

На правах рукописи



ЦАРЕВ Иван Сергеевич

**ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОСНОВАНИЯХ И НЕСУЩИХ
ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ДВИЖУЩИЕСЯ НАГРУЗКИ**

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Научный руководитель: **Ерофеев Владимир Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», профессор кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики института информационных технологий, математики и механики

Официальные оппоненты: **Порубов Алексей Викторович**
доктор физико-математических наук, ФГБУН «Институт проблем машиноведения РАН», заведующий лабораторией микромеханики материалов

Попов Виктор Сергеевич
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кубанский государственный университет»**

Защита состоится 15 сентября 2026 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.340.12 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603022, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на сайте <https://diss.unn.ru/1669>.

Автореферат разослан 09 июля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Белов Александр
Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Современное развитие высокоскоростных транспортных систем, а также технологий, использующих движение объектов по протяженным направляющим, сопровождается необходимостью более точного описания динамических процессов, возникающих при взаимодействии движущихся нагрузок с несущими конструкциями. Это рельсовые пути, контактные провода, направляющие ракетных треков и другие протяжённые упругие системы, где волновые процессы становятся определяющими.

При увеличении скоростей движения существенно возрастает влияние волновых эффектов. Возбуждаемые движущейся нагрузкой изгибные волны определяют напряженно-деформированное состояние конструкции, условия возникновения резонансных режимов, величину динамических нагрузок и характер переноса энергии вдоль направляющей. Особое значение приобретают вопросы определения критических скоростей движения, при достижении которых возникают резонансные эффекты волнообразования. Они часто приводят к резкому увеличению динамических перемещений, внутренних усилий и уровней вибрации.

В связи с этим исследование волновой динамики балок, лежащих на упругих основаниях различных моделей и взаимодействующих с высокоскоростными движущимися нагрузками, является актуальной научной задачей как с фундаментальной точки зрения, так и в связи с необходимостью совершенствования математических моделей, применяемых при расчете протяженных инженерных конструкций.

Степень научной разработанности темы

В первой главе работы содержится развернутый анализ отечественных и зарубежных исследований, начиная с классических решений О. Мора, Винклера, А.Н. Крылова и С.П. Тимошенко, и заканчивая современными вычислительными методами – МКЭ, интегральными уравнениями и методами узловых ускорений. Показано, что сформировались четыре основных группы задач, различающихся учетом масс конструкции и нагрузки. Оценен и продемонстрирован вклад исследователей СССР и РФ в развитие методологии расчета конструкций на подвижные нагрузки.

Во второй главе выполнен самостоятельный анализ волновой динамики балок, лежащих на вязкоупругих и обобщенных основаниях. Представлены дисперсионные соотношения, описывающие затухание и распространение изгибных волн в балках Бернулли–Эйлера, учитываются

особенности материала основания и параметров демпфирования. Также исследуются эффекты, возникающие при взаимодействии с высокоскоростной нагрузкой.

В третьей главе добавлен учет вращательной инерции и нелинейно-упругих свойств основания. Представленный подход позволяет описывать явления самомодуляции и неустойчивости волновых пакетов.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование волновых процессов в балках, лежащих на упругих и вязкоупругих основаниях, с учётом распространения высокоскоростных нагрузок. А также изучение их математических моделей для оценки дисперсионных зависимостей и скоростей распространения волн и переноса энергии.

В соответствии с целью были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследовать дисперсионные свойства изгибных волн при различных типах основания и моделях балки.
2. Проанализировать влияние параметров движущейся нагрузки на устойчивость и качественные изменения волн.
3. Обосновать применимость моделей для расчёта инженерных конструкций.

Научная новизна

1. Сформулирована замкнутая математическая модель динамического взаимодействия бесконечной балки Бернулли–Эйлера на обобщённом основании Пастернака с движущимся объектом, обладающим массой и моментом инерции. Отличительная черта модели – использование вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, который для системы с распределёнными и сосредоточенными параметрами автоматически учитывает взаимный энергообмен и даёт полную краевую задачу без привлечения дополнительных гипотез о контактных силах.

2. Метод расчёта критических скоростей движущейся нагрузки, основанный на анализе дисперсионного уравнения и кинематического инварианта, обобщён на случай двухпараметрического упругого основания со сдвиговой жёсткостью. Показано, что наличие второго коэффициента постели приводит к повышению критической скорости по сравнению с классической моделью Винклера, что подтверждает более реалистичное описание высокоскоростного движения по упругой направляющей.

3. Получено аналитическое выражение для силы, обусловленной волновым давлением (волнового сопротивления) на движущийся объект с постоянной скоростью в рамках двухпараметрической модели. Установлена явная зависимость постоянной составляющей волнового сопротивления от скорости движения и параметров обобщённого основания; результат сопоставлен с аналогичным для винклеровского основания и выявлены количественные различия.

4. Впервые построены дисперсионные кривые для балки Рэлея (математическая модель учитывает инерцию вращения поперечного сечения при изгибе), лежащей на обобщённого упругого основания Пастернака. Установлено, что вращательная инерция понижает фазовую и групповую скорости в длинноволновой области и обеспечивает асимптотически корректное поведение на бесконечности, устраняя завышенные оценки, присущие теории Бернулли–Эйлера.

