На правах рукописи

ТУЗИКОВ АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО РОБОТА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПРИВОДОМ

Специальность 1.2.2 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2026

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ).

Научный руководитель:
Баландин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор направления «Математическая робототехника» Научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Научно-технологический университет «Сириус»».

Официальные оппоненты:
Болотник Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, главный научный сотрудник лаборатории робототехники и мехатроники, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук».

Пивоварова Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник НУЛ «Нелинейный анализ и конструирование новых средств передвижения» Удмуртского государственного университета.

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова».

Защита диссертации состоится «24» декабря 2026 г. в 14 ч. 40 мин. в ауд. 331 на заседании диссертационного совета 24.2.340.16 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», пр. Гагарина, д. 23, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» и на официальном сайте организации: https://diss.unn.ru/1701.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.340.16,
канд. физ.-мат. наук Бирюков Руслан Сергеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. В последние годы наблюдается значительный рост интереса к разработке мобильных роботов, способных функционировать в сложных и экстремальных условиях. Сферические роботы, перемещающиеся за счёт перекатывания, занимают среди них особое место: герметичная оболочка защищает внутренние механизмы от жидкости, пыли и газа, сферическая форма обеспечивает устойчивость к опрокидыванию и возможность всенаправленного движения, а малая площадь контакта с поверхностью повышает энергоэффективность. Эти характеристики делают сферические роботы идеальными для применения в неблагоприятных средах: от исследования океанских глубин и пыльных строительных площадок до загрязненных сельскохозяйственных полей и даже поверхностей других планет. Импульсом для развития области послужила, в частности, концепция NASA, предложенная в 1996 году и описанная в работах A. Halme, по созданию роботизированных планетоходов типа «Beach-Ball».

Ключевым элементом конструкции сферического робота является привод, создающий вращающий момент. Существующие приводы традиционно делятся на барицентрические (маятниковые, с внутренними тележками и скользящими массами), приводы на основе сохранения углового момента (реактивные колёса, гиродины) и приводы с деформируемой оболочкой. Несмотря на обширные исследования, каждый из этих классов обладает принципиальными недостатками: маятниковые системы дают задержки позиционирования и подвержены явлениям «воблинга» и прецессии; внутренние тележки и омни-платформы страдают от проскальзывания относительно оболочки; скользящие массы приводят к потерям на трение и требуют сложных алгоритмов управления; реактивные приводы создают прерывистый момент; деформируемые оболочки обладают низкой прочностью. Эти ограничения снижают эффективность сферических роботов там, где требуются плавность и надёжность движения. Рассматриваемый в данной диссертации электромагнитный привод, основанный на взаимодействии постоянных магнитов и электромагнитов на двух концентрических сферических оболочках, лишён этих недостатков: он обеспечивает голономное движение с минимальными задержками, плавность хода и высокую прочность за счёт отсутствия внешних подвижных элементов. Построение математической модели такого привода и методов управления им отвечает приоритетам современной робототехники и поддержано, в частности, грантом Российского научного фонда (проект № 24-11-20023).

По количеству опубликованных работ можно с уверенностью сказать, что сферические роботы сформировались как самостоятельный класс мобильных систем, в частности систематические обзоры их конструкций, методов моделирования и управления представлены в работах V.A. Crossley, Ю.Л. Караваева, A. Diouf. Одним из ключевых этапов стала работа A. Halme и его коллег, где предложен один из первых инженерных прототипов управляемого сферического робота и сформулированы задачи моделирования и управления сферической платформой, катящейся без проскальзывания по плоскости. Теоретические основы динамики сферических роботов как неголономных систем развиты в работах А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.А. Килина, Е.Н. Пивоваровой. Строгая неголономная модель сфероробота с внутренней омни-колёсной платформой, а также задачи стабилизации и следования по траектории рассмотрены Ю.Л. Караваевым и А.А. Килиным.

Большое внимание исследователи со всего мира уделяют конструкциям приводов, применяемых в сферических роботах. Маятниковые (барицентрические) приводы являются наиболее изученным классом, например, Y. Bai, M. Svinin и M. Yamamoto построили динамическую модель маятниково-приводимого сферического робота и решили задачу планирования динамически реализуемых траекторий. A. Singhal и J. Huo в своих исследованиях анализируют нелинейную динамику маятниковых сферических роботов (включая явления «воблинга» и прецессии) и предлагают адаптивные и робастные алгоритмы управления. Приводы на основе сохранения углового момента (роторы, маховики) исследованы в работах R. Mukherjee и V.A. Joshi. Внутренние колёсные и омни-

колёсные платформы рассмотрены J. Alves и J. Dias. Деформируемые и жидкостные приводы изучены в работах S.A. Tafrishi, M. Svinin, M. Yamamoto.

Формирование вращающего момента вследствие электромагнитного взаимодействия изучено главным образом в контексте многостепенных сферических двигателей. Классической является работа M. Kumagai и R.L. Hollis, в которой предложен сферический индукционный двигатель с тремя степенями свободы, а затем его шестистаторная конфигурация с повышенным крутящим моментом. Сферические двигатели с постоянными магнитами и методы управления ими рассмотрены в работах K.N. Souza, H. Li, K. Bai, H. Yan и X. Guo. Однако все эти работы относятся к двигателям с неподвижным статором: в них вращательное движение совершает только ротор, тогда как сам объект не перемещается, а значит контакт с опорной поверхностью и качение не рассматриваются.

Таким образом, к настоящему времени способ формирования вращающего момента, основанный на электромагнитном взаимодействии исследован лишь для неподвижных сферических двигателей, а модели управляемого движения сферических роботов построены преимущественно для механических приводов и, как правило, для движения по горизонтальной плоскости или в кинематической постановке. В данной диссертационной работе строится математическая модель управляемого сферического робота с приводом, основанным на электромагнитном взаимодействии постоянных магнитов и электромагнитов. На основе математической модели формируются принципы проектирования электромагнитного привода, а также проводится численное моделирования для верификации полученных аналитических результатов.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель работы заключается в построении математической модели сферического робота с электромагнитным приводом и разработке новой системы управления его движением. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Разработать математическую модель квазистационарного электромагнитного взаимодействия магнитов, размещённых на внутренней и внешней сферических оболочках робота, включая выражение для индукции магнитного поля цилиндрического постоянного магнита и силы его взаимодействия с электромагнитом.
2. Построить общую математическую модель движения сферического робота по неровной поверхности в виде системы дифференциальных уравнений. Определить для модели ключевые характеристики, такие как моменты инерции, массы и геометрические характеристики.
3. Синтезировать регулятор отслеживания траектории, основанный на линеаризации уравнений динамики робота в окрестности эталонной траектории, и регулятор на основе обобщённой H_2-нормы для подавления возмущений и минимизации отклонений от заданного движения.
4. На основе предложенной математической модели разработать программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом.
5. Провести компьютерное моделирование предложенной модели и регуляторов для верификации результатов и оценки качества управления в присутствии внешних возмущений.

