

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)

На правах рукописи

Царев Иван Сергеевич



**ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА ДЕФОРМИРУЕМЫХ
ОСНОВАНИЯХ И НЕСУЩИХ ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ДВИЖУЩИЕСЯ
НАГРУЗКИ**

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры теоретической,
компьютерной и экспериментальной механики
ННГУ,

Ерофеев Владимир Иванович

Нижегород 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. Обзор работ по динамике деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки.....	12
1.1 Развитие теоретической базы методов динамического расчёта элементов конструкций под действием подвижных нагрузок.....	12
1.2 К истории расчета железнодорожных мостов на подвижную нагрузку	18
ГЛАВА 2. Волновая динамика балок Бернулли-Эйлера, лежащих на вязкоупругом и обобщенном упругом основаниях, и несущих высокоскоростные движущиеся нагрузки	26
2.1 О применимости моделей балки, совершающей изгибные колебания, к изучению высокоскоростного движения объектов по рельсовому пути.....	26
2.2 Дисперсионные характеристики и частотно-зависимое затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании	38
2.3 Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании	45
2.4 Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании с движущейся нагрузкой	55
ГЛАВА 3. Влияние неучтенных дисперсионных факторов и нелинейности обобщенного упругого основания на эволюцию изгибных волн, распространяющихся в балках.....	74
3.1 Влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонических волн	74
3.2 Влияние обобщенного нелинейно-упругого основания на эволюцию квазигармонических изгибных волн и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	91
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	93

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

В условиях интенсивного развития высокоскоростных транспортных систем, включая железнодорожный, вакуумный и ракетный транспорт, всё более важной становится проблема обеспечения надёжности и устойчивости несущих конструкций, работающих при больших динамических воздействиях. Рост эксплуатационных скоростей неизбежно приводит к усложнению характера взаимодействия подвижной нагрузки с элементами конструкции. Одним из активно развивающихся направлений механики деформируемого твёрдого тела в настоящее время является исследование волновых явлений, возникающих при движении нагрузок по протяжённым конструкциям с распределёнными параметрами. Подобные задачи представляют интерес не только с теоретической точки зрения, но и имеют важное прикладное значение: поскольку волновые эффекты во многом определяют особенности и теоретически обозначенные пределы динамического поведения конструкций при высоких скоростях движения. Явными представителями такого класса задач являются вопросы распространения изгибных волн в стержнях, балках и пластинах, взаимодействующих с различными типами оснований, в том числе упругими и вязкоупругими. Используемые при этом модели позволяют исследовать широкий круг инженерных систем, начиная от рельсовых направляющих железнодорожного пути и заканчивая элементами перспективной аэрокосмической инфраструктуры. При этом характер динамического отклика конструкции в значительной степени определяется как свойствами самой несущей системы, так и параметрами основания, влияющими на условия распространения и затухания волновых возмущений. Проблематика высокоскоростного движения приобретает особую актуальность в связи с постоянным увеличением скоростей подвижных объектов. Во многих случаях эти скорости начинают приближаться к фазовым и групповым скоростям распространения упругих волн в элементах конструкции. В подобных режимах существенно возрастает роль резонансных эффектов, способных приводить к резкому увеличению динамических перемещений, внутренних усилий и уровней вибрации. Именно поэтому

исследование процессов распространения изгибных волн и динамического взаимодействия движущихся нагрузок с деформируемыми конструкциями представляет значительный интерес как для теории механики, так и для практики проектирования современных транспортных систем.

Актуальность работы также обусловлена необходимостью создания моделей расчёта и проектирования мостовых сооружений, контактной сети, в судостроении, ВСМ (высокоскоростных магистралей), а также композитных конструкций в аэрокосмической нагруженной технике. Кроме того, задачи расчёта изгибных волн в распределённых системах находят применение при оценке виброустойчивости и долговечности сложных сооружений.

Степень научной разработанности темы

В первой главе работы содержится развернутый анализ отечественных и зарубежных исследований, начиная с классических решений О. Мора, Винклера, А.Н. Крылова и С.П. Тимошенко, и заканчивая современными вычислительными методами — МКЭ, интегральными уравнениями и методами узловых ускорений. Показано, что сформировались четыре основных группы задач, различающихся учетом масс конструкции и нагрузки. Оценен и продемонстрирован вклад исследователей СССР и РФ в развитие методологии расчета конструкций на подвижные нагрузки.

Во второй главе выполнен самостоятельный анализ волновой динамики балок, лежащих на вязкоупругих и обобщенных основаниях. Представлены дисперсионные соотношения, описывающие затухание и распространение изгибных волн в балках Бернулли–Эйлера, учитываются особенности материала основания и параметров демпфирования. Также исследуются эффекты, возникающие при взаимодействии с высокоскоростной нагрузкой.

В третьей главе добавлен учет вращательной инерции и нелинейно-упругих свойств основания. Представленный подход позволяет описывать явления самомодуляции и неустойчивости волновых пакетов.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование волновых процессов в балках, лежащих на упругих и вязкоупругих основаниях, с учётом распространения высокоскоростных нагрузок. А также изучение их математических моделей для оценки дисперсионных зависимостей и скоростей распространения волн и переноса энергии.

В соответствии с целью были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследовать дисперсионные свойства изгибных волн при различных типах основания и моделях балки.
2. Проанализировать влияние параметров движущейся нагрузки на устойчивость и качественные изменения волн.
3. Обосновать применимость моделей для расчёта инженерных конструкций.

Научная новизна

1. Сформулирована замкнутая математическая модель динамического взаимодействия бесконечной балки Бернулли–Эйлера на обобщённом основании Пастернака с движущимся объектом, обладающим массой и моментом инерции. Отличительная черта модели — использование вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, который для системы с распределёнными и сосредоточенными параметрами автоматически учитывает взаимный энергообмен и даёт полную краевую задачу без привлечения дополнительных гипотез о контактных силах.

2. Метод расчёта критических скоростей движущейся нагрузки, основанный на анализе дисперсионного уравнения и кинематического инварианта, обобщён на случай двухпараметрического упругого основания со сдвиговой жёсткостью. Показано, что наличие второго коэффициента постели приводит к повышению критической скорости по сравнению с классической моделью Винклера, что подтверждает более реалистичное описание высокоскоростного движения по упругой направляющей.

3. Получено аналитическое выражение для силы, обусловленной волновым давлением (волнового сопротивления) на движущийся объект с

постоянной скоростью в рамках двухпараметрической модели. Установлена явная зависимость постоянной составляющей волнового сопротивления от скорости движения и параметров обобщённого основания; результат сопоставлен с аналогичным для винклеровского основания и выявлены количественные различия.

4. Впервые построены дисперсионные кривые для балки Рэлея (математическая модель учитывает инерцию вращения поперечного сечения при изгибе), лежащей на обобщённом упругом основании Пастернака. Установлено, что вращательная инерция понижает фазовую и групповую скорости в длинноволновой области и обеспечивает асимптотически корректное поведение на бесконечности, устраняя завышенные оценки, присущие теории Бернулли–Эйлера.

5. Выявлен и количественно описан эффект самомодуляции квазигармонических изгибных волн в балке на нелинейно-упругом основании жёсткого типа. Показано, что развитие модуляционной неустойчивости ведёт к пространственной локализации волнового поля и формированию изолированных волновых пакетов, причём ширина пакетов растёт с линейной жёсткостью, а амплитуда подавляется нелинейной составляющей.

6. На основе сопоставления трёх моделей основания (винклеровского, обобщённого и нелинейно-упругого) выявлены принципиальные различия в дисперсионных свойствах, условиях возникновения зоны непропускания, структуре критических скоростей и эффективности излучения волн, что позволило сформулировать количественные критерии выбора расчётной схемы основания для инженерных приложений.

Теоретическая и практическая значимость

1. Разработанные аналитические зависимости для критических скоростей и волнового сопротивления могут непосредственно использоваться в практике проектирования высокоскоростных наземных магистралей и рельсовых направляющих ракетных треков для обоснования предельно допустимых скоростных режимов и выбора параметров упругого основания.

2. Предложенный метод вычисления критических скоростей через совместное решение дисперсионного и кинематического уравнений допускает прямую реализацию в инженерных расчётных программах, что делает его доступным для расчётчиков без привлечения специализированного конечно-элементного моделирования.

3. Результаты сравнения моделей Бернулли–Эйлера и Рэлея на обобщённом основании дают инженеру критерии для обоснованного выбора балочной модели в зависимости от диапазона рассматриваемых длин волн и скоростей движения нагрузки, что предотвращает использование упрощённой теории в областях, где она даёт завышенные оценки.

4. Выявленные закономерности самомодуляции и формирования волновых пакетов в нелинейно-упругом основании открывают путь к созданию пассивных методов управления волновыми полями — например, к проектированию оснований с заданным соотношением линейной и нелинейной жёсткости для локализации или рассредоточения колебательной энергии.

5. Записанное в дивергентной форме уравнение переноса энергии и аналитически подтверждённое равенство средней скорости переноса энергии групповой скорости изгибных волн служат универсальным средством верификации численных моделей волновой динамики: нарушение этого равенства в численном решении сигнализирует о вычислительных артефактах или нарушении законов сохранения.

6. Полученная в работе количественная оценка влияния сдвигового коэффициента постели на рост критической скорости позволяет давать рекомендации к конструктивным мероприятиям (усиление поперечных связей, изменение материала балластного слоя и т.п.), направленным на реальное повышение предельной скорости эксплуатации существующих и проектируемых путевых структур.

7. Показано, что благодаря учету основных эффектов, сопутствующих процессам высокоскоростного нагружения, внедрение результатов возможно на предприятиях РЖД, Росатома, Минпромторга России для расчетного

обоснования прогнозных и ресурсных характеристик проектируемых конструкций и аппаратов современной техники.

Методы исследования

Исследование базируется на:

- вариационном принципе Гамильтона–Остроградского;
- методах теоретической механики;
- параметрическом анализе систем;
- численных методах решения дисперсионных задач.

Положения, выносимые на защиту:

1. Вариационная модель системы «балка на обобщённом основании — движущийся объект»

Предложенный лагранжев формализм порождает связанную систему уравнений движения балки и объекта, а также естественные граничные условия; модель автоматически учитывает двусторонний обмен энергией и позволяет анализировать поведение системы без априорных предположений о контактном взаимодействии.

2. Закономерности критических скоростей

Для балки на обобщённом основании Пастернака критические скорости превышают значения, предсказываемые моделью Винклера; аналитическое выражение для критической скорости получено через условие вырождения корней системы дисперсионного уравнения и кинематического инварианта; показано, что в частном случае массивного тела без собственного момента инерции спектр критических скоростей вырождается до единственного значения.

3. Сила волнового сопротивления

Постоянная составляющая волнового давления на движущийся объект аналитически выражается через скорость движения и параметры основания; сравнение с винклеровской моделью показывает, что двухпараметрическое основание даёт иные (как правило, бóльшие) значения сопротивления при

закритических скоростях, что объясняется более эффективным излучением бегущих волн.

4. Влияние вращательной инерции

Учёт инерции вращения сечения (модель Рэлея) на обобщённом основании приводит к снижению фазовой и групповой скоростей, существенному в длинноволновом диапазоне, и обеспечивает физически корректные асимптотики при неограниченном возрастании волнового числа; это ограничивает применимость модели Бернулли–Эйлера.

5. Влияние нелинейно-упругого основания на самомодуляцию волны

Для балки на основании с жёсткой нелинейностью эволюция квазигармонической изгибной волны описывается нелинейным уравнением Шрёдингера; модуляционная неустойчивость проявляется как пространственная фрагментация волнового поля, причём ширина и амплитуда пакетов разнонаправленно зависят от линейной и нелинейной жёсткости основания.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на:

– International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment – ICMTMT-2020, г. Севастополь, 7-10 сентября, 2020. Доклад на тему “Dynamics of the beam laying on the elastic basis of the Pasternak model carrying the moving constant».

– Всероссийская научная конференция «Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций», г. Пермь, 10-12 октября 2022 г. Доклад на тему «Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании».

– XII Всероссийский Фестиваль науки, 18-19 октября 2022 г., ННГАСУ, г. Н. Новгород. Доклад на тему «Изгибные колебания балки, лежащей на упругом основании Пастернака».

– XXVII научная конференция по радиофизике, 15-25 мая 2023 г. ННГУ. Доклад на тему «Изгибные колебания балки в системе с двухпараметрическим упругим основанием при наличии движущейся нагрузки».

– XXXIII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках». (г. Пермь, 2-4 октября 2024 г.). Доклад на тему «Гаситель поперечных колебаний струны, лежащей на упругом основании».

Достоверность полученных результатов подтверждается строгим математическим аппаратом, соответствием фундаментальным законам механики деформируемого твердого тела, сопоставлением с результатами классических моделей, а также с имеющимися опытными данными.

Работа выполнялась при следующей финансовой поддержке:

– в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2024 – 2026 гг. (FFUF-2024-2026-0031, № НИОКР 1023032800130-3-2.3.2);

– в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ FSWR-2026-0019, регистрационный номер НИОКР 126061121911-7);

– при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-19-00613 «Устойчивость и волновая динамика высокоскоростных объектов, движущихся по упругим направляющим». Руководитель Ерофеев В.И.;

– при поддержке стипендии им. академика Г.А. Разуваева (Правительство Нижегородской области)

– при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-19-00613 «Устойчивость и волновая динамика высокоскоростных объектов, движущихся по упругим направляющим». Руководитель Ерофеев В.И.;

– при поддержке стипендии им. академика Г.А. Разуваева (Правительство Нижегородской области).

Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем:

– обобщение метода расчёта критических скоростей движущейся нагрузки, основанного на анализе дисперсионного уравнения и кинематического инварианта, на случай двухпараметрического упругого основания со сдвиговой жёсткостью;

- установление зависимости постоянной составляющей волнового сопротивления от скорости движения и параметров обобщённого основания;
- построение и исследование дисперсионных кривых для балки Рэлея (математическая модель учитывает инерцию вращения поперечного сечения при изгибе), лежащей на обобщённом упругом основании Пастернака;
- изучение эволюции квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщённом нелинейно-упругом основании.

Ерофееву В.И. принадлежит постановка задачи диссертационного исследования, общее руководство работой, формулировка утверждений, участие в обсуждении, редактировании и оформлении результатов. Ленин А.О., Мальханов А.О., Морозов А.Н. участвовали в проведении численных расчетов поведения дисперсионных кривых изгибных волн при различных параметрах задачи. Леонтьева А.В. участвовала в исследовании частотной зависимости затухания изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании. Лисенкова Е.Е. участвовала в постановке задачи о динамическом поведении балки, лежащей на обобщенном упругом основании и несущей на себе движущуюся нагрузку.

ГЛАВА 1. ОБЗОР РАБОТ ПО ДИНАМИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ, НЕСУЩИХ ДВИЖУЩИЕСЯ НАГРУЗКИ

Динамические воздействия, возникающие при движении поездов, автомобилей и иных транспортных средств, существенно влияют на напряжённо-деформированное состояние инженерных сооружений, включая мосты, эстакады и тоннели. Традиционные статические расчётные схемы оказываются недостаточными для точной оценки прочности и долговечности конструкций, что обуславливает необходимость детального изучения динамических процессов и разработки новых методологических подходов.

Историческое развитие методов расчёта подвижных нагрузок демонстрирует переход от упрощённых аналитических моделей к современным численным методам, в том числе с применением метода конечных элементов и интегральных уравнений. Современные исследования направлены на повышение точности прогнозирования колебаний и нагрузок, оптимизацию проектных решений и обеспечение надёжности транспортных сооружений в условиях высоких скоростей движения. Данная глава представляет систематизированный обзор ключевых этапов развития теории расчёта конструкций на подвижные нагрузки, с выделением научных направлений, оказавших наибольшее влияние на современную инженерную практику.

1.1 Развитие теоретической базы методов динамического расчёта строительных конструкций под действием подвижных нагрузок

Вопросы расчёта транспортных сооружений при воздействии подвижных нагрузок занимают важнейшее место в строительной механике, динамике сооружений и теории упругости. К примеру, на высокоскоростной линии Пекин–Шанхай (эксплуатационная скорость составов достигает 350 км/ч) мосты, эстакады и путепроводы составляют более 80 % общей протяжённости. При скоростях такого порядка неоднократно регистрировались случаи резонансного усиления колебаний пролётных строений, связанные с совпадением частоты прохождения колёсных пар и собственных частот системы «балка–основание». Это указывает на недостаточность традиционных подходов, заложенных в ряд действующих

нормативных методик, которые не соответствуют технологическим скачкам развития технологий. Обзоры [1–7] обобщают эволюцию методов динамического анализа — от аналитических инженерных схем до детальных конечно-элементных моделей. Эти труды представляют собой фундаментальные источники знаний для проектировщиков и исследователей, обеспечивая основу для дальнейшего совершенствования методов динамического анализа. Ниже приводится систематизированная историческая эволюция подходов к решению задач динамики сооружений под действием подвижных нагрузок, отражающая постепенный переход от простых моделей к более сложным комплексным системам расчёта.

В расчётах начального периода обычно исходили из допущения, что форма прогиба конструкции в каждый момент определяется статической задачей для текущего положения нагрузки. По существу, инерционные эффекты при таком подходе игнорировались, а перемещение нагрузки рассматривалось как последовательность мгновенных статических состояний. Это заметно упрощало вычисления — при тогдашней ограниченности аналитического аппарата подобное упрощение имело принципиальное значение и позволяло получать хотя и приближённые, но практически полезные результаты. Именно к данному периоду относятся труды О. Мора, Э. Винклера, Ф. Виллиса и Дж. Стокса [4]; в них впервые были даны формальные схемы анализа влияния подвижной нагрузки на балки и пролётные строения. Хотя впоследствии выяснилось, что игнорирование сил инерции оправдано лишь при сравнительно низких скоростях движения, эти ранние работы заложили фундамент для дальнейшего развития динамических моделей и долгое время служили единственным инструментом инженерного расчёта.

Эти исследования стали базой для будущих инженерных расчётов и методологий проектирования транспортных конструкций. В последствии данный методический подход позволил инженерам создавать первые таблицы и графики для определения критических нагрузок и прогибов, что значительно ускорило процесс проектирования.

С точки зрения исторической классификации можно выделить четыре основных направления исследований движения нагрузок по конструкциям:

1. Расчёт нагрузок без учёта массы груза и конструкции;
2. Расчёт нагрузок с учётом массы груза при игнорировании массы конструкции;
3. Расчёт нагрузок с учётом массы конструкции при игнорировании массы груза;
4. Расчёт нагрузок с помощью комплексного подхода: с учётом массы как конструкции, так и движущегося груза.

Такая классификация возникла не случайно — она отражала поэтапное усложнение научных задач и развитие математического аппарата. Первая и вторая группы исторически были удобны для первичных оценок при проектировании железнодорожных мостов и деревянных эстакад XIX века. Однако по мере роста скоростей движения поездов и увеличения нагрузок эти методы утратили практическую ценность, так как не могли учесть инерционные эффекты и другие факторы.

Методы первых двух классов сегодня имеют лишь историческую ценность и редко применяются в практических инженерных расчётах. Третья группа исследований имеет особое значение. К ней принадлежат работы А.Н. Крылова [8] и С.П. Тимошенко [5] — именно здесь впервые было рассмотрено движение постоянной, а затем и пульсирующей массы по балке, имеющей собственную распределённую массу. По существу, с этих трудов и начала складываться современная динамическая теория. Примерно в те же годы А.Г. Барченков и Р.И. Мальцев [9] анализировали безынерционные периодические воздействия на рамы и неразрезные балки. Их исследования отличались подчёркнутой аналитической строгостью и, что не менее важно, явным стремлением распространить найденные решения на сложные статически неопределимые системы. В дальнейшем, как показывают работы [10, 11], для расчёта движения нагрузок по рамам стали применять разложение смещений по собственным формам конструкций. Сам по себе этот приём не был новостью в механике, но его систематическое использование в задачах о подвижных нагрузках стало заметным сдвигом: появилась возможность сводить распределённые динамические задачи к системам

с конечным числом степеней свободы. Это был уже не просто аналитический приём, а шаг, фактически открывавший путь к численным методам расчёта, без которых сегодня не обходится ни один серьёзный инженерный анализ задач в любых сферах расчета нагрузок. Работы [12, 13] впервые продемонстрировали потенциал метода конечных элементов (МКЭ), позволяющего учитывать сложную геометрию конструкций, неравномерные нагрузки и их динамический характер.

Исторический анализ развития этих методов демонстрирует закономерный переход от упрощённых аналитических моделей к более детализированным вычислительным схемам. Внедрение численных методов позволило решать задачи динамики сложных пространственных сооружений с учётом взаимодействия всех элементов системы. Дальнейшее развитие исследований связано с задачами четвёртого класса, где учитывалось взаимодействие массы груза и конструкции. Инглисс [18] свёл уравнение движения балки к дифференциальному уравнению с периодическими коэффициентами, что открыло путь к анализу динамической устойчивости при движении нагрузки. В.В. Болотин [19, 20] разработал систему связанных дифференциальных уравнений, впервые позволившую точно находить критические скорости и динамические прогибы многопролётных балок. Результаты Болотина вошли в нормативные документы для проектирования скоростных магистралей [3, 21–25]. Шалленкамп [26] предложил разложение сил инерции в ряд Фурье, что упростило анализ движения грузов по балке и было использовано в дальнейших работах [3, 26, 27]. Однако оба метода — Инглисса–Болотина и Шалленкампа — были ограничены только задачами расчёта смещений балки и требовали значительной вычислительной мощности для сложных конструкций. На этом этапе основной акцент делался на поиске аналитических методов, дающих быстрые инженерные оценки. С развитием вычислительной техники стали доступны точные численные модели, позволившие детально исследовать влияние массы груза и конструкции, что сформировало современную динамическую теорию. Воронежская научная школа под руководством А.Г. Барченко [9, 28, 29] разработала универсальные методики расчёта пространственных ферм, мостов и рам, что способствовало распространению МКЭ среди инженеров. Метод

интегральных уравнений, восходящий к трудам Тимошенко [5], был развит Г.Б. Муравским [30], предложившим алгоритмы расчёта бесконечных и конечных балок на упругом основании. Его методики позволяли учитывать сложные граничные условия и динамические эффекты, что было востребовано при проектировании мостов и эстакад [31]. Параллельно развивался подход А.П. Филлипова [26] и С.С. Кохманюка [48], основанный на решении системы интегральных уравнений методом последовательных шагов, применяя теорему о среднем. Эти авторы предложили новые способы учёта взаимодействия между движущейся нагрузкой и конструкцией, что позволило моделировать задачи для многопролётных мостов. Однако, эти методы требовали применения специальных процедур осреднения для повышения устойчивости решения [31], что усложняло практическое использование методики. Применение интегральных уравнений стало важным шагом в направлении численного моделирования взаимодействия сложных систем.

Нижегородский научный центр под руководством А.И. Весницкого [33–35] разработал подходы, основанные на принципе Гамильтона–Остроградского, для моделирования совместного движения нагрузки и конструкции. С распространением ЭВМ метод конечных элементов стал основным инструментом расчёта мостовых ферм, виадуков и других транспортных сооружений при динамических нагрузках [36–39, 43–46, 65, 71–80, 87, 98, 99, 109, 110–115]. Задействование метода конечных элементов в расчётах транспортных сооружений стало ключевым моментом, позволившим перейти от аналитических решений к универсальным моделям, пригодным для широкого класса сложных, а также нетиповых конструкций. Этот подход стал основой современных инженерных расчетов.

Если говорить о МКЭ в расчётах линейно-деформируемых систем с подвижной нагрузкой, то здесь сами собой выделились формально два направления: решения, основанные на разложении смещений по собственным формам конструкции [9, 25, 26], и подходы, использующие прямое интегрирование системы уравнений движения [36–38]. Характерный пример второго подхода даёт алгоритм, предложенный в [36] при изучении дискретизации интегральных

уравнений в рамках традиционного МКЭ. В нём модель декомпозируется на две подсистемы — несущую конструкцию и нагрузку; из условия равенства перемещений в точке контакта и с использованием классической схемы Ньюмарка выводятся алгебраические уравнения для контактных дискретных сил, которые автоматически удовлетворяют условиям совместности. Этот алгоритм позже применялся в [39], но широкого внедрения в инженерную практику так и не получил.

Если же говорить о методах анализа взаимодействия балки с движущейся массой в целом, то здесь исторически сложились два основных подхода, пригодных и для других конструкций. Первый — подход Инглисса–Болотина — базируется на обобщённых координатах и разложении прогиба по собственным формам; в результате задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3, 19, 42]. Подобная схема позволяет достаточно эффективно анализировать динамическое поведение системы, однако при увеличении числа удерживаемых форм размерность быстро возрастает, что приводит к существенному усложнению вычислений [3, 19, 42]. Второй подход разделяет систему «балка–груз» на подсистемы и приводит к интегральному уравнению, описывающему динамическую реакцию массы [15, 32]. В таком методе решение интегральных уравнений нередко упирается в условную устойчивость пошаговых процедур [15, 32]. Следует отметить, что оба подхода в настоящее время тесно связаны с использованием метода конечных элементов, хотя роль МКЭ в них различна. В первом случае метод конечных элементов применяется главным образом для определения собственных значений и форм колебаний конструкции, тогда как во втором он используется при формировании системы разрешающих уравнений с последующим прямым интегрированием по времени. Благодаря этому МКЭ остаётся одним из наиболее универсальных и востребованных инструментов при исследовании динамики конструкций, взаимодействующих с подвижными нагрузками.

Логичным следствием представленных подходов стал метод «узловых ускорений» [43, 44], который объединил преимущества обоих подходов. Он

позволяет учитывать большое число форм без увеличения порядка системы, а также обеспечивает высокую устойчивость расчёта. Этот метод стал основой «смешанного» подхода в строительной механике и применяется для анализа колебаний сложных пролетных соединений. Отдельно следует подчеркнуть, что задачи расчёта подвижных нагрузок сохраняют актуальность ввиду увеличения скоростей движения транспорта и развития инфраструктуры высокоскоростных магистралей. За рубежом также ведутся активные исследования в этой области [13, 35, 38, 40, 46–90]. Среди известных зарубежных учёных можно выделить Л. Фрыба, Р. Богача, К. Кнота, К. Попа, С. Брауни, М. Гао, И. Пэна, Я. Янга и Я. Ву, чьи работы посвящены вопросам динамической устойчивости и проектирования современных инженерных систем.

1.2 К истории расчета железнодорожных мостов на подвижную нагрузку

В современных инженерных задачах динамика конструкций под действием подвижных нагрузок остаётся одним из наиболее сложных и актуальных направлений. Появление высокоскоростных поездов (до 500 км/ч и выше), рост автотранспортной нагрузки, а также усложнение геометрических и конструктивных форм сооружений (многопролётные мосты, балочные системы на упругом основании, шумозащитные барьеры) требует особого внимания к динамике взаимодействия железнодорожного пути, искусственных сооружений и подвижного состава, в частности в совершенствовании методов её анализа применительно к мостовым конструкциям. Проследим основные этапы развития этого направления.

Исследования динамики мостов в отечественной науке неразрывно связаны с именами нескольких выдающихся учёных. Первые фундаментальные труды в этой области принадлежат А.Н. Крылову и С.П. Тимошенко [8, 5]. Работа [5], в частности, не только содержит краткую историческую справку — она систематизирует накопленные к тому времени результаты по колебаниям железнодорожных мостов, и именно с неё, во многом, началось развитие всего направления. Впоследствии методы учёта динамических воздействий при проектировании были значительно усовершенствованы благодаря вкладу С.А.

Бернштейна, Е.Е. Гибшмана, С.А. Ильясевича и В.В. Болотина. Особое значение имела деятельность коллектива МИИТа [57, 91-96], значимый вклад внесли ученые ЦНИИСа — К.С. Силин, О.Я. Берг, Я.А. Дорман, Н.М. Колоколов, Н.Б. Лялин, Б.Е. Улицкий, А.А. Потапкин, А.А. Цернант и др. А также практики-мостостроители СССР и РФ: Н.А. Холин, И.А. Иванченко, Б.А. Забродин, Е.А. Сидоров, А.И. Жуковский, Ю.М. Митрофанов, А.Д. Потапов, Л.С. Блинков, П.П. Куракин, М.М. Грутман, С.А. Мелконян, В.Н. Власов и др.

В последующем этапе развития основной вектор был задан исследованиями [3, 19, 20, 24, 25, 28, 29, 32, 39, 42, 44, 48, 58, 93, 94, 97-107]. Особое место занимают работы Л. Фрыбы, Т. Боровича, Я. Гарга, С. Бруни, А. Матсуры, С. Миязаки, М. Канамори, а также исследования [45, 46, 66, 67, 69, 80, 85, 86, 108-110].

Следует подчеркнуть, что с середины XX века развитие динамических расчетов сопровождалось постоянным усложнением моделей. Первоначально изучались мосты под действием простейших подвижных нагрузок, однако с ростом методологических возможностей стало возможным учитывать движение составов, включающих несколько экипажей. Работы [31, 32], выполненные на основе метода интегральных уравнений, были посвящены движению экипажа по неразрезным балкам и мостовым конструкциям. Авторам удалось, в частности, показать, что интегральная форма записи позволяет учесть сосредоточенную инерционную нагрузку. Этот приём оказался удобным и в дальнейшем неоднократно использовался при анализе систем с подвижной нагрузкой.

