МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

На правах рукописи

Тузиков Александр Михайлович

Математическое моделирование управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом

Специальность 1.2.2.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Баландин Дмитрий Владимирович

Нижний Новгород – 2026

Оглавление

Введение ... 4
Глава 1. Сферические роботы: история развития, области применения, конструкции и методы управления ... 10
1.1. История развития сферических роботов ... 10
1.2. Области применения сферических роботов ... 12
1.2.1. Образовательная и развлекательная робототехника ... 13
1.2.2. Разведка, охрана и мониторинг ... 13
1.2.3. Сельское хозяйство и экологический мониторинг ... 13
1.2.4. Экстремальные и космические условия ... 14
1.2.5. Сервисная робототехника и «умный дом» ... 14
1.3. Классификация приводов сферических роботов ... 14
1.3.1. Барицентрические приводы ... 15
1.3.2. Приводы на основе сохранения углового момента (роторы, маховики) ... 16
1.3.3. Внутренние колёсные и омни-колёсные платформы ... 17
1.3.4. Приводы с деформируемой оболочкой и жидкостные приводы ... 18
1.3.5. Электромагнитные приводы и сферические двигатели ... 19
1.4. Подходы к управлению движением сферических роботов ... 21
1.4.1. Классические методы управления и обратная динамика ... 21
1.4.2. Геометрические методы и управление неголономными системами ... 21
1.4.3. Робастные, скользящие и адаптивные методы ... 22
1.4.4. Интеллектуальные и нечёткие методы ... 22
1.4.5. Управление маятниковыми сферическими роботами ... 22
1.4.6. Управление сферическими электромагнитными приводами ... 23
1.5 Выводы по главе 1 ... 23
Глава 2. Математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом ... 25
2.1 Конструктивные параметры сферического робота с электромагнитным приводом 25
2.2 Математическая модель электромагнитного привода ... 26
2.2.1 Анализ магнитного поля одиночного цилиндрического постоянного магнита ... 26
2.2.2 Преобразование координат точек электромагнита ... 28
2.2.3 Сила взаимодействия постоянного магнита с электромагнитом ... 29
2.2.4 Анализ вращающего момента сферического робота в плоском случае ... 29
2.2.5 Расчет вращающего момента в трехмерном пространстве ... 31
2.3 Оптимальное управление движением сферического робота ... 33
2.3.1 Вывод общих уравнений движения ... 33
2.3.2 Управление движением сфероробота в отсутствии верчения ... 35
2.3.2.1 Движение по горизонтальной плоскости без проскальзывания ... 35
2.3.2.2 Движение по неровной поверхности без проскальзывания ... 37

2.3.3 Управление максимальными уклонениями в линейной системе ... 40
2.3.3.1 Максимальные уклонения ... 40
2.3.3.2 Оптимальное управление максимальными уклонениями ... 41
2.3.3.3 Синтез многокритериального оптимального управления ... 42
2.4 Вычисление электрических токов ... 43
2.4.1 Вычисление электрических токов в трехмерном случае ... 43
2.4.2 Вычисление электрических токов в плоском случае ... 45
2.4.3 Согласованность трёхмерного и плоского методов определения токов ... 46
2.5 Вычисление электрических напряжений ... 47
2.6 Выводы по главе 2 ... 47
Глава 3. Оптимальное распределение магнитов на сферических оболочках ... 49
3.1 Постановка задачи ... 49
3.2 Требования к конфигурации ... 51
3.3 Выбор многогранника для размещения постоянных магнитов ... 53
3.4 Выбор многогранника для размещения электромагнитов ... 55
3.5 Итоговая конфигурация и численная проверка ... 58
3.6 Выводы по главе 3 ... 60
Глава 4. Компьютерное моделирование динамики сферического робота с электромагнитным приводом ... 62
4.1 Программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом ... 62
4.2 Параметры сферического робота и общие условия экспериментов ... 66
4.3 Движение по прямой в плоской конфигурации привода ... 67
4.4 Преодоление препятствия в виде горки (плоская конфигурация) ... 70
4.5 Коррекция бокового смещения всенаправленной конфигурацией привода ... 73
4.6 Всенаправленное движение по неровной поверхности ... 76
4.7 Сравнение конфигураций постоянных магнитов ... 80
4.8 Выводы по главе 4 ... 81
Заключение ... 83
Литература ... 85
Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы «Программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом» ... 92
Приложение Б. Фрагменты исходного кода программы ... 93

Введение

Актуальность темы диссертационной работы и степень ее разработанности. В последние годы наблюдается значительный рост интереса к разработке и исследованию мобильных роботов, способных функционировать в сложных и экстремальных условиях. Сферические роботы, обладающие уникальной формой, позволяющей перемещаться путем перекатывания, представляют собой перспективное направление в робототехнике. Как отмечается в работах [1–3], их преимущества включают высокую устойчивость (невозможность опрокинуться), маневренность благодаря возможности осуществлять всенаправленное движение, энергоэффективность за счет минимального контакта с поверхностью, а также защиту внутренних механизмов от внешних факторов, таких как жидкость, пыль и газы. Эти характеристики делают сферические роботы идеальными для применения в неблагоприятных средах: от исследования океанских глубин [2] и пыльных строительных площадок до загрязненных сельскохозяйственных полей и даже поверхностей других планет [3]. Импульсом для развития этой области послужила концепция NASA по созданию роботизированных планетоходов типа «Beach-Ball» для исследования планет [1].

Существующие системы приводов сферических роботов традиционно классифицируются на три группы: барицентрические (основанные на манипуляции центром масс с использованием маятников [4–9], внутренних приводов – различные тележки, катающиеся внутри шара [10–14] или скользящих масс [15–18]), приводы на основе сохранения углового момента (движение организуется при помощи реактивных колес [19–21] или гиродинов [22]) и приводы, использующие деформацию оболочки [23]. Несмотря на обширные исследования, эти подходы все еще имеют фундаментальные недостатки. Например, маятниковые системы страдают от значительных задержек при позиционировании [4], внутренние приводы подвержены проскальзыванию между приводом и внутренней поверхностью сферической оболочки [10], скользящие массы приводят к потерям энергии из-за трения внутри привода и требуют сложных алгоритмов управления [15], приводы основанные на сохранении углового момента генерируют прерывистый крутящий момент [19–22], а приводы основанные на деформации оболочки обладают низкой прочностью и износостойкостью [23]. Эти ограничения уменьшают эффективность сферических роботов в реальных приложениях, где требуется плавность движения и надежность.

В контексте этих вызовов предлагаемый электромагнитный привод для сферических роботов, основанный на взаимодействии постоянных магнитов и электромагнитов на двух концентрических сферических оболочках (конструктивно напоминает сферический мотор [24–27]), представляет собой инновационный подход. Электромагнитный привод обеспечивает

голономное движение с минимальными задержками, плавность движения и высокую прочность за счет отсутствия внешних элементов.

Актуальность темы диссертации обусловлена необходимостью преодоления ограничений традиционных приводов и развития новых моделей управления для сферических роботов в условиях растущего спроса на автономные системы в экстремальных средах. Математическое моделирование управляемого движения с электромагнитным приводом позволит не только теоретически обосновать его эффективность, но и предоставить основу для практической реализации, включая расчет динамических и частотных характеристик управляющих сигналов. Это соответствует приоритетам современной робототехники, поддерживаемым грантами, такими как проект Российского научного фонда № 24-11-20023, и открывает перспективы для интеграции в космические, морские и промышленные приложения.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель диссертационной работы заключается в построении математической модели сферического робота с электромагнитным приводом и разработке новой системы управления движением этого робота.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Разработать математическую модель квазистационарного электромагнитного взаимодействия магнитов, размещенных на внутренней и внешней сферических оболочках робота, включая выражения для индукции магнитного поля цилиндрического постоянного магнита и силы взаимодействия с электромагнитом.
2. Построить общую математическую модель движения сферического робота по неровной поверхности в виде системы дифференциальных уравнений. Определить для модели ключевые характеристики, такие как моменты инерции, массы и геометрические характеристики.
3. Синтезировать регулятор отслеживания траектории, основанный на линеаризации уравнений динамики робота в окрестности эталонной траектории, и регулятор на основе обобщенной H_2-нормы для подавления помех и минимизации отклонений от заданного движения.
4. На основе предложенной математической модели разработать программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом.
5. Провести компьютерное моделирование предложенной модели и регуляторов для верификации результатов и оценки качества управления в присутствии внешних возмущений.

Научная новизна диссертационной работы. Ключевые элементы научной новизны включают:

1. **Разработка модели квазистационарного электромагнитного взаимодействия.** Впервые для сферических роботов предложена математическая модель взаимодействия магнитов на движущихся оболочках, включая выражения для индукции магнитного поля постоянного магнита по закону Био-Савара-Лапласа и силы взаимодействия между магнитами на разных оболочках по закону Ампера. Это позволяет аналитически описать вращающий момент как функцию углового сдвига между постоянным магнитом и электромагнитом.
2. **Модель движения сфероробота по неровным поверхностям.** Вывод уравнений динамики сферического робота с учетом модели поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлева, условий безотрывного движения и переключения режимов (скольжение/качение). Это обобщает предыдущие работы по сферическим роботам с механическим приводом, добавляя учет неровностей и верчения.
3. **Синтез оптимального управления.** Синтезировано управление как сумма программного и корректирующего, корректирующее управление выбрано в виде линейного закона управления с обратной связью по состоянию. Матрицы обратной связи вычисляются, используя линеаризацию уравнений динамики сферического робота в окрестности эталонной траектории и обобщенную H_2-норму.
4. **Численное моделирование и верификация.** Проведено численное моделирование движения сферического робота с электромагнитным приводом по неровной поверхности с учетом полученного оптимального управления. Получены временные зависимости для электрических токов и напряжений на электромагнитах, реализующие движение согласно полученному оптимальному управлению.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы. Теоретическая значимость исследования заключается в развитии математических методов моделирования и управления динамическими системами в робототехнике, с акцентом на интеграцию электромагнитных полей и механики движения. Предложенная квазистационарная модель электромагнитного взаимодействия магнитов на сферических оболочках расширяет существующие подходы к моделированию сферических роботов, такие как Лагранжевые методы, обогащая их электромагнитными аспектами, которые ранее не учитывались в динамике сферических роботов. Синтез оптимального управления вносит вклад в теорию многокритериальной оптимизации для динамических систем.

С практической точки зрения, разработанная математическая модель и программный комплекс являются фундаментом для дальнейшей эффективной разработки прототипа сферического робота с электромагнитным приводом и применении его в тех условиях, где классические роботизированные платформы являются неэффективными.

Методология и методы исследования. Математическая модель квазистационарного электромагнитного взаимодействия между магнитами основана на законе Био-Савара-Лапласа для индукции магнитного поля и законе Ампера для силы между магнитами, также использовался закон Кирхгофа для связи между электрическими токами в электромагнитах и электрическими напряжениями, подающимися на электромагниты. Для построения математической модели движения сферического робота по неровной поверхности использованы уравнения изменения импульса и момента импульса, модель поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлева и условия безотрывного от опорной поверхности движения.

Оптимальное управление, записанное в виде линейного закона управления с обратной связью по состоянию, определяется при помощи линеаризации уравнений динамики сферического робота вблизи эталонной траектории и обобщенной H_2-нормы. Поставленная задача оптимального управления сводится к решению задачи полуопределенного программирования.

Численное исследование модели сферического робота с электромагнитным приводом проводилось на платформе MATLAB, в частности для решения обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод, основанный на формулах численного дифференцирования, обобщающих формулы обратного дифференцирования Гира, для интегрирования использовался метод, основанный на адаптивном числовом интегрировании с использованием метода Гаусса-Кронрода. Для решения задачи полуопределенного программирования использовался пакет CVX.

На защиту выносятся следующие положения:

1. математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом способная описать его движение по различным поверхностям;
2. новая система оптимального управления движением сферического робота, основанная на линеаризации уравнений динамики сферического робота вблизи эталонной траектории и обобщенной H_2-норме;
3. конфигурация электромагнитного привода, основанная на размещении магнитов в вершинах многогранников;
4. программный комплекс, способный моделировать управляемые движения сферического робота с электромагнитным приводом вдоль заданной траектории по поверхностям с различными профилями;

5. результаты численного моделирования движения сферического робота, полученные при помощи программного комплекса;

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается использованием строго доказанных теорем и утверждений, а также результатами численных экспериментов. Исследуемые математические модели имеют физическую трактовку и не противоречат известным ранее результатам.

Основные результаты работы докладывались на ряде научных конференций и семинаров.

1. 24-я международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, Россия, 2024).
2. 12-я международная научная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, Россия, 2025).
3. 25-я международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, Россия, 2025).
4. Семинар на тему «Стабилизация и управление движением неполноприводных робототехнических систем» (ФТ «Сириус», Россия, 2026).
5. 30-я научная конференция по радиофизике (Нижний Новгород, Россия, 2026).

Публикации. Основные положения диссертации отражены в 5 статьях в рецензируемых научных журналах индексируемых в Scopus, в 2 тезисах докладов конференций, оба индексируются в РИНЦ.

В изданиях из списка рекомендованных ВАК и индексируемых в международных базах данных опубликованы следующие работы:

1. Balandin, D.V. Path tracking control of a spherical robot with pendulum-like driver / Balandin D.V., Biryukov R.S., Tuzikov A.M. // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2023. - Nizhny Novgorod, Russia. - 2024. - Springer, Cham. - Vol. 1914. - P. 176 – 189.
2. Balandin, D.V. Spherical robot with electromagnetic drive: modeling and control / Balandin D.V., Tuzikov A.M., Biryukov R.S., Polovinkin A.V. // Russian J. Nonlinear Dyn. - 2025. - Vol. 21, no. 4. - P. 649 – 671.
3. Tuzikov, A.M. Numerical modeling of the controlled motion of a spherical robot with electromagnetic drive / Tuzikov A.M. // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2025. - Nizhny Novgorod, Russia. - 2026. - Springer, Cham. - Vol. 2815. - P. 169 – 183.

4. Баландин, Д.В. Оптимальное управление движением сферического робота по неровной поверхности / Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Тузиков А.М. // Изв. РАН. ТиСУ. - 2026. - № 1. - С. 142 – 158.
5. Balandin, D.V. Modeling of controlled omnidirectional motion of a spherical robot with electromagnetic drive / Balandin D.V., Tuzikov A.M., Biryukov R.S. // Regul. Chaotic Dyn. - 2026. - Vol. 31, no. 5. - P. 751 – 777.

В сборниках тезисов докладов конференций (РИНЦ):

1. Тузиков, А.М. Математическое моделирование динамики сферического робота с электромагнитным приводом / Тузиков А.М. // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. - Нижний Новгород. - 2024. - С. 168 – 172.
2. Тузиков, А.М. Численное моделирование трехмерного движения сферического робота с электромагнитным приводом / Тузиков А.М., Баландин Д.В. // XXX Научная конференция по радиофизике. - Нижний Новгород. - 2026. - С. 479 – 482.

Личный вклад. Постановки задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами работ. Автором разработаны математическая модель и принцип построения электромагнитного привода, разработан программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом, проведены численные эксперименты.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 97 страницах, содержит 27 рисунков и 5 таблиц; список литературы включает 86 наименований. В приложении приведены свидетельство о государственной регистрации программного комплекса и фрагменты исходного кода разработанного программного комплекса.

Глава 1. Сферические роботы: история развития, области применения, конструкции и методы управления

1.1. История развития сферических роботов

Развитие сферических мобильных роботов связано с последовательным осознанием преимуществ сферической формы как носителя приводов и полезной нагрузки. К основным преимуществам относятся изотропность геометрии, защищённость внутреннего объёма, устойчивость к опрокидыванию и возможность движения за счёт качения по любым направлениям. Современные обзорные работы подчёркивают, что активный всплеск интереса к сферическим роботам пришёлся на последние два–три десятилетия, хотя первые инженерные и патентные решения относятся ещё к концу XIX – началу XX века (J. L. Tate U.S. Patent 508,588), (U.S. Patent 1,263,262) [28].

Подробный исторический обзор приведён в обзорных работах Ю.Л. Караваева [28] и A. Diouf и соавторов [29]. В этих работах показано, что первые конструкции представляли собой механические сферы с внутренними пружинными и маятниковыми механизмами, предназначенные преимущественно для развлекательных целей. Уже в ранних патентных описаниях фиксируются принципиальные идеи смещения центра масс и использования внутренних роликов для приведения оболочки в движение [30]. Однако отсутствие компактных источников энергии, надёжных приводов и систем управления долгое время ограничивало развитие данной ветви только областью игрушек.

Переход к научному изучению сферических роботов связан с появлением первых работ, в которых сфера рассматривается как управляемая неголономная система. Одним из ключевых этапов стала работа A. Halme и соавторов [1], в которой предложен один из первых инженерных прототипов управляемого сферического робота и сформулированы задачи моделирования и управления сферической платформой, катящейся без проскальзывания по плоскости. В дальнейшем эти идеи развиваются в исследованиях по динамическому моделированию и анализу управляемости сферических систем [31–34].

В начале 2000-х годов появляются первые обзоры, специально посвящённые конструкциям сферических роботов. Классическим является обзор V.A. Crossley [30], в котором приведена классификация существовавших к тому моменту приводов сфероробота (маятниковые, колёсные, манипулирующие центром масс и др.) и обсуждаются основные преимущества и недостатки сферической архитектуры. В более поздних обзорах Ю.Л. Караваева [28] и A. Diouf и соавт. [29] приводится уточненная классификация приводов, кроме того, в работе [29] приводится статистика опубликованных работ по каждому из классов приводов сфероробота (см. рисунок 1.1), она свидетельствует о возросшем интересе к

сферическим роботам в целом и к изучению механизмов приведения робота в движение, в частности.