Научная новизна диссертационной работы. Ключевые элементы научной новизны состоят в следующем.

1. **Модель квазистационарного электромагнитного взаимодействия.** Впервые для сферических роботов предложена математическая модель взаимодействия магнитов на движущихся оболочках, включающая выражения для индукции магнитного поля постоянного магнита по закону Био-Савара-Лапласа и силы взаимодействия между магнитами на разных оболочках по закону Ампера, что позволяет аналитически

описать вращающий момент как функцию углового сдвига между постоянным магнитом и электромагнитом.

2. **Модель движения сфероробота по неровным поверхностям.** Выведены уравнения динамики сферического робота с учётом модели поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлёва, условий безотрывного движения и переключения режимов «скольжение/качение», что обобщает предыдущие работы по сферическим роботам с механическим приводом на случай неровной поверхности и верчения.
3. **Синтез оптимального управления.** Синтезировано управление как сумма программного и корректирующего, корректирующее управление выбрано в виде линейного закона управления с обратной связью по состоянию. Матрицы обратной связи вычисляются, используя линеаризацию уравнений динамики сферического робота в окрестности эталонной траектории и обобщенную H_2-норму.
4. **Численное моделирование и верификация.** Проведено численное моделирование движения сферического робота с электромагнитным приводом по неровной поверхности с учетом полученного оптимального управления. Получены временные зависимости для электрических токов и напряжений на электромагнитах, реализующие движение согласно полученному оптимальному управлению.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость заключается в развитии математических методов моделирования и управления динамическими системами в робототехнике с акцентом на интеграцию электромагнитных полей и механики движения. Предложенная квазистационарная модель электромагнитного взаимодействия магнитов на сферических оболочках расширяет существующие лагранжевы подходы к моделированию сферических роботов, дополняя их ранее не учитывавшимися электромагнитными аспектами, а синтез оптимального управления вносит вклад в теорию многокритериальной оптимизации динамических систем.

С практической точки зрения разработанная математическая модель и программный комплекс являются основой для последующей разработки прототипа сферического робота с электромагнитным приводом и его применения там, где классические робототехнические платформы неэффективны: при исследовании глубоководных и подлёдных пространств, поверхностей других планет, зон химического и радиационного загрязнения, при аварийных и спасательных операциях.

Методология и методы исследования. Математическая модель квазистационарного электромагнитного взаимодействия между магнитами основана на законе Био-Савара-Лапласа для индукции магнитного поля и законе Ампера для силы между магнитами, также использовался закон Кирхгофа для связи между электрическими токами в электромагнитах и электрическими напряжениями, подающимися на электромагниты. Для построения математической модели движения сферического робота по неровной поверхности использованы уравнения изменения импульса и момента импульса, модель поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлева и условия безотрывного от опорной поверхности движения.

Оптимальное управление, записанное в виде линейного закона управления с обратной связью по состоянию, определяется при помощи линеаризации уравнений динамики сферического робота вблизи эталонной траектории и обобщенной H_2-нормы. Поставленная задача оптимального управления сводится к решению задачи полуопределенного программирования.

Численное исследование модели сферического робота с электромагнитным приводом проводилось на платформе MATLAB, в частности для решения обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод, основанный на формулах численного дифференцирования, обобщающих формулы обратного дифференцирования Гира, для интегрирования использовался метод, основанный на адаптивном числовом интегрировании с использованием метода Гаусса-Кронрода. Для решения задачи полуопределенного программирования использовался пакет CVX.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом, способная описать его управляемое движение по различным поверхностям.
2. Новая система оптимального управления движением сферического робота, основанная на линеаризации уравнений динамики вблизи эталонной траектории и обобщённой H_2-норме.
3. Конфигурация электромагнитного привода, основанная на размещении магнитов в вершинах многогранников.
4. Программный комплекс, моделирующий управляемое движение сферического робота с электромагнитным приводом вдоль заданной траектории по поверхностям с различными профилями.
5. Результаты численного моделирования движения сферического робота, полученные при помощи разработанного программного комплекса.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием строго доказанных теорем и утверждений, а также результатами численных экспериментов. Исследуемые математические модели имеют физическую трактовку и не противоречат известным ранее результатам. Основные результаты работы докладывались на ряде научных конференций и семинаров.

1. 24-я международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, Россия, 2024).
2. 12-я международная научная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, Россия, 2025).
3. 25-я международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, Россия, 2025).
4. Семинар на тему «Стабилизация и управление движением неполноприводных робототехнических систем» (ФТ «Сириус», 2026).
5. 30-я научная конференция по радиофизике (Нижний Новгород, Россия, 2026).

Публикации. Основные положения диссертации отражены в 7 печатных работах: 5 статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международной базе данных Scopus, и 2 работы – в сборниках тезисов докладов конференций, индексируемых в РИНЦ.

Личный вклад. Постановки задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами работ. Автором разработаны математическая модель и принцип построения электромагнитного привода, разработан программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом, проведены численные эксперименты.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 97 страницах, содержит 27 рисунков и 5 таблиц; список литературы включает 86 наименований. В приложении приведены свидетельство о государственной регистрации программного комплекса и фрагменты исходного кода разработанного программного комплекса.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи работы, изложены научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, приведены положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности, апробации и публикациях.

Первая глава посвящена обзору литературы по сферическим роботам и обоснованию выбора электромагнитного привода как направления исследования.

В **разделе 1.1** прослеживается история развития сферических мобильных роботов. Первые патенты на конструкции с перекатывающейся сферой относятся к концу XIX – началу XX века, однако практическая реализация управляемых устройств стала возможной лишь с появлением компактных электродвигателей и микроконтроллеров. Одним из первых управляемых прототипов стал робот A. Halme и соавторов, продемонстрировавший постановку задачи моделирования управляемого движения сферы по плоскости. К настоящему времени созданы десятки действующих образцов – от учебных платформ (Sphero) и кинематографических моделей до исследовательских систем Roball и ROSPHERE, что свидетельствует о переходе области из стадии концептуальных разработок к полноценным инженерным решениям.