В 1984 году вышла работа [42], в которой впервые были систематизированы разрозненные результаты по динамике систем «мост–поезд». В ней впервые комплексно рассматривались вопросы взаимодействия движущегося железнодорожного состава с мостовыми конструкциями. Авторы построили лагранжиан системы, полученной на основе кинетической и потенциальной энергий, и применили уравнения Лагранжа второго рода, что позволило вывести систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Несмотря на то, что ограничение числа форм колебаний снижало точность при определении напряженно-деформированного состояния, данный подход был

научным прорывом для своего времени. Именно в этот период возникло понимание, что традиционные аналитические методы имеют естественные пределы точности и применимости. Это осознание стало толчком к поиску новых вычислительных подходов, в первую очередь связанных с развитием ЭВМ, что определило дальнейший ход исследований. Таким образом, данная работа «Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом» [42] не только систематизировала накопленные знания, но и обозначила границы возможностей классических методов, что сделало её своего рода «мостом» к эпохе численных расчетов в советском научном пространстве.

С появлением метода конечных элементов (МКЭ) открылись новые горизонты в расчетах мостовых конструкций. Отечественные и зарубежные работы [29, 36, 39, 43-46, 65, 71-80, 87, 98, 99, 109, 110-115] стали основой нового этапа. В одном из первых исследований с данной методикой [116], в том же 1984 году, впервые для мостов была применена плоская конечно-элементная дискретизация, базировавшаяся на алгоритме системы «несущая конструкция–подвижная нагрузка», предложенным и разработанным Муравским в [36].

Фактически, внедрение МКЭ стало переломным моментом в развитии инженерных расчетов и он является фундаментальным подходом в наши дни. Этот метод позволил моделировать мостовые конструкции в многомерной постановке, что ранее было недостижимо. Впервые инженеры получили инструмент, позволяющий с высокой степенью детализации учитывать геометрию и свойства материалов. Применение МКЭ стало не только техническим прорывом, но и изменило саму философию инженерных расчетов: от поиска упрощённых аналитических решений на малых моделях к построению максимально приближённых к реальности нагруженных систем.

Появление ЭВМ сделало возможным создание уже пространственных моделей мостов. Так, в исследовании В.К. Гарга [1] был предложен подход, основанный на использовании стержневых конечных элементов для пространственных схем пролетных строений.

Расчёт протяжённых конструкций с распределёнными параметрами упирался в необходимость чрезмерно высокой дискретизации — это и подтолкнуло к развитию метода суперэлементов. В работах [44, 98, 99, 112] он оформился в виде алгоритмов, специально нацеленных на расчёт стержневых систем при подвижной нагрузке, где динамика сильно завязана на взаимодействии элементов. Укрупнение расчётных фрагментов и более аккуратный учёт взаимосвязей позволили поднять вычислительную эффективность, практически не потеряв в точности, — вещь критически важная для сооружений с огромным числом степеней свободы. По сути, метод впервые дал возможность с хорошей точностью проследить динамическое напряжённо-деформированное состояние подобных систем. Подход позволяет в единой схеме рассматривать совместную работу ферм, продольных балок и моделей реального подвижного состава. Более того, динамические коэффициенты теперь можно считать не только по прогибам, но и по моментам в наиболее нагруженных сечениях — это открыло дорогу к более детальному анализу динамической работы и оценкам эксплуатационной надёжности. В литературе его часто называют методом подконструкций.

Суперэлементный метод стал основой для многоуровневого анализа мостовых конструкций. Благодаря ему стало возможным объединять локальные и глобальные характеристики, что особенно важно для оценки надёжности сооружений при экстремальных нагрузках. Применение суперэлементов фактически подготовило базу для цифрового моделирования сложных транспортных систем, что в дальнейшем позволило перейти к концепциям «цифровых двойников» мостов.

Применение МКЭ и развитие вычислительной техники существенно повлияло на проектирование мостов высокоскоростных магистралей (ВСМ). Для них характерно использование пролетных строений коробчатого сечения с ездой поверху, что подтверждается практикой Франции, Германии и Китая [48, 57, 117, 118].

В одном из недавних исследований уже 21 века, по теме движущихся нагрузок [45], для анализа динамических характеристик системы типа «мост—

подвижной состав», в частности, при моделировании конструкций высокой размерности, реализован итерационный численный алгоритм, направленный на оптимизацию вычислительных процессов и сокращение времени расчёта при сохранении точности результатов. В данной работе, как и во многих современных методах расчета, используется МКЭ и методы шагового интегрирования уравнений движения системы. В работах [67, 103], в целях минимизации вычислительной сложности и повышения устойчивости численных процедур, используется явная схема интегрирования дифференциальных уравнений движения, что позволяет избежать громоздких итерационных процессов при расчёте динамических откликов. В работе [85] для однопролётного двухопорного моста коробчатого сечения применялась обычная балочная конечно-элементная модель. Расчётная схема «мост–состав» разбивалась на подсистемы, временная дискретизация велась по Ньюмарку, а реакции связей исключались. Правда, размерность системы при этом оставалась весьма высокой, что ограничивало возможности подхода. Тем не менее, это обеспечивает компромисс между вычислительной эффективностью и необходимой точностью решения задач динамики транспортных сооружений.

На практике выбор метода диктуется соотношением между точностью и вычислительными затратами: для мостовых пролётов с геометрическим отношением длины к высоте сечения более 20 стоимость прямого динамического расчёта в трёхмерной постановке может на порядок превышать ресурсы, доступные на стадии вариантного проектирования. Поэтому широкое распространение получили комбинированные подходы — например, сочетание МКЭ с методом подконструкций, позволяющее снизить размерность задачи и сохранить детальность описания лишь в наиболее нагруженных узлах. При расчёте эстакад на высокоскоростной магистрали HSL Zuid (Нидерланды) такой подход позволил сократить время численного просчёта типового пролёта (с применением программного комплекса ANSYS) с нескольких суток до 6–8 часов без потери точности в оценке пиковых прогибов.

Как известно, рост скоростей движения обостряет проблему резонансных режимов. В ряде европейских путепроводов ВСМ зафиксированы случаи, когда при

совпадении частоты прохождения колёсных пар с первой изгибной частотой пролётного строения динамические прогибы превышали статические в 1,7–2,2 раза. Такое усиление прямо влияет на усталостную долговечность: оценки показывают, что увеличение амплитуды напряжений на 30% способно сократить расчётный ресурс сварных соединений главных балок вдвое. Поэтому расчёт критических скоростей и волнового сопротивления перестаёт быть абстрактной задачей и становится прямым инструментом обоснования скоростных режимов.

Помимо классических нагрузок от подвижного состава, всё заметнее проявляются аэродинамические эффекты. Расчёт таких воздействий требует привлечения нестационарных моделей воздушного потока, что делает задачу междисциплинарной и стимулирует развитие связанных методов вычислительной гидрогазодинамики и строительной механики.

Перечисленные обстоятельства смещают фокус исследований в сторону методов, способных работать с большими массивами данных и плохо формализуемыми зависимостями. В этом контексте нейросетевые технологии перестают быть экзотикой: например, в [120] показано, что предобученная свёрточная сеть позволяет предсказывать пиковые прогибы железнодорожного моста по скорости поезда и температуре с погрешностью менее 5%, а время расчёта сокращается до долей секунды. Аналогично, в [121] нейросеть, обученная на выборке конечно-элементных расчётов, использована для оценки накопления усталостных повреждений в узлах ферм при нерегулярном движении. Подобные модели не заменяют МКЭ, но существенно расширяют возможности параметрического анализа и оперативной диагностики, что особенно важно для эксплуатируемых сооружений с ограниченным доступом к детальной геометрии и истории нагружения. Благодаря этому, прогнозные возможности моделей на основе искусственного интеллекта выходят на новый уровень, обеспечивая мультифакторный анализ, ранее практически недостижимый в рамках традиционных алгоритмов. Более того, нейросетевые модели способны к адаптации и самообучению на основе экспериментальных и полевых данных, что позволяет создавать гибридные вычислительные схемы, интегрирующие

физически информированные законы с большими данными. Такой синтез обеспечивает повышение точности и сокращение вычислительных затрат, а также способствует формированию концепции «цифровых двойников», применяемых для мониторинга и управления сложными инженерными системами в реальном времени. По сути, это знаменует собой новую эпоху в вычислительном процессе, где интеллектуальные алгоритмы становятся катализатором для решения задач, которые ранее считались чрезмерно сложными или вычислительно нецелесообразными в рамках исключительно МКЭ-подхода. В перспективе это приведёт к созданию интегрированных платформ, способных не только воспроизводить, но и прогнозировать поведение конструкций в условиях неопределённости и многофакторности.

Исследования динамической реакции балок с трещинами под движущейся высокоскоростной нагрузкой [119] приобретают особое значение для оценки остаточного ресурса высокоскоростных магистралей: дефекты в виде усталостных трещин (например, в сварных швах пролётных строений) могут развиваться стремительно, а их дистанционная диагностика и ремонт осложнены удалённостью объектов и жёсткими климатическими условиями. Некоторые ж\д узлы действующих ВСМ требовали замены уже через 5 лет после ввода в эксплуатацию из-за прогрессирующих трещин.

Развитие методов динамического расчёта мостов сохраняет как теоретическую, так и прикладную значимость. Среди наиболее острых задач — корректное описание импульсных нагрузок, возникающих при прохождении колёсными парами рельсовых стыков и зон неравномерной упругости пути. Эксперименты на полигонах (в частности, на Экспериментальной кольцевой линии ВНИИЖТ) показывают, что пиковые ударные силы в таких ситуациях могут в 1,5–2 раза превышать статическую нагрузку оси, а при неблагоприятном сочетании частот — приводить к кратковременным резонансным раскачкам пролётных строений. Уточнение этих нагрузок создаёт основу для актуализации нормативных документов, что напрямую повышает надёжность проектируемых и эксплуатируемых сооружений [103, 104, 107, 122–128]. Наряду с этим особый

интерес представляет учет аэродинамических и сейсмических воздействий. Эти факторы расширяют диапазон задач, стоящих перед инженерами, и делают динамику мостов одной из ключевых сфер современной инженерной науки. Таким образом, развитие методов расчета динамических воздействий можно рассматривать как непрерывный процесс, в котором технические достижения идут рука об руку с ростом требований практики — строительства более быстрых, долговечных и надежных мостов.

ГЛАВА 2. ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА БАЛОК БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА, ЛЕЖАЩИХ НА ВЯЗКОУПРУГОМ И ОБОБЩЕННОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, И НЕСУЩИХ ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ДВИЖУЩИЕСЯ НАГРУЗКИ

2.1. О применимости моделей балки, совершающей изгибные колебания, к изучению высокоскоростного движения объектов по рельсовому пути

В течение длительного времени задачи динамического взаимодействия движущихся нагрузок с упругими направляющими рассматривались преимущественно в рамках квазистатических или низкоскоростных постановок. Предполагалось, что скорость движения транспорта и применяемые технологии, существенно меньше скоростей распространения возмущений в несущей конструкции и окружающей среде, вследствие чего волновые эффекты не оказывают существенного влияния на динамическое поведение системы. В подобных условиях, возникающие колебания локализуются вблизи области приложения нагрузки и достаточно быстро затухают. По этой причине считалось, что эффекты, связанные с распространением волн и возможной потерей устойчивости движения, в инженерной практике либо не проявляются, либо являются малозначимыми. Но активное развитие высокоскоростного наземного транспорта, а также систем, которые используют быстродействующие механизмы, вынуждает учитывать способность теории адекватно описывать динамическое взаимодействие движущихся объектов с реакцией «постели».

В настоящее время значительное внимание уделяется изучению критических скоростей движения нагрузки. То есть, к таким скоростным режимам, в которых существенно возрастает динамический отклик распределённой системы. Этот отклик связан с резонансным волновым эффектом, возникающим в конструкции.

Величины критических скоростей, в свою очередь, задаются не только параметрами самой упругой системы, но и характеристиками движущегося объекта, включая его массу и инерционные свойства, если их учет предусмотрен моделью. В связи с этим возникает принципиальный вопрос о минимальной фазовой скорости волн, распространяющихся в рельсовом пути. Согласно теории

модели балки Тимошенко, мы находим значения этой скорости из уравнения динамики на основании Винклера (рис. 2.1):

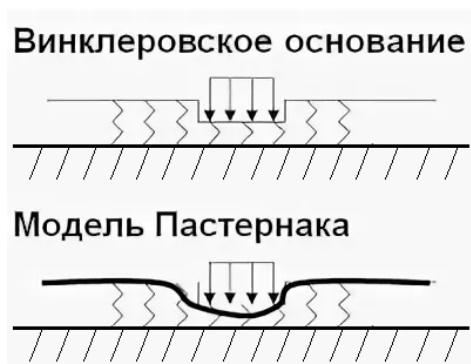


Рис 2.1. Схематичное изображение оснований

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + h_1 w = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $w(x,t)$ — поперечное перемещение срединной линии балки, ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения, J — осевой момент инерции сечения, E — модуль Юнга, h_1 — поперечная жесткость упругого основания.

Можно заметить, что скорости движения современных поездов вплотную приблизились, а в ряде случаев стали превышать скорости распространения упругих волн в токопроводящем контакте, а также в железнодорожном пути. Иными словами, скорости движения подвижных составов возмущений оказались сопоставимыми со скоростями переноса энергии в деформируемых элементах конструкции. В подобных режимах волновые процессы начинают играть определяющую роль в динамике системы. Согласно статистике, на практике жесткость основания составляет в среднем 10^8 н/м. А значит, минимальная фазовая скорость (которая совпадает с резонансной) составляет приблизительно 2000 километров в час. Из проведенной оценки следует, что волновыми явлениями можно пренебречь при анализе динамики рельсового пути и условий потери устойчивости.

Но, в настоящее время эксплуатационные скорости высокоскоростных поездов во ряде стран с передовыми технологиями уже давно достигают 300 км/ч, а рекордные, но пока что экспериментальные значения превышают значения в 500 км/ч. Диапазон скоростей поверхностных волн в грунте железнодорожного полотна

оказывается сопоставимым с указанными выше величинами. Так, в случае плотных грунтов рэлеевские волны могут распространяться со скоростью до 800 км/ч, а в мягких либо обводнённых — их скорость снижается до 150–400 км/ч. Примерно те же значения — несколько сотен километров в час — характерны и для изгибных волн, бегущих по контактными проводам электропоездов. Таким образом, в современных транспортных системах реализуются те режимы, при которых скорость движения нагрузки становится сравнимой со скоростью распространения изгибных и поверхностных волн. Подобное соотношение скоростей указывает на качественное изменение характера динамического взаимодействия движущегося объекта с подвижной нагрузкой. Если в низкоскоростном режиме реакция конструкции или системы определяется в основном локальным воздействием, то при высоких скоростях существенную или даже ключевую роль начинают играть бегущие волны, распространяющиеся вдоль направляющей. В результате динамический отклик системы определяется уже не только величиной той самой нагрузки, но и особенностями волнового переноса энергии.

Практические наблюдения подтверждают существенность данных эффектов. Было показано, на ряде участков высокоскоростных железнодорожных магистралей Европы, расположенных на мягких грунтах, например с торфяным основанием, распространяющиеся поверхностные волны регистрируются даже визуально. По результатам проведённых замеров было зафиксировано существенное усиление колебаний рельсового полотна в тех случаях, когда скорость движения подвижного состава приближалась к значению, при котором распространяются поверхностные волны в грунте. На основании этих данных на ряде участков пришлось ввести ограничения по скоростному режиму для поездов. В качестве примера можно привести некоторые отрезки железнодорожных линий, расположенных на территории европейских государств: высокоскоростные поезда вынуждены снижать скорость движения с 180–200 км/ч до приблизительно 140 км/ч. В ряде случаев проблема решалась путем упрочнения основания - искусственного повышения жесткости основания пути.

Опыт эксплуатации высокоскоростных транспортных систем свидетельствует: волновые процессы в пути и направляющих конструкциях напрямую определяют допустимые режимы движения. Это заставляет исследовать все потенциально опасные динамические эффекты, возникающие при высоких скоростях. В работах [245–263] было показано, что вертикальные колебания источника подвижной нагрузки вдоль упругого полотна могут становиться неустойчивыми. Динамическая неустойчивость и резонанс — это разные физические явления. Резонанс реализуется при отдельных дискретных скоростях и сопровождается линейным ростом амплитуды во времени. Неустойчивость же возникает в некотором диапазоне скоростей и отличается экспоненциальным нарастанием амплитуды. При наличии демпфирования это различие принципиально. Увеличение вязкости основания позволяет существенно уменьшить резонансные эффекты, однако области динамической неустойчивости, как правило, не исчезают, а лишь смещаются в другой диапазон. Именно поэтому для практической эксплуатации неустойчивые режимы куда опаснее традиционных резонансов.

Долгое время вопрос о движении объекта на закритических скоростях оставался по большей части академическим — его изучали скорее из теоретического интереса. Но прогресс высокоскоростных железных дорог перевёл проблему в сугубо прикладную плоскость. С ростом скоростей движения поездов всё заметнее становятся динамические нагрузки: они возрастают не только в рельсах, но и в элементах контактной сети. Инженеры пытались уменьшить эти эффекты, повышая скорость распространения волн в системе. Для этого увеличивали жёсткость пути, применяли бетонные основания, усиливали натяжение контактных проводов, использовали более лёгкие материалы. Однако такие меры лишь немного «сдвигают» зоны неустойчивости — подобно влиянию демпферов основания, — а скорость развития высокоскоростного транспорта нивелирует эти попытки увеличения волновых скоростей. Поэтому в последние годы всё чаще обсуждаются альтернативные решения.

Одно из них — преодоление так называемого «упругого барьера», который по природе аналогичен звуковому барьеру в газовой динамике, но определяется скоростью распространения упругих волн в основании конструкции. Рассматривается возможность выхода системы на закритические режимы: после прохода области критических скоростей там ожидаются сравнительно меньшие динамические напряжения. Такой режим можно реализовать двумя основными способами. Первый, прямой — разогнать объект так, чтобы он миновал критическую скорость, по аналогии со сверхзвуковым самолётом, преодолевающим звуковой барьер. Уровень динамических напряжений при этом сильно зависит от ускорения: чем оно ниже, тем интенсивнее колебания. Значит, чтобы пройти область критических скоростей без резкого роста амплитуд, нужен достаточно быстрый разгон. Для пассажирского транспорта такой путь едва ли приемлем: высокие ускорения создают перегрузки, снижающие комфорт и безопасность. Поэтому интересен второй способ — не через увеличение ускорения, а через изменение свойств самой направляющей системы. Варьируя параметры пути, можно напрямую влиять на скорость волн в конструкции. Если локально повысить жёсткость грунта или элементов основания, волновые скорости возрастут, а значит, сместятся и критические скорости системы. В такой ситуации поезд способен перейти через критическую скорость даже при равномерном движении.

Наконец, важно подчеркнуть: интерес к закритическим режимам объясняется не только задачами пассажирских или грузовых железных дорог. Уже существуют технические системы, где объекты движутся со скоростями, заметно превышающими критические значения, описанные классической теорией С.П. Тимошенко. К числу таких систем относятся, в частности, ракетные поезда и высокоскоростные испытательные треки (РКУ).

Для того чтобы разогнать полезную нагрузку на ракетных треках, применяются так называемые ракетные поезда. Конструктивно они представляют собой несколько последовательно соединённых ступеней, которые отделяются друг от друга по мере выработки топлива. Чаще всего в роли горючего выступает твердое

ракетное топливо (ТРТ). Как показывает опыт эксплуатации подобных устройств, в процессе движения высокоскоростных ступеней иногда возникают поперечные колебания большой интенсивности. Если такие колебательные режимы получают дальнейшее развитие, это приводит к ускоренному износу в зонах контакта трущихся поверхностей, к разрушению опорных башмаков, которыми ступени опираются на направляющие, а также к повреждению самих рельсов [264]. Аналогичные динамические явления наблюдались и во время испытаний, проводившихся на американских ракетных треках [265].

Чем же вызваны эти колебания? Их источником являются возмущения, которые движущийся объект создаёт при своём контакте с упругой направляющей. Динамическое воздействие порождает в направляющей изгибные возмущения, причём они распространяются вдоль неё в виде бегущих волн [154, 167]. При некоторых режимах движения подобные волновые процессы способны перерасти в неустойчивые. Основная причина этого — аномальный эффект Доплера [263, 266, 267]. В механике движущихся объектов этот эффект проявляется в сдвиге частоты излучаемых колебаний в тот момент, когда текущая скорость движущегося объекта превышает фазовую скорость порождаемой им волны. В такой ситуации излучаемая волна уже не просто отводит энергию, а, наоборот, начинает подкачивать её в поперечные колебания движущегося тела, одновременно забирая часть энергии от его продольного перемещения вдоль направляющей.

Ракетные треки начали строить и эксплуатировать ещё в конце 1940-х — начале 1950-х годов. Главная причина — потребность в экспериментальной проверке узлов и систем новой авиационной и ракетной техники. Что важно, проверка должна была проводиться до полноценных лётных испытаний, но в условиях, максимально приближенных к реальным эксплуатационным и рабочим. Ключевые плюсы таких треков: практически нет ограничений ни по габаритам, ни по массе испытуемого объекта; относительно просто регистрировать параметры внешних воздействий и ответную реакцию объекта; подготовка экспериментов и сами испытания обходятся существенно дешевле лётных и занимают меньше времени. Неудивительно, что со временем ракетные треки стали обязательным

этапом при отработке самой разной техники — от авиационной и ракетной до космической. Такие установки позволяют в наземных, хорошо контролируемых условиях проверить целый комплекс характеристик — вместо того чтобы изучать их в дорогостоящих и не всегда безопасных лётных экспериментах. Схема испытаний допускает два принципиально разных варианта взаимодействия объекта с окружающей средой. В первом случае объект движется по рельсовым направляющим трека и контактирует со средой (воздухом, специальными преградами или имитаторами) в процессе разгона. Во втором — после того как произошло отделение от разгонных средств, объект продолжает полёт уже в свободном режиме, что позволяет имитировать условия, близкие к реальному движению ракеты или самолёта после схода с направляющих.

Универсальность ракетных треков позволяет решать на них широкий спектр экспериментальных задач — от аэродинамических исследований до проверки систем аварийного покидания. Трек РФЯЦ-ВНИИЭФ в Сарове имеет длину рельсового пути около 3000 м. Для сравнения, американский трек на базе Холломен (штат Нью-Мексико) протяжённостью порядка 15 км предоставляет большее время полезного движения, однако и на российской установке реализуется близкий набор испытательных программ. Конструктивно трек представляет собой две цельносварные направляющие, жёстко закреплённые на массивном железобетонном фундаменте. Фундамент опирается на сваи длиной около 6 м, что исключает просадки грунта при многократных циклических нагружениях и одновременно компенсирует воздействие сил морозного пучения в межсезонье. Направляющие фиксируются регулируемыми креплениями, с помощью которых можно выставить рельсы очень точно: отклонение от прямой линии не превышает 1 мм на участке длиной 50 метров, что для наземного трека экстремальной кинематики является критически важным условием. Столь жёсткая геометрия нужна потому, что при скоростях порядка 1500 м/с даже микронеровности вызывают резкий рост динамических нагрузок.

Что касается схем испытаний, то здесь используют два принципиально разных подхода. При прямой схеме разгоняют сам объект, а преграда закреплена в

конце трека. При обращённой — объект остаётся неподвижным, а на него на скорости несётся специальная преграда. Последний вариант часто применяют, когда нужно имитировать удар о препятствие без разрушения самого экспериментального образца.

Разгон полезной нагрузки обеспечивают ракетные поезда — набор твердотопливных ступеней, которые отработывают и отделяются последовательно. Полезную массу крепят на последней ступени; если она тяжелая (несколько тонн), ей добавляют собственные опорные башмаки. А для случаев, когда по условиям опыта нагрузка должна отделиться в полёте, используют разрывные болты. На треке разгоняют объекты массой от пары килограммов до нескольких тонн, причём в большинстве экспериментов (например, при ударе или аэродинамике) несущая ступень не сохраняется. Основной задачей является максимальный разгон в конкретных условиях постановки эксперимента. Достижимый предел определяется связкой факторов: мощностью двигателей, массой и аэродинамикой самого поезда, а также тем, как долго рельсы выдерживают динамическое нагружение при таких скоростях и не испытывают ли пластических деформаций.

Практический опыт эксплуатации ракетных треков свидетельствует, что обеспечение высоких скоростей движения представляет собой сложную комплексную задачу. Её решение связано не только с энергетической эффективностью двигательной установки и аэродинамикой ракетного поезда, но и с необходимостью сохранения работоспособности направляющей системы, элементов конструкции ступеней и разгоняемой полезной нагрузки. Следует особо отметить, что при движении по рельсовым направляющим ступени ракетного поезда совершают не только основное продольное перемещение. Под действием динамических факторов возникают также поперечные колебания ступеней, сопровождающиеся их вращением. На ракетном треке РФЯЦ-ВНИИЭФ при использовании специально разработанных двигателей полезную нагрузку теоретически можно разогнать примерно до 2900 м/с. Если же брать серийные ракетные двигатели на твёрдом топливе, то нагрузки массой 50–300 кг удаётся ускорить до скоростей порядка 1800 м/с. Однако практика эксплуатации таких

треков показывает: когда ступени ракетного поезда движутся быстро, их динамическое взаимодействие с рельсами порождает несколько неприятных эффектов. На американских треках — в Sandia (Альбукерке), на базе Холломен и на станции NOTS в Чайна-Лейк — при скоростях выше 1600 м/с наблюдали сильный фрикционный нагрев опорных башмаков, износ их поверхностей, а также повреждения и разрушения рельсов. То же самое зафиксировано и на треке РФЯЦ-ВНИИЭФ. При скоростях 1160–1450 м/с взаимодействие ступени с направляющей нередко приводило к остаточным волнообразным деформациям рельсов, к разрушению отдельных элементов направляющей системы, а ещё к интенсивному износу и поломке башмаков.

Почему так происходит? Дело в особенностях динамики движущегося объекта и упругой направляющей. Ключевые, но при этом недостаточно изученные факторы — волновые процессы в конструкции направляющей и характер скользящего контакта между башмаками и рельсом. При движении объекта по упругой направляющей последняя возбуждается, и в ней начинают распространяться изгибные волны. В случае, когда поперечное сечение направляющей обладает двумя осями симметрии, реализуются преимущественно чистые изгибные колебания. Однако для реальных рельсовых профилей, используемых на ракетных треках, характерно несовпадение центра тяжести сечения с центром изгиба. Как следствие, поперечная нагрузка инициирует не чисто изгибные, а изгибно-крутильные волны. Это важно, поскольку волны смешанного типа иначе распределяют энергию по конструкции и могут способствовать более ранней потере устойчивости движения. Что также приводит к усложнению динамики системы — добавляется влияние и на устойчивость ступени, и на напряжённо-деформированное состояние рельса. Немаловажным моментом является и скользящий контакт при высоких скоростях движения. При интенсивном трении температура рабочих поверхностей может подняться почти до температуры плавления используемых материалов. Из-за этого меняются механические свойства поверхностных слоёв, развиваются пластические деформации и идёт активный унос материала.

В работе [191] в рамках уравнения (2.2) исследовалась устойчивость двух типов осцилляторов, моделирующих движение по направляющей ракетного трека монорельсовых высокоскоростных объектов. Расчеты проводились в диапазонах скоростей движения V : 500 – 2000 м/с и круговых частот воздействия Ω : ± 6000 1/с.

Результаты расчётов представлены на рис.2.2 и рис. 2.3, на которых показаны границы областей неустойчивости поперечного движения осцилляторов, моделирующих те высокоскоростные объекты, с которыми были проведены испытания на ракетном треке.

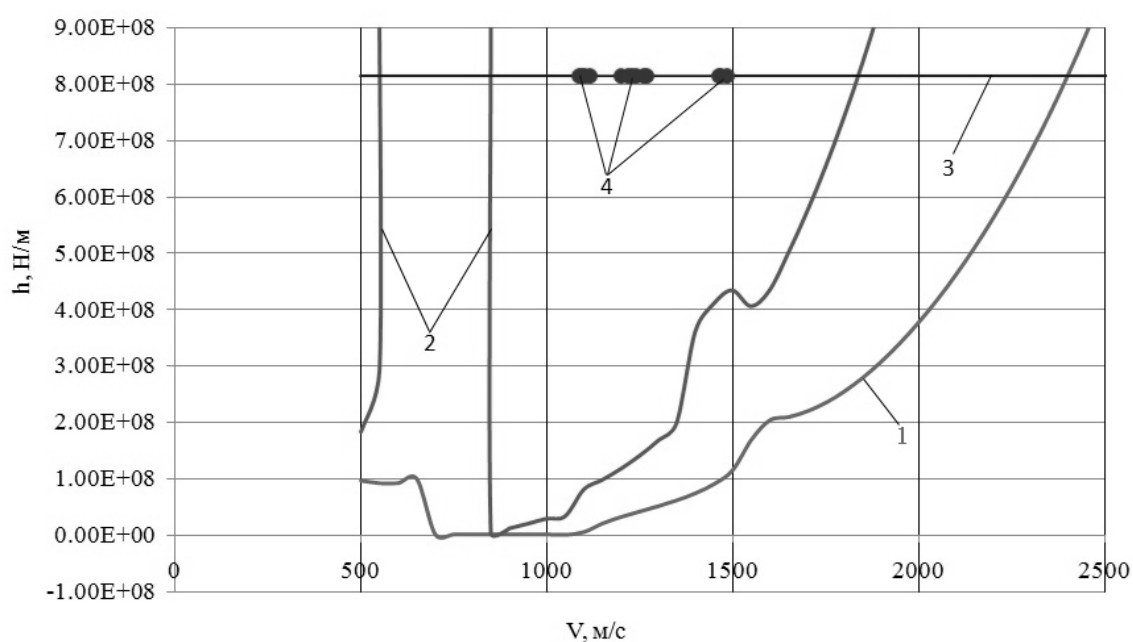


Рис. 2.2. Границы области неустойчивости поперечного движения осциллятора, моделирующего высокоскоростной объект (1 – нижняя граница; 2 – верхняя граница; 3 – жесткость опор; 4 – зачетные эксперименты).