5. Выявлен и количественно описан эффект самомодуляции квазигармонических изгибных волн в балке на нелинейно-упругом основании жёсткого типа. Показано, что развитие модуляционной неустойчивости ведёт к пространственной локализации волнового поля и формированию изолированных волновых пакетов, причём ширина пакетов растёт с линейной жёсткостью, а амплитуда подавляется нелинейной составляющей.

6. На основе сопоставления трёх моделей основания (винклеровского, обобщённого и нелинейно-упругого) выявлены принципиальные различия в дисперсионных свойствах, условиях возникновения зоны непропускания, структуре критических скоростей и эффективности излучения волн, что позволило сформулировать количественные критерии выбора расчётной схемы основания для инженерных приложений.

Теоретическая и практическая значимость

1. Разработанные аналитические зависимости для критических скоростей и волнового сопротивления могут непосредственно использоваться в практике проектирования высокоскоростных наземных магистралей и рельсовых направляющих ракетных треков для обоснования предельно допустимых скоростных режимов и выбора параметров упругого основания.

2. Предложенный метод вычисления критических скоростей через совместное решение дисперсионного и кинематического уравнений допускает прямую реализацию в инженерных расчётных программах, что

делает его доступным для расчётчиков без привлечения специализированного конечно-элементного моделирования.

3. Результаты сравнения моделей Бернулли–Эйлера и Рэлея на обобщённом основании дают инженеру критерии для обоснованного выбора балочной модели в зависимости от диапазона рассматриваемых длин волн и скоростей движения нагрузки, что предотвращает использование упрощённой теории в областях, где она даёт завышенные оценки.

4. Выявленные закономерности самомодуляции и формирования волновых пакетов в нелинейно-упругом основании открывают путь к созданию пассивных методов управления волновыми полями – например, к проектированию оснований с заданным соотношением линейной и нелинейной жёсткости для локализации или рассредоточения колебательной энергии.

5. Записанное в дивергентной форме уравнение переноса энергии и аналитически подтверждённое равенство средней скорости переноса энергии групповой скорости изгибных волн служат универсальным средством верификации численных моделей волновой динамики: нарушение этого равенства в численном решении сигнализирует о вычислительных артефактах или нарушении законов сохранения.

6. Полученная в работе количественная оценка влияния сдвигового коэффициента постели на рост критической скорости позволяет давать рекомендации к конструктивным мероприятиям (усиление поперечных связей, изменение материала балластного слоя и т.п.), направленным на реальное повышение предельной скорости эксплуатации существующих и проектируемых путевых структур.

7. Показано, что благодаря учету основных эффектов, сопутствующих процессам высокоскоростного нагружения, внедрение результатов возможно на предприятиях РЖД, Росатома, Минпромторга России для расчетного обоснования прогнозных и ресурсных характеристик проектируемых конструкций и аппаратов современной техники.

Методы исследования

Исследование базируется на: вариационном принципе Гамильтона–Остроградского; методах теоретической механики; параметрическом анализе систем; численных методах решения дисперсионных задач.

Положения, выносимые на защиту:

1. *Вариационная модель системы «балка на обобщённом основании – движущийся объект»*

Предложенный лагранжев формализм порождает связанную систему уравнений движения балки и объекта, а также естественные граничные условия; модель автоматически учитывает двусторонний обмен энергией и позволяет анализировать поведение системы без априорных предположений о контактном взаимодействии.

2. *Закономерности критических скоростей*

Для балки на обобщённом основании Пастернака критические скорости превышают значения, предсказываемые моделью Винклера; аналитическое выражение для критической скорости получено через условие вырождения корней системы дисперсионного уравнения и кинематического инварианта; показано, что в частном случае массивного тела без собственного момента инерции спектр критических скоростей вырождается до единственного значения.

3. *Сила волнового сопротивления*

Постоянная составляющая волнового давления на движущийся объект аналитически выражается через скорость движения и параметры основания; сравнение с винклеровской моделью показывает, что двухпараметрическое основание даёт иные (как правило, бóльшие) значения сопротивления при закритических скоростях, что объясняется более эффективным излучением бегущих волн.

4. *Влияние вращательной инерции*

Учёт инерции вращения сечения (модель Рэлея) на обобщённом основании приводит к снижению фазовой и групповой скоростей, существенному в длинноволновом диапазоне, и обеспечивает физически корректные асимптотики при неограниченном возрастании волнового числа; это ограничивает применимость модели Бернулли–Эйлера.

5. *Влияние нелинейно-упругого основания на самомодуляцию волны*

Для балки на основании с жёсткой нелинейностью эволюция квазигармонической изгибной волны описывается нелинейным уравнением Шрёдингера; модуляционная неустойчивость проявляется как пространственная фрагментация волнового поля, причём ширина и амплитуда пакетов разнонаправленно зависят от линейной и нелинейной жёсткости основания.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на:

– International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment – ICMTMTE-2020, г. Севастополь, 7-10 сентября, 2020. Доклад на тему “Dynamics of the beam laying on the elastic basis of the Pasternak model carrying the moving constant».