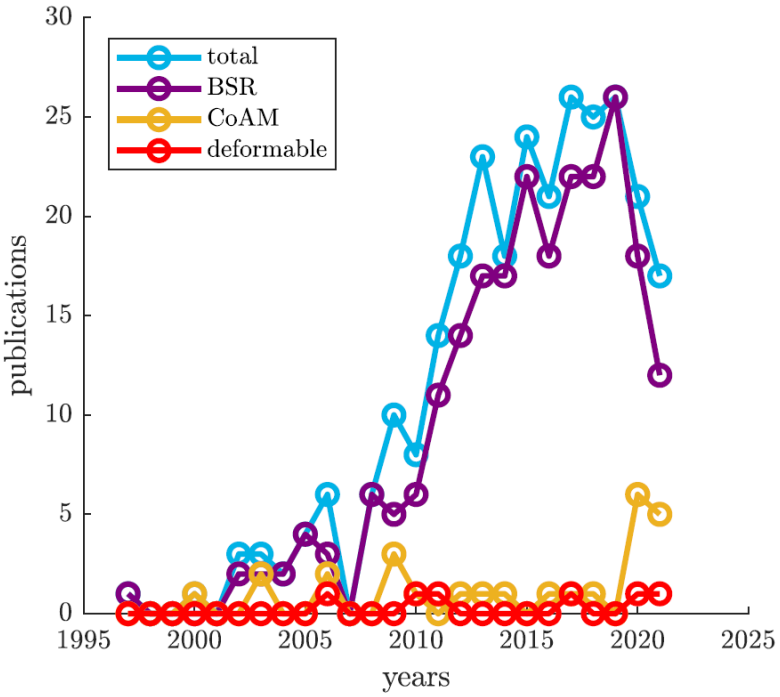


Рисунок 1.1 – Количество публикаций, посвященных различным классам приводов сфероробота, в зависимости от года, total – общее количество опубликованных работ, BSR – барицентрический привод, CoAM – привод на основе сохранения углового момента, deformable – привод, основанный на деформирующейся оболочке [29].

Знаковым шагом стало появление первых автономных робототехнических сферических платформ, таких как Roball [35] – сферический робот-игрушка с внутренним маятниковым приводом, инерциальными сенсорами и элементами поведенческого управления, прототип изображен на рисунке 1.2a. Roball показал, что сферический робот может использоваться не только как объект фундаментальной механики, но и как интерактивный образовательный и исследовательский инструмент. Аналогичные по духу системы были впоследствии реализованы в коммерческих продуктах (Sphero, BB-8 и др.), однако их подробное описание обычно остаётся в технической документации и патентах.



(a) (b)

Рисунок 1.2 – (a) Первый прототип Roball созданный F. Michaud и его коллегами [35]; (b) прототип сельскохозяйственного робота ROSPHERE [36].

Следующий этап связан с появлением специализированных сферических роботов для прикладных задач. Отдельное направление образуют сельскохозяйственные и инспекционные системы, такие как ROSPHERE [36, 37]. В серии работ J. D. Hernández и соавторов предложен сферический робот для измерения влажности и других параметров посевов и крупной инфраструктуры; описаны конструкция, двухстепенной маятниковый привод, результаты полевых испытаний и влияние повторных проходов робота на структуру почвы, прототип изображен на рисунке 1.2b.

Интенсивное развитие сферических роботов в 2010-х и 2020-х годах отражено в современных обзорах [28, 29, 38]. В частности, A. Diouf и соавторы [29] приводят систематическую классификацию конструкций (по типу привода, масштабу, целевому применению), методов моделирования (метод Эйлера-Лагранжа, метод Ньютона-Эйлера, метод Кейна) и методов управления (оптимальное управление, робастное управление, адаптивное управление и др.), что позволяет рассматривать сферический робот как устоявшийся класс мобильных робототехнических систем.

1.2. Области применения сферических роботов

Современные сферические роботы используются в ряде прикладных областей, где важны защищённость внутренней аппаратуры, способность перемещаться в условиях сложного рельефа и минимальное воздействие на окружающую среду. Обзор [28] и систематическое исследование [29] выделяют следующие основные направления: образовательная и

развлекательная робототехника, охрана и инспекция, сельское хозяйство и экологический мониторинг, экстремальные и космические условия, сервисная робототехника.

1.2.1. Образовательная и развлекательная робототехника

Коммерческие сферические роботы (Sphero, BB-8 и др.) активно применяются для обучения программированию и основам робототехники. Хотя подробная научная документация по этим продуктам ограничена, принципы их работы и архитектура хорошо коррелируют с исследованиями Roball [35], где показано, что:

- сферический корпус обеспечивает безопасность взаимодействия с детьми и устойчивость к ударам;
- внутренний маятниковый привод и датчики позволяют реализовывать сложные паттерны движения;
- программируемый интерфейс делает платформу удобной для образовательных целей.

Сферические роботы используются как в школьных, так и в университетских курсах по робототехнике, где они служат удобным объектом для освоения кинематического и динамического моделирования, работы с сенсорикой и алгоритмами управления.

1.2.2. Разведка, охрана и мониторинг

Для задач охраны периметра, инспекции инфраструктуры и мониторинга окружающей среды сферические роботы привлекательны благодаря малой визуальной заметности, износоустойчивости и устойчивости к опрокидыванию. Типичным примером является ROSPHERE, применяемый не только в сельском хозяйстве, но и для инспекции крупной инфраструктуры.

В работах [36, 37] показано, что сферическая платформа позволяет проводить измерения в труднодоступных областях, снижать риск механических повреждений сенсоров и обеспечивать устойчивое движение по неровной поверхности. Аналогичные идеи реализуются в роботах для охраны и видеонаблюдения (GroundBot и др.), которые анализируются в обзорах [28, 29].

1.2.3. Сельское хозяйство и экологический мониторинг

Сельскохозяйственные применения являются одним из наиболее успешно реализованных направлений. В серии работ J. D. Hernández и соавторов [36, 37] описываются конструкция и испытания ROSPHERE на полях: робот перемещается внутри посевов, измеряя влажность и другие параметры, причём его воздействие на структуру почвы существенно меньше, чем у традиционной самоходной техники. В [36] показано, что сферический корпус с

гладкой поверхностью и относительно небольшой площадью контакта позволяет снизить уплотнение почвы и уменьшить повреждение растений.

В обзоре A. Diouf и соавторов [29] и отдельных работах по сферическим платформам для мониторинга отмечается, что требования к сельскохозяйственным роботам включают работу в условиях пыли, влаги, неровного рельефа и изменяющегося коэффициента сцепления. Это стимулирует исследования робастных и адаптивных алгоритмов управления, способных обеспечивать надёжное движение при неполной информации об окружающей среде [29, 39, 40].

1.2.4. Экстремальные и космические условия

В ряде исследований сферические роботы рассматриваются как кандидаты для использования в экстремальных и внеземных условиях. Обзор [28] подчёркивает преимущества сферического корпуса при работе на пересечённой местности, в том числе при наличии каменистого грунта и значительных перепадов высот. В работах по динамическому моделированию сферических роботов для экстремальных условий учитываются внешние возмущения, скольжение и вариации сцепления [29, 32, 41].

Кроме того, в литературе обсуждаются концепции сферических роботов, в том числе комбинирующих маятниковые приводы и дополнительные исполнительные устройства (реакционные колёса, жидкостные приводы), что позволяет обеспечивать движение по сложному рельефу и выполнять манёвры типа «перекатывания через препятствие» [15].

1.2.5. Сервисная робототехника и «умный дом»

Сервисные сферические роботы (например, Ballie от Samsung) демонстрируют возможности использования сферических платформ в домашних условиях: робот выступает мобильным ассистентом, взаимодействующим с пользователем и инфраструктурой «умного дома» [42]. В таких приложениях требования концентрируются на плавности движения, низком уровне шума, безопасном контакте с человеком и эстетичности конструкции.

Сферическая форма здесь оказывается удобной благодаря отсутствию острых углов, возможности компактного размещения оборудования внутри корпуса и лёгкости перемещения по помещению. Перспективность использования малошумных приводов и отказ от сложных механических передач делает перспективными бесконтактные (в том числе электромагнитные) решения.

1.3. Классификация приводов сферических роботов

Современные обзоры [28, 29, 38] предлагают классифицировать приводы сферических роботов по принципу формирования момента, геометрии внутренних механизмов и характеру взаимодействия с оболочкой. Наиболее распространённой является классификация на следующие классы:

1. барицентрические приводы (маятники);
2. приводы на основе сохранения углового момента (роторы, маховики, гироскопы);
3. внутренние колёсные и омни-колёсные платформы;
4. приводы с деформируемой или специальной оболочкой (включая жидкостные системы);

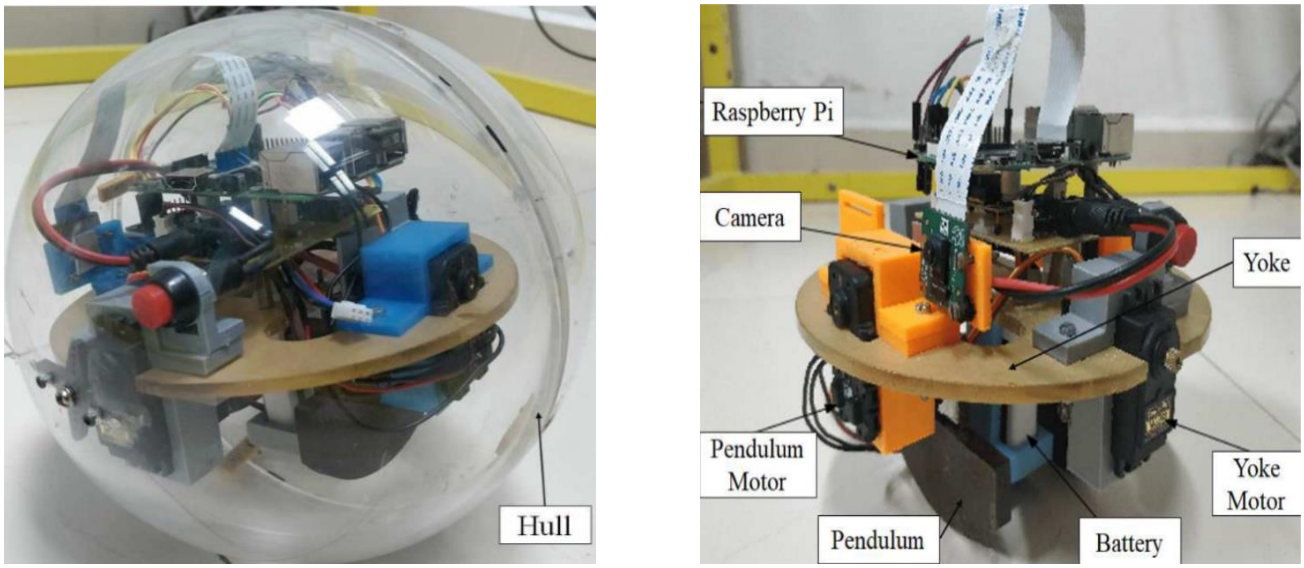
1.3.1. Барицентрические приводы

Принцип работы барицентрических приводов заключается в смещении внутренней массы относительно геометрического центра сферы. Момент силы тяжести, действующий на маятник, создаёт крутящий момент, приводящий к качению оболочки. Маятниковые системы широко используются благодаря простоте конструкции и хорошей тяге при умеренных скоростях.

Детальное рассмотрение маятникового сферического робота приведено, в частности, в работах Y. Bai, M. Svinin и M. Yamamoto [34], где построена динамическая модель маятниково-приводимого сферического робота и решена задача планирования динамически реализуемых траекторий.

В работах Д.В. Баландина и соавторов [43] рассматривается управление сферическим роботом с маятниковым приводом, выводится математическая модель и строятся законы управления в виде обратной связи по состоянию, обеспечивающие движение по заданной траектории. Более современные исследования (A. Singhal и соавторы [44], R. Lin и соавторы [45]) анализируют нелинейную динамику маятниковых сферических роботов (включая явления «воблинга» и прецессии) и предлагают адаптивные и робастные алгоритмы управления. Модель сферического робота, предложенная A. Singhal и соавторами в работе [44], изображена на рисунке 1.3. Существенный вклад в развитие нелинейных методов управления маятниковыми сферическими роботами внесён также в работе Y. Cai [41], где предложен подход нелинейного управления для привода маятникового типа.

Маятниковые приводы активно используются и в практических приложениях, в частности в роботах Roball [35] и ROSPHERE [36, 37], а также в ряде учебных и лабораторных стендов, что делает их одной из наиболее изученных и распространённых конструктивных схем.



(a) (b)

Рисунок 1.3 – Образец сферического робота с маятниковым приводом собранный A. Singhal и коллегами [44], (a) собранный образец; (b) компоненты привода.

1.3.2. Приводы на основе сохранения углового момента (роторы, маховики)

Данный тип привода использует изменение внутреннего углового момента системы за счёт вращения роторов или маховиков. Такие схемы позволяют реализовывать вращения без заметного смещения центра масс, что полезно для задач точного ориентационного управления.

R. Mukherjee и соавторы [32] рассматривают задачу планирования движения сферического робота с внутренними роторами как частный случай классической задачи «шар – плоскость», используя аппараты дифференциальной геометрии. Подробный анализ сферического робота, приводимого в движение двумя взаимно ортогональными роторами, выполнен в работе V.A. Joshi, R.N. Banavar и R. Hippalgaonkar [31], где построена динамическая модель, исследуются свойства неголономной системы и обсуждаются вопросы синтеза управляющих воздействий, фотография их робота приведена на рисунке 1.4. В ряде других работ анализируются конструкции с двумя и более роторами, исследуются вопросы управляемости и синтеза управляющих моментов [33].



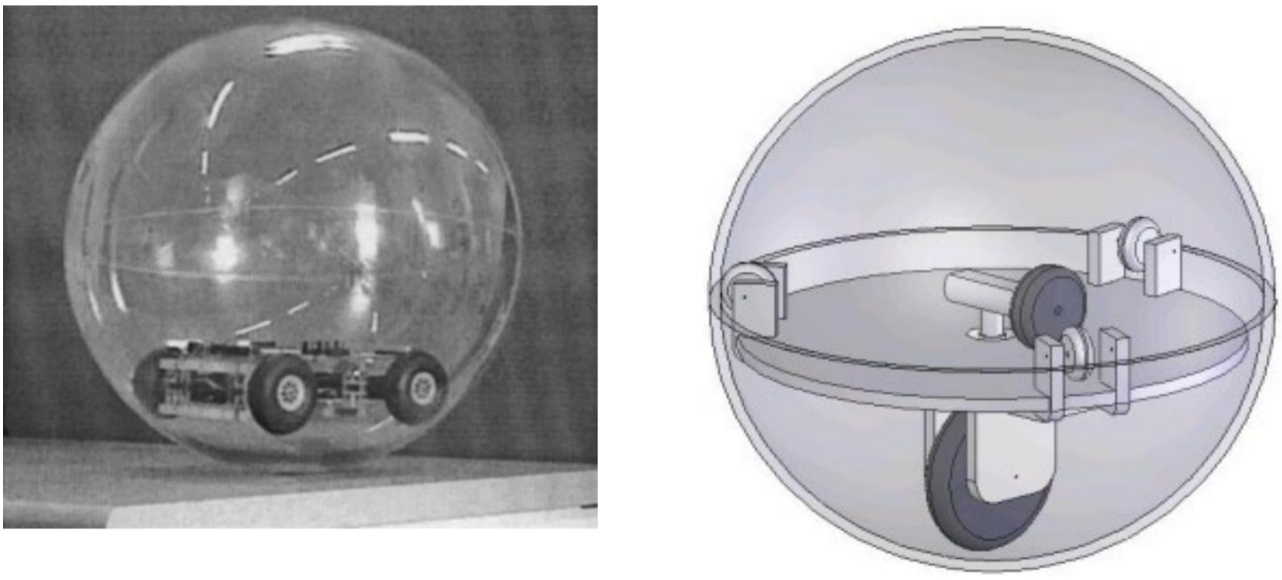
Рисунок 1.4 – Фотография сфероробота с двумя внутренними роторами собранного Vrunda A. Joshi и коллегами в Indian Institute of Technology Bombay [31].

Приводы на основе сохранения углового момента обеспечивают высокую маневренность, но требуют точной балансировки, сложных алгоритмов управления, а также могут иметь повышенные требования к мощности приводов. Обзор [29] подчёркивает, что применение чисто реактивных приводов особенно интересно в задачах ориентации и стабилизации, в том числе в рамках проектов космической робототехники.

1.3.3. Внутренние колёсные и омни-колёсные платформы

В колёсных схемах внутри сферы располагается тележка с колёсами или омни-колёсами, контактирующими с внутренней поверхностью оболочки. Управляя скоростями колёс, можно задавать направление движения и скорость сфероробота.

Коротко опишем некоторые работы посвященные сферороботу с данным приводом. J. Alves и J. Dias [11] рассматривали проект сферического робота с внутренней тележкой, провели динамическое моделирование и разработали контур управления движением по заданной траектории, модель их сфероробота представлена на рисунке 1.5a. Q. Zhan, Y. Cai и C. Yan [10] представили всенаправленный сферический робот и провели экспериментальные исследования его движений, 3D модель данного робота представлена на рисунке 1.5b. В работе Ю.Л. Караваева и А.А. Килина [46] предложена строгая неголономная модель сферического робота с внутренней омни-платформой, а также рассмотрены задачи стабилизации и следования по траектории с учётом динамики.