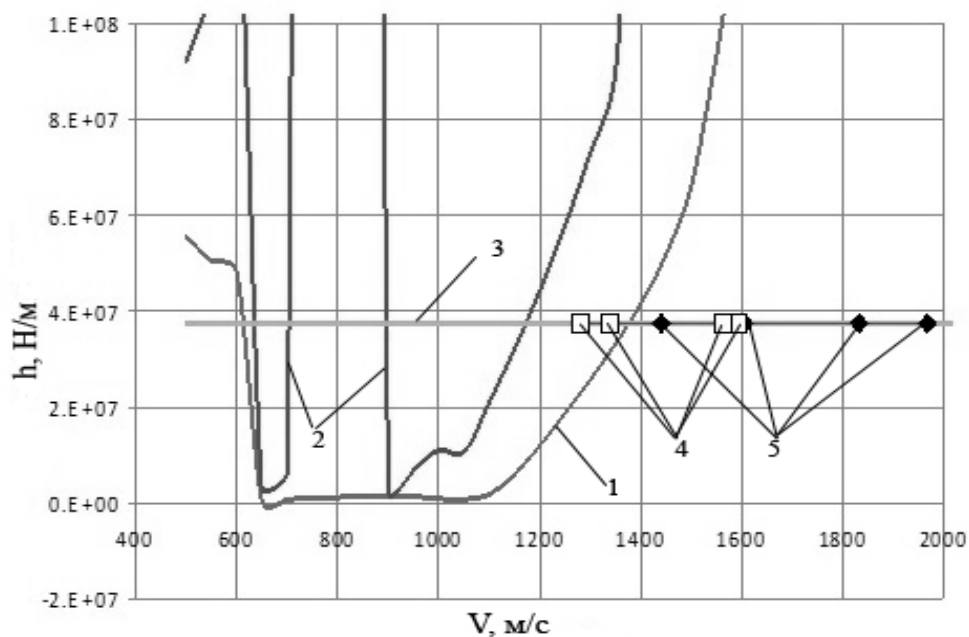


Рис. 2.3. Границы области неустойчивости поперечного движения в направлении оси Z осциллятора, моделирующего высокоскоростной объект (1 – нижняя граница; 2 – верхняя граница; 3 – жесткость опор; 4 – аварийные эксперименты; 5 – зачетные эксперименты).

Процитируем далее текст работы [191]: «Если значки, отображающие объекты, находятся выше верхней границы или ниже нижней, то движение таких объектов устойчиво, в противном случае – неустойчиво. Значки, отображающие опыты с объектами массой 211 кг (рис. 2.2) при скоростях движения 1080-1480 м/с, расположены выше верхней границы области неустойчивости. Все реальные опыты с этими объектами были зачётными, аварийных опытов не было. Значки, отображающие опыты с объектами массой 50 кг (рис. 2.3) при скоростях движения 1280-1340 м/с, расположены выше нижней и ниже верхней границ области неустойчивости, т. е. в области неустойчивости. Эти опыты были аварийные.

Сложнее обстоит дело с областью устойчивости, находящейся ниже нижней границы неустойчивости. При скоростях движения объектов 1440 м/с и 1830-1970 м/с обеспечивается устойчивость их поперечного движения. При скоростях 1560 м/с и 1600 м/с опыты завершились аварийно, хотя при той же скорости 1600 м/с имеется и зачётный опыт. Возможно, причиной этих аварий является не неустойчивость, а, например, резонанс».

Несмотря на многолетнюю эксплуатацию ракетных треков, до последнего времени в литературе не было математической модели, которая позволяла бы исследовать устойчивость высокоскоростной ступени на рельсовой направляющей с учётом всех основных физических эффектов. В большинстве известных работ рассматривались только отдельные фрагменты. Как правило, ограничивались изгибными колебаниями направляющей, тогда как реальные движения — изгибно-крутильные. К тому же в моделях часто игнорировали процессы в зоне контакта — нагрев от трения и износ поверхностей башмаков. К началу 2000-х годов необходимость в более совершенных моделях стала особенно острой. Из-за экономических трудностей значительную часть отработки ракетных комплексов перенесли с дорогих лётных испытаний на наземные эксперименты. В такой ситуации резко выросла роль численного моделирования — расчёты позволяли прогнозировать поведение системы без реальных пусков и отладки системы. Соответствующие модели были предложены в работах [268–279]. В них рельсовая направляющая рассматривается как балка Бернулли–Эйлера или Тимошенко, лежащая на деформируемом основании и совершающая изгибные либо изгибно-крутильные колебания под действием одной или нескольких движущихся масс. Такие балочные модели хорошо зарекомендовали себя в прикладных задачах и легли в основу расчётно-экспериментальных методик, которые сегодня применяют на ракетных треках ряда российских предприятий. Но важная особенность этих моделей заключается в том, что в большинстве этих методик деформируемое основание описывается простейшей линейно-упругой моделью Фусса–Винклера. В настоящей работе изучается волновая динамика балок, лежащих на деформируемых основаниях иных, более сложных моделей, а именно: исследованы дисперсионные характеристики и частотно-зависимое затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании (модель Фойхта–Кельвина)(п.2.2); дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном (двухпараметрическом) упругом основании (модель Пастернака)(п.2.3); динамическое поведение такой балки, несущей движущуюся высокоскоростную

нагрузку (п.2.4); исследовано влияние обобщенного нелинейно-упругого основания на эволюцию квазигармонических изгибных волн и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов (п.3.2); исследовано влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонических волн (п.3.1).

2.2. Дисперсионные характеристики и частотно-зависимое затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на вязкоупругом основании

Многие элементы машиностроительных конструкций, воспринимающих подвижные нагрузки, например путевая структура или контактный провод, обычно принято рассматривать как одномерные распределённые системы. В рамках такого подхода конструкция представляется в виде балки либо струны, взаимодействующей с деформируемым основанием [7,32,153–158]. Подобные модели получили широкое распространение, поскольку позволяют описывать особенности распространения колебаний и динамического взаимодействия элементов системы без чрезмерного усложнения расчётной схемы.

Как показал Дж. Эллингтон, балка, установленная на отдельных упругих закреплениях, расположенных через одинаковые промежутки, по своему поведению во многих случаях ведет себя также, как балка на сплошном упругом основании [159]. При этом степень такого соответствия определяется не каким-либо одним параметром, а их совокупностью: изгибной жёсткостью балки, характеристиками упругих закреплений и расстоянием между ними. Поэтому влияние дискретности опирания может проявляться по-разному в зависимости от конкретных условий работы конструкции.

Для описания деформируемого основания в задачах динамики чаще всего используются линейно-упругие модели, в частности основания Фусса–Винклера [160,161] и Пастернака [162]. В ряде случаев применяются также упруго-инерционные модели [163], позволяющие учитывать не только упругую реакцию среды, но и влияние инерционных эффектов. Выбор той или иной модели

определяется особенностями рассматриваемой системы и характером внешнего воздействия.

В дальнейшем рассматривается бесконечная балка Бернулли–Эйлера, совершающая изгибные колебания на деформируемом основании. Предполагается, что основание образовано реологическим материалом Фойхта–Кельвина [164]. Его механическая схема включает два параллельно соединённых элемента — упругий и вязкий. Упругая составляющая моделируется пружиной с коэффициентом жёсткости h , а диссипативные свойства учитываются демпфером с коэффициентом вязкости ν . В соответствии с моделью Фойхта–Кельвина полное напряжение определяется суммой напряжений, возникающих в обоих элементах при одинаковых деформациях.

Срединная линия балки считается нерастяжимой. Это допущение является приемлемым при сравнительно малых амплитудах изгибных колебаний [165], когда влиянием продольных деформаций можно пренебречь без заметной потери точности.

Предположение о бесконечности балки допустимо в том случае, если на её границах располагаются согласованные демпфирующие устройства. При соответствующем подборе параметров закрепления падающие возмущения не отражаются от границ системы. В работах [166,167], основанных на точных решениях модельных задач динамики упругих систем, показано существование согласованных концевых гасителей для различных типов колебаний, обеспечивающих отсутствие отражённых волн. Благодаря этому появляется возможность не учитывать граничные условия в явном виде, а распространяющиеся вдоль балки возмущения рассматривать как бегущие изгибные волны.

Таким образом, динамика рассматриваемой системы описывается следующим уравнением:

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + hU + \nu \frac{\partial U}{\partial t} = 0 . \quad (2.2)$$

Здесь $U(x,t)$ обозначает поперечное перемещение срединной линии балки, ρ — плотность материала балки, F — площадь поперечного сечения, J — осевой момент инерции сечения, E — модуль Юнга. Для дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным переменным: $z = x \sqrt[4]{\frac{h}{EJ}}$; $\tau = t \sqrt{\frac{h}{\rho F}}$.

Тогда уравнение (2.2) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + V + a \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0, \quad (2.3)$$

где $V = \frac{U}{U_0}$; U_0 представляет собой характерную величину перемещения, начиная с которой становится необходимым учитывать растяжимость срединной линии балки; $a = \frac{v}{\sqrt{\rho F h}}$ — параметр, характеризующий соотношение между вязкими свойствами деформируемого основания и его упругой жёсткостью.

Решение уравнения (2.3) будем искать в виде бегущей гармонической волны:

$$V = A e^{i(\Omega \tau - K z)} + A^* e^{-i(\Omega \tau - K z)} \quad (2.4)$$

Здесь $A = A_0 e^{i\varphi}$ — комплексная амплитуда волны, A_0 — действительная амплитуда, а выражение $\Omega \tau - K z = \Phi(z, \tau)$ определяет фазовую функцию, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ — частота волны, где T — ее период. Волновое число определяется соотношением $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$, где Λ представляет собой длину волны.

С учетом выражений (2.3) и (2.4) для частоты и волнового числа изгибной волны, распространяющейся в балке на вязкоупругом основании, получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$-\Omega^2 + K^4 + 1 + i\Omega a = 0, \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) следует, что волновое число (K) в рассматриваемом случае является комплексной величиной [168]:

$$K = K_1 + iK_2. \quad (2.6)$$

Комплексный характер волнового числа отражает одновременно как волновые, так и диссипативные свойства системы. При этом величина K_1 определяет постоянную распространения волны и используется при вычислении фазовой $\frac{\Omega}{K_1}$ и групповой $\frac{d\Omega}{dK_1}$ скорости [169] тогда как параметр K_2 характеризует

пространственное затухание волнового процесса. В этом случае амплитуда изгибной волны убывает по экспоненциальному закону при её распространении вдоль балки. Подставляя выражение (2.6) в дисперсионное уравнение (2.5) и разделяя действительную и мнимую части, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\Omega^2 + (K_1^2 - K_2^2)^2 - 4K_1^2 K_2^2 + 1 = 0 \\ 4K_1 K_2 (K_1^2 - K_2^2) + \Omega a = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

На основе численного решения системы (2.7) далее построены частотные зависимости волновых чисел для различных значений параметра a .

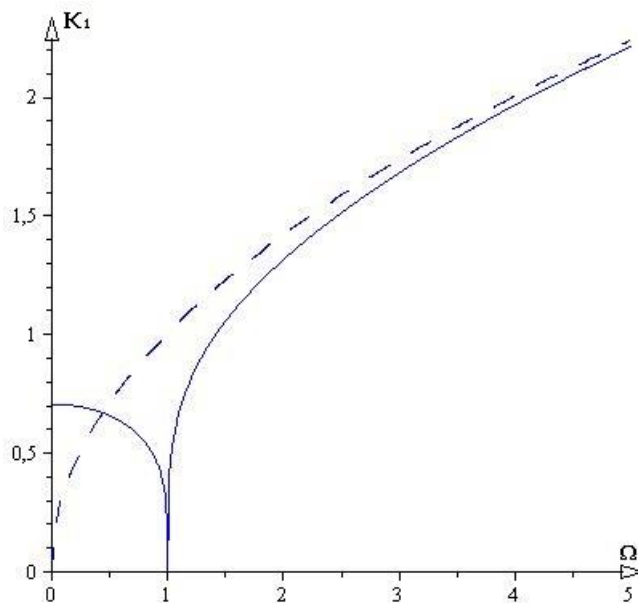
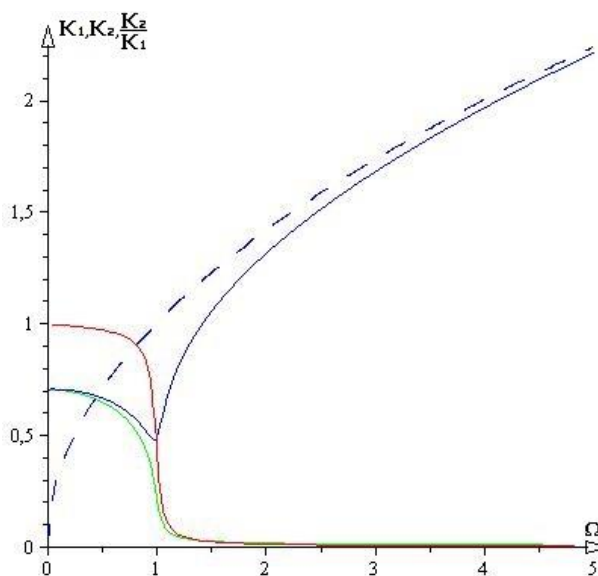


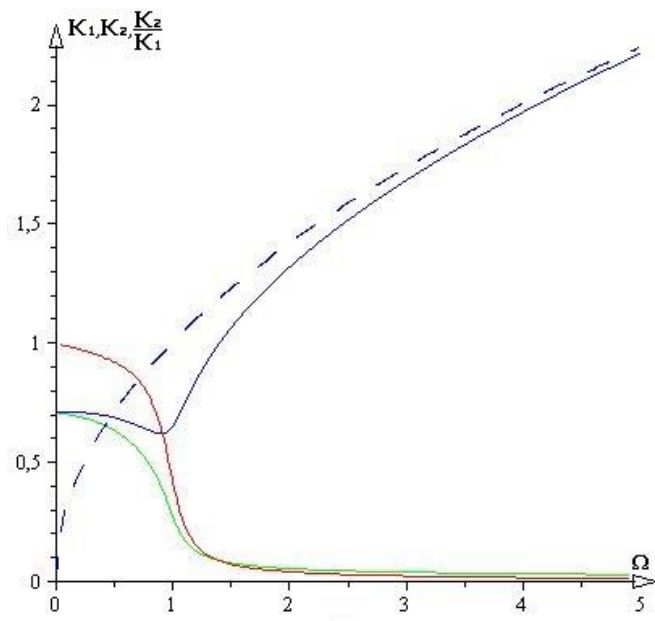
Рис. 2.4. Частотная зависимость волнового числа для изгибной волны, распространяющейся в балке, расположенной на упругом основании при отсутствии диссипативных свойств среды ($a = 0$).

На рис. 2.4 представлена частотная зависимость волнового числа для изгибной волны, распространяющейся в балке, взаимодействующей с чисто упругим основанием при полном отсутствии вязкого сопротивления среды, то есть в случае $a = 0$. В рассматриваемой ситуации деформируемое основание обладает исключительно упругими свойствами и не вносит диссипативного вклада в динамику системы. Из приведённой зависимости следует, что в диапазоне частот $0 < \Omega < 1$ распространение изгибных волн не происходит. Указанный интервал

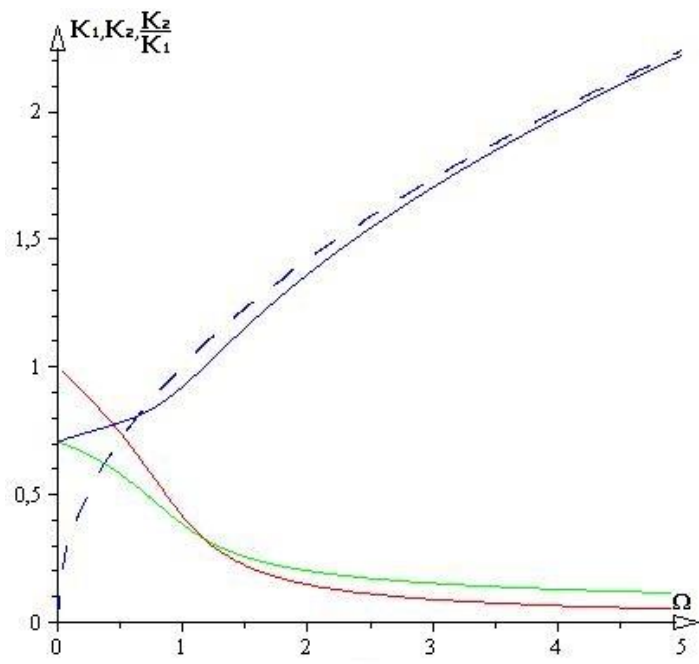
частот соответствует зоне непропускания, в пределах которой возмущения не приобретают характера бегущих волн и остаются локализованными. Волновой режим возникает лишь при $\Omega > 1$. Для сопоставления на данном и последующих рисунках пунктирной линией приведена зависимость волнового числа от частоты для балки, не взаимодействующей с деформируемым основанием. В этом случае зона непропускания отсутствует, а волновое распространение возможно во всём диапазоне частот. Такое отличие наглядно демонстрирует влияние основания на динамические характеристики системы и условия распространения изгибных возмущений. Зона непропускания возникает из-за того, что упругое основание меняет дисперсионные свойства балки, — при отсутствии основания такой зоны нет. При сравнительно низких частотах в системе невозможно существование бегущих волн, вследствие чего колебания быстро затухают в пространстве.

На рис. 2.5 (а–д) приведены частотные зависимости действительной части волнового числа K_1 (синий цвет), мнимой части K_2 (зелёный цвет), а также их отношения $\frac{K_2}{K_1}$ (красный цвет). В качестве варьируемого параметра рассматривается величина a , характеризующая влияние вязких свойств основания. Значение параметра изменяется в диапазоне от 0,08 до 10, что позволяет проследить изменение дисперсионных характеристик системы при различных уровнях диссипации.

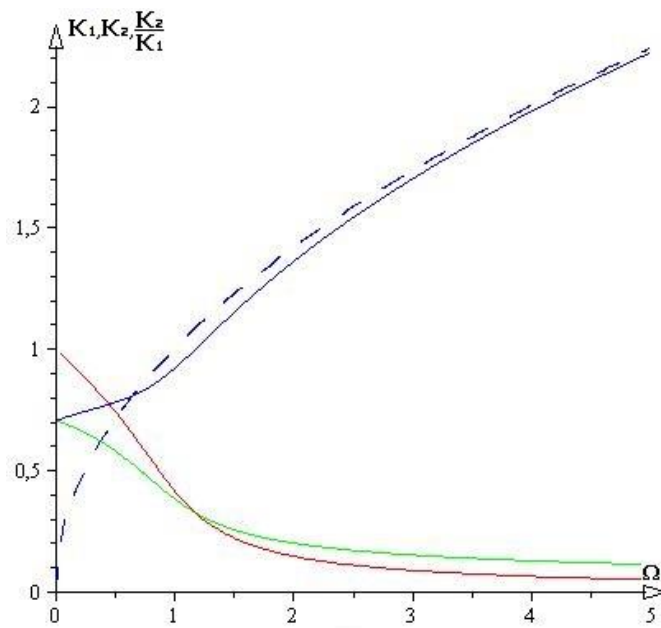




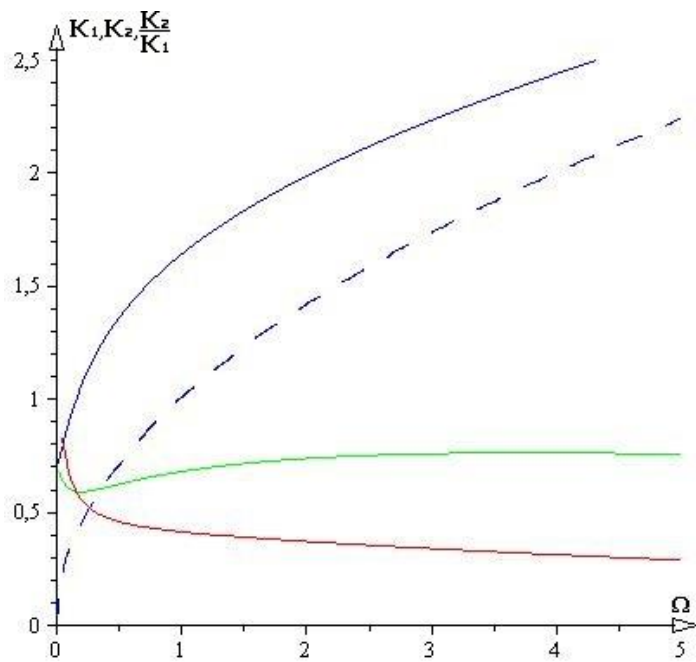
δ



δ



з



д

Рис. 2.5. Частотные зависимости действительной части волнового числа (синий цвет), мнимой части волнового числа (зеленый цвет) и отношения мнимой части волнового числа к действительной его части (красный цвет). а) $a = 0,08$; б) $a = 0,25$; в) $a = 1$; г) $a = 2$; д) $a = 10$.

Проведённый анализ показывает, что уже при малых, но отличных от нуля значениях параметра a зона непропускания исчезает. Даже слабая вязкость основания заметно сказывается на распространении изгибных волн и меняет

волновую картину в целом. В отличие от случая чисто упругого основания, волновой процесс становится возможным во всём исследуемом диапазоне частот, однако распространение возмущений сопровождается пространственным затуханием, интенсивность которого определяется величиной мнимой части волнового числа. С увеличением параметра a влияние диссипативных свойств основания проявляется более отчётливо. Это отражается как на соотношении между действительной и мнимой частями волнового числа, так и на характере распространения волновых возмущений вдоль балки. С ростом коэффициента «постели» a действительная часть волнового числа «распрямляется»: скачок при $\Omega = 1$ постепенно сходится на нет, а график в целом продолжает быстро расти с увеличением частоты. Отношение $\frac{K_2}{K_1}$ не поднимается выше единицы и монотонно убывает вместе с мнимой частью K_2 относительно K_1 , что говорит о распространяющемся характере волны. Следовательно, вязкие свойства основания существенно влияют не только на затухание изгибной волны, но и в целом на дисперсионные характеристики рассматриваемой системы.

Процессы, описываемые моделью балки Бернулли–Эйлера, можно считать волновыми лишь с большой условностью. Уравнение (2.2) не описывает движущийся фронт, который разделял бы деформированную и недеформированную области балки. В классификации математической физики [170] оно не относится к гиперболическому типу; фазовая и групповая скорости возмущений пропорциональны $\sqrt{\Omega}$ и с ростом частоты неограниченно возрастают.

Балка Тимошенко, напротив, волновая во всём диапазоне частот — скорости в ней конечны, каких бы высоких частот мы ни достигали [165]. Некоторые актуальные задачи динамики и устойчивости балок, где важен учёт волновых эффектов, рассмотрены в [171–173].

2.3. Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании

В прикладной механике под упругим основанием понимают расчётную модель среды, которая сопротивляется деформированию контактирующей с ней

конструкции; в задачах строительной механики роль такой среды чаще всего играет грунтовое основание. Классическая модель, обычно связываемая с именем Винклера, основана на гипотезе, выдвинутой Э. Винклером (1867) [161] и развита Х. Циммерманом (1888) [174]. Согласно этой гипотезе, давление, приложенное к малой площадке поверхности грунта, вызывает осадку исключительно под ней, иными словами — классическая модель пренебрегает распределительной способностью грунта, его свойством оседать не только непосредственно под фундаментом, но и в прилегающей зоне.

Модель, учитывающая распределительную способность, получила название обобщённой; её формирование в основном завершилось к середине 1950-х — началу 1960-х годов. Её становление и развитие связаны с работами К. Вигхардта (1922) [175], М.М. Филоненко-Бородича (1945) [176], М. Хетеньи (1946) [177], П.Л. Пастернака (1954) [162], В.З. Власова и Н.Н. Леонтьева (1956, 1960) [178; 179], Э. Рейсснера [180]. В основу модели положено представление о «сплошном упруго-оседающем и упруго-вращающемся основании» [162], свойства которого задаются двумя независимыми коэффициентами постели: коэффициентом сжатия h_1 и коэффициентом сдвига h_2 , учитывающим совместную работу соседних областей грунта.

В литературе обобщённую модель называют двухкоэффициентной [162], двуххарактеристической [47; 56] или двухпараметрической [181–184]. Каждое из названий отражает способ задания свойств основания (т.е. два коэффициента постели). Однако, наиболее употребительным остаётся термин «модель Пастернака» [185–189], закрепившийся благодаря лаконичности и широкому цитированию работы П.Л. Пастернака 1954 года.

Дисперсионные свойства изгибных волн для балки на классическом винклеровском основании хорошо изучены: дисперсионное уравнение включает лишь изгибную жёсткость балки и коэффициент сжатия, что даёт сравнительно простую структуру. Для обобщённого основания картина усложняется присутствием коэффициента сдвига h_2 . Он добавляет в дисперсионное соотношение слагаемое, пропорциональное квадрату волнового числа, и тем самым

изменяет как положение в пространстве параметров дисперсионно-зависимых характеристик, так и сам характер затухания в закритической области. Эти эффекты исследованы существенно меньше, что отчасти объясняется необходимостью оперировать более громоздкими аналитическими выражениями и зависимостью критических скоростей от двух параметров основания. Их знание принципиально для приложений: в методах неразрушающего контроля конструкций [190] дисперсия используется для идентификации дефектов по изменению времени прихода волновых пакетов и их форме, а при расчёте динамики рельсовых направляющих ракетных треков [191; 192] — для прогнозирования волнового сопротивления движению, оценки зон интенсивных деформаций и обоснования предельно допустимых скоростей. Именно поэтому интерес к задачам устойчивости и волновой динамики таких систем продиктован потребностями практики: корректный учёт сдвиговой жёсткости основания открывает путь к более точным, но в тоже время сравнительно простым расчётным моделям высокоскоростных наземных магистралей и позволяет избежать опасных резонансных режимов работы систем.

Математическая модель.

Уравнение изгибных колебаний балки, модели Бернулли-Эйлера, лежащей на обобщенном упругом основании, имеет вид [175]:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + h_1 w - 2h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.8)$$

Здесь $w(x, t)$ — перемещение частиц срединной линии балки при изгибе, ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения балки, E — модуль Юнга, J — осевой момент инерции.

Балка принимается бесконечно протяжённой. Такая идеализация корректна, если на её концах размещены оптимальные демпфирующие устройства — параметры граничного закрепления при этом выбираются так, чтобы падающие возмущения полностью поглощались, не порождая отражённых волн. По сути, это шарнирное закрепление. Существование подобных согласованных концевых гасителей для разных типов колебаний строго обосновано в [167] на основе точных

решений модельных динамических задач. Благодаря этому граничные условия исключаются из рассмотрения, и вибрации, распространяющиеся вдоль балки, допустимо трактовать как бегущие изгибные волны, а саму балку описывать уравнением (2.8) без ограничений на краях. Введение безразмерных величин для перемещения, координаты и времени:

$$U = \frac{w}{w_0} ; \quad z = x \sqrt[4]{\frac{h_1}{EJ}} ; \quad \tau = t \sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}, \quad (2.9)$$

где w_0 – максимальное поперечное перемещение, при котором растяжимостью срединной линии балки можно пренебречь, приводит уравнение (2.8) к виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + U - a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

Здесь $a = \frac{h_2}{\sqrt{EJ}\sqrt{h_1}}$ – параметр, включающий в себя коэффициент изгибной жесткости балки (EJ) и коэффициенты жесткости упругого основания (h_1, h_2).

Анализ дисперсионных зависимостей

Для выявления влияния обобщённого упругого основания на параметры изгибной волны обратимся непосредственно к уравнению (2.10). Поскольку речь идёт о распространении установившихся волновых возмущений, его решение ищем в форме бегущей гармонической волны:

$$u = A e^{i(\Omega \tau - K z)} + A^* e^{-i(\Omega \tau - K z)} \quad (2.11)$$

Здесь A, A^* – безразмерная комплексная амплитуда и ее комплексно-сопряженная часть, Ω – частота и K – волновое число, связанные с круговой частотой ω и размерным волновым числом k соотношениями:

$$\Omega = \frac{\sqrt{\rho F \cdot EJ}}{h_1} \omega, \quad K = \sqrt[4]{\frac{EJ}{h_1}} k \quad (2.12)$$

Подстановка соотношения (2.11) в уравнение (2.10) приводит к дисперсионному уравнению

$$-\Omega^2 + K^4 + 1 + aK^2 = 0, \quad (2.13)$$

связывающему между собой безразмерную частоту Ω , безразмерное волновое число K и параметр a , характеризующий отношения коэффициента жесткости балки к коэффициентам жесткости упругого основания (h_1, h_2).

$$\text{Здесь} \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho F}{h_1}} \omega, \quad K = \sqrt[4]{\frac{EJ}{h_1}} k, \quad a = \frac{h_2}{\sqrt{h_1 EJ}}, \quad (2.14)$$

где ω – круговая частота, k – размерное волновое число.