– Всероссийская научная конференция «Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций», г. Пермь, 10-12 октября 2022 г. Доклад на тему «Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании».

– XII Всероссийский Фестиваль науки, 18-19 октября 2022 г., ННГАСУ, г. Н. Новгород. Доклад на тему «Изгибные колебания балки, лежащей на упругом основании Пастернака».

– XXVII научная конференция по радиофизике, 15-25 мая 2023 г. ННГУ. Доклад на тему «Изгибные колебания балки в системе с двухпараметрическим упругим основанием при наличии движущейся нагрузки».

– XXXIII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках». (г. Пермь, 2-4 октября 2024 г.). Доклад на тему «Гаситель поперечных колебаний струны, лежащей на упругом основании».

Достоверность полученных результатов подтверждается строгим математическим аппаратом, соответствием фундаментальным законам механики деформируемого твердого тела, сопоставлением с результатами классических моделей, а также с имеющимися опытными данными.

Работа выполнялась при следующей финансовой поддержке:

– в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2024 – 2026 гг. (FFUF-2024-2026-0031, № НИОКР 1023032800130-3-2.3.2);

– в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ FSWR-2026-0019, регистрационный номер НИОКР 126061121911-7);

– при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-19-00613 «Устойчивость и волновая динамика высокоскоростных объектов, движущихся по упругим направляющим». Руководитель Ерофеев В.И.;

- при поддержке стипендии им. академика Г.А. Разуваева (Правительство Нижегородской области)
- при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-19-00613 «Устойчивость и волновая динамика высокоскоростных объектов, движущихся по упругим направляющим». Руководитель Ерофеев В.И.;
- при поддержке стипендии им. академика Г.А. Разуваева (Правительство Нижегородской области).

Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем:

- обобщение метода расчёта критических скоростей движущейся нагрузки, основанного на анализе дисперсионного уравнения и кинематического инварианта, на случай двухпараметрического упругого основания со сдвиговой жёсткостью;
- установление зависимости постоянной составляющей волнового сопротивления от скорости движения и параметров обобщённого основания;
- построение и исследование дисперсионных кривых для балки Рэлея (математическая модель учитывает инерцию вращения поперечного сечения при изгибе), лежащей на обобщённого упругого основания Пастернака;
- изучение эволюции квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщённом нелинейно-упругом основании.

Ерофееву В.И. принадлежит постановка задачи диссертационного исследования, общее руководство работой, формулировка утверждений, участие в обсуждении, редактировании и оформлении результатов. Ленин А.О., Мальханов А.О., Морозов А.Н. участвовали в проведении численных расчетов поведения дисперсионных кривых изгибных волн при различных параметрах задачи. Леонтьева А.В. участвовала в исследовании частотной зависимости затухания изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании. Лисенкова Е.Е. участвовала в постановке задачи о динамическом поведении балки, лежащей на обобщенном упругом основании и несущей на себе движущуюся нагрузку.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 279 наименований. Общий объем диссертации составляет 123 страницы, включая 25 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи исследования, показана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, описана методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности результатов и апробация работы, отмечены публикации, личный вклад соискателя, структура и объем работы.

Первая глава посвящена обзорному анализу динамики распределённых механических систем с движущимися нагрузками. Рассмотрены основные модели балок и деформируемых оснований, применяемые при исследовании волновых процессов в направляющих высокоскоростных транспортных систем. Показано, что одним из ключевых вопросов динамики таких систем является исследование распространения изгибных волн и определение критических скоростей движения нагрузки, при которых существенно возрастает динамический отклик конструкции. А также, проанализированы подходы к моделированию оснований.

Во второй главе рассматриваются вопросы применимости моделей балки, совершающей изгибные колебания, к изучению высокоскоростного движения объектов по рельсовому пути (**п.2.1**); изучаются: дисперсионные характеристики и затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании (**п.2.2**); дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном (двухпараметрическом) упругом основании (**п.2.3**). На примере балки модели Бернулли-Эйлера показано, что учет вязких свойств основания приводит к комплексному дисперсионному уравнению, анализ которого указывает на частотную зависимость затухания волн и изменение их дисперсионных характеристик. Даже при малой вязкости исчезает зона непропускания, существующая в случае чисто упругого основания. Для балки, лежащей на двухпараметрическом упругом основании Пастернака, получено дисперсионное соотношение, позволяющее сделать выводы о том, что увеличение коэффициента сдвига, присущего основанию, приводит к росту частоты, фазовой и групповой скоростей изгибных волн при неизменном волновом числе, что обусловлено повышением общей жёсткости системы. Показано, что учёт распределительной способности основания изменяет дисперсионные характеристики по сравнению с классической моделью упругого основания Винклера, сохраняя существование зоны непропускания, но изменяя условия распространения волн и переноса энергии.