Раздел 1.2 систематизирует области применения сферических роботов. В **подразделе 1.2.1** рассмотрена образовательная и развлекательная робототехника, где сферическая форма обеспечивает безопасность при контакте с пользователем и привлекательный дизайн. В **подразделе 1.2.2** описано применение для разведки, охраны и мониторинга инфраструктуры: герметичность корпуса и способность перемещаться в замкнутых пространствах (трубопроводы, вентиляционные каналы) делают сферических роботов конкурентоспособными по сравнению с колёсными и гусеничными аналогами. В **подразделе 1.2.3** рассмотрено применение сфероробота в сельскохозяйственной отрасли на примере робота ROSPHERE: показано, что сферический корпус с гладкой поверхностью и малой площадью контакта снижает уплотнение почвы и повреждение растений по сравнению с традиционной самоходной техникой. В **подразделе 1.2.4** обсуждаются экстремальные и космические условия, включая каменистый грунт и значительные перепады высот; сферическая форма обеспечивает устойчивость к опрокидыванию и самовосстановление после столкновений. В **подразделе 1.2.5** рассмотрена сервисная робототехника «умного дома» (робот Ballie, Samsung), где ключевыми требованиями являются плавность хода, низкий уровень шума и безопасный контакт с человеком, что дополнительно мотивирует исследование бесконтактных (в том числе электромагнитных) приводов.

Раздел 1.3 содержит классификацию приводов сферических роботов по принципу формирования момента, геометрии внутренних механизмов и характеру взаимодействия с оболочкой. В **подразделе 1.3.1** рассмотрены барицентрические (маятниковые) приводы – наиболее изученный класс, в котором момент создаётся смещением внутренней массы относительно геометрического центра сферы. Приведены исследования, посвященные построению динамических моделей и задачам синтеза управления, из которых можно выделить ключевые недостатки привода: задержки позиционирования, явления «воблинга» и прецессии привода. В **подразделе 1.3.2** рассмотрены приводы на основе сохранения углового момента (роторы, маховики); отмечены высокая маневренность, но повышенные требования к балансировке и мощности. В **подразделе 1.3.3** рассмотрены внутренние колёсные и омни-колёсные платформы, обеспечивающие высокую скорость и маневренность, но требующие тщательного учёта трения и условий контакта колёс с оболочкой. В **подразделе 1.3.4** рассмотрены приводы с деформируемой оболочкой и жидкостные приводы, остающиеся пока на уровне исследовательских прототипов. В **подразделе 1.3.5** проанализированы электромагнитные приводы и многостепенные сферические двигатели, потенциально обеспечивающие бесконтактную передачу момента, высокую точность позиционирования и уменьшение числа механических узлов. Рассмотрены как индукционные, так и двигатели с постоянными магнитами; подчёркнуто,

что все известные работы в этой области относятся к двигателям с неподвижным статором, а не к мобильным платформам, однако разработанные в них модели поля и момента составляют фундаментальную базу для построения сферического робота с электромагнитным приводом.

Раздел 1.4 обобщает подходы к управлению движением сферических роботов как существенно нелинейных неголономных систем. В **подразделе 1.4.1** рассмотрены классические методы, включая ПИД- и линейно-квадратичные регуляторы; отмечена их чувствительность к параметрическим неопределённостям. В **подразделе 1.4.2** рассмотрены геометрические методы управления неголономными системами на основе теории расслоений и геометрической фазы; подчёркнута алгоритмическая сложность таких подходов. В **подразделе 1.4.3** рассмотрены робастные, скользящие и адаптивные методы, обеспечивающие устойчивое следование по траектории в условиях неидеальной модели и внешних возмущений. В **подразделе 1.4.4** рассмотрены интеллектуальные и нечёткие методы, позволяющие компенсировать неучтённую динамику и адаптироваться к изменениям внешней среды, но требующие значительного объёма экспериментальных данных для настройки. В **подразделе 1.4.5** отдельно рассмотрено управление маятниковыми роботами с учётом дополнительных динамических эффектов при поворотах. В **подразделе 1.4.6** рассмотрено управление сферическими электромагнитными приводами как многостепенными сферическими моторами; подчёркнута необходимость одновременного учёта распределения магнитного поля, нелинейной зависимости момента от токов и углов и взаимодействия привода с динамикой оболочки.

В **разделе 1.5** сформулированы выводы по главе. Установлено, что электромагнитный привод является наиболее перспективным направлением для создания высокоточных сферических роботов. Вместе с тем существующие работы по электромагнитным сферическим двигателям относятся к устройствам с неподвижным статором: контакт с опорной поверхностью, качение и динамика оболочки в них не рассматриваются. Это обосновывает необходимость построения математической модели сферического робота с электромагнитным приводом, которому посвящены последующие главы диссертации.

Вторая глава посвящена построению полной математической модели сферического робота с электромагнитным приводом, представляющего собой систему двух концентрических сферических оболочек: на внешней закреплены постоянные магниты, на внутренней — электромагниты. Глава объединяет четыре взаимосвязанных блока: модель электромагнитного взаимодействия, уравнения динамики движения по неровной поверхности, синтез оптимального управления и восстановление электрических токов и напряжений.

В **разделе 2.1** вводятся конструктивные параметры робота: для внешней оболочки (радиус R_{out}, масса M_{out}, момент инерции J_{out}) и для внутренней оболочки (радиус r_{in}, масса m_{in}, момент инерции j_{in}), число постоянных магнитов M и электромагнитов S. Постоянные магниты являются цилиндрами радиуса r_0, высотой h_0 выполненные из NdFeB сплава. Электромагниты – толстостенные соленоиды, длина которых h_3, внутренний радиус r_3, внешний радиус r_4. Введена прямоугольная система координат $Oxyz$, центр которой совпадает с геометрическим центром сферического робота, ось z направлена вертикально вверх, ось x направлена слева направо, а ось y направлена от нас в плоскость рисунка (см. рисунок 1). Также введен угол β, отвечающий за угловое расстояние между постоянным магнитом и электромагнитом, в плоском случае определяется как $\beta = \alpha_{in} - \alpha_{out}$, где α_{in} – угловое положение электромагнита, α_{out} – угловое положение постоянного магнита, угол поворота отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

Раздел 2.2 посвящён математической модели электромагнитного привода. В **подразделе 2.2.1** на основе закона Био-Савара-Лапласа в квазистационарном приближении получено покомпонентное выражение для вектора индукции магнитного поля $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ одиночного цилиндрического постоянного магнита в произвольной точке пространства $P(x, y, z)$. При расчете постоянный магнит аппроксимируется набором