Из уравнения (2.9) определяем закон дисперсии изгибной волны

$$\Omega = \pm \sqrt{K^4 + aK^2 + 1}, \quad (2.15)$$

Фазовую ϑ_ϕ и $\vartheta_{гр}$ групповую скорости:

$$\vartheta_\phi = \frac{\Omega}{K} = \pm \sqrt{K^2 + a + \frac{1}{K^2}}, \quad (2.16)$$

$$\vartheta_{гр} = \frac{d\Omega}{dK} = \pm \frac{a + 2K^2}{\sqrt{K^2 + a + \frac{1}{K^2}}}, \quad (2.17)$$

Зависимости (2.15), (2.16), (2.17) приведены на рис. 2.6, 2.7 и 2.8 соответственно.

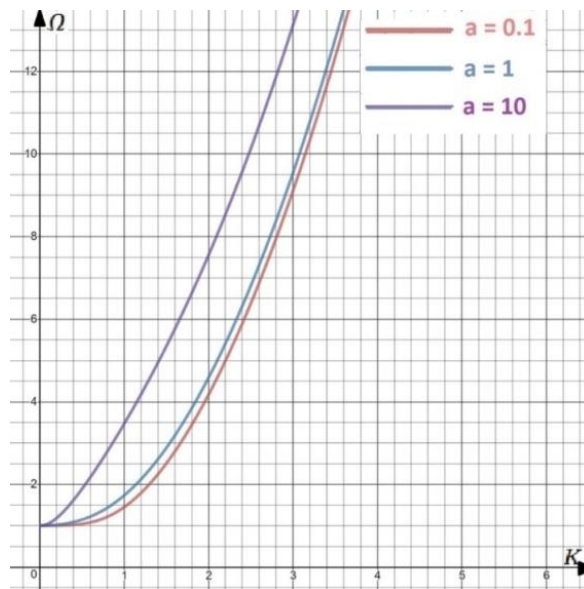


Рис. 2.6. Закон дисперсии изгибной волны

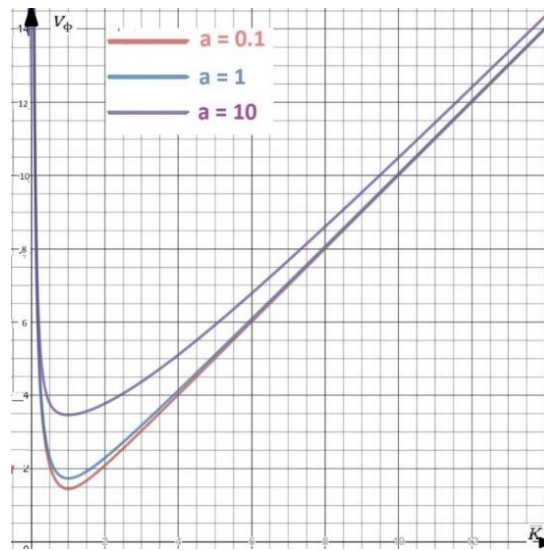


Рис. 2.7. Фазовая скорость изгибной волны

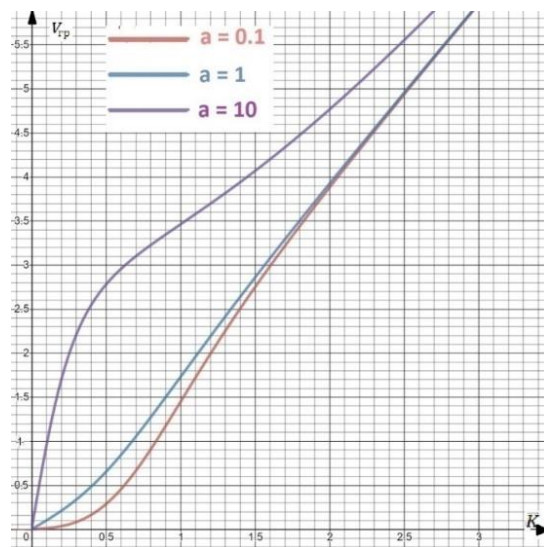


Рис. 2.8. Групповая скорость изгибной волны

Выше представлены зависимости от волнового числа частоты, фазовой и групповой скоростей изгибных волн для балки, лежащей на упругом основании с различной сдвиговой жёсткостью, а также для балки без основания. Кривые построены при трёх значениях параметра $a = 0.1, 1, 10$. Кривые демонстрируют чёткую закономерность: с увеличением сдвиговой жёсткости основания волны с одинаковым волновым числом (т.е. одной длины) характеризуются более высокой частотой, а также большими фазовой и групповой скоростями. Физически это объясняется тем, что дополнительная сдвиговая составляющая реакции основания увеличивает суммарную жёсткость системы. В предельном случае ($a =$

0) обобщённая модель Пастернака сводится к классической модели Винклера, а представленные дисперсионные кривые переходят в известные кривые для балки на винклеровском основании.

На рис. 2.9-2.11 для наглядности приведены зависимости от волнового числа частоты, фазовой и групповой скоростей изгибных волн в балке, лежащей на однопараметрическом и двухпараметрическом основании, а также свободно колеблющейся балки на одном графике. Синяя линия отвечает классическому винклеровскому основанию, фиолетовая — обобщённому основанию Пастернака, красная - свободно колеблющейся балке без основания.

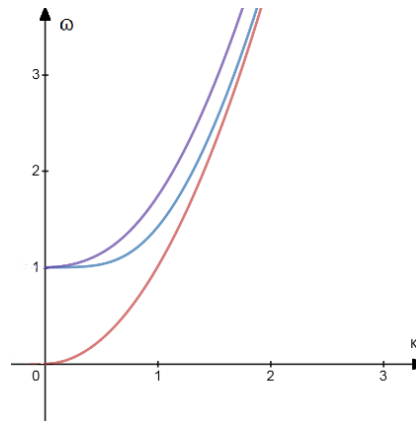


Рис. 2.9. Зависимости частоты изгибных волн от волнового числа для балки на различных упругих основаниях

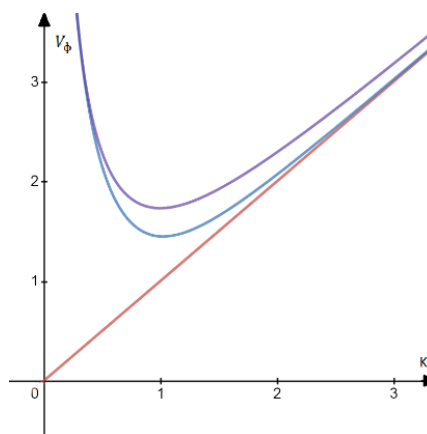


Рис. 2.10. Зависимости фазовых скоростей изгибных волн от волнового числа для балки на различных упругих основаниях.

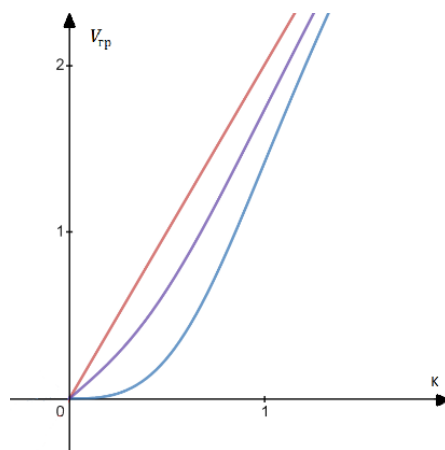


Рис. 2.11. Зависимости групповых скоростей изгибных волн от волнового числа для балки на различных упругих основаниях.

Свободная балка, не взаимодействующая с упругим основанием, не имеет запрещённых частотных интервалов: бегущие изгибные волны существуют в ней при любой частоте. Иначе обстоит дело для балок, опирающихся на упругое основание: как модель Винклера, так и обобщённая модель Пастернака предсказывают существование зоны непропускания; в принятых безразмерных переменных она задаётся диапазоном $0 < \Omega < 1$, а значение $\Omega = 1$ выступает частотой отсечки, ниже которой распространение гармонических волн невозможно. Физически это объясняется тем, что упругое основание вносит дополнительную жёсткость, и для возникновения бегущей волны частота возбуждения должна превысить порог, определяемый свойствами основания.

Сравнение дисперсионных характеристик трёх систем (рис. 2.9, 2.10) показывает, что для одного и того же волнового числа частота и фазовая скорость изгибных волн убывают в ряду: обобщённое основание $\rightarrow$ основание Винклера $\rightarrow$ свободная балка. Иными словами, учёт распределительной способности грунта повышает и частоту, и фазовую скорость по сравнению со случаем чисто локальной реакции, тогда как отсутствие основания даёт наименьшие значения этих величин.

Групповые скорости подчиняются иной закономерности (рис. 2.11): при любом волновом числе групповая скорость волн в балке на обобщённом основании превосходит скорость в балке на основании Винклера, но остаётся ниже, чем у свободной балки. Иными словами, групповая скорость оказывается максимальной для свободной балки, несколько ниже — для обобщённого основания и

минимальной — для винклеровского. Такое поведение прямо следует из вида дисперсионных кривых: сдвиговая жёсткость увеличивает скорость переноса энергии по сравнению с моделью Винклера, однако налагаемые упругой средой ограничения полностью исчезают лишь при отсутствии основания.

Уравнение переноса энергии и его анализ

Наряду с амплитудными и фазовыми характеристиками волнового поля фундаментальную роль играет энергия, переносимая волнами. При этом, как отмечено в [176], энергетический анализ механических систем не может быть сведён к амплитудному или дисперсионному рассмотрению и требует самостоятельного подхода, нацеленного на прямое описание потоков и резервуаров энергии.

Один из таких подходов, предложенный в [194] и развитый в [196], трактует механические системы и их элементы соответственно как глобальные и локальные резервуары энергии. Авторами введены представления о глобальных и локальных относительных энергетических критериях и выполнен энергетический анализ типовых экспериментальных диаграмм деформирования стандартных образцов материалов, что позволило с единых позиций интерпретировать процессы накопления и диссипации энергии.

Ключевым шагом в становлении энергетического описания сплошных сред стало введение понятия потока энергии. В 1874 году выдающийся русский физик Н.А. Умов [196] сформулировал фундаментальное уравнение переноса энергии в дивергентной форме:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(\vec{S}) = 0, \quad (2.18)$$

где W — плотность энергии, $\vec{S}$ — плотность потока энергии, получившая впоследствии наименование вектора Умова–Пойнтинга. В зарубежной литературе эта величина чаще фигурирует просто как вектор Пойнтинга, хотя работы Дж.Г. Пойнтинга появились десятилетием позже и касались лишь переноса энергии электромагнитными волнами, тогда как Н.А. Умов получил результат общезначимого масштаба. Для одномерных процессов плотность потока энергии

становится скалярной величиной, и дивергенция в уравнении (2.18) заменяется частной производной $\frac{\partial}{\partial x}$.

Рассматриваемая в настоящей работе модель балки, лежащей на упругом основании, принадлежит к классу распределённых систем, лагранжиан которых зависит от обобщённых координат, их первых и вторых производных: $L(w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$. Для систем такого типа плотности энергии и потока энергии непосредственно выражаются через лагранжиан согласно соотношениям, приведённым в [197]:

$$W = \frac{\partial L}{\partial w_t} w_t - L, \quad (2.19)$$

$$S = \frac{\partial L}{\partial w_x} w_t + \frac{\partial L}{\partial w_{xx}} w_{xt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{xx}} \right) w_t, \quad (2.20)$$

где индексами t и x обозначены производные по соответствующим переменным.

Средние за период волны значения плотности энергии $\langle W \rangle$ и плотности потока энергии $\langle S \rangle$ связаны линейным соотношением [197]:

$$\langle S \rangle = v_{\text{эн}} \langle W \rangle \quad (2.21)$$

где компонент $v_{\text{эн}}$ имеет смысл скорости переноса энергии. Для линейных однородных систем эта скорость строго совпадает с групповой скоростью волнового пакета:

$$v_{\text{эн}} = v_{\text{гр}} \quad (2.22)$$

Справедливость данного утверждения применительно к изгибным волнам в балке, опирающейся на двухконстантное упругое основание, будет далее проверена. Для такой балки безразмерные плотность энергии $\tilde{W}$ и плотность потока $\tilde{S}$ выражаются через свои физические аналоги следующим образом:

$$\tilde{W} = \frac{W}{h_1 w_0^2}, \quad \tilde{S} = \frac{S}{h_1 w_0^2} \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}^4 \sqrt{\frac{EJ}{h_1}} \quad (2.23), (2.24)$$

И задаются соотношениями:

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2 \frac{1}{2} U^2 \frac{a}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2, \quad (2.25)$$

$$\tilde{S} = \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} - a \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (2.26)$$

За период бегущей гармонической волны (2.11) среднее значение (2.25) и (2.26) равно:

$$\langle \tilde{W} \rangle = (\Omega^2 + K^4 + 1 + aK^2)|A|^2, \quad (2.27)$$

$$\langle \tilde{S} \rangle = (4\Omega K^2 + 2a\Omega K)|A|^2, \quad (2.28)$$

где $|A|^2 = AA^*$.

Скорость переноса энергии вычисляем по формуле:

$$v_{\text{эн}} = \frac{\langle \tilde{S} \rangle}{\langle \tilde{W} \rangle}, \quad (2.29)$$

следующей из (2.21), (2.27), (2.28), и убеждаемся в справедливости соотношения (2.22), то есть:

$$v_{\text{эн}} = \frac{(a + 2K^2)}{\pm \sqrt{K^2 + a + \frac{1}{K^2}}} = v_{\text{гр}}. \quad (2.30)$$

Справедливость соотношения (2.30) является дополнительным фактором, свидетельствующим о внутренней физической непротиворечивости модели (2.8).

2.4. Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании с движущейся нагрузкой

Интенсивное исследование динамики упругих систем с движущимися нагрузками обусловлено их многообразными инженерными приложениями [7, 32, 42, 119, 153, 154, 156, 157, 198–207]. В этом классе задач, как было сказано ранее, особое место принадлежит колебаниям балок на основании Винклера, традиционно используемым для расчётного описания железнодорожного полотна [157, 199]. Рост скоростей на высокоскоростных магистралях повышает критерии и требования к расчётным моделям, а также точности вычислений [156, 157, 203–207]. Обобщённая модель упругого основания, задаваемая двумя коэффициентами постели — сжатия и сдвига, — позволяет, с одной стороны, сохранить математическую простоту, присущую модели Винклера [161], а с другой — повысить достоверность результатов за счёт учёта сдвиговых деформаций.

Показано [154, 157], что при высокоскоростном движении нагрузки по упругой направляющей в ней формируются волны деформации, давление которых даёт основной вклад в сопротивление движению. Те же волновые эффекты

порождают серьёзные эксплуатационные проблемы в рельсовых направляющих треков для ракетных испытаний [171, 191, 192, 208, 209], что явно прослеживается на разобранном ранее примере трека в г. Саров. В данной части главы исследуется динамика балки на обобщённом упругом основании, взаимодействующей с движущимся объектом, который является носителем источника колебаний, обусловленных волновыми процессами.

Классическая и обобщенная модели упругого основания

В теории сооружений под упругим основанием понимают механическую расчётную модель среды, которая сопротивляется деформированию конструкции, находящейся с ней в контакте. Чаще всего в такой роли выступает грунтовое основание. Первой и наиболее распространённой остаётся модель, опирающаяся на гипотезу Винклера (1867 г.), впоследствии уточнённую Циммерманом (1888 г.) [174]. Эта гипотеза постулирует линейную связь между контактным давлением q и осадкой u :

$$q = Ku \quad (2.31)$$

Из неё прямо следует, что воздействие на любую малую площадку вызывает оседание грунта лишь непосредственно под ней. Однако реальный грунт демонстрирует распределительную способность: осадки захватывают не только нагруженную зону (фундамент), но и прилегающие области. Игнорирование этого эффекта в модели Винклера послужило стимулом для поиска более адекватных расчётных схем. К. Вигхардт в 1922 году [175] описал распределительную способность основания при помощи убывающей показательной функции, задающей затухание осадок по мере удаления от точки нагружения:

$$u(r) = Ae^{-\alpha r} \quad (2.32)$$

М.М. Филоненко-Бородич (1945) [176] развил этот подход, наложив на слой независимых винклеровских пружин нерастяжимую нить (мембранная модель) с постоянной горизонтальной проекцией натяжения T либо балку (ламинарная модель). Нить или балка механически реализуют распределительный эффект: они связывают соседние пружины, передавая усилия и вызывая совместную осадку. В

трёхмерной постановке нити заменяются мембранами, а балка — плитой. Дифференциальное уравнение мембранной модели, одновременно учитывающее локальную реакцию основания и перераспределение усилий от натяжения T , имеет вид:

$$Ku - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = q(x, y) \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) совпадает с результатом, ранее полученным Т. Карманом [210] для поверхности мембраны, подкреплённой пружинами.

П.Л. Пастернак (1954 г.) ввёл в рассмотрение модель грунта, получившую название сплошного упруго-оседающего и упруго-вращающегося основания [162]. Свойства такого основания задаются двумя независимыми коэффициентами постели: коэффициентом сжатия h_1 размерности кгс/см³ и коэффициентом сдвига h_2 размерности кгс/см. Первый из них аналогичен классическому винклеровскому коэффициенту постели, тогда как второй, по определению автора, позволяет выразить интенсивность вертикальной силы сдвига, а также изгибающего момента через произведение h_2 на производную осадки по соответствующему направлению [162]. Схематическое изображение модели приведено, в частности, в [211]. Уравнение, описывающее упругое основание Пастернака, совпадает по форме с (2.33).

В.З. Власов и Н.Н. Леонтьев (1956, 1960 гг.) [178, 179] при построении технической теории расчёта конструкций на упругом основании предложили использовать однослойную либо многослойную расчётную схему, характеризуемую двумя или более обобщёнными упругими параметрами. Для однослойного варианта уравнение упругого основания вновь приводится к виду (2.33). В одномерной однородной постановке, соответствующей (2.33), получается уравнение с соответствующим параметром:

$$\alpha^2 u - \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad (2.34)$$

где $\alpha = \sqrt{K/T}$.

Его решение имеет затухающий характер и записывается в следующей форме:

$$u(x) = Ae^{-\alpha x} \quad (2.35)$$

Соотношение (2.35) совпадает с (2.32), то есть с решением для модели Вигхардта.

Сопоставление выражений (2.32)–(2.35) отчётливо показывает, что во всех перечисленных случаях речь идёт об одной и той же обобщённой модели упругого основания. Независимо от упомянутых авторов [161, 162, 174–179], аналогичную модель рассматривали также Э. Рейсснер [180] и М. Хетенъи [177]. Имеются все основания называть эту обобщённую модель, объединив имена исследователей, независимо пришедших к близким постановкам, моделью Вигхардта – Кармана – Филоненко-Бородича – Пастернака – Власова – Леонтьева – Рейсснера – Хетенъи.

Уравнение равновесия деформируемой поверхности, вытекающее из модели (2.33), приводится к классическому неоднородному уравнению Гельмгольца. Входящим в него параметрам разные исследователи придают различную механическую интерпретацию, что отразилось в терминологии: эту обобщённую модель упругого основания называют двухкоэффициентной, двуххарактеристической [56] либо двухпараметрической [181–184], однако в современной литературе за ней чаще всего закрепилось имя модели Пастернака [185–189]. Вслед за этой традицией мы в дальнейшем будем именовать модель с двумя коэффициентами постели — на сжатие и на сдвиг — обобщённой, или моделью Пастернака, противопоставляя её классической модели Винклера.

Наряду с подходами, опирающимися на дискретные упругие элементы, для расчёта деформируемого основания привлекаются методы теории упругости. Первые шаги в этом направлении были сделаны ещё Г.Э. Проктором в 1919 году: он предложил моделировать грунтовое основание однородной изотропной упругой средой и опубликовал цикл работ, наиболее известными из которых являются [213–215]. К той же линии принадлежит исследование М.И. Горбунова-Посадова [216].

Однако представление основания в виде упругого полупространства наделяет среду чрезмерно выраженными распределительными свойствами. Во многих практически важных ситуациях, особенно в условиях плоской деформации, это ведёт к заметному завышению расчётных прогибов и изгибающих моментов. Указанное ограничение устраняется переходом к моделям упругого слоя с теми или иными граничными условиями на его подошве [217–221]. В таких моделях

принимается, что с нагруженной конструкцией взаимодействует лишь ограниченный по высоте слой грунтового массива, ниже которого расположено жёсткое недеформируемое основание. При малой толщине слоя поведение системы приближается к винклеровскому, а при неограниченном её возрастании — к решению для упругого полупространства.

Двухпараметрическая модель (2.32)–(2.35) занимает промежуточное положение между этими предельными случаями. Как показано в работах [222, 223], она даёт более быстрое затухание осадок поверхности грунта при удалении от края фундамента по сравнению с результатами, даваемыми классической теорией упругости, что лучше соответствует данным наблюдений.

Постановка и решение задачи о действии подвижной нагрузки на балку, лежащую на обобщенном упругом основании

Рассматривается система, в которой по упругой направляющей движется объект с варьируемой скоростью; закон перемещения $x = l(t)$ неизвестен. Объект характеризуется массой m и моментом инерции I_0 и массой, на него воздействует переменная внешняя сила $P(t)$. Эта постановка была изучена нами в [234]. Динамика направляющей и движущегося тела взаимосвязана: колебания балки зависят от траектории объекта, а движение объекта определяется как приложенной силой, так и реакцией со стороны направляющей. Иными словами, подсистемы обмениваются энергией, и потому их состояния следует описывать совместной системой уравнений.

Направляющую моделируем однородной балкой, поведение которой описывается гипотезой Бернулли-Эйлера [224] и которая опирается на упругое основание Пастернака. Такая комбинация позволяет учесть как изгибную жёсткость конструкции, так и распределительные свойства двухпараметрического основания.

Для последовательного вывода уравнений движения и естественных краевых условий применим вариационный подход, естественным образом позволяющий одновременно учесть инерционные, упругие и контактные взаимодействия. С этой

целью введём плотность функции Лагранжа для направляющей λ и функцию Лагранжа L движущегося объекта:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\rho F u_t^2 - I E u_{xx}^2 - h_1 u^2 - h_2 u_x^2), L = \frac{1}{2} m (\dot{u}_0^2 + \dot{\ell}^2) + \frac{1}{2} I_0 \dot{w}_0^2$$

где $u(x, t)$ – поперечное смещение срединной линии балки; ρF – погонная плотность; I – момент инерции сечения, E – модуль Юнга материала, h_1 и h_2 – коэффициент «постели» на сжатие и коэффициент «сдвига» основания балки, соответственно; переменные $u_0(t)$ и $w_0(t)$ задают, соответственно, поперечное смещение и угол поворота движущегося объекта. Частные производные по времени далее помечаются индексом t по координате — индексом x , а обыкновенная производная по времени обозначается точкой.

Последовательное применение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского [154, 167] к построенной лагранжевой системе приводит к замкнутой краевой задаче. Поскольку функционал действия включает вклады и от распределённой балки, и от сосредоточенного движущегося тела с неизвестной траекторией, единая вариационная процедура автоматически учитывает их динамическое взаимодействие и даёт как уравнения движения, так и естественные граничные условия. В результате, при постоянных характеристиках балки и объекта, их взаимообусловленное поведение описывается следующей системой уравнений:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - c_{II}^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0 \quad (2.36)$$

$$u(x = l(t) + 0, t) = u(x = l(t) - 0, t) = u(l(t), t) = u_0(t),$$

$$u_x(x = l(t) + 0, t) = u_x(x = l(t) - 0, t) = u_x(l(t), t) = w_0(t) \quad (2.37)$$

$$I_0 \ddot{w}_0 = I E [u_{xx}] \quad (2.38)$$

$$m \ddot{u}_0(t) = -\rho F [\alpha^2 u_{xxx} - c_{II}^2 u_x - \dot{\ell} u_t] + P(t) \quad (2.39)$$

$$m \ddot{\ell} = F_{pr} + Q, F_{pr} = -\frac{1}{2} \rho F [u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + c_{II}^2 u_x^2 - \omega_0^2 u^2 - 2\alpha^2 u_x u_{xxx} + 2\dot{\ell} u_x u_t] \quad (2.40)$$

В приведённых соотношениях квадратные скобки обозначают скачок заключённой в них величины при переходе через движущуюся границу — разность

предельных значений справа и слева от сечения $x = l(t)$. Введены также следующие параметры: $\alpha = \sqrt{IE/\rho F}$ — коэффициент, характеризующий заданные свойства балки; $c_{II} = \sqrt{h_2/\rho F}$ — коэффициент, характеризующий упругие свойства системы балки и основания; $\omega_0 = \sqrt{h_1/\rho F}$ — наинизшая частота изгибных волн, способных распространяться в балке (частота отсечки); F_{pr} — сила волнового давления, действующая на движущийся объект; Q — внешняя сила. Чтобы постановка задачи стала замкнутой, необходимо дополнить систему начальными условиями и потребовать ограниченности решения $u(x, t)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Будем моделировать балку как неограниченно протяжённую в обе стороны. Такая идеализация справедлива для реальной конструкции, когда на её концах установлены оптимальные демпфирующие устройства, параметры которых подобраны так, чтобы падающие возмущения полностью поглощались, не порождая отражённых волн. Существование таких согласованных концевых гасителей для различных типов колебаний строго обосновано в [224] на основе точных решений модельных задач. Принятая идеализация позволяет полностью исключить граничные условия из рассмотрения и трактовать вибрации, распространяющиеся по балке, исключительно как бегущие изгибные волны. Это открывает путь к анализу волновых эффектов в явном виде, без влияния встречных волновых потоков.

Будем считать движение объекта равномерным — скорость источника возмущений постоянна ($l(t) = Vt$, $V = const$). Следуя подходу, развитому в [154, 224] для аналогичных задач, будем строить установившееся (стационарное) решение отдельно в областях слева ($x < Vt$) и справа ($x > Vt$) от движущейся нагрузки. Ищем его в форме бегущей гармонической волны:

$$A \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2.41)$$

где A — комплексная амплитуда, ω — круговая частота, k — волновое число. В этом случае задача отыскания частот, волновых чисел и критических скоростей движения — так называемая задача волновой кинематики — сводится к совместному решению дисперсионного уравнения:

$$-\omega^2 + \alpha^2 k^4 + c_H^2 k^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (2.42)$$

и кинематического инварианта [7, 58]:

$$\omega - kV = \Omega \quad (2.43)$$

Соотношение (2.43) выражает условие равенства фаз излучаемых волн в той точке, где в данный момент находится движущийся источник возмущений. Иными словами, оно фиксирует доплеровский сдвиг: частота излучаемых волн однозначно связана со скоростью перемещения источника [154]. В частном случае постоянной действующей силы ($\Omega = 0$) кинематический инвариант сохраняет простую форму $\omega - kV = 0$. Для однозначного выделения физически осмысленного решения систему (2.42)–(2.43) необходимо дополнить условиями ограниченности прогибов на бесконечности и условиями излучения Мандельштама [154, 224]. Последние позволяют отобрать из всего спектра дисперсионного уравнения лишь те волны, которые уносят энергию от источника, обеспечивая корректное описание волнового поля.

К числу центральных задач при анализе динамики направляющих, взаимодействующих с движущимися нагрузками, относится определение критических скоростей. Под критической понимают такую скорость, при которой качественно изменяется весь характер волнообразования: меняются тип и структура излучаемого волнового поля [154]. Необходимость корректного вычисления этих скоростей диктуется тем, что именно они задают предельно допустимые режимы эксплуатации высокоскоростных наземных магистралей [156, 157 и ссылки в них].

Условие вырождения корней системы (2.42)–(2.43) означает, что критические скорости движения нагрузки определяются решением уравнения, сводящегося к алгебраическому уравнению восьмого порядка и в безразмерных переменных записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\tilde{V}^8 - \beta^2(4 - \tilde{\Omega}^2)\tilde{V}^6 + \left[-9\tilde{\Omega}^2(4 - \tilde{\Omega}^2) + 3\beta^4(2 - \tilde{\Omega}^2) - 8(1 - \tilde{\Omega}^2)^2\right]\tilde{V}^4 + \\ &+ \beta^2 \left[36\tilde{\Omega}^2(1 - \tilde{\Omega}^2) - \beta^4(4 - 3\tilde{\Omega}^2) + 16(1 - \tilde{\Omega}^2)^2\right]\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{\Omega}^2)(\beta^4 - 4 + \\ &+ 4\tilde{\Omega}^2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Где $\tilde{V} = V/\sqrt{\alpha\omega_0}$, $\beta^2 = \frac{c_H^2}{\alpha\omega_0}$, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0$.