В п.2.4 на модели балки, лежащей на двухпараметрическом основании Пастернака, рассмотрено взаимодействие системы с высокоскоростной движущейся нагрузкой. Исследования проводились в рамках замкнутой краевой задачи, выведенной исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, описывающей взаимообусловленное движение объекта и однородной балки, лежащей на упругом основании Пастернака:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - c_{II}^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0 \quad (2.1)$$

$$u(x = l(t) + 0, t) = u(x = l(t) - 0, t) = u(l(t), t) = u_0(t),$$

$$u_x(x = l(t) + 0, t) = u_x(x = l(t) - 0, t) = u_x(l(t), t) = w_0(t) \quad (2.2)$$

$$I_0 \ddot{w}_0 = IE[u_{xx}] \quad (2.3)$$

$$m \ddot{u}_0(t) = -\rho F [\alpha^2 u_{xxx} - c_{II}^2 u_x - \dot{l} u_t] + P(t) \quad (2.4)$$

$$m \ddot{l} = F_{pr} + Q, F_{pr} = -\frac{1}{2} \rho F [u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + c_{II}^2 u_x^2 - \omega_0^2 u^2 - 2\alpha^2 u_x u_{xxx} + 2\dot{l} u_x u_t] \quad (2.5)$$

Откуда найдены аналитические выражения для критических скоростей движения и установлено, что учет сдвиговой жёсткости ($\beta^2 = \frac{c_{II}^2}{\alpha \omega_0}$) основания приводит к их увеличению по сравнению с классической моделью Винклера, что согласуется с экспериментальными данными для рельсовых направляющих ракетных треков. В точке минимума дисперсионной кривой, фазовая и групповая скорости совпадают и принимают значение равное критической скорости (рис. 2.1). То есть при меньших скоростях динамический отклик локализован в окрестности нагрузки, а распространяющиеся волны отсутствуют.

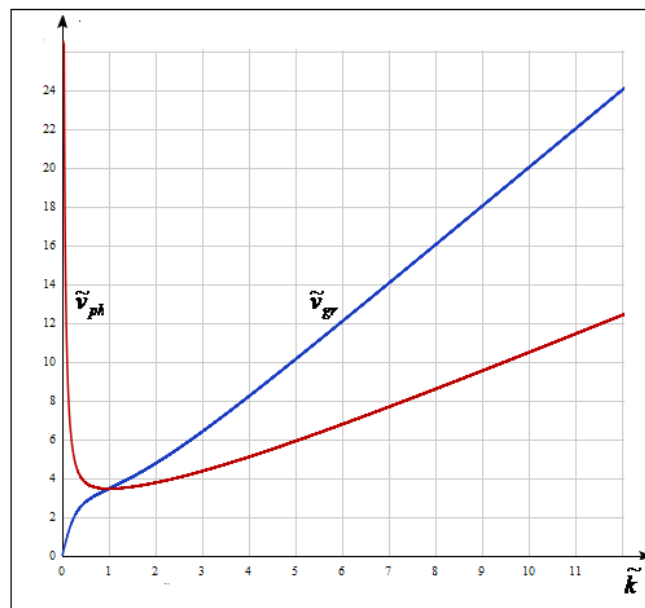


Рис. 2.1 Зависимости безразмерных фазовой и групповой скоростей от волнового числа с учетом коэффициента сдвига $\beta = 10$

При превышении значения критической скорости качественно меняется структура волнового поля: происходит переход от локализованных колебаний к режиму излучения четырех бегущих волн, отводящих энергию от движущегося источника. На рис. 2.2 представлены графики поперечного смещения срединной линии балки в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой для различных безразмерных значений скоростей $\tilde{V}$ и сдвиговой жесткости β .