(a) (b)

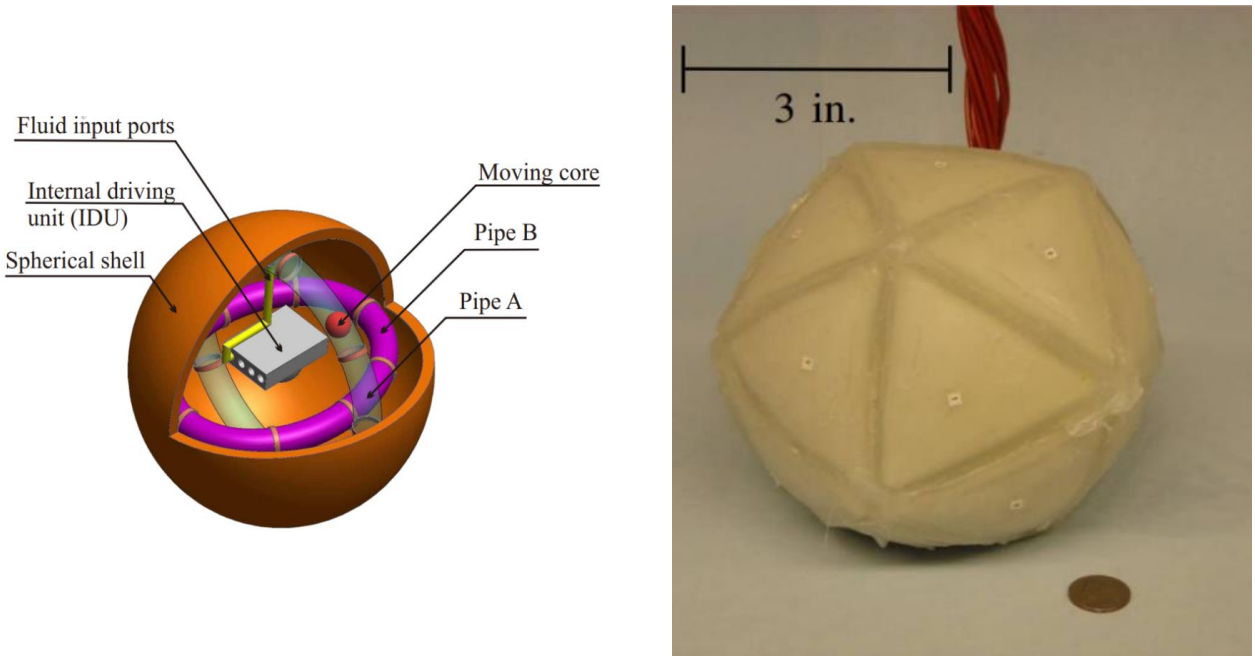
Рисунок 1.5 – Образец сферического робота с (a) внутренней тележкой [11]; (b) колесной платформой [10].

Дополнительно в исследованиях C.-H. Chiu и соавторов [47] описан всенаправленный сферический мобильный робот, управляемый с помощью нейросетевых и робастных методов, учитывающих нелинейность и внешний шум. Таким образом, колёсные и омни-конструкции предоставляют высокую маневренность и скорость, но требуют тщательного учёта трения и условий контакта.

1.3.4. Приводы с деформируемой оболочкой и жидкостные приводы

Отдельный класс образуют конструкции, в которых движение обеспечивается за счёт деформации оболочки или внутренних жидкостных камер. В работе S.A. Tafrishi и соавторов [15] предложен перекатывающийся сферический робот с жидкостным приводом, где используется перемещение жидкости внутри сферической оболочки для осуществления движения; проведены моделирование и анализ траекторий, предлагаемый в этой работе сфероробот представлен на рисунке 1.6a.

В исследовании [48] авторы представили прототип робота под названием JSEL (Jamming Skin Enabled Locomotion). Робот имеет форму икосаэдра (20-гранника) из 20 треугольных силиконовых ячеек, заполненных специальной суспензией, изменение давления которой приводит к деформации оболочки. Изображение этого робота приведено на рисунке 1.6b.



(a) (b)

Рисунок 1.6 – (a) Образец сферического робота с жидкостным приводом, представленный в работе S.A. Tafrishi и соавторов [15]; (b) прототип робота JSEL рядом с четвертью доллара США для масштаба [48].

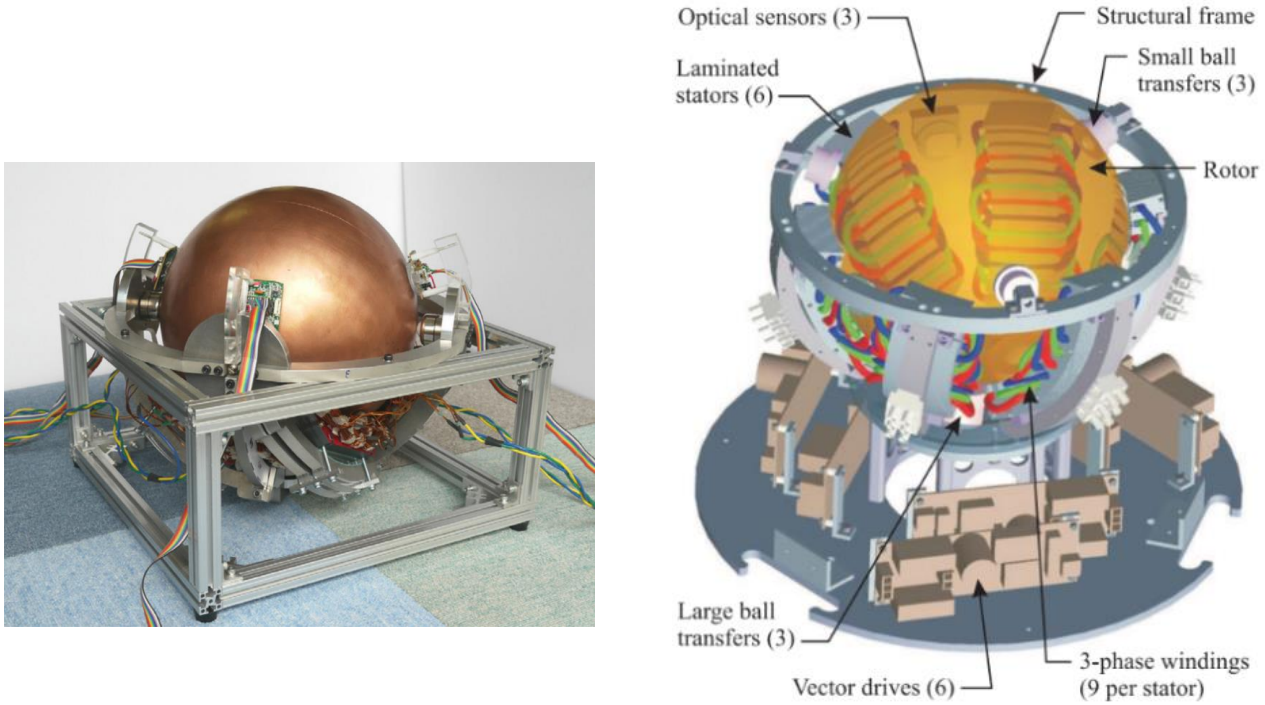
Подобные решения пока относятся к области исследовательских прототипов и микророботов, однако обзор [29] подчёркивает перспективность мягких и жидкостных приводов для задач, где важна высокая степенная свобода и способность к преодолению сложных препятствий.

1.3.5. Электромагнитные приводы и сферические двигатели

Особый интерес представляют электромагнитные приводы, реализуемые в виде многостепенных сферических двигателей. В отличие от механических схем (маятниковых, колёсных и др.), электромагнитные приводы потенциально обеспечивают бесконтактную передачу момента, высокую точность позиционирования и уменьшение числа механических узлов.

Классической работой в этой области является статья M. Kumagai и R.L. Hollis [49], где описан трёхстепенной сферический индукционный двигатель (SIM) и показана возможность реализации крутящего момента вокруг трёх осей с использованием нескольких индукторов и системы обратной связи по скорости, реализуемой, в том числе, на основе оптических датчиков, фото данного мотора представлено на рисунке 1.7a. В последующих исследованиях R.L. Hollis и соавторы [50] предложили шестистаторную конфигурацию SIM с повышенным крутящим

моментом и улучшенными динамическими характеристиками, модель приведена на рисунке 1.7b.



(a) (b)

Рисунок 1.7 – (a) Фото сферического индукционного мотора, представленного M. Kumagai и R.L. Hollis в работе [49]; (b) модель шестистаторного сферического индукционного мотора [50].

K.N. Souza и соавторы [51] рассматривают трёхкатушечный сферический двигатель с постоянными магнитами, строят электромагнитную модель и демонстрируют управление ориентацией ротора. H. Li и соавторы [52] исследуют распределение момента трения в сферическом двигателе с постоянными магнитами на основе мультифизического моделирования, а K. Bai, H. Yan и K.-M Lee [53] предлагают робастное управление сферическим двигателем в движущейся системе координат. Новые работы (например, X. Guo и соавторы [54]) используют методы машинного обучения для моделирования электромагнитного момента, что позволяет улучшить точность расчёта и управления.

Хотя указанные исследования относятся к двигателям, а не к полным робототехническим платформам, они задают фундаментальную базу для построения сферического робота с электромагнитным приводом. Модели поля, момента и трения, разработанные в этих работах, могут быть использованы для синтеза алгоритмов управления движением робота в пространстве.

1.4. Подходы к управлению движением сферических роботов

Сферические роботы представляют собой неголономные, нелинейные системы. Это делает задачу управления нетривиальной и стимулирует развитие целого спектра методов: от классических ПИД-регуляторов до геометрических, робастных и интеллектуальных алгоритмов.

1.4.1. Классические методы управления и обратная динамика

Ранние работы по управлению сферическими роботами использовали классические методы автоматического управления, опирающиеся на явные модели динамики. В статье J. Alves и J. Dias [11] построена модель сферического робота с внутренней тележкой и разработан ПИД-регулятор, обеспечивающий движение по траектории. Д.В. Баландин и соавторы [43] рассматривают управление маятниковым сферическим роботом на основе обратной связи по состоянию, задающей ускорения и моменты, необходимые для следования по заданной траектории.

В ряде работ предлагается использовать обратную динамику и линейно-квадратичные регуляторы (LQR) для стабилизации и следования по траектории [31, 32, 41, 11]. Подход, основанный на обратной динамике, позволяет компенсировать нелинейные элементы модели, но чувствителен к параметрическим неопределённостям и неучтённым силам (трение, сопротивление среды и др.) [29, 39].

1.4.2. Геометрические методы и управление неголономными системами

Геометрический подход к управлению сферическими роботами опирается на представление конфигурационного пространства в виде главного расслоения и анализ неголономных связей. R. Mukherjee и соавторы [32] рассматривали задачу планирования движения для сферического робота, используя теорию оптимального управления и дифференциальную геометрию.

В работе V. Muralidharan и A.D. Mahindrakar [21] исследуется геометрическая управляемость и стабилизация сферического робота с внутренними инерционными дисками. Показано, что система обладает необходимыми свойствами управляемости, предложены законы управления, обеспечивающие стабилизацию. T. Ohsawa [55] применяет геометрические методы для кинематического управления сферическим роботом, вводит понятие геометрической фазы и решает задачу оптимизации траекторий в этом формализме.

Такие подходы позволяют глубже понять структуру системы и возможности управления, но часто приводят к сложным алгоритмам, трудным для реализации в реальном времени без дополнительных упрощений.

1.4.3. Робастные, скользящие и адаптивные методы

С учётом сильной нелинейности и наличия неопределённостей широко используются робастные и адаптивные методы управления. M. Yue [56] предложил адаптивный скользящий режим для сферического робота с оценкой параметров качения; показано, что предлагаемый алгоритм обеспечивает устойчивое следование по траектории в условиях неидеальной модели.

R. Sadeghian и соавторы [57] разработали адаптивный SM-регулятор (sliding mode) для нового типа сферического робота и продемонстрировали его устойчивость при наличии неопределённостей и внешних возмущений. В работах Y. Bai, M. Svinin, M. Yamamoto [34] и J. Huo и соавторов [40] рассматриваются различные варианты робастных и адаптивных регуляторов для маятниковых сферических роботов, обеспечивающих движение по геодезическим и более сложным траекториям.

1.4.4. Интеллектуальные и нечёткие методы

Интеллектуальные методы управления используются для компенсации неучтённой динамики и адаптации к изменениям внешней среды. E. Kayacan и соавторы [39] предложили адаптивный нейро-нечёткий регулятор, обучаемый по теории скользящих режимов, для сферического робота, движущегося по поверхности с переменным коэффициентом сцепления; показано значительное улучшение переходных процессов.

В работе E. Kayacan [58] рассматривается управление скоростью сферического робота на основе серого прогнозирования и нечёткой логики, а в исследованиях C.-H Chiu и соавторов [50], J. Guo и соавторов [59], Y. Zhai и соавторов [60] предлагаются различные варианты нечётких и нечётко-ПИД регуляторов для всенаправленных, амфибийных и крупногабаритных сферических роботов. Эти подходы позволяют повысить устойчивость к изменению свойств поверхности и параметров робота, однако требуют значительного объёма экспериментальных данных для настройки.

1.4.5. Управление маятниковыми сферическими роботами

Для маятниковых приводов разработан отдельный класс методов управления. Д.В. Баландин и соавторы [43] предложили законы управления в виде линейной обратной связи по состоянию, обеспечивающие движение по заданной траектории. Y. Bai, M. Svinin и M. Yamamoto [34] решают задачу планирования движения с учётом того, что не всякая кинематически реализуемая траектория динамически осуществима для маятникового привода; выделяется класс траекторий, соответствующих геодезическим линиям и допускающих динамическую реализацию.

Новые работы A. Singhal и соавт. [44] анализируют дополнительные эффекты, такие как «воблинг» и прецессия внутреннего узла при поворотах, и разрабатывают адаптивные

алгоритмы регулирования, учитывающие сильную связь между продольным и поперечным движением.

1.4.6. Управление сферическими электромагнитными приводами

Для систем с электромагнитным приводом ключевыми являются методы управления многостепенными сферическими двигателями. M. Kumagai и R.L. Hollis [49] разработали ПИД-регуляторы для сферического индукционного двигателя, демонстрирующие высокую скорость реакции и точность отслеживания угловой скорости и ориентации. В более поздней работе по шестистаторному SIM [50] представлены улучшенные алгоритмы управления, обеспечивающие крутящие моменты до 8 Н·м при характерном времени нарастания порядка 100 мс.

K.N. Souza и соавторы [51] рассматривают управление трёхкатушечным сферическим двигателем с постоянными магнитами с учётом нелинейной зависимости момента от угла; H. Li и соавторы [52] анализируют влияние момента трения и предлагают методы снижения его негативного влияния. K. Bai, H. Yan и K.-M. Lee [53] синтезируют робастный регулятор для сферического двигателя в движущейся системе координат, что важно для интеграции таких приводов в мобильные платформы. В работе X. Guo и соавторов [54] используются алгоритмы машинного обучения для построения модели момента по данным численных и экспериментальных исследований; показано, что такие модели могут существенно улучшать прогноз качества управления.

Для сферического робота с электромагнитным приводом эти результаты имеют принципиальное значение. В отличие от механических приводов, требуется одновременно учитывать распределение магнитного поля, нелинейную зависимость момента от токов и углов, а также взаимодействие электромагнитного привода с динамикой оболочки. Разработка математических моделей и алгоритмов управления такими системами является актуальной задачей, к которой и будет переходить диссертация.

1.5 Выводы по главе 1

В главе представлен обзор истории развития сферических роботов, областей их применения, конструкций приводов и подходов к управлению. На основе анализа современных работ можно сделать следующие выводы:

1. Сферические роботы сформировались как самостоятельный класс мобильных робототехнических систем, обладающих рядом уникальных преимуществ и активно исследуемых в международном научном сообществе [28–30, 34–38].
2. Практические приложения охватывают образование, сельское хозяйство, мониторинг инфраструктуры, экстремальные и потенциально космические условия, а

также сервисную робототехнику, при этом сферическая форма играет ключевую роль в обеспечении защищённости и проходимости [28, 29, 35–37, 42].

3. Классификация приводов включает маятниковые, приводы на основе сохранения углового момента, колёсные/omni-колесные, деформируемые и электромагнитные, каждая из которых имеет свои области предпочтительного применения и особенности с точки зрения моделирования и управления [31–33, 36].

4. Современные методы управления опираются на развитые модели неголономной динамики и включают широкий спектр классических, геометрических, робастных и подходов, основанных на искусственном интеллекте [11, 36, 56–60].

5. Электромагнитные сферические приводы представляют наиболее перспективное направление для создания высокоточных сферических роботов, что требует разработки детализированных моделей поля и момента, а также методов управления, обеспечивающих желаемые траектории движения с учётом неголономных ограничений.

Эти выводы обосновывают актуальность дальнейшего исследования математического моделирования и управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом, которому посвящены последующие главы диссертации.