круговых токовых петель, нанизанных на ось магнита, также предполагалось, что поле в точке $P(x, y, z)$ возбуждается только поверхностными токами, текущими по поверхности постоянного магнита. В **подразделе 2.2.2** было выполнено преобразование координат точки, в которой вычисляется магнитное поле $P(x, y, z)$, переход совершен из системы координат $Oxyz$ в цилиндрическую систему, связанную

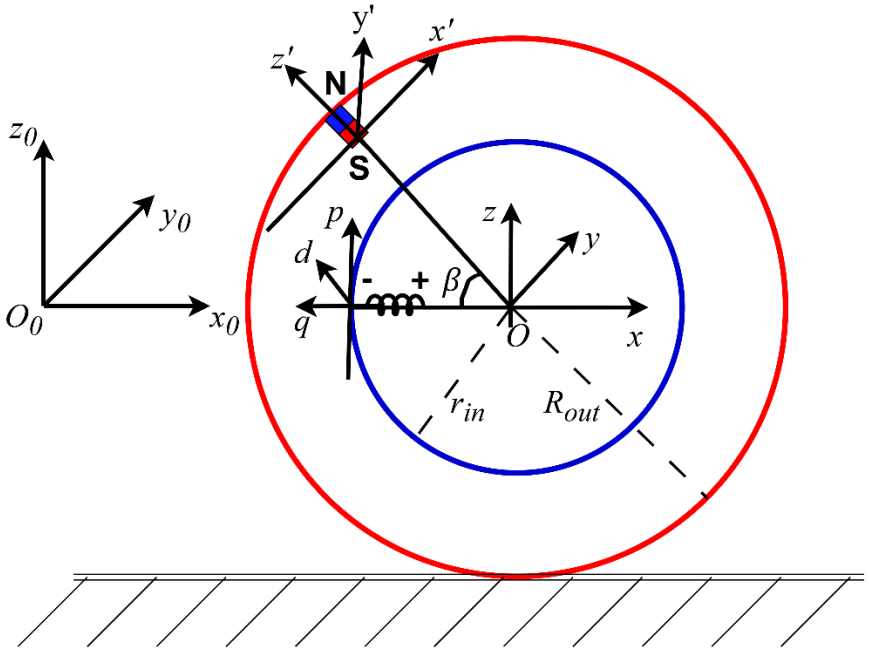

Рисунок 1 – Схематическое изображение сферического робота с электромагнитным приводом с одним постоянным магнитом и одним электромагнитом.

с электромагнитом (ρ, θ, z_0), сделан этот шаг так как нас интересует создаваемое постоянным магнитом поле не в произвольной точке, а в области расположения электромагнита. В **подразделе 2.2.3** по закону Ампера получено выражение для силы $\boldsymbol{F}$, которая действует на токи, локализованные в объеме электромагнита V и описываемые объемной плотностью тока $\boldsymbol{I} = (-I_0 \sin(\theta)\sin(\alpha_{in}), I_0 \cos(\theta), I_0 \sin(\theta)\cos(\alpha_{in}))$ $(I_0 = IN/[h_3(r_4 - r_3)]$, где I – ток, текущий по обмотке электромагнита, N – число витков в обмотке электромагнита), со стороны магнитного поля, генерируемого токами, текущими в постоянном магните, проекции силы на оси системы координат $Oxyz$ имеют вид:

$$\begin{cases} F_x = I_0 \int_{-h_3}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} (B_z \cos(\theta) - B_y \sin(\theta)\cos(\alpha_{in}))\, \rho d\rho d\theta dz_0 \\ F_y = I_0 \int_{-h_3}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} \sin(\theta)(B_z \sin(\alpha_{in}) + B_x \cos(\alpha_{in}))\rho d\rho d\theta dz_0. \\ F_z = -I_0 \int_{-h_3}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} (B_y \sin(\theta)\sin(\alpha_{in}) + B_x \cos(\theta))\rho d\rho d\theta dz_0 \end{cases} \quad (1)$$

В **подразделе 2.2.4** рассматривается модель с одним постоянным магнитом и одним электромагнитом (рисунок 1), в частности анализируется зависимость вращающего момента от углового расстояния β между осями постоянного магнита и электромагнита в плоском случае. Вращающий момент $\boldsymbol{Q}^{in}$, приложенный к внутренней сфере, создающийся при взаимодействии одной пары постоянный магнит – электромагнит, записывается как: $\boldsymbol{Q}^{in} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}]$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, направленный от оси вращения сферического робота до электромагнита, $\boldsymbol{F}$ – сила, полученная при помощи системы (1). Поскольку все постоянные магниты одинаковы и электромагниты также одинаковы суммарный момент создающийся на

внутренней сфере при взаимодействии M установленных постоянных магнитов со всеми S электромагнитами записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in} = \sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}], \tag{2}$$

Установлено, что при углах β, равных $\pm 10°$, вращающий момент достигает своего максимума. Это позволяет сделать вывод о том, что для достижения максимальной эффективности постоянные магниты следует располагать на одинаковом расстоянии друг от друга с шагом $20°$. Кроме того, необходимо учитывать, что полюса соседних постоянных магнитов, направленные внутрь сферического робота, должны иметь разную полярность. При этом шаг расположения электромагнитов должен быть выбран таким образом, чтобы избежать «мёртвых» зон, когда все постоянные магниты и электромагниты находятся друг напротив друга. Шаг расположения электромагнитов выбран $30°$. Так как движение робота происходит в плоскости $O_0x_0z_0$, $y_0 = 0$, расположим постоянные магниты и электромагниты в плоскости движения.

В **подразделе 2.2.5** результаты обобщены на трёхмерный случай. Суммарный момент на внутренней оболочке, создаваемый i-ым электромагнитом при единичном токе, представляет собой суперпозицию вкладов от взаимодействия со всеми M постоянными магнитами:

$$\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in} = \sum_{j=1}^{M} p_j \Gamma(\beta_{ij})\, \boldsymbol{e}_{ij}, \tag{3}$$

где $p_j \in \{1, -1\}$ определяет полярность j-го постоянного магнита, β_{ij} – угловое расстояние между j-ым постоянным магнитом и i-ым электромагнитом, $\boldsymbol{e}_{ij}$ – единичный вектор, задающий направление момента, создаваемый данной парой постоянный магнит – электромагнит, $\Gamma(\beta_{ij})$ – скалярная характеристика крутящего момента для одной пары постоянный магнит – электромагнит, определяемая при помощи математической модели электромагнитного привода, для угловых расстояний $\beta \in [0, 2\pi]$ и при условии единичного тока в электромагните. Объединяя вклады всех S электромагнитов в столбцы матрицы $\boldsymbol{T}(t) \in R^{3\times S}$, называемой картой вращающего момента, суммарный момент $\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in}$, действующий на внутреннюю оболочку, записывается компактно:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in} = \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{I}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, \dots, I_S)^{\top}$ – вектор токов в обмотках электромагнитов. Матрица $\boldsymbol{T}(t)$ зависит от времени через текущую взаимную ориентацию оболочек. Поскольку токи входят линейно, соотношение (2.15) является ключевым для всей дальнейшей постановки задачи управления.

