_l^2 = \{(i, j, k) | (i, j, k) \in W(x^2), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\}.$$

Шаг 4. Пусть

$$P_l = \left\{ p \mid \sum_{(i,j,k) \in D_l^p} c_{ijk} = \min_{p' \in \{1,2\}} \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p'}} c_{ijk}, p \in \{1,2\} \right\},$$

$$p_l = \operatorname{argmin}_{p \in P_l} \sum_{(i,j,k) \in D_l^p} d_{ijk}, l = \overline{1, q}.$$

Шаг 5. Построим Парето-оптимальное решение x^{*0} по следующему алгоритму. Пусть $x_{ijk}^{*0} := 0, i \in I, j \in J, k \in K$. Далее для каждого $l = \overline{1, q}$ выполнить $x_{ijk}^{*0} := 1, (i, j, k) \in D_l^{p_l}$.

Шаг 6. Построим следующее множество индексов компонент связности

$$L = \{l \mid \sum_{(i,j,k) \in D_l^{\bar{p}_l}} c_{ijk} > \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l}} c_{ijk} \text{ и } \sum_{(i,j,k) \in D_l^{\bar{p}_l}} d_{ijk} < \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l}} d_{ijk}, l \in \{1, \dots, q\}\},$$

здесь для удобства обозначим $\bar{p} = 3 - p$, при $p \in \{1, 2\}$.

Шаг 7. Упорядочим это множество в порядке невозрастания величины $tg(l)$, где

$$tg(l) = \frac{\sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l}} d_{ijk} - \sum_{(i,j,k) \in D_l^{\overline{p_l}}} d_{ijk}}{\sum_{(i,j,k) \in D_l^{\overline{p_l}}} c_{ijk} - \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l}} c_{ijk}}.$$

То есть пусть $L = \{l_1, \dots, l_{|L|}\}$ и $tg(l_s) \geq tg(l_{s+1})$, $s = \overline{1, |L| - 1}$.

Шаг 8. Построим $|L|$ Парето-оптимальных решений x^{*s} , $s = \overline{1, |L|}$ следующим способом.

Пусть $x_{ijk}^{*s} := 0$, $i \in I, j \in J, k \in K$, далее для каждого $t = \overline{1, |q|}$ выполнить:

если $t \in \{l_1, \dots, l_s\}$, то $x_{ijk}^{*s} := 1$, $(i, j, k) \in D_t^{\overline{p_t}}$,

иначе $x_{ijk}^{*s} := 1$, $(i, j, k) \in D_t^{p_t}$.

На первых пяти шагах строится первое Парето-оптимальное решение задачи. На шестом шаге строится множество индексов компонент связности, для которых замена троек с выбранных в первом полученном решении на невыбранные приводит к увеличению значения первого критерия и к уменьшению значения второго критерия. На седьмом шаге построенное множество упорядочивается в порядке невозрастания величины $tg(l)$. На восьмом шаге строятся $|L|$ Парето-оптимальных решений, каждое следующее получается заменой троек в очередной компоненте связности из упорядоченного множества с выбранных в первом решении на невыбранные.

Доказана теорема 3.7, показывающая, что найденные решения являются Парето-оптимальными решениями задачи комбинирования, и теорема 3.8, показывающая, что алгоритм требует $O(n^2)$ вычислительных операций.

В разделе 3.7 теорема 3.9 показывает, что класс задач комбинирования четырех допустимых решений является NP-трудным.

В разделе 3.8 теорема 3.10 показывает, что класс задач комбинирования двух решений двухкритериальной трехиндексной задачи о назначениях в случае минимаксной свертки критериев является NP-трудным.

Класс задач комбинирования четырех решений NP-трудный также в случае линейной свертки критериев (**Раздел 3.9**) и в случае лексикографической свертки критериев (**Раздел 3.10**).

В разделе 3.11 приводится анализ сложностного статуса задач комбинирования.

В четвертой главе описан разработанный комплекс программ и результаты проведенных с помощью разработанного комплекса экспериментов. Комплекс программ (**Раздел 4.1**) состоит из четырех основных модулей: модуля взаимодействия с пользователем, модуля ввода и вывода, основного вычислительного модуля и модуля генерации исходных решений.

Модуль взаимодействия с пользователем обеспечивает принятие команд пользователя, взаимодействие с другими модулями для выполнения пользовательских задач.

Модуль ввода и вывода обеспечивает сохранение и загрузку исходных данных, вывод результатов вычислительного эксперимента.

Основной вычислительный модуль реализует разработанные в работе алгоритмы для проведения вычислительных экспериментов.

Модуль генерации исходных решений обеспечивает генерацию исходных решений и генерацию матриц стоимостей согласно запросу пользователя.

В рамках разработанного комплекса программ были проведены эксперимент с комбинированием решений аксиальной задачи о назначениях с декомпозиционной матрицей стоимостей, удовлетворяющей неравенству треугольника, полученных алгоритмом из статьи ² на исходных данных предложенных в этой же статье, эксперимент с комбинированием решений аксиальной задачи о назначениях на данных сгенерированных по схеме из статьи ³ (**Раздел 4.2**), эксперимент с комбинированием решений аксиальной

² Crama Y., Spieksma F.C.R. Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.

³ Balas E., Saltzman M.J. An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Oper. Res. 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.