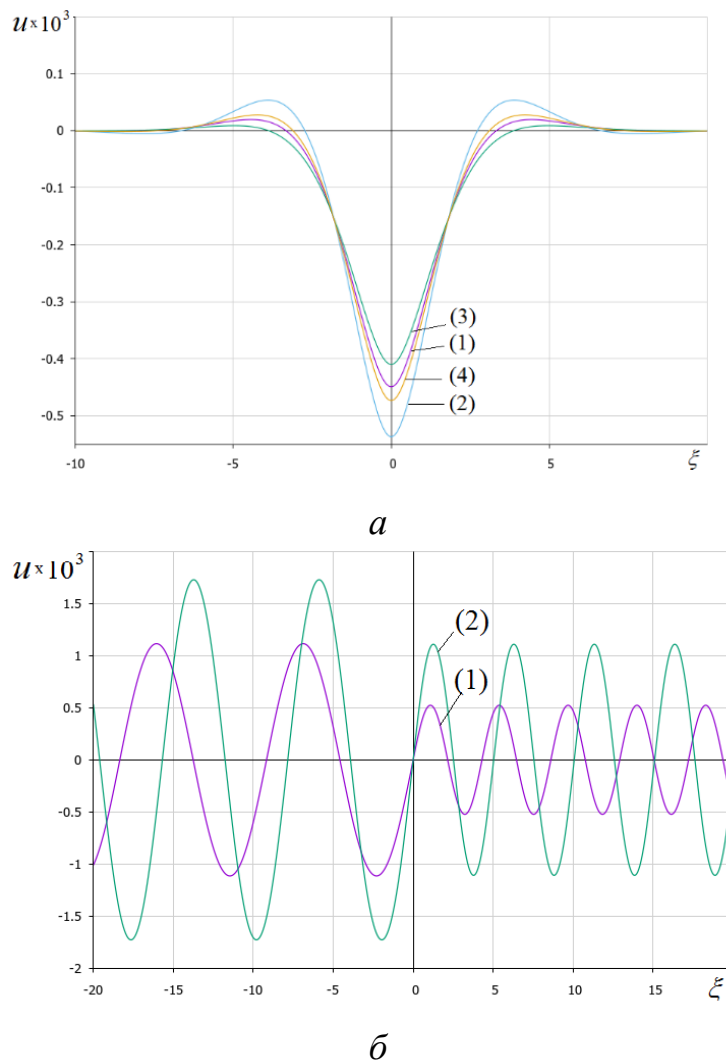


Рис. 2.2 Изменение прогиба направляющей в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой

Слева (а) при докритических скоростях:

Основание

Винклера

Основание

Пастернака

(1) – $\beta = 0$, $\tilde{V} = 0$; (2) – $\beta = 0$, $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_*$; (3) – $\beta \neq 0$, $\tilde{V} = 0$; (4) – $\beta \neq 0$, $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_*$

Справа (б) при закритических скоростях: (1) – $\beta = 0$; (2) – $\beta \neq 0$.

У неподвижной нагрузки $\tilde{V} = 0$ или движущейся со скоростью, меньше критической $\tilde{V} < \tilde{V}_*$, поле поперечных смещений локализовано около источника и представляет собой суперпозицию спадающих осцилляций.

Профиль прогиба под нагрузкой симметричен (рис. 2.2а). Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью выше критической, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, две из которых бегут впереди движущейся нагрузки, а две другие – ей вослед, отводя от нее энергию. Амплитуды волн неограниченно возрастают при критической скорости движения нагрузки. При закритических скоростях движения прогиб в точке приложения силы равен нулю (рис. 2.2б) для обеих моделей. Источник, движущийся по балке на основании Пастернака, излучает бегущие волны с большими амплитудами, чем по балке на винклеровском основании. Установлено, что при достижении критической скорости реализуется резонансный режим, сопровождающийся неограниченным ростом амплитуды колебаний в рамках линейной модели. При закритических скоростях возникает волновое сопротивление, обусловленное излучением бегущих волн, отводящих энергию от движущегося источника.

В третьей главе рассмотрено развитие математической модели волновой динамики балки за счет учета вращательной инерции поперечного сечения. Также изучено влияние нелинейности обобщенного упругого основания на дисперсионные свойства изгибных волн и эволюцию квазигармонических волновых возмущений.

В первом разделе главы 3 выполнено сравнение моделей Рэлея и Бернулли–Эйлера, позволившее оценить влияние учета вращательной инерции на характеристики распространения изгибных волн. Из рисунков 3.1. видно, что модель Бернулли–Эйлера дает завышенную оценку скоростей и дисперсии в модели, в сравнении с уточненной моделью Рэлея. Кроме того, сделан вывод о том, что при больших волновых числах дисперсионное «расплывание» возмущений отсутствует. Из анализа сделан вывод, что для коротких волн наличие инерции поворота поперечного сечения в балке существенно ограничивает скорость распространения изгибных возмущений.

Во втором разделе данной главы рассматривается поведение путевой структуры в виде балки на обобщенном нелинейно-упругом основании. Для описания нелинейных свойств основания, жесткости считаются зависимыми от прогиба балки и угла ее поворота:

$$H_1 = h_1 + \tilde{h}_1 w^2, H_2 = h_2 + \tilde{h}_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3.1)$$

А динамика балки, лежащей на таком основании, будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = c_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6\tilde{h}_2}{\rho F} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \omega_0^2 w - \frac{2\tilde{h}_1}{\rho F} w^3. \quad (3.2)$$