Если в модели Пастернака пренебречь коэффициентом сдвига ($\beta \rightarrow 0$), задача переходит в классическое винклеровское основание. В этом случае из уравнения (2.44) непосредственно следуют известные критические скорости для балки Бернулли-Эйлера, приведённые в [224]:

$$\tilde{V}_{1,2}^* = \sqrt[4]{\frac{8+20\tilde{\Omega}^2-\tilde{\Omega}^4 \mp \tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}^2+8)^{3/2}}{2}} \quad (2.45)$$

Полученные формулы задают на плоскости безразмерных параметров задачи $(\tilde{\Omega}, \tilde{V})$ две кривые, которые разбивают её на области с различным числом возбуждаемых волн и, как следствие, качественно различными волновыми режимами (рис. 2.12.).

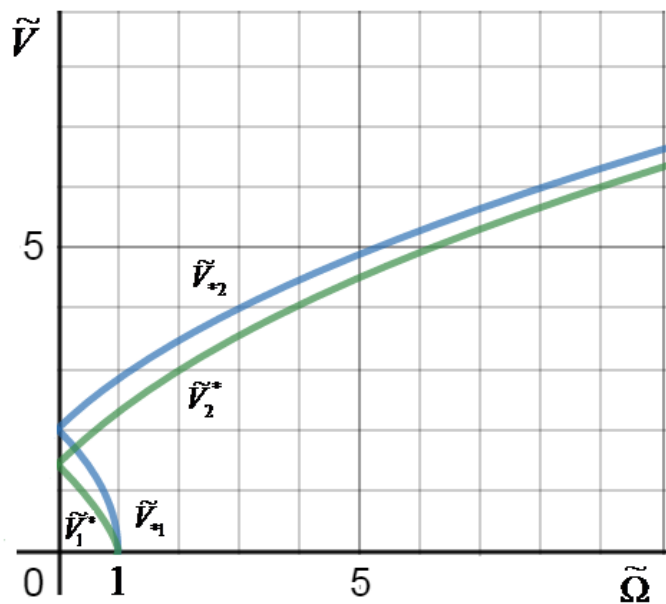


Рис. 2.12. Зависимость скорости движения объекта от частоты источника колебаний при $\beta = 0$ и $\beta = 2$

Учет в модели коэффициента сдвига ($\beta \neq 0$) не изменяет числа критических скоростей и качественной структуры волновых полей (рис. 2.12). Как и в случае однопараметрического основания, если частота воздействий источника, не превосходит критического значения ω_0 , сохраняются две критические скорости — первая и вторая $\tilde{\Omega} < 1$ и скорости его движения меньше первой критической скорости $\tilde{V} < \tilde{V}_{*1}$. Физически это означает, что добавление сдвиговой жёсткости

основания не перестраивает дисперсионную картину настолько, чтобы породить дополнительные ветви или принципиально иные типы излучения. $\tilde{V}_{*1}$, но не превосходит вторую критическую $\tilde{V}_{*2}$ скорость (), то кроме собственного поля излучаются две волны, одна из которых с большей частотой распространяется перед объектом, а другая с меньшей частотой – позади (к этой ситуации относится и случай $\tilde{\Omega} > 1, \tilde{V} < \tilde{V}_{*2}$). При превышении второй критической скорости собственное поле отсутствует, но зато возбуждаются по две волны впереди и позади объекта. Направления распространения этих волн аналогичны тем, что приводятся в [58]. Волновая картина в нашем случае меняется следующим образом:

1. Докритический режим ($\tilde{\Omega} < 1, \tilde{V} < \tilde{V}_{*1}$): движущийся источник формирует локальное собственное поле — суперпозицию экспоненциально затухающих осцилляций, не излучая бегущих волн.
2. Промежуточный диапазон скоростей ($\tilde{V}_{*1} < \tilde{V} < \tilde{V}_{*2}$): помимо собственного поля, возбуждаются две бегущие волны — более высокочастотная распространяется вперёд по направлению движения, а низкочастотная — назад. Этот же режим реализуется и в ситуации $\tilde{\Omega} > 1, \tilde{V} < \tilde{V}_{*2}$, то есть когда частота превышает критическую, а скорость остаётся ниже первого критического значения.
3. Закритический режим ($\tilde{V} > \tilde{V}_{*2}$): собственное поле исчезает, но излучаются четыре бегущие волны — две уходят вперёд, две назад. Направления их распространения совпадают с описанными в [58].

Также выполнен численный расчёт критических скоростей по формулам (2.44) и (2.45) применительно к рельсовой направляющей ракетного трека [171]. Параметры системы: изгибная жёсткость $EI=1.16$ МН·м², погонная плотность $\rho F=65$ кг/м, коэффициент сжатия основания $h_1 = 200$ МН/м², значение частоты воздействия на рельсовую направляющую $\Omega = 620$ 1/с. Отношение коэффициентов сдвига и сжатия принято меньшим единицы, что характерно для большинства грунтов [171], для вычислений $\beta^2 \approx 3.28$. Вычисленные значения критических скоростей составляют:

$V_1^* = 505$ м/с, $V_2^* = 846$ м/с – для модели Винклера;

$V_{*1} = 920$ м/с, $V_{*2} = 1258$ м/с для модели Пастернака.

Учёт второго коэффициента постели приводит к заметному росту критических скоростей, что лучше согласуется с экспериментальными наблюдениями. В частности, однопараметрическая модель Винклера предсказывает опасные резонансные режимы при существенно меньших скоростях, тогда как на ракетном треке ВНИИЭФ волнообразные остаточные деформации, а в наиболее тяжёлых случаях — разрушение рельсового пути, фиксировались лишь при скоростях разгона ракетных саней 1160–1450 м/с.

Решение кинематической задачи позволяет представить установившиеся колебания балки под действием равномерно движущейся нагрузки в следующей форме:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t) = A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} & \text{при } x \leq Vt \\ u_2(x, t) = A_3 e^{i(\omega_3 t - k_3 x)} + A_4 e^{i(\omega_4 t - k_4 x)} & \text{при } x \geq Vt \end{cases} \quad (2.46)$$

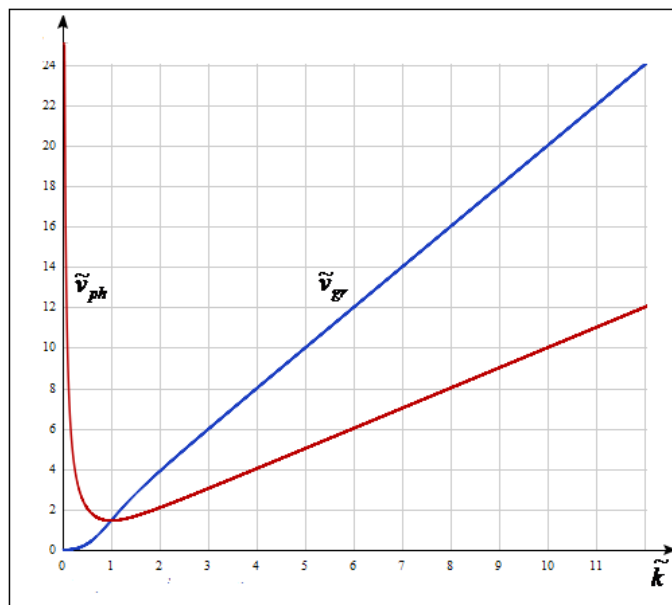
Комплексные амплитуды A_j ($j = \overline{1,4}$) определяются из системы алгебраических уравнений, получающихся после подстановки (2.46) в (2.36) – (2.39), и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= [-(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)IE + iI_0\Omega^2 k_2]P_0/(k_1 - k_2)\Delta, \\ A_2 &= [(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)IE - iI_0\Omega^2 k_1]P_0/(k_1 - k_2)\Delta, \\ A_3 &= -[(k_2 - k_4)(k_1 - k_4)IE + iI_0\Omega^2 k_4]P_0/(k_4 - k_3)\Delta, \\ A_4 &= [(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)IE + iI_0\Omega^2 k_3]P_0/(k_4 - k_3)\Delta, \\ \Delta &= [(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)I^2 E^2 + I_0 m \Omega^4]i + \\ &+ (k_3 + k_4 - k_1 - k_2)IE m \Omega^2 + [k_1 k_2 (k_1 + k_2) - k_3 k_4 (k_3 + k_4)]IE I_0 \Omega^2 \end{aligned}$$

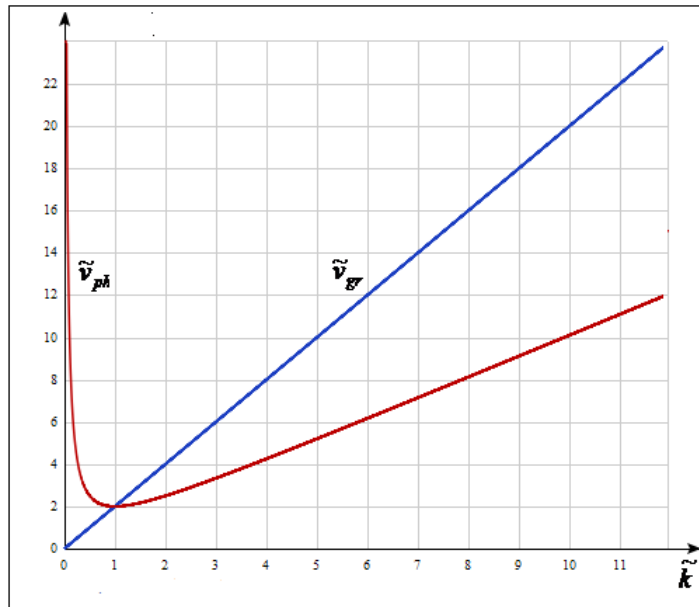
где P_0 – амплитуда источника колебаний.

В частном случае, когда движущийся объект представляет собой массивное тело, не обладающее собственным моментом инерции ($I_0 = 0$), и нагруженное лишь силой тяжести ($P = -mg$), спектр критических скоростей вырождается до единственного значения V^* , при превышении которого в балке возбуждаются бегущие волны. Её явное выражение непосредственно следует из (2.44): $V_* =$

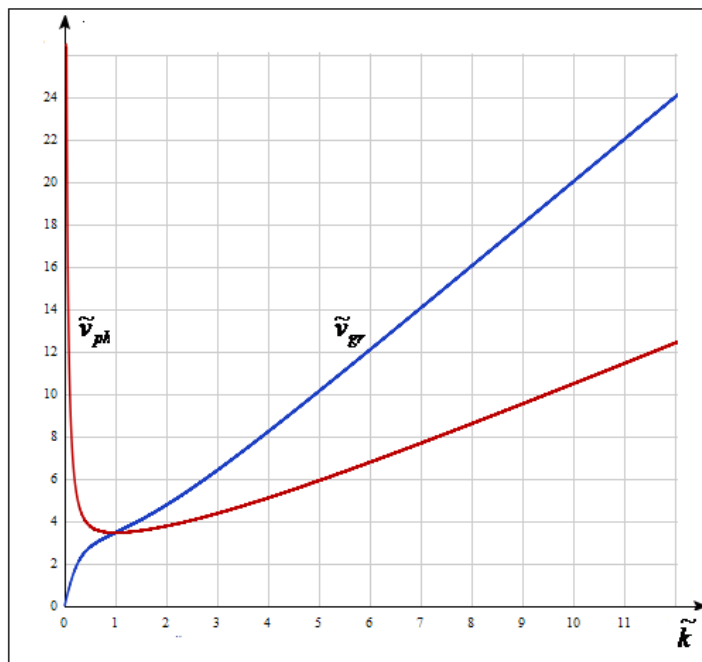
$\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$. Примечательно, что к такому же результату, но иным методом, ранее пришли авторы работы [56], где данное выражение для критической скорости, по-видимому, было получено впервые. Физически V^* совпадает с минимальной фазовой скоростью распространения волн, допускаемой дисперсионным соотношением для принятой модели (рис. 2.13). Иными словами, пока скорость нагрузки ниже этого порога, источник движется медленнее любой из возможных свободных волн, и излучения не происходит; как только порог преодолен, становится возможным синхронизм с одной из мод. Существенно, что для обобщённого основания Пастернака V^* оказывается выше, чем соответствующая критическая скорость для балки Бернулли–Эйлера на классическом винклеровском основании [154, 224], что отражает дополнительную жёсткость, вносимую коэффициентом сдвига.



a



а



б

Рис. 2.13 Зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа

На рис. 2.13 зависимости фазовой $v_{ph} = \omega/k$ и групповой $v_{gr} = d\omega/dk$ скоростей от волнового числа k представлены в безразмерной форме. Используются следующие масштабы рассмотренной системы: $\tilde{v}_{ph} = v_{ph}/\sqrt{\alpha\omega_0}$, $\tilde{v}_{gr} = v_{gr}/\sqrt{\alpha\omega_0}$, $\tilde{k} = k\sqrt{\alpha/\omega_0}$. А параметр упругого основания β

принимает значения 0.1, 2 и 10 ($\beta^2 = \frac{c_{II}^2}{\alpha\omega_0}$). В точке минимума дисперсионной кривой, которой отвечает длина волны $2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\omega_0}}$, фазовая и групповая скорости совпадают и принимают значение $\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$. В области безразмерных волновых чисел от 0 до 1 (что в размерных переменных соответствует интервалу от 0 до $\sqrt{\frac{\omega_0}{\alpha}}$) фазовая скорость превышает групповую, что свидетельствует о нормальной дисперсии: волновая энергия переносится медленнее фазового фронта. При $\tilde{k} > 1$ ситуация меняется на противоположную: $v_{gr} > v_{ph}$, дисперсия становится аномальной, и энергия может распространяться быстрее фазы.

Заслуживает внимания частный случай $c_{II} = \sqrt{2\alpha\omega_0}$. При таком соотношении параметров групповая скорость оказывается линейной функцией волнового числа (рис. 2.13 б). Точно такой же характер дисперсии демонстрирует балка Бернулли–Эйлера в отсутствие упругого основания [225], что указывает на эффективную компенсацию распределительных свойств основания.

При отборе физически осмысленных решений учитываются два фундаментальных требования. Во-первых, прогибы балки на бесконечности должны оставаться ограниченными. Во-вторых, как уже отмечалось, должно выполняться условие излучения Мандельштама [154, 224], что однозначно определяет знаки волновых чисел излучаемых мод, тогда:

$$\begin{cases} \text{Im } k > 0 \\ V_{gr} < V \end{cases} \quad \text{при } x < Vt, \quad \begin{cases} \text{Im } k < 0 \\ V_{gr} > V \end{cases} \quad \text{при } x > Vt$$

($V_{gr} = d\omega/dk$ - групповая скорость волн) из (2.8), (2.9) находим, что при $V < V_*$ слева от нагрузки ($x < Vt$)

$$k_{1,2} = \left(\pm\sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2} + i\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2} \right) (2\alpha)^{-1},$$

а справа при $x > Vt$

$$k_{3,4} = \left(\pm\sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2} - i\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2} \right) (2\alpha)^{-1}$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4}V \quad (2.47)$$

Таким образом, если нагрузка неподвижна или её скорость меньше критической, поперечные смещения балки остаются локализованными в окрестности источника и складываются из экспоненциально затухающих осцилляций. Приведённое решение справедливо при выполнении неравенства $c_{II}^2 < 2\alpha\omega_0$, что охватывает большинство практических ситуаций, а также при $V > \sqrt{c_{II}^2 - 2\alpha\omega_0}$, если $c_{II}^2 > 2\alpha\omega_0$.

Отдельного рассмотрения требует режим, в котором $c_{II}^2 \geq 2\alpha\omega_0$, а скорость движения лежит в диапазоне $V < \sqrt{c_{II}^2 - 2\alpha\omega_0}$. Здесь волновые числа принимают чисто мнимые значения, и осциллирующая часть решения исчезает. Физически это означает, что нагрузка движется слишком медленно для возбуждения бегущих волн, а дисперсионные свойства основания подавляют распространение колебаний системы. В результате профиль прогиба под нагрузкой оказывается симметричным и монотонно экспоненциально спадает при удалении от неё.

При постоянной внешней силе (нулевая частота источника) и скорости $V > V_*$, собственное поле отсутствует, однако излучаются четыре бегущие волны: две распространяются вперёд по направлению движения, две — назад, унося энергию от нагрузки. Соответствующие волновые числа и частоты задаются выражениями:

$$k_{1,2} = \pm \left(V^2 - c_{II}^2 - \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2)^{-1/2} \quad (2.48)$$

$$k_{3,4} = \pm \left(V^2 - c_{II}^2 + \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2)^{-1/2}$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4}V$$

Таким образом, зная явные выражения для частот и волновых чисел излучаемых волн, получаем решение (2.46), записанное в параметрах задачи для каждого качественно различного кинематического случая (2.47), (2.48):

- при скорости движения объекта ниже критической $V < V_*$

$$u_{1,2}(x, t) = -Ae^{\pm b(x-Vt)} \cos \left(\mp \sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2(2\alpha)^{-1}}(x - Vt) - \phi \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}mg}{\rho F \sqrt{4\alpha^2\omega_0^3 - \omega_0(V^2 - c_{II}^2)^2}}, \quad b = \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2}(2\alpha)^{-1},$$

$$\phi = 2 \arctg \left(\frac{2\sqrt{\alpha\omega_0} - \sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2}}{\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2}} \right)$$

- при скорости движения объекта выше критической $V > V_*$

$$u_{1,2}(x, t) = \frac{mgb_{2,1} \sin(b_{1,2}(x - Vt)/\alpha)}{\rho F \omega_0 \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2 \omega_0^2}}$$

$$b_{1,2} = \sqrt{2^{-1} \left(V^2 - c_{II}^2 \mp \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2 \omega_0^2} \right)}$$

При достижении скоростью движения критического значения $V = V_*$ амплитуды возбуждаемых волн неограниченно нарастают в рамках линейной модели. Это свидетельствует о совпадении резонансных условий с кратностью корней кинематической задачи: частота воздействия и скорость таковы, что дисперсионное уравнение и кинематический инвариант дают сливающиеся решения, и энергия, подводимая источником, перестаёт отводиться от него — возникает синхронизация (или фазовый синхронизм – по аналогии эффекта с электродинамикой) с собственной модой системы. На рис. 2.14 показано, как меняется прогиб срединной линии балки в подвижной системе координат $\xi = (x - Vt)\sqrt{\omega_0/\alpha}$ при различных безразмерных скоростях $\tilde{V}$ и параметре β .

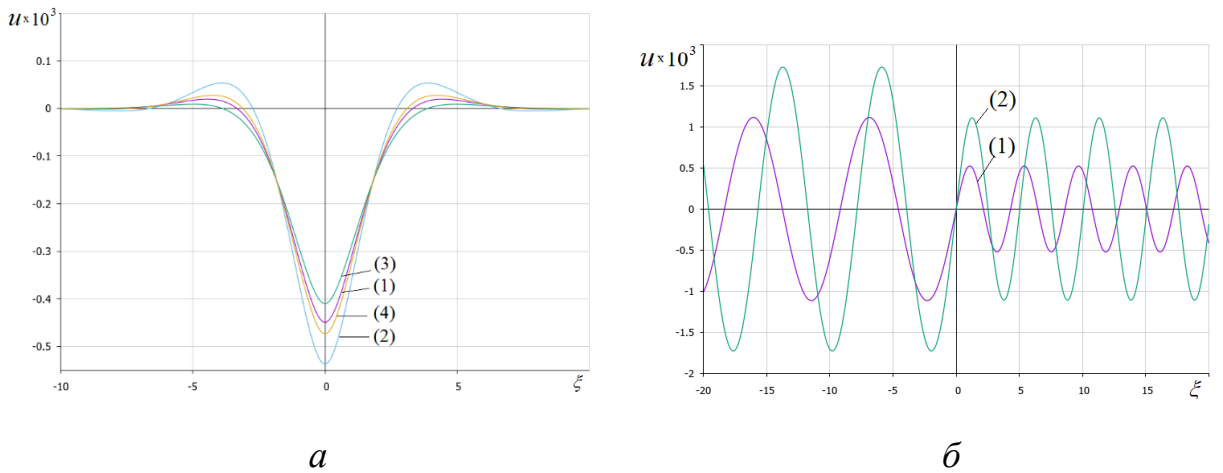


Рис. 2.14. Изменение прогиба направляющей в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой а) Докритическая скорость: $\tilde{V} < \tilde{V}_*$ 1) $\beta = 0$, $\tilde{V} = 0$, 2) $\beta = 0$, $\tilde{V} \neq 0$, 3) $\beta \neq 0$, $\tilde{V} = 0$, 4) $\beta \neq 0$, $\tilde{V} \neq 0$ б) Закритическая скорость: $\tilde{V} > \tilde{V}_*$, 1) $\beta = 0$, 2) $\beta \neq 0$ с учетом и в пренебрежении безразмерным коэффициентом сдвига упругого основания

Расчёты выполнены для тех же параметров рельсовой направляющей ракетного трека, что и ранее [171], при значениях $\beta^2 = 0; 0.4$ и $\tilde{V}^2 = 0; 0.6; 2.6$.

Анализ докритических профилей (рис. 2.14 а) показывает, что с ростом скорости прогибы затухают медленнее, чем в статическом случае. Коэффициент затухания нераспространяющейся волны для балки на обобщённом основании оказывается выше, чем на винклеровском, но по мере приближения к критической скорости он снижается в обеих моделях. Иными словами, добавка сдвиговой жёсткости в основании делает поле деформаций более локализованным, однако с разгоном нагрузки эта локализация ослабевает.

При переходе в закритическую область (рис. 2.14 б) прогиб непосредственно под силой обращается в нуль — для обеих рассматриваемых моделей при указанных параметрах. Физически это следствие того, что нагрузка движется быстрее, чем формируются статические деформации (поперечные смещения), и всё возмущение трансформируется в бегущие волны. Сравнение кривых дает понять, что основание Пастернака порождает бегущие волны с заметно большими амплитудами, чем классическое винклеровское. Причина кроется в дополнительной сдвиговой жёсткости, которая приводит к более эффективному излучению энергии движущимся источником.

Опираясь на общее решение задачи, для силы волнового давления (т.е. силы волнового сопротивления движению) [226, 227], получаем следующее выражение:

$$F_{pr} = \begin{cases} 0, V < V_*, \\ -\frac{(mg)^2}{2\rho F \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2 \omega_0^2}}, V > V_* \end{cases}$$

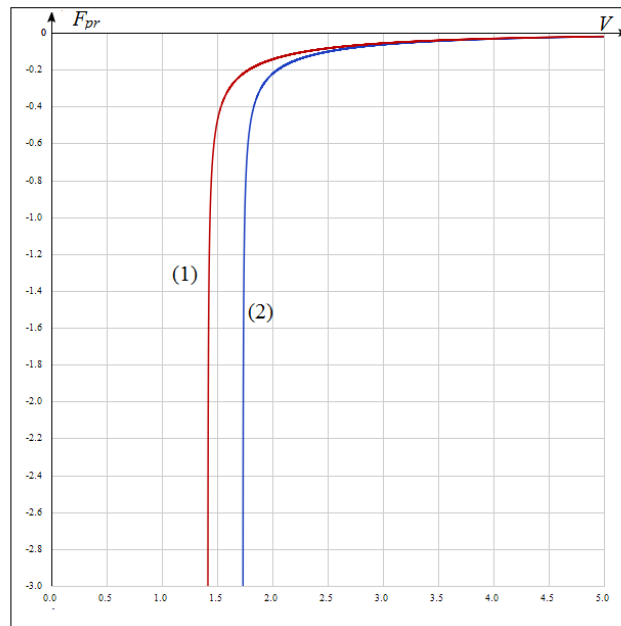


Рис. 2.15. Среднее значение силы давление волн в зависимости от скорости движения объекта

В рамках модели без диссипативных потерь сила давления волн F_{pr} на движущуюся нагрузку полностью определяется характером формируемого поля деформаций. При скоростях меньше критической ($V < V_*$) поле симметрично и локализовано, поэтому результирующая продольная сила отсутствует ($F_{pr} \equiv 0$, рис. 2.15). В точке $V = V_*$ наступает резонанс: дисперсионное и кинематическое уравнения дают кратные корни, что физически означает синхронизацию источника с собственной модой системы без отвода энергии; амплитуда и сила F_{pr} в линейном приближении неограниченно растут. При превышении критической скорости ($V > V_*$) формируются четыре бегущие волны — по две впереди и позади нагрузки. Это излучение аналогично эффекту Вавилова–Черенкова [228], поскольку источник движется быстрее минимальной фазовой скорости волн в системе. Сила F_{pr} в этой области всегда направлена против движения (тормозящее волновое сопротивление, рис. 2.15).

Таким образом, при малых скоростях движения объекта (рис. 2.14 а) использование винклеровой модели упругого основания дает завышенное значение поперечного смещения направляющей под нагрузкой по сравнению с моделью Пастернака, а при закритических скоростях (рис. 2.14 б) — заниженные

динамические характеристики бегущих волн и силы давления волн в движущемся контакте (рис. 2.15). В интервале скоростей источника, соответствующих диапазону $\sqrt{2\alpha\omega_0} < V < \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$ однопараметрическая балка уже переходит в волновой режим, а балка на двух упругих параметрах основания ещё сохраняет локализованное поле. Расчёт критических скоростей по формуле (2.44) хорошо согласуется с экспериментальными данными ракетного трека ВНИИЭФ.

Неограниченный рост амплитуд и силы сопротивления при $V = V_*$ — следствие особенности модели без влияния затухания. При учёте диссипативных потерь в основании или материале балки резонансные максимумы становятся конечными, симметрия прогиба впереди и позади нагрузки нарушается, и появляется ненулевое сопротивление движению уже при докритических скоростях [157, 224, 226]. Таким образом, принятая в работе идеализация не отражает многих деталей реальных конструкций (рельсовые скрепления и т.п.). Тем не менее она широко используется в инженерной практике, поскольку, с одной стороны, даёт качественно верное представление о волновых эффектах, а с другой — позволяет получить точное аналитическое решение задачи. Рассмотренная задача дополняет цикл исследований проблем волновой динамики и устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим ракетного трека [171,191,192,208,209]. Полученные результаты могут служить методическим и расчетным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону полезной нагрузки.

ГЛАВА 3. ВЛИЯНИЕ НЕУЧТЕННЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ ФАКТОРОВ И НЕЛИНЕЙНОСТИ ОБОБЩЕННОГО УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ НА ЭВОЛЮЦИЮ ИЗГИБНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В БАЛКАХ

3.1. Влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонических волн

Выбор математической модели является одним из ключевых этапов в процессе научного исследования и инженерного проектирования. Правильно подобранная модель материала позволяет анализировать, предсказывать и оптимизировать поведение системы. Модель Релея, предложенная в начале XX века, представляет собой упрощенное описание динамического поведения балок, учитывающее изгибные колебания. Это позволяет более точно анализировать влияние различных факторов, в частности за счет учета изгибающего момента при повороте балки, в сравнении с более простой математической моделью Бернулли-Эйлера.

Уравнение изгибных колебаний балки модели Релея [165], лежащей на обобщенном упругом основании, имеет вид:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + h_1 w - 2h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь $w(x, t)$ – перемещение частиц срединной линии балки при изгибе, ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения балки, E – модуль Юнга, J – осевой момент инерции.

Для последующей работы с уравнением колебаний балки, введены безразмерные величины для перемещения, координаты и времени:

$$U = \frac{w}{w_0} ; z = \frac{x}{X} ; \tau = \frac{t}{T} , \text{ где } w_0 \text{ – максимальное поперечное перемещение.}$$

С учетом параметров «масштаба» параметров системы $\frac{EJ T^2}{\rho F X^4} = 1 ; \frac{h_1 X^4}{EJ} = 1$, получены безразмерные переменные:

$$U = \frac{w}{w_0} ; z = x^4 \sqrt{\frac{h_1}{EJ}} ; \tau = t \sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}, \quad (3.2)$$

Это позволяет получить оцениваемое в дальнейшем уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \alpha_1 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + U - \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.3)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{J\sqrt{h_1}}{F\sqrt{EJ}}$ – параметр, включающий в себя коэффициент изгибной жесткости балки (EJ) и «вертикальный» коэффициент жесткости упругого основания (h_1).
 $\alpha_2 = \frac{2h_2}{\sqrt{EJ}\sqrt{h_1}}$ – параметр, отражающий отношение «вертикального» (h_1) к «горизонтальному» (h_2) коэффициентов упругости.

Введение безразмерных величин и параметров системы позволяет упростить анализ и получить дисперсионное уравнение, которое служит основой для дальнейшего исследования влияния обобщенного упругого основания на параметры изгибной волны.