задачи о назначениях с минимаксным критерием (**Раздел 4.3**), эксперимент с комбинированием решений аксиальной задачи о назначениях с квадратичным критерием (**Раздел 4.4**), эксперимент с комбинированием решений многокритериальной задачи о назначениях в случае лексикографической свертки критериев (**Раздел 4.5**), два эксперимента на различных исходных данных с построением аппроксимации Парето-области с использованием комбинирования решений аксиальной двухкритериальной задачи о назначениях (**Раздел 4.6**). Приведенные результаты вычислительных экспериментов, демонстрируют повышение качества исходных решений при применении разработанных алгоритмов комбинирования в сравнении с общепринятой стратегией выбора рекорда. Эксперименты проводились как на известной тестовой базе, так и на сгенерированных данных.

В заключении подведены итоги работы и описаны возможные направления дальнейших исследований.

Приложение 1 содержит сводные таблицы, демонстрирующие сложностной статус задач комбинирования.

Приложение 2 содержит таблицы с результатами вычислительных экспериментов.

В приложении 3 представлен акт внедрения результатов диссертации в состав АИС «Ока-план».

В приложении 4 представлено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Приложение 5 содержит исходный код разработанных алгоритмов.

Заключение

Основным результатом работы являются построенная математическая модель комбинирования допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях и предложенный подход для постобработки допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, основанный на комбинировании решений. Исходные решения могут быть получены любыми эвристическими или приближенными алгоритмами.

Разработаны полиномиальные точные алгоритмы комбинирования двух допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, задачи о назначениях с минимаксным критерием, а также многокритериальной задачи о назначениях в случаях линейной и лексикографической сверток критериев.

Разработан эвристический алгоритм комбинирования двух допустимых решений задачи о назначениях с квадратичным критерием и найден подкласс задач, на котором алгоритм находит точное решение.

Разработан полиномиальный алгоритм нахождения подмножества Парето-оптимальных решений задачи комбинирования двух допустимых решений двухкритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

Показана NP-трудность задачи комбинирования четырех допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, многокритериальной задачи о назначениях в случае лексикографической и линейной сверток, а также NP-трудность задачи комбинирования многокритериальной задачи о назначениях с минимаксной сверткой критериев.

Предложенный подход применен при разработке программного модуля для моделирования выполнения производственного плана при различных графиках работы производства, входящий в состав АИС «Ока-план». Акт внедрения представлен в приложении 3 диссертационной работы.

Разработан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы, с помощью которого был проведен вычислительный эксперимент, и который можно использовать для решения рассмотренных задач о назначениях. Приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие повышение качества исходных решений в результате применения разработанных алгоритмов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ представлено в приложении 4. Исходный код основных методов разработанных алгоритмов комбинирования представлен в приложении 5 диссертационной работы.

Полученные результаты обобщаются при исследовании многоиндексных задач о назначении.

Дальнейшими возможными направлениями для исследований могут быть исследование вопроса построения эффективного алгоритма комбинирования трех допустимых решений трехиндексной задачи о назначениях, а также исследование возможности применения метода комбинирования допустимых решений в иных задачах.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Научные статьи

1. Афраимович Л.Г., Емелин М.Д. Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях // *АиТ*. 2021. № 8. С. 159-168.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Combining solutions of the axial assignment problem // *Autom. Remote Control*, 2021. V. 82. N 8. P. 1418-1425.
2. Афраимович Л.Г., Емелин М.Д. Эвристические стратегии комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // *АиТ*. 2021. № 10. С. 6–12.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Heuristic Strategies for Combining Solutions of the Three-Index Axial Assignment Problem // *Autom. Remote Control*, 2021. V. 82, N. 10. 1635–1640.
3. Afraimovich L.G., Emelin M.D. Complexity of Solutions Combination for the Three-Index Axial Assignment Problem // *Mathematics*. 2022. V. 10. 1062.
4. Афраимович Л.Г., Емелин М. Д., Свертки критериев при комбинировании решений многокритериальной аксиальной задачи о назначениях // *АиТ*. 2024. № 8. С. 86–98.
Afraimovich, L.G., Emelin, M.D. Criteria Convolutions When Combining the Solutions of the Multicriteria Axial Assignment Problem // *Autom. Remote Control*, 2024. V. 8, 718–726.

5. Афраймович Л.Г., Емелин М. Д., Построение области Парето при комбинировании допустимых решений многокритериальной аксиальной задачи о назначениях // *АиТ*. 2025. № 5. С. 81–97.

Afraimovich L.G., Emelin M.D. Construction of the Pareto Front When Combining Feasible Solutions of a Multi-Criteria Axial Assignment Problem // *Autom. Remote Control*, 2025. V. 5, 718–726.

Материалы конференций

6. Афраймович Л. Г., Емелин М. Д., Решение задачи оптимального комбинирования двух допустимых решений трёхиндексной аксиальной задачи о назначениях, Тринадцатый международный семинар «Дискретная математика и её приложения», 2019, С. 193-196
7. Афраймович Л.Г., Емелин М. Д., Стратегии комбинирования решений трехиндексной задачи о назначениях, Интеллектуализация обработки информации: Тезисы докладов 13-й Международной конференции, г. Москва 2020 г. — М.: Российская академия наук, 2020. С. 378-380.
8. Емелин М. Д., Афраймович Л. Г. Исследование комбинирования решений задачи о назначениях с квадратичным критерием, Тринадцатый международный семинар «Дискретная математика и её приложения», 2022, С. 157-159.

Свидетельство о государственной регистрации программы

9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2026661204 Российская Федерация. Решение задачи о назначениях с применением комбинирования решений: № 2026660570 : заявл. 10.04.2026 : опубл. 17.04.2026, Бюл. № 4 / М. Д. Емелин; правообладатель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».