Глава 2. Математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом

2.1 Конструктивные параметры сферического робота с электромагнитным приводом

Сферический робот с электромагнитным приводом представляет из себя две концентрические сферические оболочки: внешнюю с радиусом R_{out} и внутреннюю с радиусом r_{in} ($R_{out} > r_{in}$), на внешней оболочке расположены постоянные магниты, а на внутренней электромагниты, количество магнитов и принцип их расположения является предметом обсуждения, который будет поднят в следующих главах. На рисунке 2.1 представлено схематическое изображение робота, в котором используются один постоянный магнит и один электромагнит. Будем считать, что внешняя сферическая оболочка с установленными на ней постоянными магнитами имеет массу M_{out}, момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр, равен J_{out}, при условии симметричного расположения магнитов. Аналогичные параметры для внутренней сферической оболочки с установленными на ней электромагнитами равны соответственно m_{in} и j_{in}. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, центр которой совпадает с геометрическим центром сферического робота, ось z направлена вертикально вверх, ось x направлена слева направо, а ось y направлена от нас в плоскость рисунка. Также введем угол β, отвечающий за угловое расстояние между постоянным магнитом и электромагнитом, в плоском случае определим его как $\beta = \alpha_{in} - \alpha_{out}$, где α_{in} – угловое положение электромагнита, α_{out} – угловое положение постоянного магнита, угол поворота отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

В первую очередь необходимо определиться с масс-геометрическими параметрами сферического робота и его компонентов, поэтому возникает необходимость описать каждый составной элемент робота. Внешняя и внутренняя сферические оболочки представляют собой полые сферы, стенки которых выполнены из пластмассы, кроме того, для повышения прочности внешняя оболочка сферического робота покрыта резиной, которая по своей структуре схожа с резиновой покрышкой автомобильного колеса. Постоянный магнит представляет собой цилиндр, выполненный из NdFeB, так как магниты такой компоновки обладают большой коэрцитивной силой и высокой остаточной намагниченностью. Электромагниты представляют собой толстые цилиндрические катушки (соленоиды) с намоткой из медной проволоки.

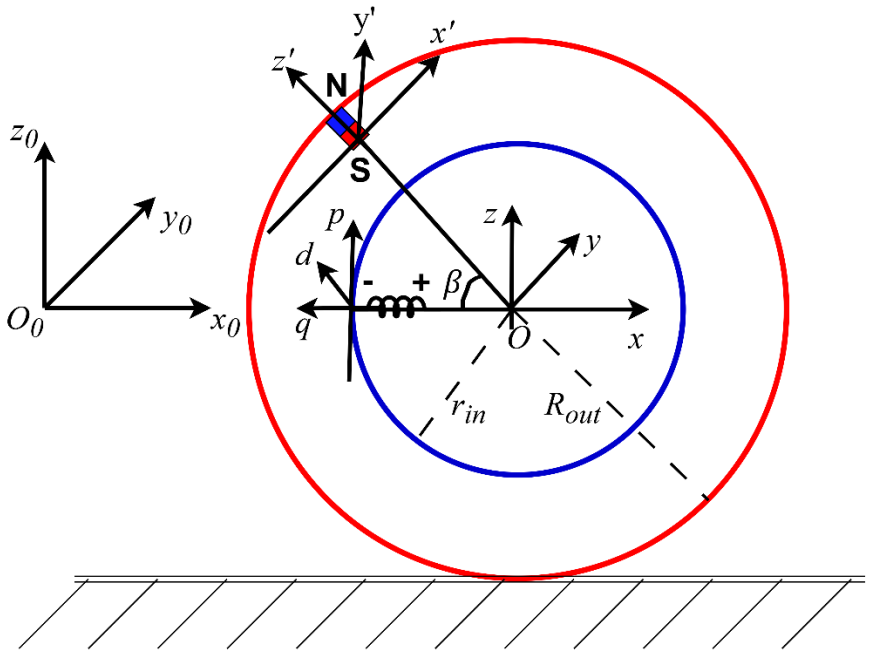


Рисунок 2.1 – Схематическое изображение сферического робота с электромагнитным приводом с одним постоянным магнитом и одним электромагнитом.

2.2 Математическая модель электромагнитного привода

Данный раздел посвящен построению математической модели электромагнитного привода, в частности, получено выражение для индукции магнитного поля цилиндрического постоянного магнита, а также найдена сила, с которой поле постоянного магнита действует на электромагнит. Кроме того, на основании анализа вращающего момента сферического робота создаваемого вследствие взаимодействия одной пары постоянный магнит – электромагнит сформулирован принцип размещения магнитов на сферических оболочках в плоском случае. Основные результаты данного раздела опубликованы в работах [61, 62].

2.2.1 Анализ магнитного поля одиночного цилиндрического постоянного магнита

В первую очередь для формирования математической модели электромагнитного привода необходимо записать выражения для поля, создаваемого постоянным магнитом, в некоторой точке $P(x, y, z)$, находящейся вне магнита. Для этого зададим высоту цилиндрического постоянного магнита, равную h_0 , и радиус – r_0 . Схема отдельного цилиндрического постоянного магнита приведена на рисунке 2.2. Так как поле в точке $P(x, y, z)$ возбуждается только поверхностными токами, текущими по поверхности постоянного магнита, согласно закону Био-Савара-Лапласа, индукция магнитного поля в точке P определяется выражением:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{[\boldsymbol{J}\, \mathrm{d}S \times \boldsymbol{R}]}{R^3}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор, направленный от элемента площади токонесущей поверхности постоянного магнита $\mathrm{d}S$ до точки P, μ_0 – магнитная постоянная, $\boldsymbol{J}$ – ток, текущий по цилиндрической поверхности постоянного магнита. Введем прямоугольную систему координат $O_1x'y'z'$ начало которой совпадает с центром основания постоянного магнита, а направление оси z' совпадает с осью постоянного магнита (см. рисунок 2.2), кроме того, внутри этой системы координат введем цилиндрические координаты r_0, φ, $z_0{}'$ описывающие положение

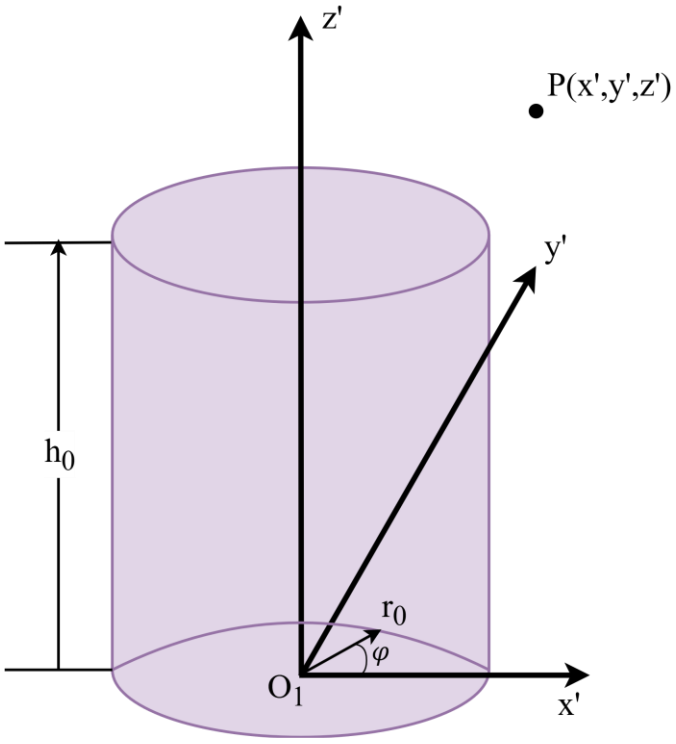


Рисунок 2.2 – Схематичное изображение постоянного магнита.

точек, расположенных на поверхности постоянного магнита. Предположим, что продольная компонента тока $J_{z'} = 0$, в этом случае компоненты тока в системе координат $Oxyz$ имеют вид: $J_x = -J\sin(\varphi)\sin(\alpha_{out})$, $J_y = J\cos(\varphi)$, $J_z = J\sin(\varphi)\cos(\alpha_{out})$, $J = B_r/\mu_0$. Векторное произведение из уравнения (2.1) будет иметь вид:

$$\boldsymbol{J}\mathrm{d}S \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -Jr_0\sin(\varphi)\sin(\alpha_{out})\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z_0' & Jr_0\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z_0' & Jr_0\sin(\varphi)\cos(\alpha_{out})\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z_0' \\ x-\tilde{x} & y-\tilde{y} & z-\tilde{z} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где $\tilde{x} = r_0\cos(\varphi)\sin(\alpha_{out}) - z_0'\cos(\alpha_{out}) - R_{out}\cos(\alpha_{out})$, $\tilde{y} = r_0\sin(\varphi)$, $\tilde{z} = -r_0\cos(\varphi)\cos(\alpha_{out}) - z_0'\sin(\alpha_{out}) - R_{out}\sin(\alpha_{out})$ – координаты точек на поверхности постоянного магнита в системе координат $Oxyz$.

Подставляя (2.2) в (2.1), найдем выражение для индукции магнитного поля в точке $P(x, y, z)$ создаваемое поверхностным током $\boldsymbol{J}$ и записанное в покомпонентной форме [61, 62].

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{B_r r_0}{4\pi}\displaystyle\int_0^{h_0}\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos(\varphi)[z-\sin(\alpha_{out})(R_{out}+z_0')]+\cos(\alpha_{out})[r_0-y\sin(\varphi)]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z_0'}{((x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2+(z-\tilde{z})^2)^{3/2}} \\ B_y = \dfrac{B_r r_0}{4\pi}\displaystyle\int_0^{h_0}\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin(\varphi)[x\cos(\alpha_{out})+z\sin(\alpha_{out})-R_{out}-z_0']\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z_0'}{((x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2+(z-\tilde{z})^2)^{3/2}} \\ B_z = \dfrac{B_r r_0}{4\pi}\displaystyle\int_0^{h_0}\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos(\varphi)[\cos(\alpha_{out})(R_{out}+z_0')-x]+\sin(\alpha_{out})[r_0-y\sin(\varphi)]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z_0'}{((x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2+(z-\tilde{z})^2)^{3/2}} \end{cases} . \quad (2.3)$$

2.2.2 Преобразование координат точек электромагнита

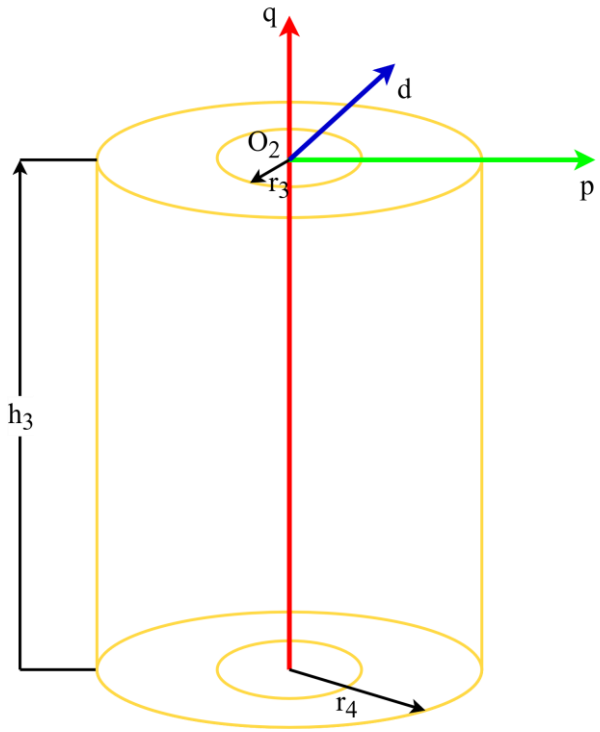


Рисунок 2.3 – Схематичное изображение электромагнита.

Так как нас интересует создаваемое постоянным магнитом магнитное поле в области расположения электромагнита, удобно ввести локальную систему координат, связанную с электромагнитом. Центр этой системы координат совпадает с центром верхней поверхности цилиндрического электромагнита, направление оси q совпадает с осевым направлением электромагнита. Схема катушки изображена на рисунке 2.3. На нем h_3 – это длина катушки, r_3, r_4 – внутренний и внешний радиусы катушки соответственно. Кроме того, так как катушка представляет из себя толстостенный цилиндр, на основе системы координат O_2pdq удобно ввести цилиндрические координаты (ρ, θ, z_0), описывающие положения точек электромагнита. В итоге, координаты точек заключенных в объеме электромагнита в системе координат $Oxyz$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\alpha_{in}) + z_0\cos(\alpha_{in}) + r_{in}\cos(\alpha_{in}) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = -\rho\cos(\theta)\cos(\alpha_{in}) + z_0\sin(\alpha_{in}) + r_{in}\sin(\alpha_{in}) \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2.3 Сила взаимодействия постоянного магнита с электромагнитом

Выражение для силы $\boldsymbol{F}$, которая действует на токи, локализованные в объеме электромагнита V и описываемые объемной плотностью тока $\boldsymbol{I}$, со стороны магнитного поля, генерируемого токами, текущими в постоянном магните, можно записать, используя закон Ампера, имеющий следующий вид:

$$\boldsymbol{F} = \int_V [\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}]\mathrm{d}V, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{B}$ – трехмерное магнитное поле, действующее на катушку. В правом ортонормированном базисе векторное произведение, входящее в уравнение (2.5), можно записать как:

$$[\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ I_x & I_y & I_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Предположим, что намотка катушки очень плотная, то есть составляющая тока в направлении по оси q практически равна нулю, тогда $I_x = -I_0\sin(\theta)\sin(\alpha_{in})$, $I_y = I_0\cos(\theta)$, $I_z = I_0\sin(\theta)\cos(\alpha_{in})$, $I_0 = IN/[h_3(r_4 - r_3)]$, где I – ток, текущий по обмотке электромагнита, N –число витков в обмотке электромагнита. Выражение (2.6) принимает вид:

$$[\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -I_0\sin(\theta)\sin(\alpha_{in}) & I_0\cos(\theta) & I_0\sin(\theta)\cos(\alpha_{in}) \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{2.7}$$

Элементарный объем представим в виде $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z_0$. В итоге проекции силы на оси системы координат $Oxyz$ принимают следующий вид [61, 62]:

$$\begin{cases} F_x = I_0 \int_{-h_3}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} (B_z\cos(\theta) - B_y\sin(\theta)\cos(\alpha_{in}))\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z_0 \\ F_y = I_0 \int_{-h_3}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} \sin(\theta)(B_z\sin(\alpha_{in}) + B_x\cos(\alpha_{in}))\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z_0. \\ F_z = -I_0 \int_{-h_3}^{0} \int_{0}^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} (B_y\sin(\theta)\sin(\alpha_{in}) + B_x\cos(\theta))\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

2.2.4 Анализ вращающего момента сферического робота в плоском случае

Используя результаты предыдущего подраздела, в частности уравнение (2.8) для расчета силы, мы без труда можем получить вращающий момент $\boldsymbol{Q}^{in}$, приложенный к внутренней сфере, создающийся при взаимодействии одной пары постоянный магнит – электромагнит, используя определение момента:

$$\boldsymbol{Q}^{in} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}],$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, направленный от оси вращения сферического робота до электромагнита, $\boldsymbol{F}$ – сила, полученная при помощи уравнения (2.8). Поскольку все постоянные магниты

одинаковы и электромагниты также одинаковы суммарный момент, создающийся на внутренней сфере при взаимодействии M установленных постоянных магнитов со всеми S электромагнитами можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in} = \sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}], \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ – радиус-вектор, направленный от оси вращения сферического робота до i-го электромагнита, $\boldsymbol{F}_{ij}$ – сила взаимодействия между i-ым электромагнитом и j-ым постоянным магнитом.

Связь между вращающим моментом $\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in}$, приложенным к внутренней сферической оболочке, и вращающим моментом $\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{out}$, приложенным к внешней сферической оболочке, выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{out} = -\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in},$$

Сначала рассмотрим плоское движение (при $y_0 = 0$) робота, в этом случае вращающий момент будет иметь только одну -компоненту. Это упрощение связано с тем, что полученные результаты численного моделирования такого рода движения позволят сформулировать принципы построения электромагнитного привода, способного реализовывать всенаправленное движение. Используя формулу для вращающего момента действующего на внутреннюю сферическую оболочку, а также модель с одним постоянным магнитом и одним электромагнитом (рисунок 2.1), построим зависимость -компоненты вращающего момента от угла $\beta = \alpha_{in} - \alpha_{out}$. Это поможет нам лучше понять, как себя ведёт вращающий момент при взаимном движении сферических оболочек робота. Для тока в катушке $I = 1$ А, данная зависимость приведена на рисунке 2.4. Из графика видно, что при углах β, равных $\pm 10^{\circ}$, вращающий момент достигает своего максимума. Это позволяет сделать вывод о том, что для достижения максимальной эффективности постоянные магниты следует располагать на одинаковом расстоянии друг от друга с шагом 20°. Кроме того, необходимо учитывать, что полюса соседних постоянных магнитов, направленные внутрь сферического робота, должны иметь разную полярность [61].

При этом шаг расположения электромагнитов должен быть выбран таким образом, чтобы избежать «мёртвых» зон, когда все постоянные магниты и электромагниты находятся друг напротив друга. Выберем шаг расположения электромагнитов равным 30°. Так как движение робота происходит в плоскости $O_0x_0z_0$, $y_0 = 0$, расположим постоянные магниты и электромагниты также в этой плоскости.

Так как вращающий момент, создаваемый электромагнитным приводом, полностью зависит от взаимного расположения постоянных магнитов и электромагнитов, а также учитывая, что токи на обмотках катушек в нашей модели входят линейно, уравнение (2.9) можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in} = \sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{M} I_i \boldsymbol{Q}_{ij}^{in}(\beta_{ij})\big|_{I_i=1}, \tag{2.10}$$

где $\boldsymbol{Q}_{ij}^{in}(\beta_{ij})\big|_{I_i=1}$ – вращающий момент, возникающий при взаимодействии i-го электромагнита и j-го постоянного магнита при условии единичного тока в i-ом электромагните, β_{ij} – угловое расстояние между i-ым электромагнитом и j-ым постоянным магнитом.