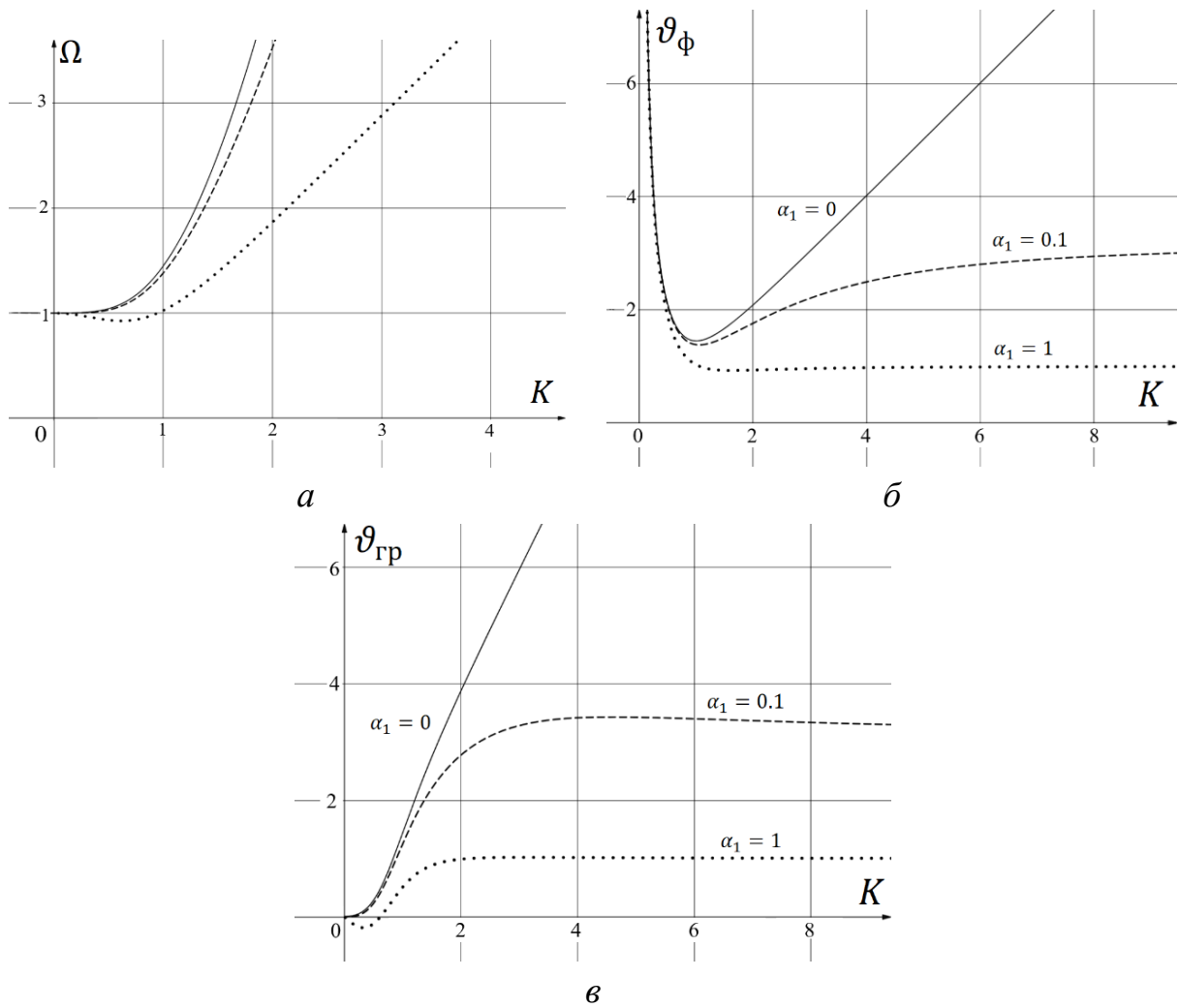


Рис. 3.1. Графики сравнения моделей балки Бернулли-Эйлера ($\alpha_1 = 0$) и модели Рэлея ($\alpha_1 \neq 0$)

Здесь w – поперечное смещение срединной линии балки, $\alpha = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}$; E – модуль Юнга; I – осевой момент инерции; ρF – погонная плотность; $c_{\parallel} = \sqrt{\frac{h_2}{\rho F}}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}$ – наименьшая частота возбуждаемых в балке волн.

Если нелинейность слабая, решение полного нелинейного уравнения (3.2) качественно близко к линейному, и его целесообразно строить в виде суперпозиции квазигармоник. Более того, для систем с кубической нелинейностью характерно доминирование эффектов самовоздействия (самофокусировки и самомодуляции) над процессами генерации высших гармоник, так что вкладом последних допустимо пренебречь. Сочетание этих двух факторов – дисперсионного разбегания гармоник и слабости механизмов их рождения – позволяет искать решение в форме одной

квазигармонической волны, чьи амплитуда и фаза медленно меняются в пространстве и во времени:

$$w(x, t) = A(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\omega t - kx)} + A^*(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (3.3)$$

где комплексная амплитуда (A), частота (ω) и волновое число (k) удовлетворяют соотношению: $\frac{\partial A}{\partial x}/kA \sim \frac{\partial A}{\partial t}/\omega A \sim \varepsilon \ll 1$.

На основе метода усреднения по быстрым переменным получено эволюционное уравнение для огибающей квазигармонической волны в системе координат, движущейся с групповой скоростью ($\xi = x - v_{gp}t$, $\tau = \varepsilon t$). Это уравнение имеет вид нелинейного уравнения Шредингера. Откуда, следуя критерию Лайтхилла, условие возникновения модуляционной неустойчивости изгибных волн записывается в виде неравенства:

$$\frac{(6\alpha^2 k^2 + c_{||}^2 - v_{gp}^2)[-3(\widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2 k^4)]}{\omega^2 \rho F \varepsilon^2} < 0. \quad (3.4)$$

Установлено, что при упрочняющейся нелинейности, т.е. когда нелинейная часть коэффициентов жесткости больше нуля ($\widetilde{h}_{1,2} > 0$), распространяющиеся изгибные волны испытывают самомодуляцию и распадаются на последовательность локализованных волновых пакетов, тогда как при размягчающейся нелинейности ($\widetilde{h}_{1,2} < 0$) модуляционная неустойчивость не развивается. Физически самомодуляция проявляется в перекачке энергии из центральной части спектра модулированной волны в её боковые компоненты, что сопровождается усилением последних и наглядно иллюстрируется рис. 3.2.