Раздел 2.3 посвящён синтезу оптимального управления движением сферического робота. В **подразделе 2.3.1** выведены общие уравнения движения робота как двух связанных сферических оболочек. Для этого введена неподвижная система координат $O_0x_0y_0z_0$, жестко связанная с опорной горизонтальной плоскостью (рисунок 1). Плоскость $O_0x_0y_0$ параллельна опорной плоскости, ось O_0z_0 направлена вертикально вверх, а центр O_0 расположен на горизонтальной плоскости, проходящей через центр сферической оболочки. Из уравнений изменения импульса и момента импульса обеих оболочек, с учётом создаваемых, вследствие их взаимодействия, силы и момента, а также модель поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлёва, и условия безотрывного движения $N > 0$ (2.20), где N – нормальная составляющая силы реакции опоры, получена общая безразмерная система дифференциальных уравнений, описывающая динамику сферического робота:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{F}_{\text{тр}} + N\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}, \tag{5а}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{Q} - \gamma\left[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}_{\text{тр}}\right] + \boldsymbol{M}_{\text{тр}}, \tag{5б}$$

$$N = \langle \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} \rangle - \left\langle \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\boldsymbol{n}} \right\rangle, \tag{5в}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\kappa N \frac{\boldsymbol{v}_c}{|\boldsymbol{v}_c| + \alpha|\Omega_n|}, \quad \boldsymbol{M}_{\text{тр}} = -M_0 \frac{\rho\Omega_n}{|\rho\Omega_n| + \delta|\boldsymbol{v}_c|}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v}_c = \dot{\boldsymbol{\xi}} - [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}], \tag{5г}$$

где $\boldsymbol{\xi} = (x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_{x_0}, \Omega_{y_0}, \Omega_{z_0})$ – безразмерные векторы положения центра масс внешней сферической оболочки и ее угловой скорости в системе $O_0x_0y_0z_0$, $\boldsymbol{Q} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – вектор управления, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0})$ – безразмерный вектор угловой скорости внутренней оболочки, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ – безразмерная сила трения, приложенная к внешней оболочке в точке контакта с опорной поверхностью и лежащая в горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{M}_{\text{тр}}$ – безразмерный момент силы трения верчения сферической оболочки относительно вектора нормали к опорной поверхности, $\boldsymbol{v}_c$ – безразмерная мгновенная скорость точки контакта сферической оболочки с опорной поверхностью, κ – коэффициент сухого трения, ρ – радиус пятна контакта, M_0 и δ – положительные параметры, а параметр $\alpha = 8/(3\pi)$, $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали к опорной поверхности в точке контакта, g – ускорение свободного падения и $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ – единичный вектор, $\gamma = (M_{out} + m_{in})R_{out}^2/J_{out}$. В случае отсутствия скольжения, сила трения становится равной силе трения покоя, и движение осуществляется с учетом неголономной связи: $\dot{\boldsymbol{\xi}} = R_{out}[\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}]$.

В **Подразделе 2.3.2** рассматривается управление сферическим роботом в отсутствии верчения при движении как по горизонтальной плоскости, так и по произвольной достаточно гладкой неровной поверхности. В **подразделе 2.3.2.1** для движения по горизонтальной плоскости $z_0 = 0$ без проскальзывания и отсутствии верчения вдоль вектора нормали, т. е. $\Omega_n = \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \rangle = 0$ были записаны уравнения движения в виде:

$$\left((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}^{\top}\right)\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{Q}, \qquad \dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{k}]. \tag{6}$$

где $\boldsymbol{I}_3$ – единичная матрица размера 3 × 3. Вектор управления $\boldsymbol{Q}$ записывается как сумма программного $\boldsymbol{Q}_0$ и корректирующего $\boldsymbol{u}$ управлений:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{Q}_0 = \left((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}^{\top}\right)\dot{\boldsymbol{\Omega}}_0, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Theta}_{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0) + \boldsymbol{\Theta}_{\xi}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_0$ – вектор угловой скорости, вычисленный вдоль заданной траектории движения $\boldsymbol{\xi}_0$, а $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ – матрицы коэффициентов обратной связи. Для определения матриц обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ проведена линеаризация уравнений (6) в окрестности $\boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\xi}_0$ и введены новые переменные $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0$. Также были введены в рассмотрение два функционала, характеризующие выбор матриц $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$, а также качество переходных процессов, протекающих в системе. Первый функционал J_1 характеризует максимально возможные отклонения сфероробота от заданной траектории по отношению к неизвестным начальным условиям $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, в то время как функционал J_2 – максимально возможные значения корректирующих управлений по отношению к неизвестным начальным условиям. Таким образом, для определения матриц обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ требуется для линеаризованной системы найти оптимальные по Парето решения двухкритериальной задачи оптимального управления с функционалами J_1 и J_2.