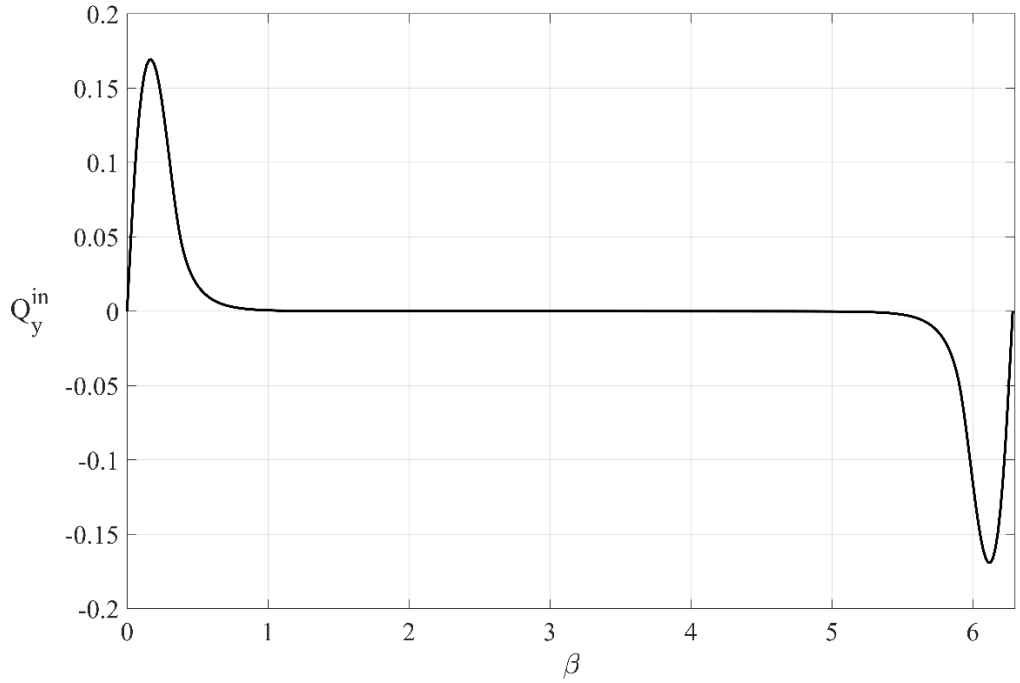


Рисунок 2.4 – Зависимость -составляющей крутящего момента $\boldsymbol{Q}^{in}$ (в Н·м) от угла между постоянным магнитом и электромагнитом β (в рад).

2.2.5 Расчет вращающего момента в трехмерном пространстве

При плоском движении сфероробота, которое рассматривалось в предыдущем подразделе, вращающий момент имеет единственную ненулевую компоненту (y-компоненту), а его зависимость от углового смещения β между парой постоянный магнит – электромагнит является скалярной функцией $Q_y^{in}(\beta)$ (см. рисунок 2.4). Для рассмотрения трехмерного движения, необходимо определить следующее: (I) направление крутящего момента, создаваемого каждой парой постоянный магнит – электромагнит, должно определяться геометрически, и (II) угловое расстояние β_{ij} должно вычисляться для произвольных взаимных

ориентаций двух сферических оболочек. Опишем процедуру определения вращающего момента в трехмерном пространстве.

В первую очередь мы определяем скалярную характеристику крутящего момента Γ(β) для одной пары постоянный магнит – электромагнит (идентично определению $Q_y^{in}(\beta)$ в подразделе 2.2.4), используя математическую модель электромагнитного привода, описанную в предыдущих подразделах, для угловых расстояний $\beta \in [0,2\pi]$ и при условии единичного тока в электромагните. Нужно отметить, что данная процедура проводится один раз для конкретной конфигурации электромагнитного привода.

Далее вычислим угловое расстояние между *i*-ым электромагнитом и *j*-ым постоянным магнитом при произвольной взаимной ориентации сферических оболочек используя выражение:

$$\beta_{ij} = \arccos(\langle \boldsymbol{r}_i/r_{in}, \boldsymbol{R}_j/R_{out} \rangle), \tag{2.11}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ – радиус-вектор, направленный от оси вращения сферического робота до *i*-го электромагнита, $\boldsymbol{R}_j$ – радиус-вектор, направленный от оси вращения сферического робота до *j*-го постоянного магнита.

Последним шагом определим направление вращающего момента. В плоском случае направление вращающего момента фиксировано вдоль единственной оси. В трехмерном пространстве это направление необходимо восстановить геометрически. Для данной пары электромагнит – постоянный магнит (*i*, *j*) направление вращающего момента, приложенного к внутренней оболочке, можно определить как:

$$\boldsymbol{e}_{ij} = [\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_j]/\big|[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_j]\big|. \tag{2.12}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_{ij}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно плоскости, включающей в себя положение постоянного магнита, положение электромагнита и положение геометрического центра сфероробота. Суммарный момент, возникающий на внутренней сферической оболочке из-за взаимодействия *i*-го электромагнита со всеми *M* постоянными магнитами при единичном токе на *i*-ом электромагните $I_i = 1$, определяется как:

$$\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in} = \sum_{j=1}^{M} p_j \Gamma(\beta_{ij})\, \boldsymbol{e}_{ij}, \tag{2.13}$$

где $p_j \in \{1, -1\}$ определяет полярность *j*-го постоянного магнита.

Если собрать векторы $\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in}$ для всех *S* электромагнитов мы получим карту вращающего момента в виде матрицы размерностью $3 \times S$:

$$\boldsymbol{T}(t) = [\boldsymbol{Q}_{1\Sigma}^{in}\ \boldsymbol{Q}_{2\Sigma}^{in}\ \ldots\ \boldsymbol{Q}_{S\Sigma}^{in}]. \tag{2.14}$$

Таким образом, суммарный вращающий момент на внутренней сфере для произвольного вектора токов $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, \dots, I_S)^\top$ равен:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in} = \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{I}. \tag{2.15}$$

2.3 Оптимальное управление движением сферического робота

Этот раздел посвящен рассмотрению задачи отслеживания траектории движения сферического робота, катящегося по произвольной неровной поверхности, и синтезу законов управления, обеспечивающих движение робота по заданной траектории [63, 64].

2.3.1 Вывод общих уравнений движения

Для построения математической модели движения робота выберем неподвижную систему координат $O_0x_0y_0z_0$, жестко связанную с опорной горизонтальной плоскостью (рисунок 2.1). Примем, что плоскость $O_0x_0y_0$ параллельна опорной плоскости, ось O_0z_0 направлена вертикально вверх, а центр O_0 расположен на горизонтальной плоскости, проходящей через центр сферической оболочки.

Предположим, что движение робота осуществляется за счет силового взаимодействия между оболочками. В качестве такой силы выступает сила взаимодействия между магнитами, установленными на внутренней и внешней оболочках. Запишем уравнения изменения импульса и момента импульса внешней и внутренней сферических оболочек. Для внешней сферической оболочки имеем [63, 64]:

$$M_{out}\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{F}_{\text{об}} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}} + N\boldsymbol{n} - M_{out}g\boldsymbol{k}, \tag{2.16а}$$

$$J_{out}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{P}_{\text{об}} - R_{out}\left[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}_{\text{тр}}\right] + \boldsymbol{M}_{\text{тр}}, \tag{2.16б}$$

где $\boldsymbol{\xi} = (x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_{x_0}, \Omega_{y_0}, \Omega_{z_0})$ – векторы положения центра масс внешней сферической оболочки и ее угловой скорости в системе координат $O_0x_0y_0z_0$, $\boldsymbol{F}_{\text{об}}$ – главный вектор сил, с которыми внутренняя оболочка действует на внешнюю, $\boldsymbol{P}_{\text{об}}$ – основной момент сил, с которыми внутренняя оболочка действует на внешнюю, вычисленный относительно геометрического центра оболочек, N – величина силы реакции, приложенная к внешней оболочке в точке ее контакта с опорной поверхностью и направленная ортогонально ей, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, приложенная к внешней оболочке в точке контакта с опорной поверхностью и лежащая в горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{M}_{\text{тр}}$ – момент силы трения верчения сферической оболочки относительно вектора нормали к опорной поверхности, $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали к опорной поверхности в точке контакта, g – ускорение свободного падения и $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ – единичный вектор.

Уравнения изменения импульса и момента импульса внутренней оболочки имеют вид [63, 64]:

$$m_{in}\ddot{\boldsymbol{\xi}} = -\boldsymbol{F}_{\text{об}} - m_{in}g\boldsymbol{k}, \tag{2.17а}$$

$$j_{in}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{P}_{\text{об}}, \tag{2.17б}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0})$ – вектор угловой скорости внутренней оболочки в системе координат $O_0x_0y_0z_0$. Исключим из (2.16) и (2.17) силу $\boldsymbol{F}_{\text{об}}$ и момент силы $\boldsymbol{P}_{\text{об}}$, после чего получим систему:

$$(M_{out} + m_{in})\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{F}_{\text{тр}} + N\boldsymbol{n} - (M_{out} + m_{in})g\boldsymbol{k}, \tag{2.18а}$$

$$J_{out}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -j_{in}\dot{\boldsymbol{\omega}} - R_{out}\left[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}_{\text{тр}}\right] + \boldsymbol{M}_{\text{тр}}. \tag{2.18б}$$

Для завершения формирования математической модели запишем выражения силы реакции опорной поверхности N и силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$. Для этого умножим уравнение (2.18а) скалярно на $\boldsymbol{n}$, после чего получим:

$$N = g(M_{out} + m_{in})\langle \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} \rangle + (M_{out} + m_{in})\langle \ddot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \boldsymbol{n} \rangle. \tag{2.19}$$

Заметим, что поскольку $\langle \ddot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \boldsymbol{n} \rangle = -\langle \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\boldsymbol{n}} \rangle$, то условием безотрывного движения сферической оболочки от опорной поверхности является выполнение неравенства:

$$N = g(M_{out} + m_{in})\langle \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} \rangle - (M_{out} + m_{in})\langle \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\boldsymbol{n}} \rangle > 0. \tag{2.20}$$

Чтобы записать выражение для силы $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ и момента силы $\boldsymbol{M}_{\text{тр}}$, будем считать, что они описываются моделью поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлёва:

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\kappa N\frac{\boldsymbol{v}_c}{|\boldsymbol{v}_c| + \alpha|\Omega_n|}, \quad \boldsymbol{M}_{\text{тр}} = -M_0\frac{\rho\Omega_n}{|\rho\Omega_n| + \delta|\boldsymbol{v}_c|}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v}_c = \dot{\boldsymbol{\xi}} - R_{out}[\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}], \tag{2.21}$$

Здесь $\Omega_n = \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \rangle$, $\boldsymbol{v}_c$ – мгновенная скорость точки контакта сферической оболочки с опорной поверхностью, N определено согласно (2.20), к – коэффициент сухого трения, ρ – радиус пятна контакта, M_0 и δ – положительные параметры, а параметр $\alpha = 8/(3\pi)$. Приведенное выражение справедливо если $\boldsymbol{v}_c \neq 0$, в противном случае скольжение отсутствует, сила трения становится равной силе трения покоя, и движение осуществляется с учетом неголономной связи:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R_{out}[\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}]. \tag{2.22}$$

Кроме того, в отсутствие скольжения должно выполняться условие:

$$|\boldsymbol{F}_{\text{тр}}| \leq \kappa N, \qquad \boldsymbol{F}_{\text{тр}} = (M_{out} + m_{in})\ddot{\boldsymbol{\xi}} - N\boldsymbol{n} + (M_{out} + m_{in})g\boldsymbol{k}, \tag{2.23}$$

где величина силы реакции опоры N вычисляется согласно (2.20).

Для дальнейшего исследования и численного моделирования удобно перейти к безразмерным переменным. Для этого в уравнениях (2.18), (2.20) и (2.21) сделаем следующую замену переменных:

$$\boldsymbol{\xi} = R_{out}\boldsymbol{\xi}', \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{J_{out}}{j_{in}T}\,\boldsymbol{\omega}', \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{T}\,\boldsymbol{\Omega}', \qquad \boldsymbol{v}_c = \frac{R_{out}}{T}\,\boldsymbol{v}_c', \qquad t = Tt', \qquad T = \sqrt{\frac{R_{out}}{g}},$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = \frac{R_{out}(M_{out}+m_{in})}{T^2}\,\boldsymbol{F}_{\text{тр}}', \quad \boldsymbol{M}_{\text{тр}} = \frac{R_{out}(M_{out}+m_{in})}{T^2}\,\boldsymbol{M}_{\text{тр}}', \quad N = \frac{R_{out}(M_{out}+m_{in})}{T^2}N'.$$

Тогда система после опускания штрихов принимает вид [63, 64]:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{F}_{\text{тр}} + N\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}, \tag{2.24а}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{Q} - \gamma\big[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}_{\text{тр}}\big] + \boldsymbol{M}_{\text{тр}}, \tag{2.24б}$$

$$N = \langle \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}\rangle - \big\langle\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\dot{\boldsymbol{n}}\big\rangle, \tag{2.24в}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\kappa N\,\frac{\boldsymbol{v}_c}{|\boldsymbol{v}_c| + \alpha|\Omega_n|}, \quad \boldsymbol{M}_{\text{тр}} = -M_0\,\frac{\rho\Omega_n}{|\rho\Omega_n| + \delta|\boldsymbol{v}_c|}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v}_c = \dot{\boldsymbol{\xi}} - [\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{n}], \tag{2.24г}$$

здесь $\boldsymbol{Q} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – вектор управления и $\gamma = (M_{out}+m_{in})R_{out}^2/J_{out}$. Связь безразмерного вектора управления $\boldsymbol{Q}$ и размерного вектора вращающего момента, прикладываемого к внешней сферической оболочке, можно записать как:

$$\boldsymbol{Q}^{out} = \boldsymbol{Q}\frac{gJ_{out}}{R_{out}}.$$

2.3.2 Управление движением сфероробота в отсутствии верчения

В настоящем подразделе рассмотрим организацию управления сферическим роботом при движении как по горизонтальной плоскости, так и по произвольной достаточно гладкой неровной поверхности.

2.3.2.1 Движение по горизонтальной плоскости без проскальзывания

Предположим, что сфероробот движется без проскальзывания по опорной поверхности, представляющей собой горизонтальную плоскость $z_0 = 0$. В этом случае выполняется соотношение $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Выразим силу трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ из первого уравнения (2.24), подставим во второе уравнение, учтем четвертое соотношение (2.24) и отсутствие верчения вдоль вектора нормали, т. е. $\Omega_n = \langle\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\rangle = 0$, тогда:

$$\big((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}^{\top}\big)\,\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{Q}, \qquad \dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}]. \tag{2.25}$$

Здесь $\boldsymbol{I}_3$ – единичная матрица размерностью 3×3. Заметим, что уравнения (2.25) являются линейными относительно переменных $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\xi}$.

Сформулируем вопрос об организации движения вдоль заданной траектории, которую описывает точка касания сферической оболочки с опорной поверхностью. Поскольку опорная поверхность представляет собой горизонтальную плоскость, то траектория, описываемая точкой касания, с точностью до параллельного переноса, совпадает с траекторией, описываемой центром сфероробота. Будем считать, что эта траектория задана параметрическим уравнением $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\Psi}(t)$, где $\boldsymbol{\Psi}(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция времени. Требуется найти вектор управления $\boldsymbol{Q}$, обеспечивающий приближение робота к заданной траектории. Если в начальный момент времени $t = 0$ выполняется соотношение $\dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = [\boldsymbol{\Omega}(0) \times \boldsymbol{k}]$, то вектор управления $\boldsymbol{Q}$ может быть найден из первого уравнения (2.25) следующим образом:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_0 = \left((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\, \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}^{\top}\right) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_0, \tag{2.26}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_0$ – вектор угловой скорости, вычисленный вдоль заданной траектории движения $\boldsymbol{\xi}_0$.

Пусть теперь $\dot{\boldsymbol{\xi}}(0) \neq [\boldsymbol{\Omega}(0) \times \boldsymbol{k}]$, тогда обеспечить приближение к заданной траектории можно с помощью дополнительного корректирующего управления, а именно [63, 64]:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Theta}_{\Omega}\,(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0) + \boldsymbol{\Theta}_{\xi}\,(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0), \tag{2.27}$$

где матрицы коэффициентов обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$, вообще говоря, могут быть функциями времени. Для определения $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ линеаризуем уравнения (2.25) в окрестности $\boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\xi}_0$, тогда:

$$\left((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\, \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}^{\top}\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega} = \boldsymbol{u}, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\xi} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} \times \boldsymbol{k}]. \tag{2.28}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0$ – невязки угловой скорости и положения сфероробота при движении вдоль заданной траектории $\boldsymbol{\xi}_0$.

Введем в рассмотрение два функционала, характеризующие выбор матриц $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$, а также качество переходных процессов, протекающих в системе (2.28) [63, 64]:

$$J_1(\boldsymbol{\Theta}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \neq 0} \frac{\max\left\{ \sup\limits_{0 \le t \le T} |\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega}|_2,\ \sup\limits_{0 \le t \le T} |\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi}|_2 \right\}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\top} \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0}}, \qquad J_2(\boldsymbol{\Theta}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \neq 0} \frac{\sup\limits_{0 \le t \le T} |\boldsymbol{u}|_2}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\top} \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0}}, \tag{2.29}$$

где $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\Theta}_{\Omega},\, \boldsymbol{\Theta}_{\xi}\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{column}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega},\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi}\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(0)$ и $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\top} > 0$ – заданная весовая матрица. Первый функционал J_1, как нетрудно видеть, характеризует максимально возможные отклонения сфероробота от заданной траектории по отношению к неизвестным начальным условиям $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, в то время как функционал J_2 – максимально возможные значения корректирующих управлений по отношению к неизвестным начальным условиям.