Для выявления влияния обобщённого упругого основания на параметры изгибной волны обратимся к уравнению (3.3). Поскольку рассматриваются установившиеся волновые колебания, как поступали ранее, будем искать его решение в форме бегущей гармонической волны:

$$u = Ae^{i(\Omega\tau - Kz)} + A^*e^{-i(\Omega\tau - Kz)} \quad (3.4)$$

Здесь A, A^* – безразмерная комплексная амплитуда и ее комплексно-сопряженная часть, Ω – частота и K – волновое число, связанные с круговой частотой ω и размерным волновым числом k соотношениями:

$$\Omega = \frac{\sqrt{\rho F \cdot EJ}}{h_1} \omega, \quad K = \sqrt[4]{\frac{EJ}{h_1}} k \quad (3.5)$$

Подставив решение в форме гармонической волны и с учетом обезразмеривания, для анализа частотно-дисперсионных зависимостей мы получим уравнение:

$$-\Omega^2 + K^4 - \alpha_1 \Omega^2 K^2 + 1 + \alpha_2 K^2 = 0, \quad (3.6)$$

Откуда находим закон дисперсии изгибной волны:

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{1 + \alpha_1 K^2}}, \quad (3.7)$$

фазовую и групповую скорости:

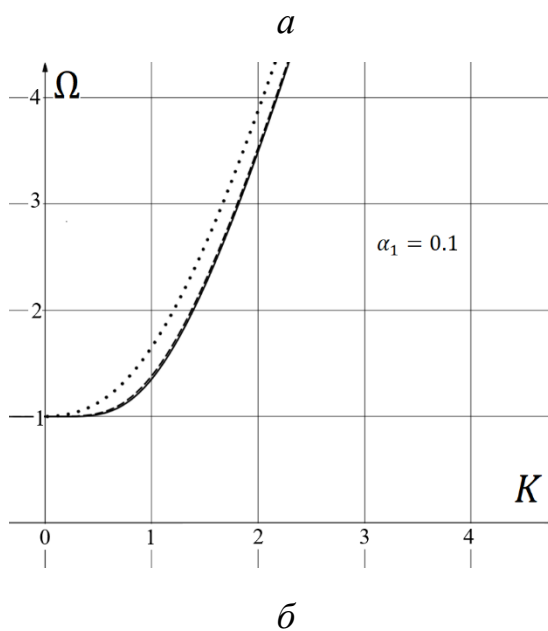
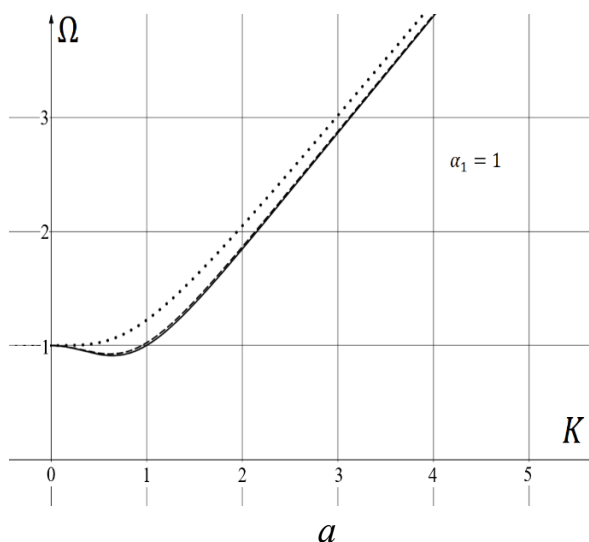
$$\vartheta_{\Phi} = \frac{\Omega}{K} = \pm \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{K^2 + \alpha_1 K^4}} \quad (3.8)$$

$$\vartheta_{\text{гр}} = \frac{d\Omega}{dK} = \pm \frac{K(2K^2 + \alpha_1 K^4 + \alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \alpha_1 K^2)^3 (K^4 + \alpha_2 K^2 + 1)}}. \quad (3.9)$$

Зависимости (3.7), (3.8), (3.9) приведены на рисунках 3.1., 3.2. и 3.3., соответственно.

Графики построены при варьировании параметров α_1 и α_2 следующим образом:

$$\alpha_1 = 0.1 \text{ или } 1; \begin{cases} \alpha_2 = 0.01 & \text{— сплошная линия} \\ \alpha_2 = 0.1 & \text{— пунктир} \\ \alpha_2 = 1 & \text{— точки} \end{cases}$$



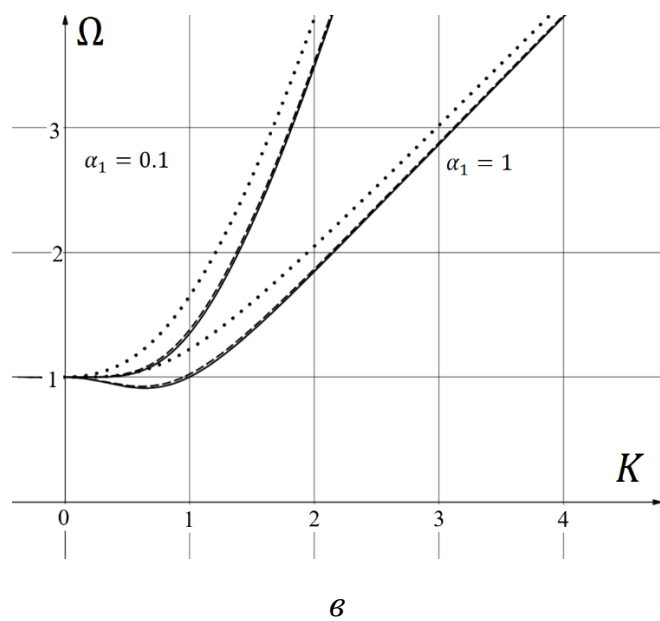
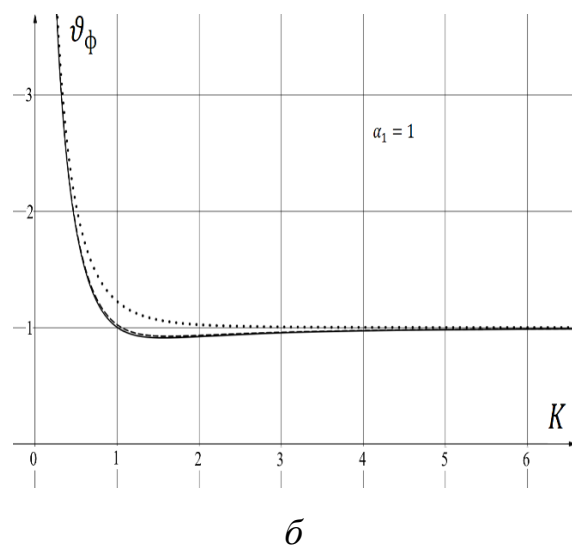
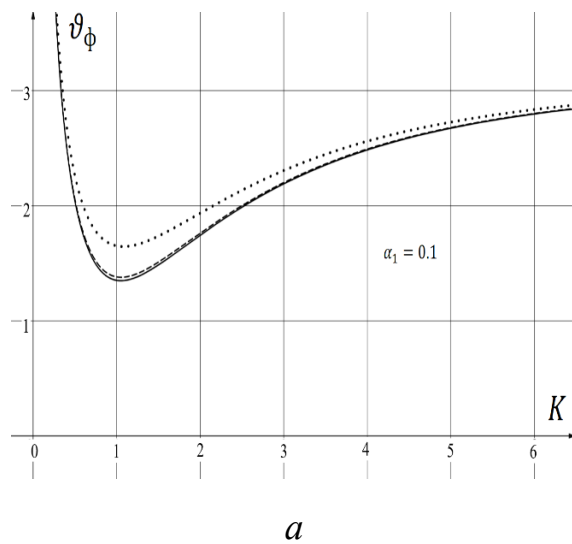


Рис. 3.1. Дисперсия при варьировании коэффициента α_2 и фиксированном коэффициенте $\alpha_1 = 0.1$ (рис. а) и $\alpha_1 = 1.0$ (рис. б), а также при больших волновых числах (рис. в).



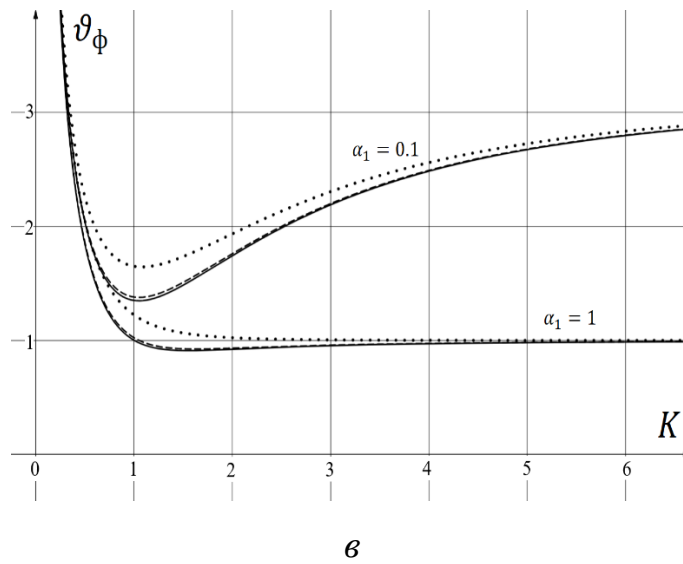
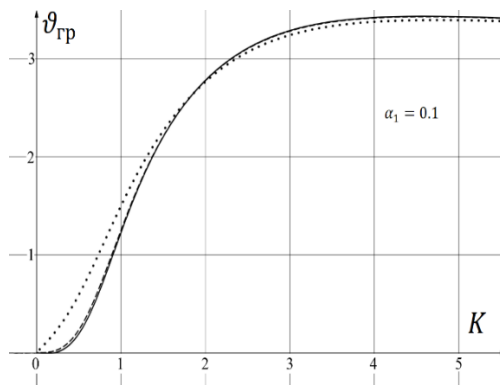
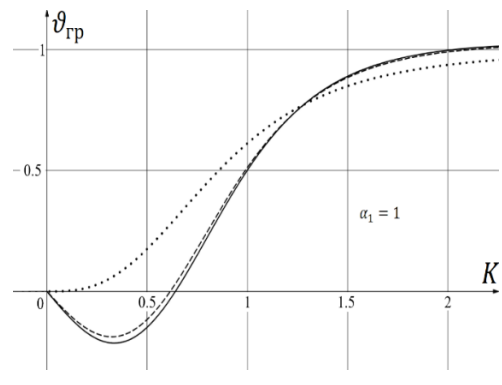


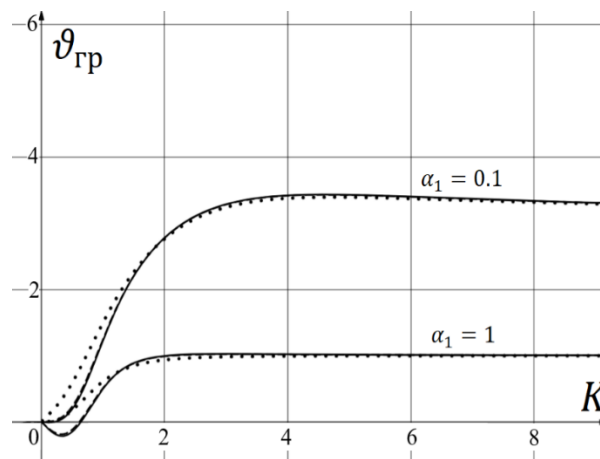
Рис. 3.2. Фазовая скорость в зависимости от $\alpha_1 = 0.1$ (а), $\alpha_1 = 1.0$ (б), а также при больших волновых числах (в).



а



б



в

Рис. 3.3. Групповая скорость в зависимости от $\alpha_1 = 0.1$ (а), $\alpha_1 = 1.0$ (б), а также при больших волновых числах (в).

Для наглядного сопоставления зависимости фазовой и групповой скоростей представим на одном графике, иллюстрируя влияние коэффициентов упругого основания на дисперсионные характеристики, два показательных случая:

а) $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.1$;

б) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.1$.

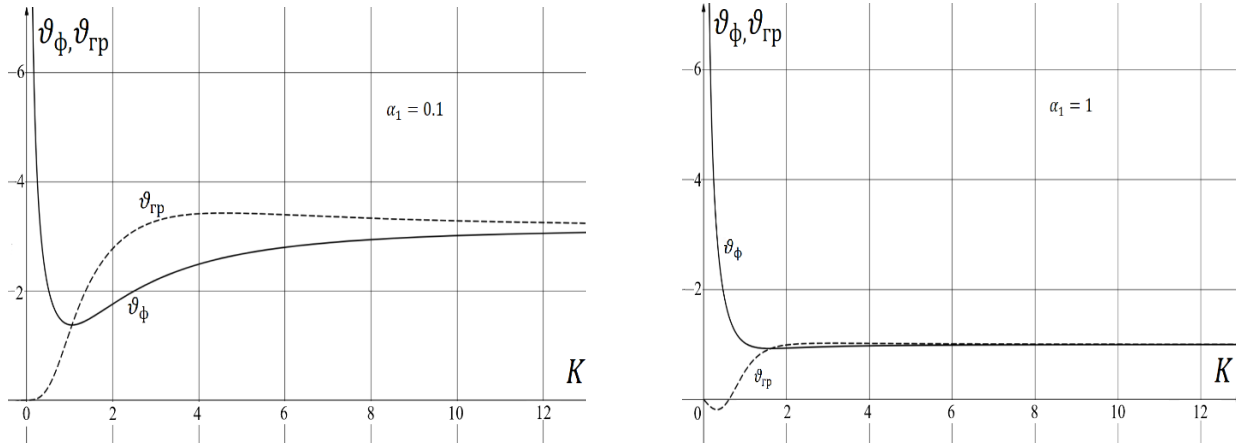


Рис. 3.4.а, 3.4.б. Фазовая и групповая скорости от волнового числа при разных параметрах основания

Графики на рис. 3.4.а и 3.4.б демонстрируют, что групповая скорость волн совпадает с фазовой в точке минимума последней. Также видно, что при больших волновых числах и под влиянием «вертикального» коэффициента жесткости h_1 преобладающим над «горизонтальным» коэффициентом h_2 , фазовая и групповые скорости совпадают. Это свидетельствует об отсутствии дисперсии в рассмотренном диапазоне (Рис. 3.4.б.).

Представим асимптоты при стремлении волнового числа к бесконечности и покажем внутреннюю непротиворечивость системы.

-При $k \rightarrow 0$:

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{1 + \alpha_1 K^2}} \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow 1 ;$$

$$v_\phi = \pm \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{K^2 + \alpha_1 K^4}} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty ;$$

$$v_{gr} = \pm \frac{K(2K^2 + \alpha_1 K^4 + \alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \alpha_1 K^2)^3 (K^4 + \alpha_2 K^2 + 1)}} \rightarrow \frac{0}{1} \rightarrow 0$$

-При $k \rightarrow \infty$:

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{1 + \alpha_1 K^2}} \rightarrow \frac{K^2}{\sqrt{\alpha_1} K} \rightarrow \infty ;$$

$$\vartheta_\phi = \pm \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{K^2 + \alpha_1 K^4}} \rightarrow \frac{K^2}{\sqrt{\alpha_1} K^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} ;$$

$$\vartheta_{\text{гр}} = \pm \frac{K(2K^2 + \alpha_1 K^4 + \alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \alpha_1 K^2)^3 (K^4 + \alpha_2 K^2 + 1)}} \rightarrow \frac{\alpha_1 K^5}{\sqrt{\alpha_1^3 K^{10}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$$

Графики соответствующих асимптот построены ниже в большем масштабе для наглядности.

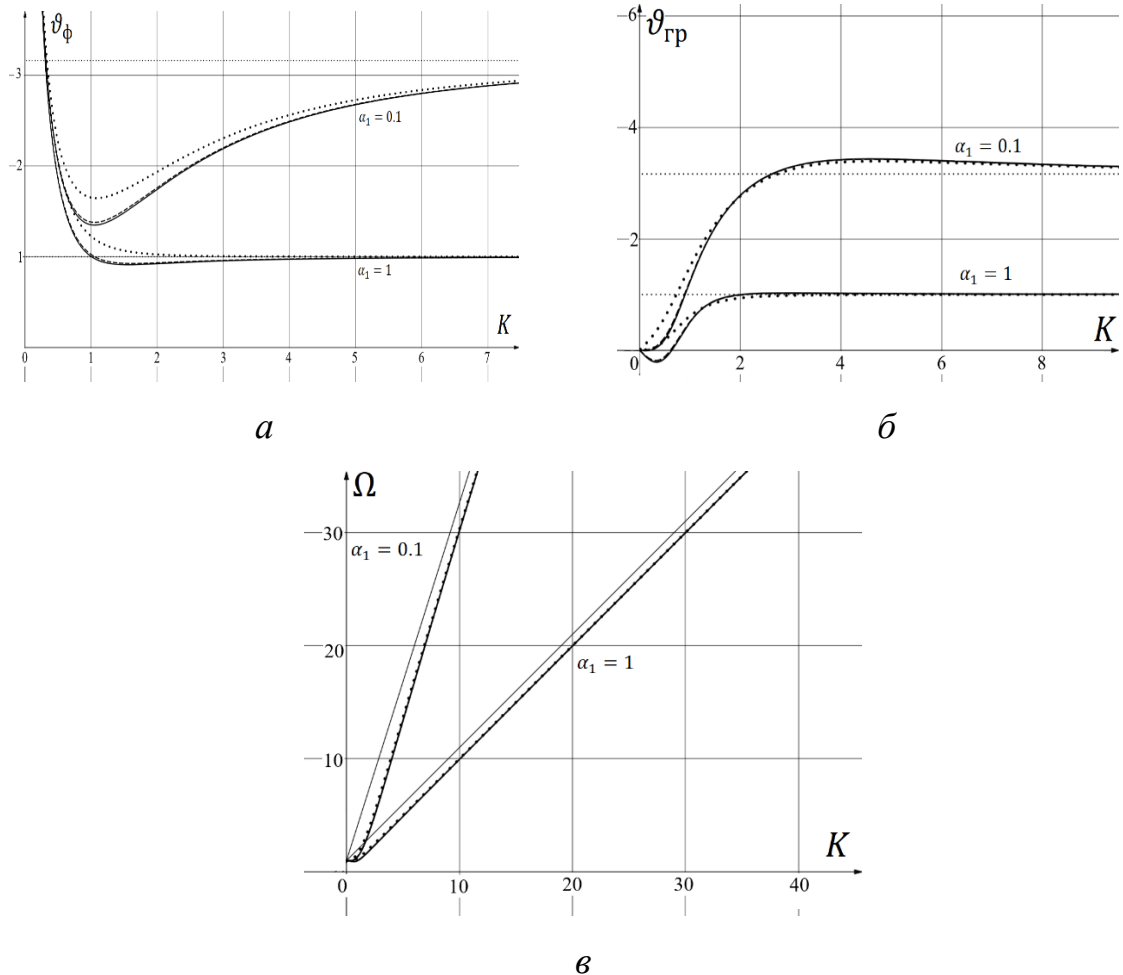


Рис. 3.5. Асимптоты Фазовых (*a*), групповых (*б*) скоростей и дисперсии от волнового числа (*в*)

Данные на рисунках 3.5. позволяют убедиться в достоверности полученных результатов.

Построим сравнительный график модели Рэлея и модели Бернулли-Эйлера и наглядно увидим разницу. Для определенности, в модели Рэлея возьмем коэффициент $\alpha_2 = 0.1$, а также вариации второго коэффициента: $\alpha_1 = 0.1$ и $\alpha_1 = 1$. Для модели Бернулли Эйлера коэффициент $\alpha_1 = 0$, так как не учитывается изгибающий момент при повороте поперечного сечения балки. Модель Бернулли показана черным цветом на графике, модели Рэлея черным пунктиром ($\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.1$) и черными точками ($\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.1$) соответственно.

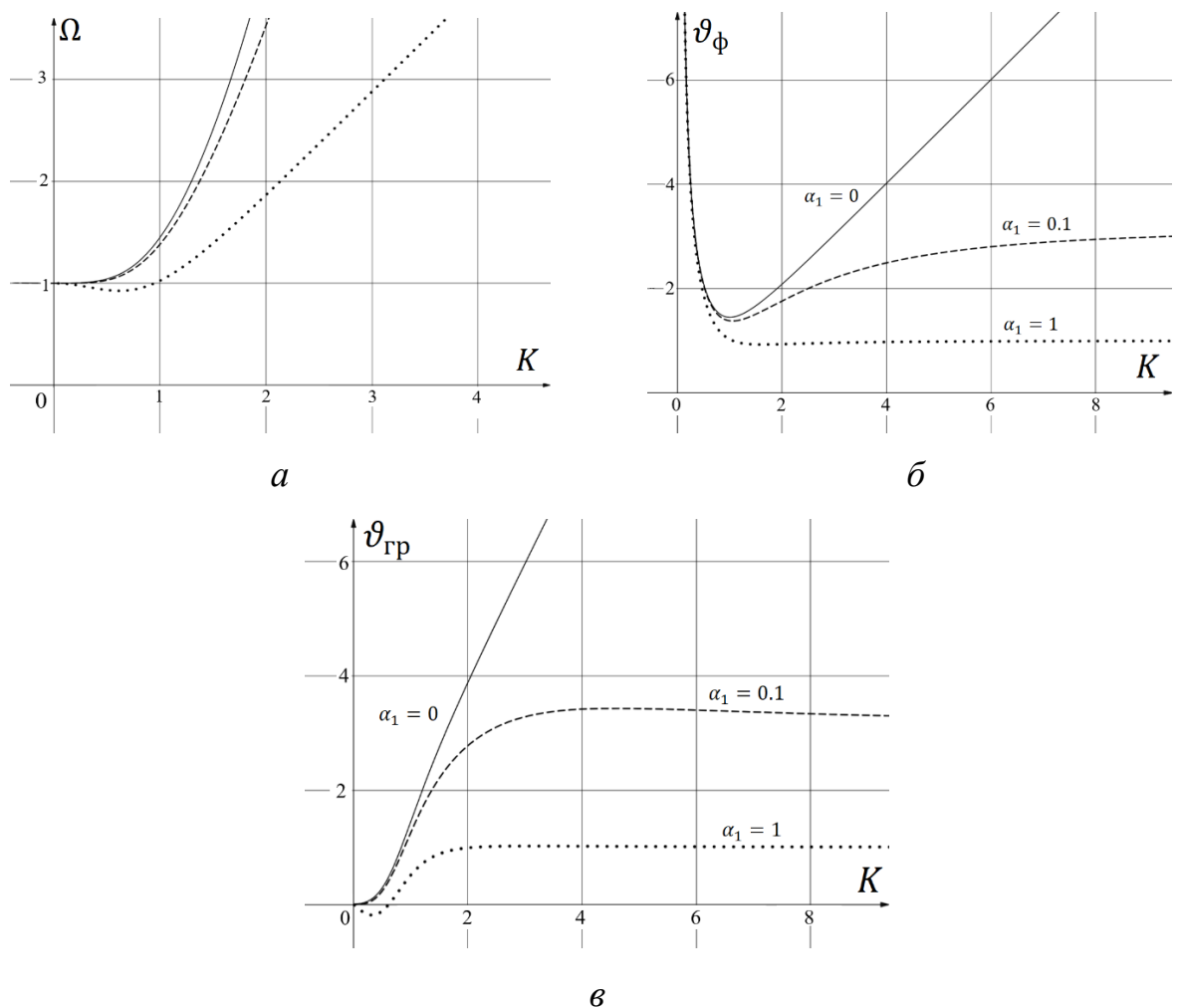


Рис. 3.6. Графики сравнения моделей балки.

Из рисунков 3.6. видно, что модель Бернулли-Эйлера дает завышенную оценку скоростей и дисперсии в модели, в сравнении с уточненной моделью Рэлея. Однако, модель Рэлея сложнее в решении. Представленные данные согласуются с известными выводами относительно данных моделей, что подтверждает правильность полученных выводов.

3.2. Влияние обобщенного нелинейно-упругого основания на эволюцию квазигармонических изгибных волн и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов

Известно, что нелинейные волновые процессы в различных физических системах могут сопровождаться эффектами сжатия волнового поля, которые развиваются либо в поперечном к лучу направлении (самофокусировка [229]), либо вдоль направления распространения — самомодуляция [230, 231]. Для квазигармонических волн, эволюционирующих в нелинейной диспергирующей среде, фундаментальным механизмом перестройки профиля служит модуляционная неустойчивость. Её развитие приводит к дроблению исходной почти монохроматической волны на цуг изолированных волновых пакетов. Теоретическое описание этого базируется на нелинейном уравнении Шредингера, анализ которого приводит к критерию Лайтхилла [232, 233], определяющему порог модуляционной неустойчивости.

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{dv_{gp}}{dk} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = \sigma |A|^2 A \quad (3.10)$$

$$\frac{dv_{gp}}{dk} \sigma < 0 \quad . \quad (3.11)$$

Здесь A – комплексная амплитуда квазигармонической волны; A^* – ее комплексно-сопряженная величина $|A|^2 = AA^*$; v_{gp} – групповая скорость; k – волновое число; σ – коэффициент, характеризующий нелинейность среды.

Математическая модель.

Анализ динамического поведения балки Бернулли–Эйлера, взаимодействующей с упругим основанием, проводится с привлечением обобщённой модели, задаваемой двумя независимыми коэффициентами постели, которые в рамках текущей главы определим следующими переменными: H_1 — жёсткость при деформациях растяжения-сжатия и H_2 — коэффициент жёсткости при сдвиге. В отличие от классической модели Винклера, учитывающей лишь локальную реакцию, такая постановка отражает распределительную способность грунта: осадки развиваются не исключительно под нагруженной областью, но и в прилегающей зоне, что существенно для описания совместной работы

фундаментов и оснований. Сравнительный анализ ряда исторически предложенных обобщённых моделей [162, 175–180, 210], выполненный в работе [234], показал их эквивалентность — все они сводятся к одной и той же расчётной схеме. Это даёт основания именовать её моделью Вигхарта–Кармана–Филоненко–Бородича–Пастернака–Власова–Леонтьева–Рейсснера–Хетены. В работах [237–241] классическая модель Винклера и её обобщения распространены на случай нелинейных упругих свойств. Для учёта нелинейных свойств обобщённого упругого основания будем считать, что коэффициенты постели H_1 и H_2 не постоянны, а определяются текущим поперечным смещением срединной линии балки $w(x, t)$ и его градиента $(\partial w(x, t)/\partial x)$:

$$H_1 = h_1 + \widetilde{h}_1 w^2, H_2 = h_2 + \widetilde{h}_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (3.12)$$

где h_1, h_2 и $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2$ — постоянные величины.

Подстановка нелинейных выражений (3) для коэффициентов постели H_1 и H_2 в общее уравнение изгибных колебаний балки преобразует его к виду, описывающему динамику системы на обобщённом нелинейно-упругом основании. Это уравнение служит обобщением линейной модели и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = c_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6\widetilde{h}_2}{\rho F} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \omega_0^2 w - \frac{2\widetilde{h}_1}{\rho F} w^3. \quad (3.13)$$

Здесь слагаемые, входящие в правую часть уравнения, описывают влияние упругого основания на колебания балки, $\alpha = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}$; E — модуль Юнга; I — осевой момент инерции; ρF — погонная плотность; $c_{\parallel} = \sqrt{\frac{h_2}{\rho F}}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}$ — наименьшая частота возбуждаемых в балке волн.

Вывод эволюционного уравнения и его анализ.

В линейном приближении ($\widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_2 = 0$) уравнение (3.13) допускает точное представление решения в виде набора гармоник. Их частоты ω и волновые числа k подчиняются дисперсионному соотношению:

$$\omega = \pm \sqrt{c_{\parallel}^2 k^2 + \alpha^2 k^4 + \omega_0^2}. \quad (3.14)$$

Изгибные волны обладают дисперсией, поскольку их фазовая скорость меняется со временем $v_\phi = \frac{\omega}{k} \neq const$ и различные гармоники распространяются с разными скоростями. Если нелинейность остаётся слабой, решение полного нелинейного уравнения (3.13) качественно близко к линейному, и его целесообразно строить в виде суперпозиции квазигармоник. Более того, для систем с кубической нелинейностью характерно доминирование эффектов самовоздействия (самофокусировки и самомодуляции) над процессами генерации высших гармоник, так что вкладом последних допустимо пренебречь. Сочетание этих двух факторов — дисперсионного разбегания гармоник и слабости механизмов их рождения — позволяет искать решение в форме одной квазигармонической волны, чьи амплитуда и фаза медленно меняются в пространстве и во времени:

$$w(x, t) = A(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\omega t - kx)} + A^*(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (3.15)$$

где комплексная амплитуда (A), частота (ω) и волновое число (k) удовлетворяют соотношению: $\frac{\partial A}{\partial x}/kA \sim \frac{\partial A}{\partial t}/\omega A \sim \varepsilon \ll 1$.

Используя метод усреднения по «быстрым» переменным [233], от (3.13) перейдем к укороченному уравнению для огибающей квазигармонической волны:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_{gp} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\varepsilon i}{2\omega} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - (6\alpha^2 k^2 + c_{\parallel}^2) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right] = \frac{3i(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 k^4)}{\rho F \omega \varepsilon} |A|^2 A. \quad (3.16)$$

Откуда получаем зависимость (3.17):

$$v_{gp} = \frac{(c_{\parallel}^2 + 2\alpha^2 k^2)k}{\sqrt{c_{\parallel}^2 k^2 + \alpha^2 k^4 + \omega_0^2}}. \quad (3.17)$$

В системе координат, движущейся с групповой скоростью

$\xi = x - v_{gp}t$, $\tau = \varepsilon t$, эволюция огибающей будет описываться нелинейным уравнением Шредингера (3.10).