Подраздел 2.3.2.2 расширяет результаты предыдущего подраздела на случай движения по произвольной неровной опорной поверхности без проскальзывания. В этом случае уравнения, описывающие динамику сферического робота, имеют вид:

$$(1+\gamma)\,\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \gamma\,\boldsymbol{n}\left\langle \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \boldsymbol{n} \right\rangle = \boldsymbol{Q} - \gamma\,[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}], \tag{8а}$$

$$\left(\boldsymbol{I}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}], \tag{8б}$$

где вектор $\boldsymbol{\zeta}$ описывает положение точки касания сфероробота с опорной поверхностью. В целом подход к формированию вектора управления $\boldsymbol{Q}$ и поиску матриц коэффициентов

обратной связи идентичен подходу рассмотренном в подразделе 2.3.2.1 за исключением добавления дополнительных возмущений $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, удовлетворяющие на отрезке $t_0 \le t \le t_1$ условию:
$\| \boldsymbol{v} \|^2 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}\, dt < +\infty, \quad \boldsymbol{v} = \mathrm{column}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, которые были введены для учета влияния отброшенных при линеаризации нелинейных слагаемых. В этом случае функционалы будут иметь вид:

$$J_1(\boldsymbol{\Theta}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{v}} \frac{\max\left\{ \sup\limits_{0\le t\le T} |\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega|_2,\ \sup\limits_{0\le t\le T} |\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta|_2 \right\}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0^\top \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \| \boldsymbol{v} \|^2}}, \qquad J_2(\boldsymbol{\Theta}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{v}} \frac{\sup\limits_{0\le t\le T} |\boldsymbol{u}|_2}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0^\top \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \| \boldsymbol{v} \|^2}}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\Theta}_\Omega, \boldsymbol{\Theta}_\zeta\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{column}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega, \boldsymbol{\varepsilon}_\zeta\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(0)$ и $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^\top > 0$ – заданная весовая матрица, отвечающая за компромисс между начальными и внешними возмущениями.

Перед тем как решать задачу многокритериального оптимального управления, поставленную в предыдущих подразделах, в **подразделах 2.3.3.1** и **2.3.3.2** кратко приведены теоретически выводы, посвященные максимальному уклонению выхода линейной системы, а также управлению этим уклонением. Затем в **подразделе 2.3.3.3** рассматривается многокритериальная задача управления максимальными уклонениями нескольких выходов линейной системы для которой формулируется и доказывается теорема, благодаря которой данную задачу оптимального управления можно свести к следующей задаче полуопределенного программирования: найти $\min\gamma^2$, при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:

$$\begin{gathered} Y_{k+1} - Y_k - h\left(A_k Y_k + Y_k A_k^\top + B_{u,k} Z_k + Z_k^\top B_{u,k}^T + B_k B_k^\top\right) = 0, \\ \begin{pmatrix} Y_k & \star \\ C_k^{(i)} Y_k + D_k^{(i)} Z_k & \gamma^2 \alpha_i^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Y_0 = R^{-1}, i = 1, \dots, m; \quad k = 0, \dots, N-1. \end{gathered} \tag{10}$$

Для каждого набора $\alpha_i,\ i = 1, \dots, m$ матрицы параметров оптимальных по Парето регуляторов находятся как $\Theta_k = Z_k Y_k^{-1}$, где Y_k, Z_k – решения (10).

В **разделе 2.4** описывается методика расчета электрических токов в обмотках электромагнитов на основе управляющего момента, определенного с помощью ранее рассмотренного метода оптимального управления. В общем случае число электромагнитов S существенно превосходит число управляемых компонент вращающего момента, следовательно, система (4) относительно неизвестного вектора токов $\boldsymbol{I}$ оказывается недоопределённой: одному и тому же требуемому моменту $\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}$ соответствует целое $(S-3)$-параметрическое семейство допустимых токовых распределений. Для выбора единственного решения необходимо ввести дополнительный критерий. В **подразделе 2.4.1** в трёхмерном случае единственное энергетически оптимальное решение, минимизирующее суммарную джоулеву мощность $\|\boldsymbol{I}(t)\|^2$, найдено через псевдообратную матрицу с регуляризацией Тихонова:

$$\boldsymbol{I}^*(t) = \boldsymbol{T}^\top(t)[\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^\top(t) + \lambda\, \boldsymbol{I}_3]^{-1} \boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t). \tag{11}$$

где $\boldsymbol{I}^*(t)$ – вектор оптимальных токов, $\boldsymbol{T}$ – карта вращающего момента, $\lambda > 0$ (порядка 10^{-6}) – параметр регуляризации, обеспечивающий численную устойчивость в окрестностях, где обусловленность матрицы $\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^\top(t)$ ухудшается. В **подразделе 2.4.2** подробно рассматривается специфический случай плоского движения сферического робота, при этом магниты равномерно распределены по сферическим оболочкам в плоскости движения. В этом случае карта вращающего момента вырождается в строку, учитывая это, а также используя неравенства Коши-Буняковского, получена явная аналитическая формула распределения токов в обмотках электромагнитов. В **подразделе 2.4.3** показана согласованность двух методов: формула для плоского случая является предельным случаем

формулы (11) при $\lambda \to 0$ и ранге карты вращающего момента, равном единице, что вполне естественно.

Последним этапом в построении математической модели сферического робота с электромагнитным приводом является определение подаваемых на обмотки электромагнитов напряжений. Данный вопрос рассмотрен в **разделе 2.5**, в нем используя уравнение Кирхгофа и найденные токи для каждой обмотки определено подаваемое напряжение u_i:

$$I_i(t)R_i = u_i(t) - L_i\frac{\mathrm{d}I_i(t)}{\mathrm{d}t} - \sum_{j=1,j\neq i}^{S} M_{ij}\frac{\mathrm{d}I_j(t)}{\mathrm{d}t} - \sum_{k=1}^{M}\frac{\mathrm{d}\Phi_{ik}(t)}{\mathrm{d}t}, \quad (12)$$

где R_i – сопротивление i-й катушки, L_i – коэффициент самоиндукции i-й катушки, M_{ij} – коэффициент взаимной индукции между i-й и j-й катушками, Φ_{ik} – потокосцепление вектора магнитной индукции, создаваемого k-ым постоянным магнитом, с проводящим контуром i-й катушки.

Третья глава посвящена оптимальному размещению магнитов на двух сферических оболочках для обеспечения всенаправленного движения. В **разделе 3.1** формулируется задача оптимального размещения магнитов на сферических оболочках. Плоская конфигурация, введенная в подразделе 2.2.4 ($M = 18$ постоянных магнитов, $S = 12$ электромагнитов расположенные в плоскости движения), достаточная для плоского управляемого движения, не обеспечивает управляемое движение в произвольном направлении: карта момента вырождается в вектор-строку. Для всенаправленного движения необходимо, чтобы при любой взаимной ориентации оболочек выполнялось условие:

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{T}(t)) = 3, \quad (13)$$

то есть чтобы векторы $\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in}$ порождали всё пространство R^3. Это требует распределения магнитов по всей поверхности сферы. Кроме того, применимость метода управления из главы 2 опирается на допущении, что момент инерции относительно любой оси проходящей через центр оболочек одинаков, то есть тензор инерции имеет вид $\boldsymbol{J}_{out} = J_{out}\cdot\boldsymbol{I}_3$ для внешней оболочки и $\boldsymbol{j}_{in} = j_{in}\cdot\boldsymbol{I}_3$ для внутренней: при нарушении этого условия в уравнениях Эйлера дополнительно появляется гироскопический член $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega})$, разрушающий развязанную структуру модели (независимость уравнений по отдельным компонентам угловой скорости). Достаточным условием выполнения этого ограничения, накладываемого на тензоры инерции, является то, что группа симметрии расположения точечных масс, расположенных на сфере, действует на R^3 неприводимо. Среди трёхмерных точечных групп этим свойством обладают только кубические группы (T, T_d, T_h, O, O_h) и икосаэдрические группы (I, I_h).