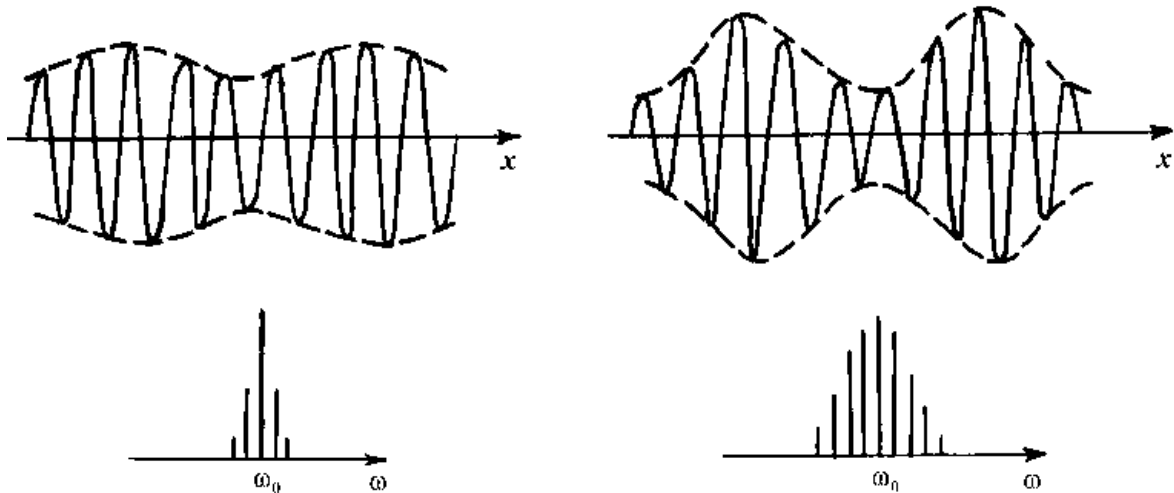


Рис. 3.2. Модуляционная неустойчивость квазигармонической волны и эволюция спектра

Также были исследованы стационарные решения уравнения огибающей, соответствующие периодическим и уединенным волновым пакетам. Функционал потенциальной энергии и фазовый портрет, построенные на основе уравнения Дуффинга, представлены на рис. 3.3. Откуда видно, нелинейная система поддерживает как семейства периодических решений, так и локализованные решения.

Было показано, что увеличение линейной жесткости основания приводит к расширению волновых пакетов, тогда как рост нелинейной жесткости ограничивает их амплитуду.

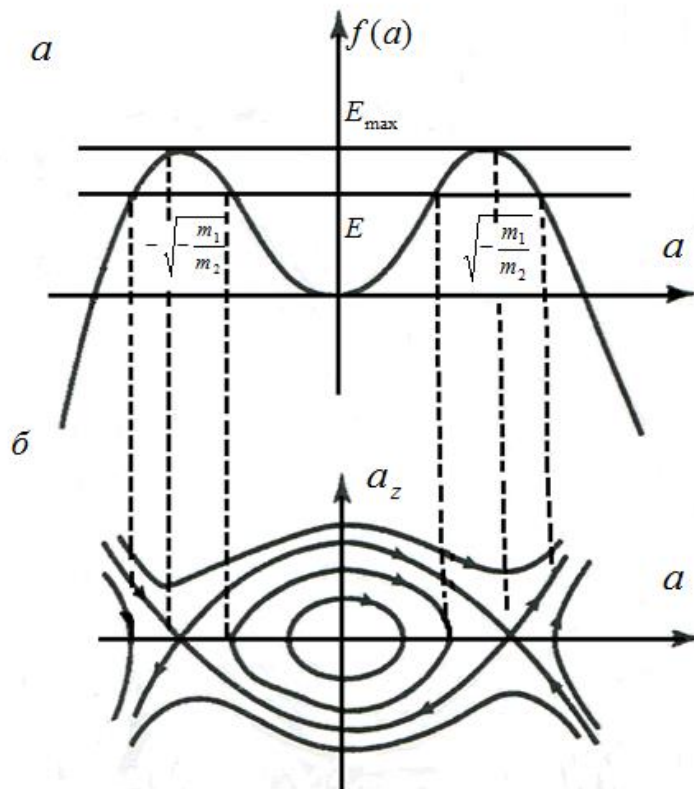


Рис. 3.3. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) уравнения Дуффинга.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Рассмотрен класс задач о динамике бесконечной балки Бернулли–Эйлера, опирающейся на деформируемое основание нескольких типов:

- а. вязкоупругое;
- б. обобщённое упругое с двумя независимыми коэффициентами постели – на сжатие и на сдвиг;
- в. обобщённое нелинейно-упругое, жёсткостные параметры которого зависят от текущего поперечного смещения срединной линии балки и его градиента.