Таким образом, для определения матриц обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ требуется для системы (2.28) найти оптимальные по Парето решения двухкритериальной задачи оптимального управления с функционалами J_1 и J_2. Напомним, что управление $\boldsymbol{\Theta}^*$ называется оптимальным

по Парето, если не существует другого такого управления $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$, при котором справедливы неравенства $J_k(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}) \le J_k(\boldsymbol{\Theta}^*)$, $k = 1,2$, в которых, по меньшей мере, одно является строгим.

В заключение подраздела заметим, что с точки зрения практической реализации зависимость корректирующего управления $\boldsymbol{u}$ от значений вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ не очень удобна, однако, в случае отсутствия верчения сфероробота относительно вектора нормали, величина $\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega$ может быть однозначно выражена через $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\xi$. Чтобы показать это, домножим векторно слева второе уравнение (2.28) на вектор $\boldsymbol{k}$ и учтем отсутствие верчения, тогда:

$$[\boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\xi] = [\boldsymbol{k} \times [\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega \times \boldsymbol{k}]] = \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega - \boldsymbol{k}\,\langle \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega \cdot \boldsymbol{k} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega,$$

следовательно, соотношение (2.27) можно представить следующим образом

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Theta}_\Omega\,[\boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\xi] + \boldsymbol{\Theta}_\xi\,\boldsymbol{\varepsilon}_\xi = \boldsymbol{\Theta}_\Omega\,[\boldsymbol{k}]_\times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\xi + \boldsymbol{\Theta}_\xi\,\boldsymbol{\varepsilon}_\xi,$$

через $[\boldsymbol{a}]_\times$ обозначена кососимметрическая матрица, построенная по вектору $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ следующим образом:

$$[\boldsymbol{a}]_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.2.2 Движение по неровной поверхности без проскальзывания

Теперь рассмотрим управление движением сфероробота в случае, когда он движется по произвольной неровной опорной поверхности без проскальзывания. Как и ранее, выразим силу трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ из первого уравнения (2.24), подставим во второе уравнение, учтем четвертое соотношение (2.24) и отсутствие верчения вдоль вектора нормали, тогда:

$$(1+\gamma)\,\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \gamma\,\boldsymbol{n}\,\langle \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \boldsymbol{n} \rangle = \boldsymbol{Q} - \gamma\,[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}], \tag{2.30а}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}]. \tag{2.30б}$$

Предположим, что траектория движения сфероробота по опорной поверхности задается параметрическим уравнением $\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{\Upsilon}(t)$, где $\boldsymbol{\Upsilon}(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция времени, а вектор $\boldsymbol{\zeta}$ описывает положение точки касания сфероробота с опорной поверхностью. Для удобства дальнейших вычислений, перейдем в уравнении (2.30б) от вектора $\boldsymbol{\xi}$, описывающего положение центра масс сфероробота, к вектору $\boldsymbol{\zeta}$. Поскольку оба эти вектора и вектор нормали $\boldsymbol{n}$ связаны очевидным соотношением $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\zeta})$, то (2.30б) принимает вид:

$$\left(\boldsymbol{I}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}]. \tag{2.31}$$

Вектор управления $\boldsymbol{Q}$, обеспечивающий приближение сфероробота к заданной траектории, будем искать в виде суммы программного и корректирующего управлений:

$$\boldsymbol{Q} = ((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\,\boldsymbol{n}_0\,\boldsymbol{n}_0^{\top})\,\dot{\boldsymbol{\Omega}}_0 + \gamma\,[\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{k}] + \boldsymbol{u}, \tag{2.32}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{n}_0$ – вектор угловой скорости и вектор нормали к опорной поверхности соответственно, вычисленные вдоль заданной траектории движения $\boldsymbol{\zeta}_0$. Нетрудно видеть, что первые два слагаемых представляют собой программное управление, обеспечивающее приближение сфероробота к заданной траектории в случае, когда в начальный момент времени $t = 0$ выполняется соотношение:

$$\left(\boldsymbol{I}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}|_{\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}(0)}\right)\dot{\boldsymbol{\zeta}}(0) = [\boldsymbol{\Omega}(0) \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\zeta}(0))]. \tag{2.33}$$

Корректирующее управление $\boldsymbol{u}$ будем искать в виде линейной обратной связи по состоянию:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Theta}_\Omega\,(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0) + \boldsymbol{\Theta}_\zeta\,(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_0), \tag{2.34}$$

где матрицы коэффициентов обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_\Omega$ и $\boldsymbol{\Theta}_\zeta$, вообще говоря, могут быть функциями времени. Для определения $\boldsymbol{\Theta}_\Omega$ и $\boldsymbol{\Theta}_\zeta$ линеаризуем уравнения (2.30а) и (2.31) в окрестности $\boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\zeta}_0$, тогда [63, 64]:

$$((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\,\boldsymbol{n}_0\,\boldsymbol{n}_0^\top)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Omega = \gamma\left[\langle\dot{\boldsymbol{\Omega}}_0 \cdot \boldsymbol{n}_0\rangle\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{n}_0\dot{\boldsymbol{\Omega}}_0^\top - [\boldsymbol{k}]_\times^\top\right]\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_1, \tag{2.35а}$$

$$(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_0)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta = \left([\boldsymbol{\Omega}_0]_\times\boldsymbol{\Gamma}_0 - \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_0\right)\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta + [\boldsymbol{n}_0]_\times^\top\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega + \boldsymbol{v}_2, \tag{2.35б}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta = \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_0$ – невязки угловой скорости и положения сфероробота при движении вдоль заданной траектории $\boldsymbol{\zeta}_0$, $\boldsymbol{\Gamma}_0 = \partial\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\zeta}_0)/\,\partial\boldsymbol{\zeta}$. Чтобы учесть отброшенные при линеаризации нелинейные слагаемые, в уравнения (2.35) добавлены внешние возмущения – безразмерные вектор-функции $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, удовлетворяющие на отрезке $t_0 \le t \le t_1$ условию:

$$\|\,\boldsymbol{v}\,\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}^\top\,\boldsymbol{v}\,dt < +\infty, \qquad \boldsymbol{v} = \mathrm{column}(\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2).$$

Заметим, что кроме системы (2.35) величины $\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta$ связаны еще одним соотношением. Рассмотрим условие отсутствия верчения сфероробота вдоль вектора нормали $\langle\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\rangle = 0$ и линеаризуем его вдоль $\boldsymbol{\Omega}_0$ и $\boldsymbol{\zeta}_0$, тогда:

$$\langle\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\rangle = (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega + \cdots)^\top\left(\boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta + \cdots\right) = \boldsymbol{\Omega}_0^\top\boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0^\top\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta + \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega^\top\boldsymbol{n}_0 + \cdots = 0.$$

Поскольку первое слагаемое обращается в ноль, то с точностью до слагаемых второго порядка и выше получаем следующее соотношение:

$$\boldsymbol{n}_0^\top\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega + \boldsymbol{\Omega}_0^\top\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta = 0. \tag{2.36}$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем подразделе, определим функционалы, характеризующие выбор матриц обратной связи и, соответственно, качество переходных процессов, протекающих в системе (2.35). Для оценки максимально возможных отклонений сфероробота от заданной траектории по отношению к неизвестным начальным условиям $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и внешним возмущениям $\boldsymbol{v}$, определим функционал J_1 следующим выражением [63, 64]:

$$J_1(\boldsymbol{\Theta}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_0,\, \boldsymbol{v}} \frac{\max\left\{ \sup\limits_{0\le t\le T} |\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega|_2,\ \sup\limits_{0\le t\le T} |\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta|_2 \right\}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0^\top \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \| \boldsymbol{v} \|^2}}, \tag{2.37}$$

а для оценки максимальных значений корректирующих управлений по отношению к неизвестным начальным условиям и внешним возмущениям определим функционал J_2 формулой:

$$J_2(\boldsymbol{\Theta}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon}_0,\, \boldsymbol{v}} \frac{\sup\limits_{0\le t\le T} |\boldsymbol{u}|_2}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0^\top \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \| \boldsymbol{v} \|^2}}, \tag{2.38}$$

где $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\Theta}_\Omega,\, \boldsymbol{\Theta}_\zeta\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{column}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega,\, \boldsymbol{\varepsilon}_\zeta\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(0)$ и $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^\top > 0$ – заданная весовая матрица, отвечающая за компромисс между начальными и внешними возмущениями. Таким образом, для определения матриц обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_\zeta$ и $\boldsymbol{\Theta}_\Omega$ требуется для системы (2.35) найти оптимальные по Парето решения двухкритериальной задачи оптимального управления с функционалами J_1 и J_2.

Наконец, получим условия, при выполнении которых система (2.35) может быть разрешена относительно $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Omega$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta$. Очевидно, что для этого достаточно потребовать невырожденности матриц $\left((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\, \boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top\right)$ и $(I + \boldsymbol{\Gamma}_0)$. Рассмотрим сначала матрицу $((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\, \boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top)$ и заметим, что соотношение

$$\det\left((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\, \boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top\right) = \gamma^3 \det\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top\right) = 0$$

справедливо тогда и только тогда, когда $(1+\gamma)/\gamma$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top$. Однако, нетрудно показать, что $\lambda_{1,2}(\boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top) = 0$ и $\lambda_3(\boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top) = 1$, следовательно, матрица $((1+\gamma)\boldsymbol{I}_3 - \gamma\, \boldsymbol{n}_0\, \boldsymbol{n}_0^\top)$ невырождена при любом значении параметра γ. Таким образом уравнение (2.35а) всегда может быть разрешено относительно $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\Omega$.

Теперь рассмотрим матрицу $(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_0)$. Она будет вырожденной тогда и только тогда, когда число $\lambda = -1$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{\Gamma}_0$. Вычислим характеристический многочлен $\boldsymbol{\Gamma}_0$:

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{\Gamma}_0) = \lambda(\lambda^2 + 2H_0\lambda + K_0) = 0,$$

где H_0 и K_0 – соответственно средняя и гауссова кривизны поверхности, вычисленные вдоль кривой $\boldsymbol{\zeta}_0$. Легко проверить, что число $\lambda = -1$ является корнем характеристического уравнения, если выполняется условие $2H_0 = 1 + K_0$, следовательно, матрица $(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_0)$ является невырожденной, когда

$$1 + K_0 \neq 2H_0. \tag{2.39}$$

Таким образом, при выполнении условия (2.39) уравнение (2.35б) может быть разрешено относительно $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta$ и, следовательно, система (2.35) является регулярной.

Покажем, что в отсутствии верчения сфероробота относительно нормали, корректирующее управление (2.34) может быть переписано в виде линейной обратной связи относительно $\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta$. Для этого добавим к уравнению (2.35б), в котором предварительно отбросим слагаемое v_2, соотношение (2.36), после чего приходим к системе:

$$[\boldsymbol{n}_0]_\times^\top \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_0)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta - \big([\boldsymbol{\Omega}_0]_\times \boldsymbol{\Gamma}_0 - \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_0\big)\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta,$$
$$\boldsymbol{n}_0^\top \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = -\boldsymbol{\Omega}_0^\top \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_\zeta,$$

Поскольку матрица $([\boldsymbol{n}_0]_\times\, \boldsymbol{n}_0)$ имеет полный столбцовый ранг, то решение системы может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = [\boldsymbol{n}_0]_\times (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_0)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta - [\boldsymbol{n}_0]_\times \big([\boldsymbol{\Omega}_0]_\times \boldsymbol{\Gamma}_0 - \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_0\big)\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta - \boldsymbol{n}_0 \boldsymbol{\Omega}_0^\top \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_\zeta,$$

следовательно, соотношение (2.34) можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_1\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\zeta + \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_2\,\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_1 = \boldsymbol{\Theta}_\Omega [\boldsymbol{n}_0]_\times (\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_0), \quad \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_2 = \boldsymbol{\Theta}_\zeta - \boldsymbol{\Theta}_\Omega \big([\boldsymbol{n}_0]_\times \big([\boldsymbol{\Omega}_0]_\times \boldsymbol{\Gamma}_0 - \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_0\big) - \boldsymbol{n}_0 \boldsymbol{\Omega}_0^\top \boldsymbol{\Gamma}_0\big).$$

В заключение скажем несколько слов об управлении движением робота с учетом его скольжения на отдельных участках траектории. На этих участках движение сферического робота описывается уравнениями (2.24), поэтому управление вида (2.32), (2.34) или, в случае движения по горизонтальной плоскости, (2.27), вообще говоря, не гарантирует приближение робота к заданной траектории. Тем не менее, именно этот закон управления можно рекомендовать для использования, поскольку в случае относительно коротких участков скольжения с соответствующим отклонением от заданной траектории данное управление при последующем переходе к «чистому» (без скольжения) качению робота обеспечивает его приближение к указанной траектории.

2.3.3 Управление максимальными уклонениями в линейной системе

Перед тем, как перейти к решению поставленной в предыдущем подразделе задачи, кратко изложим основные теоретические результаты работ [65–68].

2.3.3.1 Максимальные уклонения

Рассмотрим динамический объект, описываемый неавтономной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ z &= C(t)x, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v \in L_2([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n_v})$ – возмущение, действующее на объект, принадлежащее классу интегрируемых с квадратом на отрезке $[t_0, t_1]$ функций времени, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – выход объекта. Под максимальным уклонением выхода системы (2.40) при начальном и внешнем возмущениях на конечном горизонте $[t_0, t_1]$ понимают величину:

$$J_{0,v} = \sup_{x_0,\, v \in L_2} \frac{\sup\limits_{t\in[t_0,t_1]} |z(t)|}{\sqrt{x_0^\top R x_0 + \| v \|_2^2}}, \tag{2.41}$$

где весовая матрица $R = R^\top \geqslant 0$ отвечает за компромисс между начальными условиями и внешними возмущениями. В частных случаях, когда в системе (2.40) либо начальные условия нулевые, либо отсутствует внешнее возмущение, максимальным уклонением выхода называются величины, определенные как:

$$J_v = \sup_{v\in L_2} \frac{\sup\limits_{t\in[t_0,t_1]} |z(t)|}{\| v \|_2}, \qquad J_0 = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\sup\limits_{t\in[t_0,t_1]} |z(t)|}{\sqrt{x_0^\top R x_0}}.$$

Максимальные уклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном горизонте могут быть вычислены следующим образом [66, 68].

Теорема 1. *Максимальное уклонение выхода при начальном и внешнем возмущениях на горизонте* $[t_0, t_1]$ *системы (2.40) определяется формулой:*

$$J_{0,v} = \sup_{t\in[t_0,t_1]} \lambda_{\max}^{1/2}[C(t)Y(t)C^\top(t)], \tag{2.42}$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ *– максимальное собственное значение соответствующей матрицы, а* $Y(t)$ *есть решение дифференциального матричного уравнения:*

$$\dot{Y} = A(t)Y + YA^\top(t) + B(t)B^\top(t), \qquad Y(t_0) = R^{-1}. \tag{2.43}$$

Максимальное уклонение J_v *при внешнем возмущении определяется как в (2.42), (2.43) при начальном условии* $Y(t_0) = 0$*, а максимальное уклонение* J_0 *при начальном возмущении определяется как в (2.42), (2.43) при* $B(t) \equiv 0$.

2.3.3.2 Оптимальное управление максимальными уклонениями

Рассмотрим теперь управляемую нестационарную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v + B_u(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \\ z &= C(t)x + D(t)u, \end{aligned} \tag{2.44}$$

где u – управление. Синтез оптимального управления в форме линейной нестационарной обратной связи $u(t,x) = \Theta(t)x$, $t \in [t_0, t_1]$, минимизирующего максимальное уклонение выхода замкнутой системы $J_{0,v}[\Theta(t)]$, основан на следующей теореме [66, 68].

Теорема 2. *Оптимальное управление в задаче минимизации максимального уклонения выхода на отрезке* $[t_0, t_1]$ *имеет матрицу обратной связи* $\Theta_*(t) = Z_*(t)Y_*^{-1}(t)$*, где* $Z_*(t)$*,* $Y_*(t)$ *– решение задачи минимизации* γ^2 *при ограничениях:*

$$\begin{gathered} \dot{Y}(t) - A(t)Y(t) - Y(t)A^\top(t) - B_u(t)Z(t) - Z^\top(t)B_u^\top(t) - B(t)B^\top(t) = 0, \\ \begin{pmatrix} Y(t) & \star \\ C(t)Y(t) + D(t)Z(t) & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad Y(t_0) = R^{-1}. \end{gathered} \tag{2.45}$$

Вычисление искомых параметров обратной связи $\Theta(t)$ основано на дискретизации задачи (2.45). Для этого введем на отрезке $[t_0, t_1]$ равномерную сетку $s_k = s_{k-1} + h$, $k = 1, \dots, N$, где $h = (t_1 - t_0)/N$ и запишем дискретный аналог рассматриваемой задачи

$$\begin{gathered} \min\gamma^2: \\ Y_{k+1} - Y_k - h\left(A_k Y_k + Y_k A_k^\top + B_{u,k} Z_k + Z_k^\top B_{u,k}^\top + B_k B_k^\top\right) = 0, \\ \begin{pmatrix} Y_k & \star \\ C_k Y_k + D_k Z_k & \gamma^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Y_0 = R^{-1}; \quad k = 0, \dots, N-1, \end{gathered} \tag{2.46}$$

где индекс k указывает на значение в момент времени s_k. Решая задачу полуопределенного программирования (2.46) относительно неизвестных Y_k, Z_k, $k = 0, \dots, N-1$ и γ^2, найдем матрицы $\Theta_k = Z_k Y_k^{-1}$.