Указанное ограничение сводит задачу к поиску такого размещения магнитов, при котором их позиции совпадают с вершинами вершинно-транзитивного выпуклого многогранника с кубической или икосаэдрической симметрией, вписанного в соответствующую сферу. Этому условию удовлетворяют ровно 18 многогранников: пять платоновых тел и тринадцать архимедовых тел. Помимо этого на конфигурацию наложены пять требований: 1) равномерное покрытие сферы (минимизация максимального зазора покрытия), 2) угловое расстояние между соседними постоянными магнитами должно быть около 20° (взято из подраздела 2.2.4), 3) чередование полярностей, 4) несовпадение групп симметрии электромагнитов и постоянных магнитов, 5) отсутствие «мёртвых зон». На основе численного эксперимента выбраны ромбоикосододекаэдр ($M = 60$ постоянных магнитов) для внешней оболочки и усечённый октаэдр ($S = 24$ электромагнита) для внутренней. Полярности постоянных магнитов определены при помощи двухэтапного алгоритма оптимизации, который обеспечил чередование полярностей на 73.3% рёбер.

Введены количественные характеристики привода: гарантированный минимальный реализуемый момент τ_{min} и коэффициент изотропии $\eta = \min_{\hat{\boldsymbol{d}}\in S^2}\tau(\hat{\boldsymbol{d}}) \,/\, \max_{\hat{\boldsymbol{d}}\in S^2}\tau(\hat{\boldsymbol{d}})$. Характеристики вычислялись на основе серии численных экспериментов включающие в себя 10^4 равномерно распределённых на $SO(3)$ взаимных

ориентаций оболочек, а для каждой ориентации по 10^5 направлений движения. Для выбранной конфигурации привода их значения $\tau_{min} = 0.118$ Н·м и $\bar{\eta} = 52.2\%$ ($\bar{\eta}$ – средний коэффициент изотропии) численно подтверждают возможность генерации ненулевого момента в произвольном направлении при любой относительной ориентации оболочек (в 10^4 случайных выборках ориентаций ни одной с нулевым моментом не обнаружено).

Четвёртая глава посвящена компьютерному моделированию и численной верификации построенной модели. В **разделе 4.1** описан разработанный программный комплекс, реализованный на платформе MATLAB (версия R2024a) и прошедший государственную регистрацию как программа для ЭВМ (приложение А). Комплекс включает шесть ключевых компонентов: графический интерфейс реализованный при помощи MATLAB App Designer (панель параметров, выбор типа поверхности, начальные условия, две сцены трёхмерной анимации движения робота); блок конфигурации параметров; расчётный модуль оптимального управления (этап 1); расчётный модуль электрических токов (этап 2); расчётный модуль напряжений (этап 2) и модуль визуализации.

Численная процедура построена в два этапа: на первом синтезируется оптимальное управление (решением задачи (10) пакетом CVX) и интегрируется система уравнений движения; на втором по найденному управляющему моменту восстанавливаются токи (формула (11)) и напряжения (уравнение (12)). Интегрирование системы уравнений выполняется встроенным в MATLAB многошаговым адаптивным решателем ode15s переменного порядка (1–5), основанный на формулах численного дифференцирования, обобщающих формулы обратного дифференцирования Гира; выбор решателя для жёстких систем обусловлен тем, что контактное взаимодействие с поверхностью и динамика угловой скорости имеют существенно разные характерные времена, при которых явные методы Рунге-Кутты потребовали бы непомерно малого шага. Интегрирование системы (1) выполняется встроенным методом Гаусса-Кронрода. Для ускорения повторных расчётов реализованы сохранение на диск значений геометрических интегралов входящих в систему (1) и отложенное вычисление электрических величин. Комплекс поддерживает два режима по типу опорной поверхности — «Плоскость» (движение по плоской поверхности) и «Гаусс» (движение по поверхности с профилем в виде функции Гаусса).

Верификация проведена на четырёх численных экспериментах возрастающей сложности, разбитых на две серии по конфигурации привода.

1. **Движение по плоской поверхности вдоль прямой с подстройкой скорости** (плоская конфигурация привода, $M = 18$, $S = 12$ в плоскости движения, **раздел 4.3**): подтверждена применимость метода управления к базовой задаче плоского движения; робот разогнался из состояния покоя до заданной скорости $v = 3$ км/ч за, примерно, 10 с; на протяжении всего времени управления робот оставался в окрестности заданной траектории; пиковые токи в обмотках не превышают 0.25 А и сосредоточены преимущественно на начальном интервале.
2. **Преодоление препятствия в виде горки**, форма которой задана функцией Гаусса (плоская конфигурация привода, **раздел 4.4**): продемонстрировано движение робота по неровной поверхности; робот точно следует вдоль заданной траектории, временная зависимость скорости также остается в окрестности эталонной и в конечный момент сливается с ней; пиковые токи в обмотках не превышают 1.7 А.
3. **Движение по плоской поверхности вдоль прямой с подстройкой скорости и дополнительной корректировкой бокового смещения** (всенаправленная конфигурация привода, $M = 60$, $S = 24$, **раздел 4.5**): продемонстрирована генерация вращающего момента в произвольном направлении; робот развил заданную скорость $v = 1$ км/ч примерно за 30 с, при этом компенсируя заданное боковое смещение сходясь к эталонной траектории; переход к всенаправленной конфигурации не привёл к росту электрических нагрузок на отдельных электромагнитах – пиковые токи ~0.17 А и напряжения ±2.3 В сравнимы с показателями плоского эксперимента, стоит заметить, что количество электромагнитов выросло по сравнению с плоской

конфигурацией (12 в плоской против 24 во всенаправленной), поэтому общие энергетические затраты также выросли.