2. Изучены колебания балки Бернулли–Эйлера, несущей движущуюся нагрузку на обобщённом упругом основании, и балки Рэлея, опирающейся на то же основание. Бесконечная протяжённость балки предполагает, что на её концах установлены оптимальные демпфирующие устройства, полностью поглощающие падающие возмущения; это даёт возможность исключить граничные условия из рассмотрения и интерпретировать все вибрации как бегущие изгибные волны.

3. Установлено, что изгибные волны в балке на вязкоупругом основании обладают дисперсией фазовой скорости и частотно-зависимым затуханием. При нулевой вязкости дисперсионная кривая содержит зону непропускания: бегущие волны существуют лишь на частотах выше критической. Введение сколь угодно малой вязкости полностью устраняет эту зону – волновое движение становится возможным при любой частоте, однако все волны без исключения приобретают затухание.

4. Показано, что увеличение сдвиговой жёсткости обобщённого (двухпараметрического) основания приводит к росту частоты, а также фазовой и групповой скоростей для волн с одним и тем же волновым числом, то есть волн равной длины. Записано уравнение переноса энергии в дивергентной форме; из него непосредственно вытекает равенство средней скорости переноса энергии и групповой скорости изгибных волн. Совпадение этих двух скоростей подтверждает внутреннюю физическую согласованность модели изгибных колебаний балки на обобщённом упругом основании.

5. Исследован процесс возбуждения изгибных волн движущейся нагрузкой и определены критические скорости её перемещения. Получено выражение для силы волнового давления (волнового сопротивления движению) и установлена зависимость её постоянной составляющей от скорости. Выполнено сравнение с результатами, которые даёт классическая модель винклеровского основания.

6. Проанализированы дисперсионные характеристики балки Рэлея – с учётом инерции вращения поперечного сечения – на обобщённом упругом основании. Показано, что вращательная инерция понижает фазовую и групповую скорости; эффект наиболее заметен в длинноволновой области, где модель Бернулли–Эйлера предсказывает завышенные значения. Модель Рэлея демонстрирует физически корректное асимптотическое поведение как в пределе нулевого волнового числа, так и при его неограниченном возрастании.

7. Изучена эволюция квазигармонических изгибных волн в балке на обобщённом нелинейно-упругом основании. Выявлено, что при

нелинейности жёсткого типа развивается само модуляция, которая вызывает прогрессирующую пространственную локализацию волнового поля и его дробление на отдельные волновые пакеты. Ширина пакетов возрастает с повышением линейной жёсткости основания; амплитуда же, напротив, убывает с ростом нелинейной жёсткости.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, входящие в Перечень ВАК Минобрнауки РФ и в базы Web of Science и/или Scopus:

1. Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Malkhanov A.O., Tsarev I.S. Dynamics of the beam laying on the elastic basis of the Pasternak model carrying the moving constant // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 971. Article ID: 032069. 6 pages. (*Scopus*).
2. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой // Прикладная математика и механика. 2021. Т.85. № 2. С.193-209. (*ВАК*, Переводная версия: *WoS*, *Scopus*).
3. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Царев И.С. Эволюция квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2023. № 2 (107). С.83-97. (*ВАК*, *Scopus*).
4. Ерофеев В.И., Ленин А.О., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 2. С.118-125. (*ВАК*, *Scopus*).
5. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Царев И.С. Дисперсионные характеристики и частотно-зависимое затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2005. № 3 (780). С.30-36. (*ВАК*).
6. Erofeev V.I., Lenin A.O., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Bending waves in beams lying on generalized deformable foundations: elastic, viscoelastic and nonlinear-elastic ones // Advanced Structured Materials. 2025. Vol.223. P.149-180. (*Scopus*).
7. Царев И.С. Влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики

гармонических волн // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т.22. № 3. С. 43-50. (*ВАК*).

Материалы докладов на научных конференциях и другие научные публикации

8. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Динамика балки, лежащей на упругом основании модели Пастернака, несущей движущуюся постоянную нагрузку // Вестник научно-технического развития. 2020. № 3 (151). С.20-28.
9. Царев И.С. Изгибные колебания балки, лежащей на упругом основании Пастернака // XII Всероссийский Фестиваль науки. Сборник докладов. Нижний Новгород: Изд-во ННГАСУ. 2022. С.1259-1264.
10. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Изгибные колебания балки в системе с двухпараметрическим упругим основанием при наличии движущейся нагрузки // Труды XXVII Научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород: ННГУ. 2023. С.437-440.
11. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Гаситель поперечных колебаний струны, лежащей на упругом основании // Математическое моделирование в естественных науках. Материалы XXXIII Всероссийской конференции (г. Пермь, 2-4 октября 2024 г.). Пермь: ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». 2024. С.144-148.

Подписано в печать _____.07.2026 г. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 1. Заказ № _____. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе дизайна и цифровой печати
РИУ ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 603000, г. Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37.