2.3.3.3 Синтез многокритериального оптимального управления

Теперь рассмотрим многокритериальную задачу управления максимальными уклонениями нескольких выходов системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v + B_u(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \\ z_i &= C^{(i)}(t)x + D^{(i)}(t)u, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{2.47}$$

в классе линейных нестационарных обратных связей $u = \Theta(t)x$. Введем критерии:

$$J_i[\Theta(t)] = \sup_{x_0,\, v \in L_2} \frac{\sup\limits_{t \in [t_0, t_1]} |z_i(t)|}{\sqrt{x_0^\top R x_0 + \| v \|_2^2}}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.48}$$

и поставим задачу поиска оптимальных по Парето параметров регуляторов:

$$\Theta_P(t) = \operatorname{argmin}\{J_i[\Theta(t)],\, i = 1, \dots, m\}. \tag{2.49}$$

В [65] установлено, что множество оптимальных по Парето решений содержится в множестве оптимальных решений по отношению к функционалу, представляющему собой свертку Гермейера:

$$J_\alpha[\Theta(t)] = \max_{i=1,\dots,m} \{J_i[\Theta(t)]/\alpha_i,\, \alpha_i > 0\}$$

при всех значениях α_i. Нетрудно видеть, что в рассматриваемой многокритериальной задаче свертка Гермейера есть ничто иное, как максимальное уклонение выхода системы:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = [A(t) + B_u(t)\Theta(t)]x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ &z = \operatorname{column}(z_1, \dots, z_m), \quad z_i = \alpha_i^{-1}\left[C^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)\Theta(t)\right]x, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{2.50}$$

где вектор z состоит из параметризованных выходов исходной системы. Таким образом, справедливо утверждение [65].

Теорема 3. *Оптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче (2.49) минимизации максимальных уклонений выходов системы (2.47) суть оптимальные управления по отношению к максимальному уклонению выхода системы (2.50) для всех* α_i, $i = 1, \dots, m$.

Для численного решения этой задачи проведем, как и выше, дискретизацию и с учетом того, что нахождение минимального значения $J_\alpha^2[\Theta(t)]$ эквивалентно вычислению минимального значения γ^2, при котором для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполнены неравенства:

$$\left[C^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)\Theta(t)\right]Y(t)[C^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)\Theta(t)]^\top \preccurlyeq \gamma^2\alpha_i^2 I, \quad i = 1, \dots, m,$$

придем к задаче полуопределенного программирования: найти $\min\gamma^2$, при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:

$$\begin{gathered} Y_{k+1} - Y_k - h\left(A_k Y_k + Y_k A_k^\top + B_{u,k} Z_k + Z_k^\top B_{u,k}^T + B_k B_k^\top\right) = 0, \\ \begin{pmatrix} Y_k & \star \\ C_k^{(i)} Y_k + D_k^{(i)} Z_k & \gamma^2\alpha_i^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Y_0 = R^{-1}, i = 1, \dots, m; \quad k = 0, \dots, N-1. \end{gathered} \tag{2.51}$$

Для каждого набора α_i, $i = 1, \dots, m$ матрицы параметров оптимальных по Парето регуляторов находятся как $\Theta_k = Z_k Y_k^{-1}$, где Y_k, Z_k – решения (2.51).

2.4 Вычисление электрических токов

В настоящем разделе строится метод определения токов в общей трёхмерной постановке, а затем рассматривается важный частный случай – плоское движение робота, для которого вычисления существенно упрощаются.

В качестве исходных данных используется временная зависимость требуемого вращающего момента $\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t) \in R^3$, приложенного к внутренней сферической оболочке, найденная в результате применения метода оптимального управления (раздел 2.3) к динамической модели движения сфероробота по неровной поверхности (подраздел 2.3.1). Заметим, что согласно соотношению (2.15), при выводе математической модели электромагнитного привода, суммарный вращающий момент $\boldsymbol{Q}_\Sigma^{in}$, действующий на внутреннюю сферическую оболочку, линейно зависит от вектора токов $\boldsymbol{I} = (I_1, \dots, I_S)^\top \in R^S$, протекающих по обмоткам S электромагнитов.

Задача определения токов формулируется как обратная задача динамики: для каждого момента времени t требуется найти такой вектор токов $\boldsymbol{I}(t)$, при котором реализуется заданный управляющий момент, т. е. выполняется равенство:

$$\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t). \tag{2.52}$$

2.4.1 Вычисление электрических токов в трехмерном случае

В общем случае число электромагнитов S существенно превосходит число управляемых компонент вращающего момента, следовательно, система (2.52) относительно неизвестного вектора токов $\boldsymbol{I}$ оказывается недоопределённой: одному и тому же требуемому моменту $\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}$ соответствует целое $(S-3)$-параметрическое семейство допустимых токовых распределений. Для выбора единственного решения необходимо ввести дополнительный критерий.

В качестве такого критерия будем использовать минимум суммарных энергетических потерь на омическое сопротивление обмоток. Если пренебречь различиями активных сопротивлений отдельных электромагнитов и потерями в датчиках и устройствах обработки информации, мгновенные джоулевы потери пропорциональны квадрату евклидовой нормы вектора токов:

$$P(t) \propto \|\boldsymbol{I}(t)\|^2 = I_1^2 + \ldots + I_S^2. \tag{2.53}$$

Таким образом, на каждом шаге по времени необходимо решить следующую задачу условной оптимизации с равенствами:

$$\min\|\boldsymbol{I}\|^2 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t). \tag{2.54}$$

Классическое решение задачи (2.54) получается при помощи псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [69]:

$$\boldsymbol{I}^*(t) = \boldsymbol{T}^+(t)\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t), \tag{2.55}$$

где $\boldsymbol{T}^+(t)$ – псевдообратная матрица к матрице $\boldsymbol{T}(t)$. В случае, когда $\boldsymbol{T}(t)$ имеет полный строчный ранг (что соответствует возможности генерации момента вдоль произвольной оси), она допускает явное представление: $\boldsymbol{T}^+(t) = \boldsymbol{T}^\top(t)[\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^\top(t)]^{-1}$.

Однако при некоторых взаимных ориентациях сферических оболочек матрица $\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^\top(t) \in \mathrm{R}^{\{3\times3\}}$, оставаясь невырожденной, может оказываться плохо обусловленной – например, когда значительная часть электромагнитов приближается к соосному положению с постоянными магнитами (где, согласно зависимости момента от углового сдвига, рисунок 2.4, момент близок к нулю). В этом случае малые изменения управляющего момента или относительной ориентации оболочек приводят к большим всплескам токов в отдельных каналах, что нежелательно как с точки зрения нагрева обмоток, так и с точки зрения линейности силовых характеристик использованных источников.

Для устранения численной неустойчивости задача (2.54) переформулируется в виде безусловной оптимизации с регуляризацией Тихонова [70]:

$$\min\left\{ \left\|\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t)\right\|^2 + \lambda\|\boldsymbol{I}\|^2 \right\}, \tag{2.56}$$

где $\lambda > 0$ – малый параметр регуляризации. Решение задачи (2.56) при заданном λ имеет вид:

$$\boldsymbol{I}^*(t) = \boldsymbol{T}^\top(t)[\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^\top(t) + \lambda\boldsymbol{I}_3]^{-1}\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t). \tag{2.57}$$

При $\lambda \to 0$ формула (2.57) переходит в (2.55), точно реализующую заданный момент в смысле минимума нормы. При умеренных значениях λ – обеспечивает гладкое, ограниченное по норме решение даже в окрестностях, где обусловленность матрицы $\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^\top(t)$ ухудшается. В

проводимых далее численных экспериментах значение λ выбиралось малым (порядка 10^{-6}), что не приводит к заметному отклонению реализуемого момента от заданного и одновременно гарантирует численную устойчивость на всём интервале интегрирования.

Заметим, что соотношение (2.57) определяет распределение токов покомпонентно: подставив значение $\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t_0)$ в текущий момент времени t_0, получим в качестве выхода вектор $\boldsymbol{I}^*(t) \in \mathrm{R}^S$, i-я компонента которого есть ток в i-м электромагните. Тем самым решена задача выделения единственного энергетически оптимального токового распределения, соответствующего заданному управляющему моменту.

2.4.2 Вычисление электрических токов в плоском случае

Рассмотрим важный частный случай – плоское движение сферического робота. Как предложено в подразделе 2.2.4, в этом случае постоянные магниты и электромагниты располагаются в плоскости движения $O_0x_0z_0$ ($M = 18$ постоянных магнитов с шагом 20° на внешней оболочке и $S = 12$ электромагнитов с шагом 30° на внутренней оболочке), а вектор управляющего момента имеет единственную ненулевую -компоненту. В этих условиях карта вращающего момента $\boldsymbol{T}(t)$ вырождается из матрицы 3×S в вектор-строку:

$$\boldsymbol{T}(t) \to (Q_{1\Sigma y}^{in}(t), Q_{2\Sigma y}^{in}(t), \dots, Q_{S\Sigma y}^{in}(t)), \tag{2.58}$$

где $Q_{S\Sigma y}^{in}(t)$ – y-компонента вращающего момента, действующего на внутреннюю сферическую оболочку со стороны всех M постоянных магнитов при единичном токе в i-м электромагните и текущей взаимной ориентации оболочек:

$$Q_{i\Sigma y}^{in}(t) = \sum_{j=1}^{M} Q_{ij,y}^{in}\left(\beta_{ij}(t)\right)\Big|_{I_i=1}. \tag{2.59}$$

Уравнение (2.15) тогда принимает скалярный вид:

$$Q_{\Sigma\Sigma y}^{in}(t) = I_1 Q_{1\Sigma y}^{in}(t) + \dots + I_S Q_{S\Sigma y}^{in}(t), \tag{2.60}$$

и представляет собой одно скалярное уравнение, связывающее S неизвестных токов. Это позволяет интерпретировать (2.60) как скалярное произведение двух S-мерных векторов: вектора токов $\boldsymbol{I} = (I_1, \dots, I_S)^\top$ и вектора моментов $\boldsymbol{Q}_{\Sigma y}^{in} = \left(Q_{1\Sigma y}^{in}, \dots, Q_{S\Sigma y}^{in}\right)^\top$. Из неравенства Коши-Буняковского справедлива оценка:

$$(Q_{\Sigma\Sigma y}^{in})^2 = \langle \boldsymbol{I}, \boldsymbol{Q}_{\Sigma y}^{in} \rangle^2 \le \|\boldsymbol{I}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{Q}_{\Sigma y}^{in}\|^2, \tag{2.61}$$

из которой следует, что при фиксированных значениях требуемого момента $Q_{\Sigma\Sigma y}^{in}$ и компонент $Q_{i\Sigma y}^{in}$ минимум суммы квадратов токов $I_1^2 + \dots + I_S^2$ достигается, когда неравенство (2.61)

обращается в равенство, то есть, когда вектор токов $\boldsymbol{I}$ коллинеарен вектору моментов $\boldsymbol{Q}_{\Sigma y}^{in}$. Это даёт явное аналитическое распределение:

$$I_i(t) = \frac{Q_{i\Sigma y}^{in}(t) \cdot Q_{\Sigma\Sigma y}^{in}(t)}{\left(Q_{1\Sigma y}^{in}(t)\right)^2 + \cdots + \left(Q_{S\Sigma y}^{in}(t)\right)^2}, \quad i = 1, \ldots, S \tag{2.62}$$

Формула (2.62) и есть искомое энергетически оптимальное распределение токов между электромагнитами для плоского случая. Ввиду эквидистантного расположения магнитов в плоскости движения временные зависимости токов для соседних электромагнитов отличаются друг от друга, с точностью до знака, лишь сдвигом по фазе, это позволяет в дальнейшем (см. главу 4) ограничиться построением временных зависимостей лишь для двух соседних электромагнитов с номерами «1» и «2».

2.4.3 Согласованность трёхмерного и плоского методов определения токов

Покажем, что аналитическое распределение токов (2.62), полученное для плоского случая, является частным случаем общей трёхмерной формулы (2.57) при $\lambda \to 0$ и сведении карты вращающего момента к скалярной строке. Действительно, при $\boldsymbol{T}(t) = (Q_{1\Sigma y}^{in}, \ldots, Q_{S\Sigma y}^{in})$ – строке размера $1 \times S$ – произведение $\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^{\top}(t)$ сводится к скаляру:

$$\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{T}^{\top}(t) = \left(Q_{1\Sigma y}^{in}\right)^2 + \cdots + \left(Q_{S\Sigma y}^{in}\right)^2 \equiv \left\|\boldsymbol{Q}_{\Sigma y}^{in}\right\|^2, \tag{2.63}$$

а единичная матрица $\boldsymbol{I}_3$ в (2.57) – к скалярной единице. При $\lambda \to 0$ формула (2.57) принимает вид:

$$\boldsymbol{I}^{*} = \frac{\left(Q_{1\Sigma y}^{in}, \ldots, Q_{S\Sigma y}^{in}\right)^{\top} \cdot Q_{\Sigma\Sigma y}^{in}}{\|\boldsymbol{Q}_{\Sigma y}^{in}\|^2}, \tag{2.64}$$

i-я компонента которого есть в точности правая часть (2.62). Тем самым подход, основанный на регуляризованной псевдообратной матрице, является корректным обобщением распределения токов, полученного через неравенство Коши-Буняковского, и сводится к нему в плоском случае. Это согласование демонстрирует, что предложенный трёхмерный метод не противоречит ранее полученным результатам для плоского движения, а расширяет их на случай всенаправленного движения сферического робота с электромагнитным приводом.

На практике вычисление токов для каждого момента времени включает следующие этапы. (I) По текущему относительному положению сферических оболочек, описываемому величинами $\beta_{ij}(t)$ согласно (2.11), формируется карта вращающего момента $\boldsymbol{T}(t)$ согласно (2.13)–(2.14). (II) Для требуемого управляющего момента $\boldsymbol{Q}_{ref}^{in}(t)$, полученного при помощи метода оптимального управления, описанного в разделе 2.3, вычисляется вектор токов $\boldsymbol{I}(t)$ по формуле (2.57) – в общем трёхмерном случае, либо по формуле (2.62) – в плоском. (III)

Получаемая временная зависимость $\boldsymbol{I}(t)$ служит входом для уравнения Кирхгофа при определении электрических напряжений.

2.5 Вычисление электрических напряжений

Следующим шагом после определения токов является определение электрических напряжений, для этого воспользуемся уравнением Кирхгофа, которое в нашем случае имеет следующий вид:

$$I_i(t)R_i = u_i(t) - L_i\frac{\mathrm{d}I_i(t)}{\mathrm{d}t} - \sum_{j=1,j\neq i}^{S} M_{ij}\frac{\mathrm{d}I_j(t)}{\mathrm{d}t} - \sum_{k=1}^{M}\frac{\mathrm{d}\Phi_{ik}(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{2.65}$$

где R_i – сопротивление -й катушки, L_i – коэффициент самоиндукции i-й катушки, M_{ij} – коэффициент взаимной индукции между i-й и j-й катушками, u_i – напряжение, подаваемое генератором на i -ю катушку, Φ_{ik} – потокосцепление вектора магнитной индукции, создаваемого k-ым постоянным магнитом, с проводящим контуром i-й катушки, определяется как:

$$\Phi_{ik} = \frac{r_4 - r_3}{d^2}\int_{-h_3}^{0}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r_3} B_{qik}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z_0 + \frac{1}{d}\int_{-h_3}^{0}\int_{0}^{2\pi}\int_{r_3}^{r_4} B_{qik}\,(r_4-\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z_0, \tag{2.66}$$

где d – диаметр проволоки намотки катушки, B_{qij} – q-составляющая магнитного поля -го постоянного магнита в месте расположения i-го электромагнита, определения остальных параметров даны в разделе 2.2.

2.6 Выводы по главе 2

В настоящей главе построена полная математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом, объединяющая описание электромагнитного взаимодействия между магнитами на разных сферических оболочках, динамики движения робота по произвольной неровной поверхности, метода синтеза оптимального управления движения сферическим роботом, а также процедуры восстановления электрических токов и напряжений по найденному управляющему моменту. Ключевые результаты главы состоят в следующем.

1. На основе закона Био-Савара-Лапласа в квазистационарном приближении получено покомпонентное выражение (2.3) для индукции магнитного поля одиночного цилиндрического постоянного магнита в произвольной точке пространства.

2. На основе закона Ампера получено выражение (2.8) для силы взаимодействия постоянного магнита с электромагнитом. Анализ зависимости вращающего момента от углового сдвига Г(β) (рисунок 2.4) показал локальный характер взаимодействия: ненулевой вращающий момент возникает в ограниченной окрестности постоянного магнита, что задаёт

принципиальные ограничения на размещение магнитов. Получено общее выражение (2.15) для суммарного вращающего момента, действующего на внутреннюю оболочку, через карту вращающего момента $\boldsymbol{T}(t) \in R^{3\times S}$, столбцы которой задают вклады отдельных электромагнитов при единичных токах в их обмотках.

3. Выведены общие уравнения движения сферического робота (2.24) как двух концентрических сферических оболочек, связанных силой и моментом электромагнитного взаимодействия. Силы и моменты трения описаны моделью поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлёва (2.21), а условие положительности силы реакции опоры (2.20) обеспечивает безотрывное движение робота по опорной поверхности.