При переходе от (3.16) к (3.10) оставлены слагаемые $\sim \varepsilon^0$, принято, что $\frac{\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 k^4}{\rho F \omega} \sim \varepsilon^2$, $\frac{dv_{gp}}{dk}$ определено путем дифференцирования соотношения (3.17):

$$\frac{dv_{gp}}{dk} = \frac{6\alpha^2 k^2 + c_{\parallel}^2 - v_{gp}^2}{\omega}, \quad (3.18)$$

а коэффициент, характеризующий нелинейность упругого основания, будет определяться формулой

$$\sigma = -\frac{3(\widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2 k^4)}{\rho F \omega \varepsilon^2}. \quad (3.19)$$

Следуя критерию Лайтхилла (3.11), условие возникновения модуляционной неустойчивости изгибных волн записывается в виде неравенства:

$$\frac{(6\alpha^2 k^2 + c_{\parallel}^2 - v_{zp}^2)[-3(\widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2 k^4)]}{\omega^2 \rho F \varepsilon^2} < 0. \quad (3.20)$$

Знаменатель этой дроби всегда положителен. Первый сомножитель числителя мог бы стать отрицательным при $v_{zp}^2 > 6\alpha^2 k^2 + c_{\parallel}^2$. Однако, опираясь на дисперсионное соотношение (3.14), нетрудно убедиться, что во всём допустимом диапазоне волновых чисел $0 \leq k < \infty$ последнее неравенство не реализуется. Следовательно, знак левой части (3.20) полностью определяется вторым сомножителем, и критерий Лайтхилла сводится к элементарному условию:

$$-3(\widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2 k^4) < 0. \quad (3.21)$$

Отсюда напрямую вытекает, что наличие или отсутствие модуляционной неустойчивости задаётся исключительно характером нелинейности упругого основания. В случае жёсткой нелинейности, отвечающей «упрочняющемуся» основанию по терминологии Рейсснера [212] ($\widetilde{h}_{1,2} > 0$), изгибные волны испытывают самомодуляцию. Напротив, при мягкой нелинейности, свойственной «размягчённому» основанию [212] ($\widetilde{h}_{1,2} < 0$), неустойчивость не развивается. Физически самомодуляция проявляется в перекачке энергии из центральной части спектра модулированной волны в её боковые компоненты, что сопровождается усилением последних и наглядно иллюстрируется рис. 3.7.

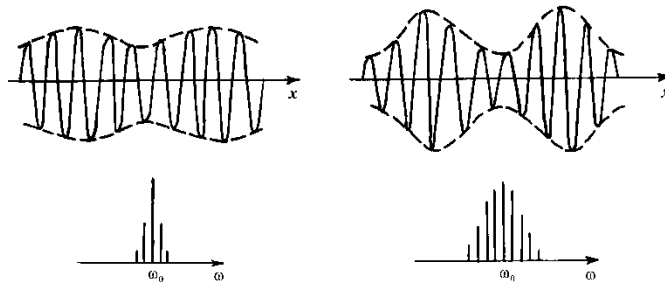


Рис. 3.7. Модуляционная неустойчивость квазигармонической волны и эволюция спектра

Стационарные волны огибающих.

При введении вместо комплексной амплитуды (A) действительной амплитуды (a) и фазы (φ): $A = a \exp(i\varphi)$ уравнение Шредингера (3.10) запишется в виде системы:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{a^2}{2} \right) - \frac{dv_{zp}}{dk} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{a^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{dv_{zp}}{dk} \frac{\partial^2 a / \partial \xi^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{dv_{zp}}{dk} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \sigma a^2 = 0. \quad (3.22)$$

Чтобы установить форму волновых пакетов, на которые вследствие модуляционной неустойчивости распадается изгибная квазигармоническая волна, обратимся к анализу стационарных волн огибающих. Именно такие стационарные решения описывают установившиеся волновые пакеты, чья форма не меняется со временем в движущейся системе отсчёта. Решение системы (3.22) отыскивается в классе бегущих волн: амплитуда $a = a(\eta)$ и фаза $\varphi = \varphi(\eta)$ полагаются зависящими только от переменной $\eta = \xi - V\tau$, где $V = \text{const}$ – скорость стационарной волны, подлежащая определению. В этом случае фаза волны выражается через амплитуду следующим соотношением:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = - \frac{1}{\left(\frac{dv_{zp}}{dk} \right)} (V - 2D), \quad (3.23)$$

где D – константа интегрирования.

Изменение амплитуды будет описываться уравнением ангармонического осциллятора:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} + m_1 a + m_2 a^3 + m_3 a^{-3} = 0, \quad (3.24)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{2} \frac{V^2}{\left(\frac{dv_{zp}}{dk} \right)}, \quad m_2 = \frac{\sigma}{\left(\frac{dv_{zp}}{dk} \right)}, \quad m_3 = - \frac{D^2}{\left(\frac{dv_{zp}}{dk} \right)^2}.$$

В этом уравнении коэффициент m_1 всегда положителен, коэффициент m_3 всегда отрицателен. Знак коэффициента m_2 определяется нелинейной характеристикой упругого основания, на котором лежит балка.

Области модуляционной неустойчивости, согласно критерию Лайтхилла (3.11), соответствует значение $m_2 < 0$.

Ограничимся далее рассмотрением волн, у которых наличествует амплитудная модуляция, но отсутствует фазовая модуляция. В этом случае $D = 0$ и изменение амплитуды будет описываться уравнением Дуффинга [233]

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} + m_1 a + m_2 a^3 = 0. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) имеет первый интеграл:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 = E - \frac{m_1}{2} a^2 - \frac{m_2}{4} a^4. \quad (3.26)$$

Функция потенциальной энергии $f(a) = \frac{m_1}{2} a^2 + \frac{m_2}{4} a^4$ имеет локальный максимум

$f_{max} = -\frac{m_1^2}{4m_2}$ в точках $a = \pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}}$ и локальный минимум $f_{min} = 0$ при $a = 0$ рис.

3.8а. Поэтому на фазовой плоскости $\left(a, \frac{da}{d\eta}\right)$ точка $(0,0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точки $\left(\pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}}, 0\right)$ – неустойчивым положением равновесия типа «седло».

Фазовый портрет уравнения (3.25), представленный на рис. 3.8б, демонстрирует существование в среде двух типов стационарных волн огибающих. Замкнутые фазовые траектории, окружающие положение равновесия, соответствуют периодическим волновым пакетам — модулированным волнам с неизменной формой огибающей. Сепаратриса, соединяющая седловые точки, описывает уединённый волновой пакет (солитон огибающей). Итак, нелинейная система поддерживает как семейства периодических решений, так и локализованные решения.

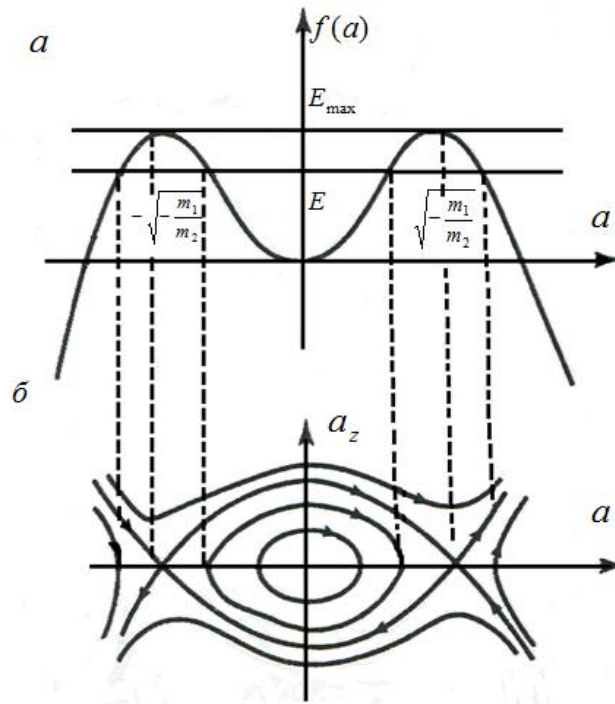


Рис. 3.8. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) уравнения Дуффинга.

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом

$$a = a_0 \operatorname{sn}(K\eta, s), \quad (3.27)$$

где a_0 – амплитуда волны; $K = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 a_0^2}{2}}$ – волновое число;

$s^2 = -\frac{m_2 a_0^2}{2m_1 + m_2 a_0^2}$ – модуль эллиптической функции ($0 \leq s^2 \leq 1$). Амплитуда волны и волновое число через параметры исходной задачи выражаются соотношением:

$$a_0 = \pm V \sqrt{\frac{s^2}{-2 \frac{dv_{zp}}{dk} \sigma (1 + s^2)}}, \quad (3.28)$$

$$K = \frac{V}{\frac{dv_{zp}}{dk}} \sqrt{\frac{1}{2(1 + s^2)}} \quad (3.29)$$

Форма волновых пакетов, на которые разбивается квазигармоническая волна, промодулированная по периодическому закону, изображена на рис. 3.9.

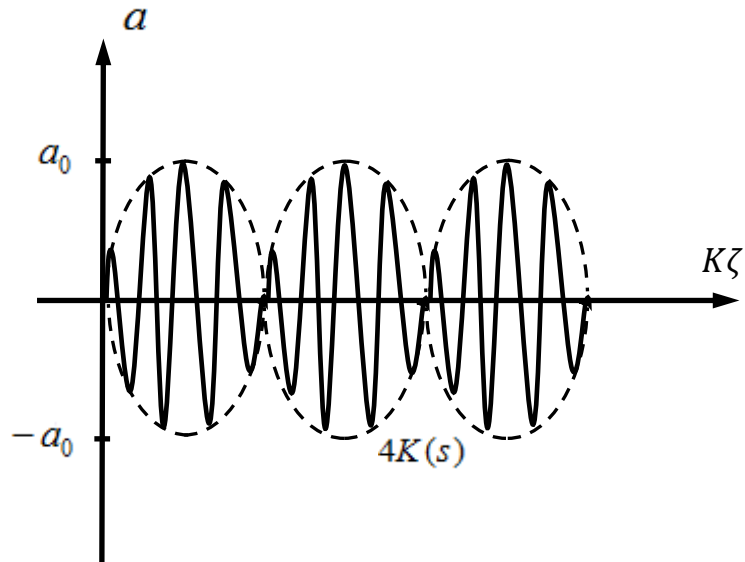


Рис.3.9. Периодическая модулированная волна.

Форму перепада (кинка) имеет уединенная стационарная волна. Она описывается гиперболическим тангенсом:

$$a(\eta) = a_0 \operatorname{th} \left(\frac{\eta}{\Delta} \right), \quad (3.30)$$

где амплитуда волны:

$$a_0 = \pm V \sqrt{\frac{1}{-2 \frac{dv_{zp}}{dk} \sigma}}, \quad (3.31)$$

ее ширина:

$$\Delta = 2 \frac{dv_{zp}}{dk} / V. \quad (3.32)$$

Форма волновых пакетов, на которые разбивается квазигармоническая волна, промодулированная по закону кинка, изображена на рис. 3.10.

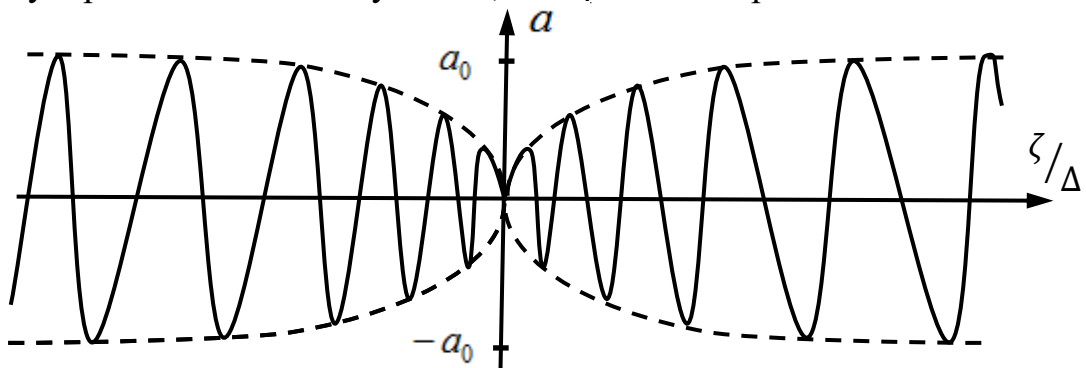


Рис.3.10. Уединенная модулированная волна.

Из (3.29) и (3.32) следует, что ширина волновых пакетов (рис.3.8, 3.9) увеличивается с увеличением линейной жесткости упругого основания:

$$\Delta \sim \frac{1}{K} \sim \sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}.$$

Из (3.28) и (3.31) следует, что амплитуда волновых пакетов (рис.3.8, 3.9) определяется нелинейной жесткостью упругого основания и уменьшается с ее увеличением $a_0 \sim \frac{1}{\sqrt{-3(\widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2 k^4)}}$.

Изложенные результаты свидетельствуют: если путевая структура, моделируемая балкой Бернулли–Эйлера, опирается на обобщённое упругое основание с жёсткой нелинейностью, распространяющиеся в ней квазигармонические изгибные волны испытывают самомодуляцию. Этот эффект выражается в прогрессирующей пространственной локализации волнового поля и его дроблении на изолированные волновые пакеты. Ширина формирующихся пакетов возрастает с увеличением линейной жёсткости упругого основания: более жёсткое основание усиливает дисперсионное разбегание спектральных компонент, что растягивает огибающую. Напротив, амплитуда волновых пакетов контролируется нелинейной жёсткостью — её рост подавляет самовоздействие, ограничивая пиковые значения огибающей и делая пакеты менее выраженными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации

1. Рассмотрен класс задач о динамике бесконечной балки Бернулли–Эйлера, опирающейся на деформируемое основание нескольких типов:

а) вязкоупругое;

б) обобщённое упругое с двумя независимыми коэффициентами постели — на сжатие и на сдвиг;

в) обобщённое нелинейно-упругое, жёсткостные параметры которого зависят от текущего поперечного смещения срединной линии балки и его градиента.

2. Изучены колебания балки Бернулли–Эйлера, несущей движущуюся нагрузку на обобщённом упругом основании, и балки Рэлея, опирающейся на то же основание. Бесконечная протяжённость балки предполагает, что на её концах установлены оптимальные демпфирующие устройства, полностью поглощающие падающие возмущения; это даёт возможность исключить граничные условия из рассмотрения и интерпретировать все вибрации как бегущие изгибные волны.

3. Установлено, что изгибные волны в балке на вязкоупругом основании обладают дисперсией фазовой скорости и частотно-зависимым затуханием. При нулевой вязкости дисперсионная кривая содержит зону непропускания: бегущие волны существуют лишь на частотах выше критической. Введение сколь угодно малой вязкости полностью устраняет эту зону — волновое движение становится возможным при любой частоте, однако все волны без исключения приобретают затухание.

4. Показано, что увеличение сдвиговой жёсткости обобщённого (двухпараметрического) основания приводит к росту частоты, а также фазовой и групповой скоростей для волн с одним и тем же волновым числом, то есть волн равной длины. Записано уравнение переноса энергии в дивергентной форме; из него непосредственно вытекает равенство средней скорости переноса энергии и групповой скорости изгибных волн. Совпадение этих двух скоростей

подтверждает внутреннюю физическую согласованность модели изгибных колебаний балки на обобщённом упругом основании.

5. Исследован процесс возбуждения изгибных волн движущейся нагрузкой и определены критические скорости её перемещения. Получено выражение для силы волнового давления (волнового сопротивления движению) и установлена зависимость её постоянной составляющей от скорости. Выполнено сравнение с результатами, которые даёт классическая модель винклеровского основания.

6. Проанализированы дисперсионные характеристики балки Рэлея — с учётом инерции вращения поперечного сечения — на обобщённом упругом основании. Показано, что вращательная инерция понижает фазовую и групповую скорости; эффект наиболее заметен в длинноволновой области, где модель Бернулли–Эйлера предсказывает завышенные значения. Модель Рэлея демонстрирует физически корректное асимптотическое поведение как в пределе нулевого волнового числа, так и при его неограниченном возрастании.

7. Изучена эволюция квазигармонических изгибных волн в балке на обобщённом нелинейно-упругом основании. Выявлено, что при нелинейности жёсткого типа развивается самомодуляция, которая вызывает прогрессирующую пространственную локализацию волнового поля и его дробление на отдельные волновые пакеты. Ширина пакетов возрастает с повышением линейной жёсткости основания; амплитуда же, напротив, убывает с ростом нелинейной жёсткости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гарг В.К., Дуккипати Р.В. Динамика подвижного состава. М.: Транспорт, 1988. 391 с.
2. Дмитриев А.С. Вопросы взаимодействия балочных конструкций с движущейся сосредоточенной нагрузкой // Пробл. машиностроения. 1986. №25. С. 43-50.
3. Моргаевский А.Б., Карпов Л.Н., Никитин Г.Ф. Об исследовании величины динамического воздействия подвижной нагрузки с учетом высших гармоник // Исслед. по теории сооружений. 1968. Вып. 16. С. 15-24.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 419 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
6. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972. №8. С. 3-42.
7. Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. Prague: Academia, 1972. 484 p.
8. Крылов А.Н. Вибрации судов. М.: ОНТИ, 1936. 404 с.
9. Барченков А.Г., Мальцев Р.И. Колебания плоских рам и балок под действием подвижных периодических сил // Тр. ВИСИ. 1964. №10, вып. 1. С. 60-89.
10. Kruszewski J. Metoda sztywnych elementow skonronych. Warszawa, Arcady, 1975. 292 p.
11. Reipert Z. Vibration of Frames under moving load // Arch. inż. ląd. 1970. Vol. 16, N 3. P. 419-447.
12. Borowicz T. Przybliżona analiza nieustalonych drgan ram nieprzesuwnych. // Arch. inż. ląd. 1978. Vol. 24, N. 4, S. 619-628.

13. Borowicz T., Hendel J. Algorytm analizy drgan ram poddanych dzialaniu sil ruchomych. // Arch. inż. ład. 1979. Vol. 25, N. 3, S. 239-447.
14. Конашенко С.И. К вопросу о вынужденных колебаниях простой балки при равномерном движении по балке силы и группы сил // Тр. ДИИТ. 1956. Вып. 25. С. 275-300.
15. Кохманюк С.С., Филиппов А.П. Колебания стержней при подвижной нагрузке // Строит. механика корабля. Л.: Судостроение, 1968. Вып. 108. С. 108-112.
16. Моргаевский А.Б., Кожемякина И.Ф. Решение задачи о динамическом воздействии подвижной нагрузки с учетом сдвига и инерции вращения // Динамика и прочность машин. 1976. Вып. 23. С. 23-27.
17. Муравский Г.Б. Колебания бесконечной балки Тимошенко на упругом основании // Строит. механика и расчет сооружений. 1979. №6. С. 56-61.
18. Inglis C.E. A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges. Cambridge: Univ. Press, 1934. 203 p.
19. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // Тр. МИИТ. 1950. Вып. 74. С. 269-296.
20. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Механика и машиностроение. 1961. №4. С. 109-115.
21. Гальченко А.Г., Конашенко С.И. О колебаниях балки при движении по ней группы грузов и груза с пульсирующей силой // Тр. ДИИТ. 1963. Вып. 44. С. 145-161.
22. Кравченко Г.Ф. Об одной задаче колебаний шарнирно-опертой балки под действием движущихся грузов // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1968. Вып. 7. С. 128-135.

23. Моргаевский А.Б., Кучма Т.К. О динамическом воздействии подвижной нагрузки, распределенной на участке конечной длины // Динамика и прочность машин. 1971. Вып. 12. С. 72-80.
24. Радзиховский Ю.А., Ройтбурд З.Г., Тененбаум Э.М. Взаимодействие одиночного экипажа с балочным пролетным строением // Тр. ДИИТ. 1973. Вып. 150. С. 139-146.
25. Радзиховский Ю.А., Ройтбурд З.Г., Тененбаум Э.М. Взаимодействие подвижного состава с балочным пролетным строением железнодорожного моста // Тр. ДИИТ. 1973. Вып. 150. С. 216-236.
26. Филиппов А.П., Кохманюк С.С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев: Наукова думка, 1967. 132 с.
27. Licari J.S., Wilson E.N. Dynamic response of a beam subjected to a moving forcing system // Proc. 4-th V.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Bercley, 1962. N 1. P. 419-425.
28. Барченков А.Г., Котуков А.Н., Сафронов В.С., Орежова Л.Д. Моделирование на ЦВМ совместных колебаний упругих систем и подвижной нагрузки // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научно-исследовательских и народнохозяйственных задач. 1969. Вып. 4. С. 48-55.
29. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов. М.: Транспорт, 1976. 200 с.
30. Муравский Г.Б. Действие подвижной нагрузки на балку бесконечной длины, лежащую на упругом основании // Тр. МИИТ. 1961. Вып. 34. С. 54-84.
31. Иванченко И.И. О колебаниях моста при движении по нему экипажа // Тр. МИИТ. 1975. Вып. 476. С. 64-71.
32. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наукова думка, 1980. 231 с.

33. Весницкий А.И., Уткин Г.А., Крысов С.В. Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Горький: ГГУ, 1983. 90 с.
34. Крысов С.В., Холуев В.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих // Динамика систем. Горький: Изд. Горьк. Ун-та, 1985. С. 142-149.
35. Крысов С.В., Филатов Л.В. О движении тел вдоль упругих направляющих с закритическими скоростями // Прикладные проблемы теории колебаний. Н.Новгород: ННГУ. 1991. С. 40-51.
36. Муравский Г.Б. Алгоритм исследований динамики линейно-деформируемых систем при действии подвижной нагрузки // Тр. ДИИТ: Вопр. динамики мостов и теории колебаний. 1983. С. 40-48.
37. Муравский Г.Б., Поволоцкая М.Ф. К вопросу о действии подвижной нагрузки на деформируемые системы // Строит. механика и расчет сооружений. 1988. №3. С. 38-43.
38. Borkowski W. Model dynamiczny i algorytm numerycznej analizy konstrukcji mostowych poddanych działaniu ruchomego obciążenia // Biul. DAT J.Dabrowskiego. 1984. Vol. 33, N. 7, S. 43-57.
39. Шапошников Н.Н., Кашаев С.К., Бабаев В.Б., Долганов А.А. Расчет конструкций на действие подвижной нагрузки с использованием метода конечных элементов // Строит. механика и расчет сооружений. 1986. №1. С. 50-54.
40. Borowicz T. Wytezenie belek pod obciążeniem ruchomym. // Arch. inż. ląd. 1978. Vol. 24, N. 2, S. 219-235.
41. Langer J. Analiza dynamiczna przeesła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem // Arch. inż. ląd. 1974. Vol. 24, N. 4, S. 591-599.
42. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Ройтбурд З.Г., тарасенко В.П., Яковлев Г.Н. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.

43. Иванченко И.И. Расчеты на подвижные и импульсные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика. 1988. Т. 24, №9. С. 109-118.
44. Иванченко И.И. О действии подвижной нагрузки на мосты // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. №6. С. 180-185.
45. Bruni S., Collina A., Corradi R. Train-track-bridge interaction: Influence of track typology on structure dynamic performance // Structural Dynamics. EURODYN 2005. Processing of the 6-int. conf. on structural dynamics. Paris. France. 4-7 September, 2005. P. 1063-1068.
46. Yang Y.B., Wu Y.S. Behavior of moving trains over bridges shaken by earthquakes // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 509-514.
47. Александров В.М., Дуплякин И.А. Динамика бесконечной балки Тимошенко, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками, при движении деформируемого экипажа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. №1. С. 180-197.
48. Александров А.В., Гарбер Б.Г. Вынужденные колебания плитно-балочных конструкций при движении нагрузок, обладающих массой // Тр. ХИИТ. 1968. Вып. 34. С. 252-263.
49. Ананьин А.И., Барченков А.Г., Сафронов В.С. Динамика автодорожных мостов // динамический расчет специальных сооружений / Под ред. Б.Г. Коренева, А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздат. 1986. С. 327-349.
50. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Неустойчивость колебаний объекта, равномерно движущегося по случайно-неоднородной упругой системе // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. №5. С. 162-169.
51. Весницкий А.И., Метрикин А.В. параметрическая неустойчивость колебаний тела, равномерно движущегося по периодически неоднородной упругой системе // Прикл. мат. и техн. физика. 1993. №2. С. 127-133.

52. Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции локализованной моды колебаний в системе «струна на упругом основании – подвижное инерционное включение» // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 3. С. 864-875.
53. Глинов А.П. Анализ изгибных колебаний балки, обусловленных движением погонной нагрузки балки // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 59, вып. 4. С. 626-633.
54. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О деформировании мембраны подвижной нагрузкой // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 647-653.
55. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 703-713.
56. Дуплякин И.А. Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 55, вып. 3. С. 461-471.
57. Иванченко И.И. Воздействие импульсивных и подвижных нагрузок на балку, лежащую на упругом основании // Строит. механика и расчет сооружений. 1976. №1. С. 44-49.
58. Кадисов Г.М. Колебания складчатых систем при подвижных нагрузках. Омск: СибАДИ, 1997. 178 с.
59. Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 3. С. 475-482.
60. Каплунов Ю.Д. Крутильные колебания стержня на деформируемом основании при действии движущейся инерционной нагрузки // Изв. ИИ. СССР. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 174-177.

61. Колотовичев Ю.А. Проблемы совершенствования уровней колебаний поверхности грунта при движении поездов метрополитена в тоннелях неглубокого заложения // Сб. науч. Тр. Ин-та строительства и архитектуры, МГСУ, 2008. С. 55-57.
62. Липень А.В., Чигарев А.В. Перемещения в упругом полупространстве при движении нагрузки по балке, лежащей на его поверхности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 5. С. 854-859.
63. Резинов В.Г., Цыбочкин С.Г., Конон Ю.А. Напряженно-деформированное состояние упругого полупространства под воздействием перемещающейся нагрузки // Проблемы прочности. 1987. №10. С. 94-98.
64. Bruni S., Collina A., Corradi R. Numerical modelling of railway runnability and ballast settlement in railroad bridges // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 1143-1148.
65. Cojocary C.E., Irschik H., Schlacher K. Elastically supported beam carrying a beam moving at constant speed // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 1149-1154.
66. Dahlberg T. Dynamic interaction between train and non-linear railway track model // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Vol. 2. P. 1155-1160.
67. Gao M.M., Pan J.Y. Coupling vibration analysis for train-track-bridge system // Structural Dynamics. EURODYN 2005. Paris. France, 4-7 September, 2005. P. 1069-1075.
68. Gerstberger U., Knothe K. Coupling of vertical and lateral dynamics of ballasted track // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Vol. 2. P. 1167-1172.
69. Gyorgyi J., Szoke D. Calculation of vehicle-bridge dynamic interaction in shared system // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 1083-1088.

70. Tsunashima H., Sato Y., Kondo D. Dynamics of automated guide way transit vehicle under earthquake // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'03. 2003, 19-22 Aug. Tokyo, Japan. 2003. P. 571-576.
71. Ivanchenko I.I. Determining Moving and Impulsive Loading of Beam Systems with Distributed Parameters // Prikl. Mech. 24(9). 109-118 (1988). Int. Appl. Mech. (Engl. Transl.) 24(9), 931-938 (1988).
72. Ivanchenko I.I. The development of analytical models for railway track dynamics // EUROMECH Colloquium 409, Abstracts, Dynamics and Long-Term Behavior of Railway Vehicles, Track and Subgrade: University of Hannover, Germany, March 6-9, 2000, 37 p.
73. Ivanchenko I.I. Dynamic interaction of high speed railway train and bridges // Structural Dynamics. EURODYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 1173 – 1178.
74. Ivanchenko I.I. The development of models for high speed railway track and bridges dynamics // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'03. 2003, 19-22 Aug. Tokyo, Japan. 2003. P. 512-517.
75. Ivanchenko I.I. Analytical study dynamic interaction between vehicles and viaducts in high speed railways // Processing of the conference: Vehicle system dynamics, identification and anomalies, 6-8 November, 2000, Budapest, Hungary. 2000. P. 119-128.
76. Ivanchenko I.I. Dynamics interaction of high-speed monorails trains and viaduct-structures // Structural Dynamics. EURODYN 2005. Vol. 3. P. 1675-1681.
77. Ivanchenko I.I. Dynamics Interaction of High Speed Railway Train And Double-Track Bridges // Structural Dynamics. EURODYN 2008. Southampton. United Kindom. 7-10 July, 2008; book of abstracts (P. 36) and the CD-ROM (E62).

78. Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. Design of composite, long structures modeling railway tracks for moving loads // EUROMECH Colloquium 484, Abstracts, Wave mechanics and stability of long flexible structures subject to moving loads and flows. University of Delft, Netherlands. 19-22 September, 2006. P. 30-31.
79. Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. The development of models for high-speed railway track dynamics // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'09, 2009. Niigata, Japan, book of abstracts (P. 100-101) and the CD-ROM (ID352225).
80. Klasztorny M., Myslecki K., Machelski C., Podworna M. Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds // Structural Dynamics. EUROLYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 1179-1184.
81. Knothe K., Grassie S.L. Modeling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies // Vehicle System Dynamics. 1993. Vol. 22. P. 209-262.
82. Ishiida M., Namura A., Suzuki T. Prediction model of track settlement based on dynamic simulation // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'03. 2003, 19-22 Aug. Tokyo, Japan. 2003. P. 65-70.
83. Metrikine A.V. Energetics of a moving object on a long elastic structure // Vehicle System Dynamics. EUROLYN 2005. Vol. 2. P. 1155-1160.
84. Metrikine A.V., Popp K. vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space // European J. of Mechanics A. Solids 18(4). 1999. P. 679-701.
85. Tanabe T., Matsumoto N., Wakui H., Okuda H., Sogabe N., Tanabe Y. Dynamic interaction analysis of a Shinkansen train and the railway structure under seismic loads // Structural Dynamics. EUROLYN 2005. Paris. France, 4-7 September, 2005. P. 1001-1005.