4. **Трёхмерное движение по неровной поверхности** с гауссовым профилем (всенаправленная конфигурация привода, **раздел 4.6**) – наиболее сложный эксперимент: подтверждена работоспособность всей цепочки «заданная траектория → оптимальный управляющий момент гарантирующий следование вдоль заданной траектории → энергетически оптимальные токи, реализующие управляющий момент → напряжения». Все три компоненты момента одновременно отличны от нуля, отклонение от заданной траектории убывает до нуля, пиковые токи ~1,6 А и напряжения ±16,5 В остаются в рабочих диапазонах стандартной низковольтной электроники.

В **разделе 4.7** проведено сравнение двух конфигураций постоянных магнитов, количественно обосновавшее выбор главы 3: конфигурация из 60 малых магнитов в вершинах ромбоикосододекаэдра требует в 4 раза меньшего пикового тока и в 2.5 раза меньшей суммарной джоулевой энергии, чем конфигурация из 8 больших магнитов в вершинах куба, при меньшей на 37 % массе массива постоянных магнитов. Сравнение проводится на эксперименте, описанном в разделе 4.5 (коррекция бокового смещения трехмерной конфигурацией привода). Полученный результат сформулирован как общий принцип: для генерации всенаправленного момента важнее равномерность пространственного покрытия сферы магнитами, чем индивидуальная мощность отдельного магнита.

В заключении подведены итоги работы и намечены направления дальнейших исследований.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертационной работе построена и численно исследована полная математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом, способного совершать управляемое всенаправленное движение по произвольной неровной поверхности. Полученные результаты в совокупности обеспечивают теоретическую и алгоритмическую основу для создания нового класса сферических роботов с электромагнитным приводом.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Разработана математическая модель электромагнитного взаимодействия магнитов на двух концентрических сферических оболочках. На основе закона Био-Савара-Лапласа в квазистационарном приближении получено покомпонентное выражение для индукции магнитного поля одиночного цилиндрического постоянного магнита. На основе закона Ампера записано выражение для силы взаимодействия постоянного магнита с электромагнитом. Анализ зависимости вращающего момента от углового сдвига между постоянным магнитом и электромагнитом выявил локальный характер взаимодействия, что определило принципиальный подход к размещению магнитов на сферических оболочках.
2. Построена математическая модель управляемого движения сферического робота по произвольной неровной шероховатой поверхности в виде системы дифференциальных уравнений, объединяющей уравнения изменения импульса и момента импульса двух концентрических сферических оболочек, связанных силами и моментами электромагнитного взаимодействия, модель поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлёва и условие безотрывного движения от опорной поверхности.
3. Сформулирован и решён вопрос оптимального размещения магнитов на сферических оболочках, обеспечивающего генерацию управляющего вращающего момента в произвольном направлении при любой взаимной ориентации оболочек. Установлено, что требование, предъявленное к тензорам инерции обеих оболочек, необходимое для применимости разработанного метода оптимального управления, ограничивает выбор размещения магнитов в вершинах многогранников принадлежащих классу вершинно-транзитивных многогранников с кубической или икосаэдрической симметрией (всего 18 многогранников, пять платоновых и тринадцать архимедовых тел). В этом классе на основе количественных характеристик привода выбраны ромбоикосододекаэдр ($M = 60$ постоянных магнитов) и усечённый октаэдр (S = 24 электромагнита).
4. Разработан численный метод синтеза оптимального по Парето управления. Метод основан на дискретизации интервала управления, линеаризации уравнений движения вокруг эталонной траектории и сведении двухкритериальной задачи минимизации функционалов максимальных уклонений выхода системы и максимальных значений управляющих воздействий к семейству задач полуопределённого программирования с линейными матричными неравенствами.
5. Разработан численный метод восстановления энергетически оптимальных токов в обмотках электромагнитов по заданному управляющему моменту. Метод основан на использовании псевдообратной матрицы с регуляризацией, что обеспечивает численную устойчивость даже в окрестностях, где карта вращающего момента становится плохо обусловленной.
6. На основе разработанной математической модели и предложенных численных методов создан программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом. Комплекс реализован на платформе MATLAB и поддерживает режимы движения по плоской поверхности и по неровной поверхности с профилем в виде функции Гаусса. Комплекс прошёл государственную регистрацию как программное обеспечение для ЭВМ.
7. С помощью разработанного программного комплекса проведена комплексная численная верификация построенной математической модели и предложенных

численных методов на четырёх экспериментах возрастающей сложности: для плоской конфигурации привода ($M = 18,\ S = 12$) это движение по прямой с подстройкой скорости, и преодоление плоской горки, форму которой задает функция Гаусса, для трехмерной конфигурации привода сфероробота ($M = 60,\ S = 24$) – коррекция бокового смещения, и трёхмерное движение по неровной поверхности, профиль которой задается как функция Гаусса.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, а также журналах, включенных в международные базы Web of Science и Scopus:

1. Balandin, D.V. Path tracking control of a spherical robot with pendulum-like driver / Balandin D.V., Biryukov R.S., Tuzikov A.M. // Communications in Computer and Information Science. - 2024. - Springer, Cham. – Vol. 1914. - P. 176 – 189.
2. Balandin, D.V. Spherical robot with electromagnetic drive: modeling and control / Balandin D.V., Tuzikov A.M., Biryukov R.S., Polovinkin A.V. // Russian J. Nonlinear Dyn. - 2025. - Vol. 21, no. 4. - P. 649 – 671.
3. Tuzikov, A.M. Numerical modeling of the controlled motion of a spherical robot with electromagnetic drive / Tuzikov A.M. // Communications in Computer and Information Science. - 2026. - Springer, Cham. – Vol. 2815. - P. 169 – 183.
4. Баландин, Д.В. Оптимальное управление движением сферического робота по неровной поверхности / Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Тузиков А.М. // Изв. РАН. ТиСУ. - 2026. - № 1. - С. 142 – 158.
5. Balandin, D.V. Modeling of controlled omnidirectional motion of a spherical robot with electromagnetic drive / Balandin D.V., Tuzikov A.M., Biryukov R.S. // Regul. Chaotic Dyn. - 2026. - Vol. 31, no. 5. - P. 751 – 777.

В сборниках тезисов докладов конференций (РИНЦ):

1. Тузиков, А.М. Математическое моделирование динамики сферического робота с электромагнитным приводом / Тузиков А.М. // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. - Нижний Новгород. - 2024. - С.168 – 172.
2. Тузиков, А.М. Численное моделирование трехмерного движения сферического робота с электромагнитным приводом / Тузиков А.М., Баландин Д.В. // XXX Научная конференция по радиофизике. - Нижний Новгород. - 2026. - С. 479 – 482.