86. Weitkemper U., Krill A. Dynamic Rolling Stock of a Railway Bridge with Single Span Precast Box Girders // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. P. 259-263.
87. Xia H., Zhang N., Sun G.J. Experimental study of railway bridges under high speed trains // Structural Dynamics. EUROODYN 2005. Paris. France, 4-7 September, 2005. P. 1083-1088.
88. Yau J.D., Fryba L. Chu S.J., Yang Y.B. Resonance of Ballastless Track Systems Caused by Vehicle-Track // Structural Dynamics. EUROODYN 2002, Supplement to the Proceedings of EUROODYN 2002. 6 p.
89. Zoller V. Zobory I. Analysis of railway track dynamics by using Winkler model with initial geometrical irregularity // VSDIA 2000. P. 113-118.
90. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half space // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No 2. P.193-201
91. Богданов Н.Н., Сильницкий И.А. Общие положения классификации пролетных строений железнодорожных мостов по грузоподъемности по методу предельных состояний // Тр. МИИТ: Железобетонные пролетные строения мостов. 1969. Вып. 275. С. 3013.
92. Евграфов Г.К., Богданов Н.Н. Проектирование мостов. М.: Транспорт, 1966. 664 с.
93. Круглов В.М., Потапов В.Д., Косицин С.Б., Долотказин Д.Б., Лукьянов М.А. Статические расчеты вантового моста с арочными пилонами // Строит. механика и расчет сооружений. 2008. №5. С. 19-23.
94. Носырев А.В., Сильницкий И.А. Об одном виде динамического взаимодействия подвижного состава на балочные пролетные строения железнодорожных мостов // Тр. МИИТ. Вып. 252. С. 101-105.
95. Осипов В.О. Резервы металлических мостов и их реализация // Тр. МИИТ. Вып. 898. С. 46-49.

96. Петропавловский А.А. Матричные алгоритмы смешанного метода в нелинейных задачах теории висячих и арочных мостов современных систем // Тр. МИИТ. 1977. Вып. 561. С. 3-58.
97. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
98. Иванченко И.И. Динамика мостовых и путевых конструкций при действии железнодорожной подвижной нагрузки // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. №4. С. 158-177.
99. Иванченко И.И. Метод подконструкций в задачах динамики скоростной монорельсовой дороги // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. №6. С. 101-117.
100. Китаев К.Е. Вынужденные колебания балочных и арочных систем железнодорожных мостов в вертикальной плоскости // Тр. МИИТ. 1971. Вып. 364. С. 11-20.
101. Козьмин Ю.Г. Кондратов В.В. Метод оценки влияния вибраций элементов решетки главных ферм металлических сквозных пролетных строений на усталостную прочность // Вопр. динамики мостов и теории колебаний. Днепропетровск, 1983. С. 27-32.
102. Колоушек В. динамика строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1965. 632 с.
103. Поляков В.Ю. Системный анализ в проектировании мостов при высокоскоростном движении // Тр. МИИТ. 1993. Вып. 863. С. 57-65.
104. Потапов В.Д., Папаев М.А. Об устойчивости висячих вантовых мостов, находящихся под действием ветровых нагрузок, в детерминированной и стохастических постановках // Строит. механика и расчет сооружений. 2007. №5. С. 30-37.
105. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж: ВГУ, 1983. 196 с.
106. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. М.: Высшая школа, 1970. 407 с.

107. Цернант А.А., Звягинцев А.Н., Матвеев И.К., Павлов Е.И. Возможности технологии вибродиагностики мостовых сооружений // Вест. отд.: Транспортное строительство Рос. Акад. транспорта. 2002. С. 69-71.
108. Gerlich K., Pfeifer R. Moderne Eisenbahnbrücke in Betonbauweise // ETR 36(1987). Н. 7/8, 1987. P. 495-502.
109. Hale A.L., Meirovitch L. A procedure for improving discrete substructure representation in dynamic synthesis // AIAA J., 1982. Vol. 20, N 8. P. 1128-1136.
110. Issa Raja R.A., Avent R. Richard Superelement stiffness matrix for space trusses // J. Struct. Eng. 1984. Vol/ 110, N 5. O. 1163-1179.
111. Miyazaki S., Kanamori M., Wakui H., Matsumoto N., Sogable M. Analytical Study on Dynamic Response and Riding Comfort of PC Multicable-stayed Railway Bridge // The third International Congress on high-speed Transport. Yokohama, Japan. 1993. P. 421-435.
112. Иванченко И.И. Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. №4. С. 151-165.
113. Garg V.K., Chu K.H., Wang T.L. A study of railway bridge/vehicle interaction and evalution of fatigue life // Earthquake Engineering and Struct. Dynam. 1985. Vol 13. P. 687-709.
114. Heubner K.H. The finite element method for engineers. N.-Y.-Toronto: John. Wiley and Sons, 1975. 500 p.
115. Jacquot R.G. The application of sinusoidally derived beam receptance to calculation of transient responses for damned composite systems // J. Sound and Vibr., 1983. Vol. 90, N 4. P. 471-478.
116. Шапошников Н.Н., Юдин В.В., Шварцман Л.М. расчет регулярных конструкций с использование метода последовательного удвоения суперэлемента // Расчеты на прочность. 1984. №25ю С. 259-285.

117. Иванченко И.И., Грошев Д.Г. Теоретические исследования воздействия подвижной нагрузки на мосты: Фундаментальные и поисковые научно-исследовательские работы в области железнодорожного транспорта // Тр. МИИТ. 2001. Вып. 928. С. 72-74.
118. Иванченко И.И. Динамическое взаимодействие мостов и высокоскоростных железнодорожных составов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. №3. С. 146-160.
119. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. М.: Транспорт, 1987. 559 с.
120. Дробышевский Б.А. Специфические особенности малых мостов и их учет // Транспортное строительство. 2006. №2. С. 12-15.
121. Зылёв В.Б. Компьютерное моделирование сбрасывания старого пролетного строения моста при демонтаже // Вестн. мостостроения. 1999. №3-4. С. 55-56.
122. Иванченко И.А., Платонов Е.В. Железнодорожные паромные переправы. М.: Трансжелдориздат, 1943. 132 с.
123. Иванченко И.И. Современные динамические модели верхнего строения железнодорожного пути // Безопасность движения поездов. 11-я научно-практич. конф. М., 21-22 октября 2010 г. МИИТ. 2010. С. 11-40.
124. Кляйн П., Ямут М. Вантово-арочный мост в Малайзии // Мостостроение мира. 2004. №1-2. С. 3-8.
125. Меле Р., Теста М., Тисальви М. Новая конструкция пути для металлических мостов // Железные дороги мира. 2004. №2. 80 с.
126. Потапкин А.А. Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. М.: Транспорт, 1984. 201 с.
127. Россихин Ю.А., Шитикова М.В. Влияние вязкости на характер протекания колебательных процессов в висячей комбинированной системе // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. №1 С. 168-177.

128. Сравнение системы на магнитном подвесе с традиционной колесо-рельс (R. Breimeier) // Железные дороги мира. 2001. №4. С. 33-39.
129. Уткин Г.А. Теоретические основы динамики одномерных систем с движущимися по ним объектами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Нижний Новгород : Нф ИМАШ АН СССР. 1991. 256 с.
130. Крысов С.В. Волновые процессы при контактных взаимодействиях подвижных сопряжений в упругих элементах машин и конструкций. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Нижний Новгород : Нф ИМАШ РАН . 1992. 313 с.
131. Метрикин А.В. Переходное излучение в упругих системах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Нижний Новгород : Нф ИМАШ РАН . 1998. 221 с.
132. Суворова Т.В. Динамическое взаимодействие систем полуограниченных и ограниченных деформируемых тел, моделирующих железнодорожный путь и объекты инфраструктуры. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Ростов-на-Дону: РГУПС. 2004. 319 с.
133. Костарев С.А. Анализ вибраций, генерируемых линиями метрополитена, и разработка комплекса мероприятий по их снижению. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. М.: Тоннельная ассоциация России. 2004. 270 с.
134. Веричев С.Н. Устойчивость колебаний механических систем с движущимися нагрузками. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН . 2009. 312 с.
135. Гаврилов С.Н. Нестационарная динамика упругих тел с подвижными включениями и границами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. С.Петербург: ИПМаш РАН. 2013. 239 с.

136. Сергеев А.Д. Динамика дискретно-континуальных механических систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. С.Петербург: ИПМаш РАН. 2007. 332 с.

137. Болдин В.П. Динамика двумерных упругих систем с движущимися нагрузками и закреплениями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Горький: ГИСИ им. В.П. Чкалова. 1987. 149 с.

138. Сьянов С.А. Вынужденные колебания и резонанс одномерных упругих систем с движущимися нагрузками. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Горький: ГГУ им. Н.И. Лобачевского. 1987. 120 с.

139. Быченков В.А. Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль одномерных упругих систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Горький: ГГУ им. Н.И. Лобачевского. 1988. 184 с.

140. Лисенкова Е.Е. Движение объектов под действием давления упругих волн. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород : Нф ИМАШ РАН . 2009. 146 с.

141. Маланов С.Б. Ударное взаимодействие материальной точки с одномерной упругой системой. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Горький: Гф ИМАШ АН СССР. 1989. 140 с.

142. Кажаяев В.В. Волновые процессы в распределенных системах, взаимодействующих с сосредоточенными объектами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН . 1999. 140 с.

143. Сазонова М.Л. Некоторые особенности динамики распределенных упругих систем и их взаимодействия с дискретными объектами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-

математических наук. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2011. 119 с.

144. Вострухов А.В. Динамика железнодорожного пути с учетом волн в грунте. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2001. 139 с.

145. Филатов Л.В. Задачи динамики тел, движущихся вдоль упругих направляющих. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН. 1993. 190 с.

146. Кононов А.В. Переходное излучение в двумерных упругих системах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН . 1995 . 120 с.

147. Усошин С.А. Воздействие движущихся нагрузок на слоистые гетерогенные основания. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону: РГУПС. 2011. 130 с.

148. Точилин М.В. Разработка моделей для оптимизации объектов скоростного наземного транспорта. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Нижний Новгород : Нф ИМАШ РАН. 2005. 153 с.

149. Богданов Ю.В. Экспериментальные исследования волновых процессов при контактном и бесконтактном взаимодействии движущихся нагрузок с вязкоупругими опорными направляющими. Нижний Новгород : Нф ИМАШ РАН. 2004. 152 с.

150. Бутова С.В. Динамическая устойчивость высокоскоростных объектов при движении по направляющим ракетного трека. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саров: СарФТИ – филиал НИЯУ «МИФИ». 2014. 107 с.

151. Оконечников А.С. Нестационарное движение сосредоточенной нагрузки по границе упругой полуплоскости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: МАИ. 2015. 96 с.
152. Колесов Д.А. Волны в одномерных распределенных механических системах, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород: ИПМ РАН. 2019. 133 с.
153. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. *Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций*. Киев, Наукова думка, 1974. 176 с.
154. Весницкий А.И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*. Москва, Физматлит, 2001. 320 с.
155. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами*. Самара, Изд-во Самар.гос.техн.ун-та, 2009. 132 с.
156. Иванченко И.И. *Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки*. Москва, Наука, 2011. 574 с.
157. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. *Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта*. Saarbrücken, Germany, LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 200 с.
158. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. *Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами*. Самара, Изд-во Самар.гос.техн.ун-та, 2017. 150 с.
159. Ellington J.P. The beam discrete elastic supports. *Bulletin of the International Railway Congress Association*, 1957, vol. 34, no. 12, p. 933–941.

160. Фусс Н.И. Опыт теории о сопротивлении, причиняемом дорогами всякого рода четырехколесным и двухколесным повозкам с определением обстоятельств, при которых одне из сих повозок полезнее других. *Академические сочинения, выбранные из первого тома Деяний Императорской академии наук*. Санкт–Петербург, 1801, ч. 1, с. 373–422.
161. Winkler E *Die lehre von der elastizität und festigkeit*. Prague, Dominicius, 1867. 388 p.
162. Пастернак П.Л. *Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели*. Москва, Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. 56 с.
163. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании. *Акустический журнал*, 2016, т. 62, № 6, с. 639–647.
164. Фролов К.В., ред. *Вибрации в технике: Справочник в 6 томах. Т.1. Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999. 504 с.
165. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. Москва, Физматлит, 2002. 208 с.
166. Весницкий А.И., Милосердова И.В. Согласованный торцевой гаситель изгибных колебаний балки. *Акустический журнал*, 1995, т. 41, № 4, с. 572–575.
167. Весницкий А.И. *Избранные труды по механике*. Нижний Новгород, Изд-во «Наш дом», 2010. 248 с.
168. Раевский А.С., Раевский С.Б. *Комплексные волны*. Москва, Радиотехника, 2010. 224 с.

169. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. *Волновые процессы в сплошных средах*. Саров, Изд-во РФЯЦ — ВНИИЭФ, 2012. 260 с.
170. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1977. 736 с.
171. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2016, № 3, с.25–27.
172. Радин В.П., Чирков В.П., Позняк Е.В., Новикова О.В. Устойчивость стержня с упругим шарниром при нагружении распределенной неконсервативной нагрузкой. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 5(758), с. 3–13.
173. Овчинников В.Ф., Капитанов Д.В., Глазова Е.Г. Влияние внешней кубической вязкости на динамику консольного стержня, нагруженного следящей силой. *Проблемы прочности и пластичности*, 2024, т. 86, № 1, с. 83–93.
174. Zimmerman H. Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. – Berlin, 1888.
175. Wieghardt K. Uber den Ralken auf Nachgibiebigiger Unterlage // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 1922. – Bd. 2, H. 3. – S. 165–184.
176. Филоненко-Бородич М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку // *Труды Моск. электромех. ин-та инж. трансп.* – 1945. – № 53. – С. 92–108.
177. Hetenyi M. *Beams on Elastic Foundations*. – University of Michigan Press, 1946. – 255 p.
178. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Техническая теория расчета фундаментов на упругом основании // *Труды МИСИ*. – М.: Стройиздат, 1956. – Вып. 14 (154). – С. 12–31.

179. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 492 с.
180. Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. – Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts, 1996.
181. Сливкер В.И. К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 1. – С. 36–39.
182. Eisenberger M., Clastornik J. Beams on variable two parameter elastic foundation // Computers and Structures. – 1986. – Vol. 23. – P. 351–356.
183. Куреннов С.С. Модель двухпараметрического упругого основания в расчете напряженного состояния клеевого соединения // Труды МАИ. – 2013. – № 66. – С. 7. www.mai.ru/science/trudy/
184. Рао Ч.К., Рао Л.Б. Закритическое поведение тонко стеной свободно опертой балки с открытым профилем поперечного сечения, покоящейся на двухпараметрической упругом основании, при ее кручении // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 1(347). – С. 204–213.
185. Wang T.M., Stephens J.E. Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – Vol. 51, no 2. – P. 149–155.
186. Wang T.M., Gagnon L.W. Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations // Journal of Sound and Vibration. – 1978. – Vol. 59, no 2. – P. 211–220.
187. Козел А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.
188. Козел А.Г., Старовойтов Э.И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

189. Q. Feng, Sh. Fu, Ch. Wang, W.W. Liu. Analytical solution for fracture problem of stope roof based on Pasternak foundation model // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – 2019. – Vol. 56, no 2. – P. 142–150.
190. Справочник: в 7 т. / под ред. В.В. Ключева. Неразрушающий контроль:– Т. 3: Ультразвуковой контроль. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.
191. С.В. Бутова, С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, В.Г. Камчатный. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 1. – С. 3–8.
192. С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, В.Г. Камчатный, И.А. Одзерихо. Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 3. – С. 21–27.
193. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
194. Гордон Дж. Конструкции, или почему не ломаются вещи. – М.: Мир, 1980.
195. Малков В.П. Энергоемкость механических систем. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995. – 258 с.
196. Умов Н.А. Избранные сочинения. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 575 с.
197. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. –Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. – 254 с.
198. Филиппов А.П. (1970) Колебания деформируемых систем, Машиностроение, Москва, 734 с.
199. Verichev S.N. (2002) Instability of a Vehicle Moving on an Elastic Structure, Delft University Press, The Netherlands, 190 p.

200. Vostrukhov A. V. (2002) Three-Dimensional Dynamic Models of a Rail-Way Track for High-Speed Trains, Delft University Press, The Netherlands, 184 p.
201. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. (2008) Прикладные задачи динамики ледяного покрова, Изд-во Академии естествознания, Москва (URL: <https://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14>).
202. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. (2015) Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости, Труды МАИ. № 82, 20 с. (URL: www.mai.ru/science/trudy/).
203. Савин А.В. (2017) Выбор конструкции пути для высокоскоростного движения, Транспорт Российской Федерации. № 1 (68), С. 18-21.
204. Абдурашитов А.Ю., Локтев А.А., Сычева А.В., Сычев П.В. (2018) Расчет высокочастотных вибраций железнодорожного пути под подвижным составом при скоростях 200-250 км/час, Вестник транспорта Поволжья. № 6 (72), С. 22-28
205. Абдурашитов Ю.А., Сычев В.П., Абдурашитов А.Ю. (2018) Оценка влияния воздействия подвижного состава с различной нагрузкой на ось на железнодорожный путь с различной толщиной балластного слоя и элементами верхнего строения пути на основе моделирования, Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство, Т. 12, № 12 (12), С. 58-64.
206. Абдурашитов А.Ю., Кузнецов С.В. (2020) О выборе профиля рельсов для кривых участков пути, Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. Т. 16, № 16(16), С. 20-25.

207. Savin A., Suslov O., Korolev V., Loktev A., Shishkina I. (2020) Stability of the continuous welded rail on transition sections, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. T. 1115, AISC, C. 648-654
208. Erofeev V., Lissenkova E., Malkhanov A. (2018) Wave resistance to the movement of objects along the rocket track guides, *MATEC Web of Conferences*. V. 224, Article ID 02016, P.1–6.
209. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Одзерихо И.А., Смирнов Д.Ю. (2019) Оценка влияния волновых процессов в упругой направляющей на динамику ракетного трека, *Вестник научно-технического развития*. № 6 (142), С. 3–12.
210. von Karman T. (1910) Festigkeitsproblem im maschinenbau, *Encyk. D. Math. Wiss.* IV, P.311–385.
211. Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Анохин Н.Н., Соболев Д.Н. (1982) Основы теории балок и плит на деформируемом основании. Учебное пособие. М., МИСИ,. 120с.
212. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Appl. Math.*, 1970, vol. XLIX, no. 1, pp. 45–57. DOI: 10.1002/samp197049145
213. Проктор Г.Э. (1923) Заметка к вопросу о расчете балок, лежащих на упругом основании, *Известия Иваново-Вознесенского политехнического института*. Т.7, С.34–89.
214. Проктор Г.Э. (1926) Механика изменяемого твердого тела (Сопротивление материалов): Курс, читаемый на Инж.-мех.ф-те Ив.-Вознесенск.политех.ин-та, Студенч.изд-во Губбюро Пролетстуда, Иваново-Вознесенск, 476 с.
215. Проктор Г.Э. (1936) Дополнительные главы по сопротивлению материалов, Изд-во МЭИ, Москва, 30 с.
216. Горбунов-Посадов М.И. (1940) Расчет балок и плит на упругом полупространстве, *Прикладная математика и механика*. Т.4, № 3, С.61–80.

217. 50. Шехтер О.Я. (1939) О влиянии мощности слоя на распределение напряжений в фундаментной балке, Сборник трудов НИС треста глубинных работ, Москва. № 10, С.15–25.
218. Давыдов С.С. (1960) Расчет и проектирование подземных конструкций, Стройиздат, Москва, 376 с.
219. Егоров К.Е. (1984) К расчету деформаций оснований. Сборник статей, ВНИИНТПИ, Москва, 400 с.
220. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. (1984) Расчет конструкций на упругом основании, Стройиздат, Москва, 679 с.
221. Высоковский Д.А., Русакова Е.Б. (2017) Устойчивость плиты Э. Рейсснера на упругом невинклеровском основании, Инженерный вестник Дона. №2(45), 10с. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4250.
222. Васильков Г.В., Рапопорт Г.А., Шпитюк Е.Н. (1999) Квазидвухмерные расчетные схемы при конечноэлементной реализации модели упругого сжимаемого слоя, Известия вузов. Строительство. № 6, С.21–25.
223. Рапопорт Г.А. (2004) К расчету зданий и сооружений по комплексным расчетным схемам. Решение задачи В.З. Власова об упругом сжимаемом слое методом Л.В. Канторовича, Коммунальное хозяйство городов. Научно-технический сборник, Техника, Киев. Вып. 55, С.281–290.
224. Вибрации в технике. (1999) Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 504 с.
225. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. (2013) Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах, Прикладная математика и механика. Т.77, № 2, С. 315–321.

226. Быченков В.А., Крысов С.В., Холуев В.В. (1988) Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль деформируемых систем, *Машиноведение*. № 3, С.60–66.
227. Андрианов В.Л. (1993) О сопротивлении движению нагрузок вдоль упругих направляющих, вызываемом излучением в них волн, *Прикладная математика и механика*. Т.57, № 2, С.156–160.
228. Болотовский Б.М., Гинзбург В.Л. (1972) Эффект Вавилова—Черенкова и эффект Допплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме, *Успехи физических наук*. Т. 106, № 4, С. 577–592
229. Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Нижний Новгород, Изд-во ИПФ РАН. 1997. 270 с.
230. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М., Физматлит. 2003. 400 с.
231. Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulation instability: the beginning. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2009, vol. 238, no. 5, pp. 540-548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002
232. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир. 1977. 622 с.
233. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2000. 560 с.
234. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Динамическое поведение балки, лежащей на упругом основании, с движущейся нагрузкой. *Прикладная математика и механика*, 2021, т.85, № 2, с. 193-209. DOI: 10.31857/S0032823521020041
235. Eisenberger M., Clastornik J. Beams on variable two-parameter elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics – American Society of Civil Engineering (ASCE)*, 1987, vol. 113, no 10, pp.351–356. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1454).

236. Рао Ч.К., Рао Л.Б. Закритическое поведение тонкостенной свободно опертой балки с открытым профилем поперечного сечения, покоящейся на двухпараметрической упругом основании, при ее кручении. Прикладная механика и техническая физика, 2018, т.59, № 1(347), с.204–213. DOI: 10.15372/PMTF20180122
237. Рыбак С.А., Тартаковский Б.Д. Нелинейные эффекты при распространении изгибных волн в пластине на упругом основании. Нелинейные волны деформации. Труды симпозиума, Таллин, Институт кибернетики АН ЭССР, 1977, т.2, с.141-144.
238. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. Проблемы машиностроения и надежности машин, 2008, № 3, с.30-36.
239. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Смирнов П.А. Скорости переноса энергии и волнового импульса изгибными волнами, распространяющимися в балке, лежащей на нелинейно-упругом основании. Проблемы машиностроения и надежности машин, 2008, № 6, с.40-43.
240. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Анггармонические волны в стержне Миндлина-Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду. Прикладная математика и механика, 2020, т.84, № 4, с.511-528. DOI:10.31857/S0032823520040049
241. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2021, № 4, с.3-17. DOI: 10.31857/S0572329921030041
242. Нгуен Чонг Там. Воздействие высокоскоростных подвижных нагрузок на балки, плиты и полупространство. Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: МГУПС (МИИТ). 2015. 122 с.

243. Одзерихо И.А. Исследование динамики монорельсовой двухопорной ракетной ступени и объекта испытания в опытах на ракетных треках на соответствие требований МАГАТЭ. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саров: СарФТИ – филиал НИЯУ «МИФИ». 2021. 118 с.

244. Антонов А.М. Дисперсионные свойства поверхностных волн Рэлея, распространяющихся на границах неклассических упругих полупространств. Нижний Новгород: ННГУ, ИПМ РАН. 2024. 111 с.

245. Катаев А.В. Динамика торможения ракетных кареток при высокоскоростных трековых испытаниях опытных изделий авиационной и ракетной техники. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: МАИ, Гк НИПАС им. Л.К. Сафронова. 2026. 184 с.

246. Achenbach J.D., Sun C.T. Moving load on a flexible supported Timoshenko beam // International Journal of Solid and Structures. 1965. Vol.1. P.353-370.

247. Jezequel L. Analysis of critical speeds of a moving load on an infinite periodically supported beam // Journal of Sound and Vibration. 1980. Vol.73. No 4. P.606-610.

248. Bogacz R., Krzyzinski T., Popp K. Influence of beam models on the solution of the generalized Mathews' problem // ZAMM. 1989. Vol.69. No 5. T320-T321.

249. Bogacz R., Krzyzinski T., Popp K. On dynamics of systems modeling continuous and periodic guideways // Archives of Mechanics. 1993. Vol.45. No 5. P.575-593.

250. Belotserkovskiy P.M. On the oscillations of infinite periodic beams subjected to a moving concentrated force // Journal of Sound and Vibration. 1996. Vol.193. No 3. P.706-712.

251. Lansing D.L. The displacements in an elastic half-space due to a moving concentrated normal load // NASA technical report, TR R-238. 1966.
252. Филиппов А.П. Установившиеся вибрации бесконечной балки на упругом полупространстве под действием движущейся нагрузки // Известия АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1961. №6. С.97-105.
253. Labra J.J. An axially stressed railroad track on an elastic continuum subjected to a moving load // Acta Mechanica. 1975. Vol.22. P.113-129.
254. Dieterman H.A., Metrikine A.V. Steady-state displacements of a beam on an elastic half-space due to a uniformly moving constant load // European Journal of Mechanics A/Solids. 1997. Vol.16. No 2. P.295-306.
255. Dieterman H.A., Metrikine A.V. Critical velocities of a harmonic load moving uniformly along an elastic layer // Trans. ASME. J. of Applied Mechanics. 1997. Vol.64. P.596-600.
256. Dieterman H.A., Metrikine A.V. The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical velocities of a moving load along the beam // European Journal of Mechanics A/Solids. 1996. Vol.15. No 1. P.67-90.
257. Grundmann H., Lieb M., Trommer E. The response of layered half-space to traffic loads moving along its surface // Archive of Applied Mechanics. 1999. Vol.69. No 1. P.55-67.
258. Metrikine A.V., Dieterman H.A. Resonance interaction of vertical-longitudinal and lateral waves in a beam on a half-space // Trans. ASME. J. of Applied Mechanics. 1997. Vol.64. P.951-956.
259. Sheng X., Jones C.J.C., Petyt M. Ground vibration generated by a load moving along a railway track // Journal of Sound and Vibration. 1999. Vol.228. No 1. P.129-156.
260. Knothe K., Bohm F. History of stability of railway and road vehicles // Vehicle System Dynamics. 1999. Vol.31. P.283-323.

261. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Кугушева Е.К. К задаче об устойчивости одномерных безграничных систем // Прикладная математика и механика. 1985. Т.49. С.691-696.
262. Bogacz R., Nowakowski S., Popp K. On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving spring-mass system // Acta Mechanica. 1986. Vol.61. P.117-127.
263. Метрикин А.В. Неустойчивость поперечных колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль упругой направляющей как следствие аномального эффекта Доплера // Акустический журнал. 1994. Т.40. № 1. С.99-103.
264. Камчатный В. Г. Особенности динамики взаимодействия высокоскоростных объектов с рельсовой направляющей // Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения. Сборник докладов научной конференции Волжского регионального центра РАН. – Саров, ВНИИЭФ, 2000.
265. Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance // Johns Hopkins APL Technical Digest. 2000. Vol.21. No 3. P.448-458.
266. Metrikine A.V., Verichev S.N. Instability of vibrations of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam // Archive of Applied Mechanics. 2001. Vol.71. No 9. P.613-624.
267. Веричев С.Н. Параметрическая неустойчивость в системе «движущаяся масса-периодически неоднородная балка» // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 2. С.99-104.
268. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И. К проблеме устойчивости движения по направляющей ракетного трека // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и прикладная физика. 2013. № 3. С.43-49.
269. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А. Оценка работоспособности регистрирующей аппаратуры в условиях испытаний

на ракетном треке // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и прикладная физика. 2013. № 2. С.35-39.

270. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т.77. № 4. С.412-424.

271. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 3. С.25-27.

272. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С.14-18.

273. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Турусов М.Р., Ганичев А.Н. Оценка прочности элементов блока видеорегистрации в условиях испытаний на ракетном треке // Транспортные системы. 2016. № 1. С.1-13.

274. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Problems of wave dynamics of the systems that support moving loads // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol.129. 06030. P.1-6.

275. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Герасимова Р.В., Ляхов К.И., Мельник А.В., Одзерихо И.А., Яненко Б.А. Постановка испытаний топливных упаковочных комплектов на ракетном треке // Глобальная ядерная безопасность. 2017. № 3(24). С.66-74.

276. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Дисперсия изгибно-крутильной волны, распространяющейся в балке. Часть 1 // Приволжский научный журнал. 2011. № 2. С.7-15.

277. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Дисперсия изгибно-крутильной волны, распространяющейся в балке. Часть 2 // Приволжский научный журнал. 2011. № 3. С.20-26.

278. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Орехова О.И. Интенсивные изгибные и крутильные волны в упругом стержне // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 1. С.11-15.

279. Веричев Н.Н., Ерофеев В.И., Орехова О.И. Нелинейные стационарные изгибно-крутильные волны в упругом стержне // Приволжский научный журнал. 2012. № 2. С.27-34.