4. Управляющий вращающий момент $\boldsymbol{Q}$, обеспечивающий движение робота вдоль заданной траектории $\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{\Upsilon}(t)$, представлен в виде суммы программного и корректирующего управлений (формулы (2.27) для движения по плоскости и (2.34) для движения по неровной поверхности), корректирующее управление представлено в виде линейной обратной связи по состоянию.

5. Для синтеза матриц обратной связи введены два функционала в виде (2.37) и (2.38), задающие двухкритериальную задачу оптимального управления. Показано, что поставленную задачу многокритериального оптимального управления можно свести к семейству задач полуопределённого программирования (2.51), решаемых стандартными пакетами выпуклой оптимизации.

6. Решена задача восстановления электрических токов в обмотках электромагнитов и подаваемых на них напряжений по найденному управляющему моменту.

Глава 3. Оптимальное распределение магнитов на сферических оболочках

В подразделе 2.2.4 уже была затронута тема оптимального размещения магнитов на сферических оболочках в плоском случае, соответствующая конфигурация магнитов – $M = 18$ постоянных магнитов с шагом 20° на внешней оболочке и $S = 12$ электромагнитов с шагом 30° на внутренней оболочке – была подобрана таким образом, чтобы обеспечить непрерывную генерацию y-компоненты вращающего момента в плоскости движения и исключить «мёртвые зоны», в которых все пары постоянный магнит – электромагнит одновременно оказываются в соосном положении (каждый электромагнит находится напротив постоянного магнита).

Однако, такая конфигурация не способна обеспечить всенаправленное движение робота: ввиду того что все магниты сосредоточены в плоскости движения, карта вращающего момента $\boldsymbol{T}(t)$, определённая соотношением (2.14), вырождается в строку-вектор и имеет ранг 1, а пространство достижимых управляющих моментов одномерно. Для управления движением робота в произвольном направлении необходимо, чтобы матрица $\boldsymbol{T}(t)$ имела полный строчный ранг (ранг 3) при любой взаимной ориентации сферических оболочек. Это, в свою очередь, требует существенной модификации принципа размещения магнитов: вместо равномерного распределения по выделенной окружности необходимо распределять их по всей поверхности сферы.

Настоящая глава посвящена решению этой задачи. На основе требований к равномерности покрытия сферы, угловому расстоянию между соседними магнитами, чередованию полярностей и отсутствию мёртвых зон производится поиск оптимальной конфигурации размещения постоянных магнитов и электромагнитов на двух концентрических сферических оболочках, обеспечивающей всенаправленное движение сферического робота.

3.1 Постановка задачи

Напомню, что согласно соотношению (2.15), суммарный вращающий момент $\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in} \in R^3$, действующий на внутреннюю сферическую оболочку, представляется в виде:

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma}^{in}(t) = \boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{I},$$

где $I = (I_1, \dots, I_S)^{\top} \in R^S$ – вектор токов в обмотках электромагнитов, а $\boldsymbol{T}(t) \in R^{3\times S}$ – карта вращающего момента сфероробота, столбцы которой $\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in}$ представляют собой векторы вращающих моментов, создаваемых i-м электромагнитом при единичном токе $I_i = 1$. Каждый столбец формируется как суперпозиция вкладов от всех M постоянных магнитов [71]:

$$\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in}(t) = \sum_{j=1}^{M} p_j \cdot \Gamma\big(\beta_{ij}(t)\big) \cdot \boldsymbol{e}_{ij}(t),$$

где $\Gamma(\beta_{ij}(t))$ – скалярная характеристика взаимодействия одиночной пары постоянный магнит – электромагнит при единичном токе (см. подраздел 2.2.5, рисунок 2.4), $\beta_{ij}(t)$ – угловое расстояние между i-м электромагнитом и j-м постоянным магнитом, вычисляемое по формуле (2.11), $\boldsymbol{e}_{ij}(t)$ – единичный вектор направления момента, определяемый формулой (2.12), а $p_j \in \{+1, -1\}$ – полярность j-го постоянного магнита.

Для возможности генерации вращающего момента вдоль произвольной оси необходимо, чтобы образ оператора $\boldsymbol{T}(t)\colon R^S \to R^3$ совпадал с R^3, т. е. чтобы выполнялось [71]:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{T}(t)) = 3, \textit{при всех взаимных ориентациях оболочек.} \quad (3.1)$$

Это условие, как будет показано ниже, эквивалентно тому, что радиус-векторы электромагнитов r_i и расположение постоянных магнитов на внешней оболочке таковы, что векторы $\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in}$ порождают всё пространство R^3.

Симметрия и тензор инерции

Помимо требования (3.1), на конфигурацию магнитов накладывается фундаментальное ограничение, связанное с условием применимости разработанного в разделе 2.3 метода оптимального управления. Безразмерные уравнения движения (2.24) и весь синтез регуляторов на основе обобщённой H_2-нормы получены в предположении, что моменты инерции внешней и внутренней сферических оболочек одинаковы относительно любой оси проходящей через центр оболочек: $\boldsymbol{J}_{out} = J_{out} \cdot \boldsymbol{I}_3$ и $\boldsymbol{j}_{in} = j_{in} \cdot \boldsymbol{I}_3$. При нарушении этого условия в уравнения Эйлера для момента импульса добавляется гироскопический член $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega})$, который порождает связь между компонентами угловой скорости и разрушает «развязанную» структуру модели (независимость уравнений по отдельным компонентам угловой скорости), на которой основан синтез управления.

Достаточным условием изотропности тензора инерции системы одинаковых точечных масс, расположенных на сфере, относительно центра сферы, является то, что группа симметрии их расположения действует на R^3 неприводимо, то есть не имеет нетривиальных инвариантных подпространств. Среди трёхмерных точечных групп этим свойством обладают только кубические группы (T, T_d, T_h, O, O_h) и икосаэдрические группы (I, I_h), все прочие группы (циклические, диэдральные, осевые) имеют инвариантную ось, и требование к тензору инерции ими не обеспечивается [72].

Указанное ограничение сводит задачу к поиску такого размещения магнитов, при котором их позиции совпадают с вершинами вершинно-транзитивного выпуклого многогранника с кубической или икосаэдрической симметрией, вписанного в соответствующую сферу. Под вершинной транзитивностью понимается то, что для любой пары вершин многогранника существует элемент его группы симметрии, переводящий одну вершину в

другую. Вследствие этого все вершины имеют одинаковое локальное окружение (одинаковое число соседей на одинаковых угловых расстояниях). С исключением призм и антипризм (имеющих осевую симметрию и помещающих все вершины на двух параллельных окружностях) этому условию удовлетворяют ровно 18 многогранников: пять платоновых тел и тринадцать архимедовых тел [73].

Тем самым задача оптимального размещения магнитов сводится к выбору двух многогранников из конечного списка из 18 кандидатов: один – для размещения постоянных магнитов на внешней оболочке, другой – для размещения электромагнитов на внутренней. Дополнительным практическим достоинством этого ограничения является то, что вершинные координаты и структура смежности всех 18 кандидатов известны в замкнутой форме, что упрощает назначение полярностей и численное построение карты вращающего момента.

Замечание. Задача равномерного покрытия сферы M точками классически связана с задачей Таммеса [74] (максимизация минимального углового расстояния между точками) и задачей Томсона [75] (минимизация электростатической энергии). Численно оптимальные решения этих задач для $M = 60$ нарушают икосаэдрическую симметрию и описываются конфигурациями низкой симметрии, не соответствующими какому-либо вершинно-транзитивному многограннику [76, 77]. В рамках условий, налагаемых на тензор инерции ($\boldsymbol{J}_{out} = J_{out} \cdot \boldsymbol{I}_3$, $\boldsymbol{j}_{in} = j_{in} \cdot \boldsymbol{I}_3$), такие решения недопустимы, и поиск ограничивается 18 указанными кандидатами.

3.2 Требования к конфигурации

Поиск оптимальной пары многогранников проводится в соответствии со следующими требованиями [71].

Требование 1 (равномерное покрытие сферы)

Постоянные магниты должны располагаться на внешней сфере таким образом, чтобы максимальное угловое расстояние от любой точки сферы до ближайшего постоянного магнита (далее называемое зазором покрытия θ_{gap}^{max}) было минимальным:

$$\theta_{gap}^{max} = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{j=1,\dots,M} \arccos(\langle \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{R_j}/R_{out} \rangle) \to \min, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{p} \in S^2$ – произвольная точка на единичной сфере.

Действительно, как видно из рисунка 2.4, зависимость момента одиночной пары от углового сдвига $Q_y^{in}(\beta) = \Gamma(\beta)$ быстро убывает с ростом β и при $\beta > 40°$ составляет менее 3% от пикового значения. Следовательно, каждый постоянный магнит создаёт заметный момент только в ограниченной угловой окрестности. Малый зазор покрытия гарантирует, что для любого положения электромагнита найдутся ближайшие постоянные магниты, создающие достаточный по величине момент.

Требование 2 (угловое расстояние между соседними постоянными магнитами около 20°)

Поскольку зависимость Γ(β) достигает максимума при $\beta \approx 10°$ (рисунок 2.4), расположение соседних постоянных магнитов с шагом 20° обеспечивает, что электромагнит, находящийся в середине отрезка между ними, оказывается на расстоянии ровно 10° от обоих, т.е. в зоне максимального момента. В трёхмерной постановке, где каждый электромагнит взаимодействует одновременно с несколькими постоянными магнитами, это требование носит характер проектного ориентира, а не строгого ограничения.

Требование 3 (чередование полярностей)

Полярности соседних постоянных магнитов должны быть противоположны ($p_j = +1$ и $p_j = -1$, чередуясь по соседним вершинам). Действительно, функция Γ(β) нечётна и антисимметрична относительно $\beta = 0$: два постоянных магнита одинаковой полярности, фланкирующих электромагнит с противоположных сторон, создают моменты противоположных знаков, частично взаимно компенсируясь, тогда как магниты противоположной полярности – складываются. Для того чтобы все смежные пары имели противоположные полярности, граф рёбер многогранника, в вершинах которого размещены постоянные магниты, должен быть двудольным, это эквивалентно тому, что все грани многогранника имеют чётное число сторон.

Требование 4 (несовпадение групп симметрии)

Желательно, чтобы группа симметрии расположения постоянных магнитов отличалась от группы симметрии расположения электромагнитов. При совпадении групп возможны такие взаимные ориентации, при которых положения нулевого вращающего момента систематически совпадают по нескольким направлениям одновременно, что ухудшает изотропность управления. На практике, как показано численно в разделе 3.4, этот эффект играет второстепенную роль.

Требование 5 (отсутствие мёртвых зон)

Для любого единичного вектора $\widehat{\boldsymbol{d}} \in R^3$, задающего желаемую ось вращающего момента, должен существовать такой вектор токов $\boldsymbol{I}$, что $\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{I}$ имеет ненулевую проекцию на $\widehat{\boldsymbol{d}}$. Это эквивалентно условию (3.1) о ранге карты вращающего момента при любой относительной ориентации оболочек.

Заметим, что согласно (2.12) направление момента, создаваемого парой магнитов (i, j), есть $\boldsymbol{e}_{ij} \propto [\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_j]$, что перпендикулярно радиус-вектору $\boldsymbol{r}_i$ электромагнита (так как $[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_i] = 0$). Следовательно, суммарный момент $\boldsymbol{Q}_{i\Sigma}^{in}$ создаваемый вследствие взаимодействия i-го электромагнита со всеми M постоянными магнитами (2.13) также лежит в плоскости, нормальной к $\boldsymbol{r}_i$. Тем самым каждый электромагнит способен генерировать момент только в

двумерном подпространстве, ортогональном собственному радиальному направлению, для того чтобы совокупность из всех S электромагнитов порождала R^3, единичные векторы $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ не должны быть коллинеарными (т. е. все электромагниты не должны лежать на одном диаметре внутренней сферы). При квазиравномерном распределении постоянных магнитов это условие автоматически удовлетворяется, поскольку электромагниты, находящиеся в разных точках сферы, взаимодействуют с разными окружениями постоянных магнитов и создают моменты, направленные в различных направлениях.

3.3 Выбор многогранника для размещения постоянных магнитов

Из 18 кандидатов несколько отпадают по очевидным причинам: тетраэдр (4 вершины), куб (8 вершин), октаэдр (6 вершин), икосаэдр (12 вершин) и кубооктаэдр (12 вершин) дают слишком грубое покрытие сферы. В таблице 3.1 приведены ключевые характеристики оставшихся кандидатов с числом вершин $M \geq 20$. Зазор покрытия вычислялся методом Монте-Карло путём равномерной выборки 10^5 точек на единичной сфере.

Таблица 3.1 – Сравнение многогранников – кандидатов на размещение постоянных магнитов. Здесь M – число вершин, θ_{edge} – угловое расстояние между соседними вершинами, θ_{gap}^{max} – зазор покрытия.

Многогранник	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\theta_{edge}}$	$\boldsymbol{\theta_{gap}^{max}}$	**Двудольность**	**Симметрия**
Додекаэдр	20	41.8°	37.2°	Нет	I_h
Усечённый октаэдр	24	36.9°	39.1°	Да	O_h
Икосододекаэдр	30	36.0°	31.5°	Нет	I_h
Усечённый кубооктаэдр	48	24.9°	34.0°	Да	O_h
Усечённый додекаэдр	60	19.4°	32.9°	Нет	I_h
Усечённый икосаэдр	60	23.3°	23.7°	Нет	I_h
Курносый додекаэдр	60	24.8°	24.8°	Нет	I
Ромбоикосододекаэдр	60	25.9°	22.2°	Нет	I_h

Выбор оптимального кандидата требует компромисса между тремя конкурирующими критериями: близостью θ_{edge} к 20° (требование 2), минимизацией θ_{gap}^{max} (требование 1) и двудольностью графа (требование 3). Ни один из перечисленных многогранников не удовлетворяет всем трём критериям одновременно: двудольные кандидаты (усечённый октаэдр и усечённый кубооктаэдр) имеют либо слишком большой радиус покрытия, либо

неподходящий шаг по соседним вершинам, а кандидаты с малым радиусом покрытия (ромбоикосододекаэдр, усечённый икосаэдр) недвудольны [71].

Выбор ромбоикосододекаэдра

В качестве размещения постоянных магнитов выбран ромбоикосододекаэдр с $M = 60$ вершинами (рисунок 3.1а). Его грани составляют 20 треугольников, 30 квадратов и 12 пятиугольников. Среди четырёх архимедовых тел с 60 вершинами (усечённый додекаэдр, усечённый икосаэдр, курносый додекаэдр и ромбоикосододекаэдр) последний обеспечивает наименьший зазор покрытия $\theta_{gap}^{max} = 22.2°$. Это связано с тем, что грани ромбоикосододекаэдра малы и распределяют вершины по сфере наиболее равномерно. Усечённый додекаэдр ($\theta_{gap}^{max} = 32.9°$) отбрасывается сразу: при усечении 20 вершин додекаэдра 60 получаемых вершин группируются по 3 и разделены 12 крупными десятиугольными гранями, что приводит к большому зазору покрытия.

Угловое расстояние между соседними вершинами ромбоикосододекаэдра составляет $\theta_{edge} = 25.9°$, что несколько превышает целевые 20°. Однако, как видно из рисунка 2.4, характеристика $\Gamma(\beta)$ сохраняет около 39% от пикового значения при $\beta = 20°$ и около 15% – при $\beta = 26°$. При радиусе покрытия 22.2° для любого положения электромагнита ближайший постоянный магнит создаёт момент, составляющий не менее $\sim$28% от пикового значения. Как будет показано в разделе 3.5, при суперпозиции вкладов от нескольких постоянных магнитов это значение оказывается достаточным для обеспечения ненулевого момента в произвольном направлении.

Координаты вершин

Декартовы координаты 60 вершин ромбоикосододекаэдра задаются чётными перестановками троек:

$$(\pm 1, \pm 1, \pm \varphi^3),\ \ (\pm \varphi^2, \pm \varphi, \pm 2\varphi),\ \ (\pm(2 + \varphi), 0, \pm \varphi^2), \tag{3.3}$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ – золотое сечение. Перед использованием эти координаты нормируются и проецируются на сферу радиуса R_{out}.

Назначение полярностей

Граф рёбер ромбоикосододекаэдра не является двудольным из-за наличия 20 треугольных граней (треугольник – нечётный цикл), поэтому строгое чередование полярностей по всем рёбрам невозможно. На «нечередующемся» ребре (два соседних магнита одинаковой полярности) электромагнит, оказывающийся между ними, испытывает частичную компенсацию их вкладов в момент (требование 3). Тем не менее система остаётся работоспособной: формула (2.57) энергетически оптимального распределения токов автоматически перенаправляет ток в те электромагниты, чьё положение благоприятно (вблизи чередующихся пар), и уменьшает ток в

тех, где соседние постоянные магниты взаимно компенсируются. Платой за неполную двудольность является некоторое снижение эффективности – большее значение суммарного тока, необходимого для реализации заданного момента.

Для минимизации этих потерь решается дискретно-оптимизационная задача: найти такое распределение полярностей $p_j \in \{+1, -1\}$, $j = 1, \dots, 60$, при котором число рёбер с чередующимися полярностями максимально [77]. Решение строится в два этапа: (I) инициализация с помощью двудольной раскраски, полученной обходом графа в ширину, (II) локальная оптимизация – для каждой вершины, у которой число соседей одинаковой с ней полярности превышает число соседей противоположной полярности, полярность переключается на противоположную. Итерации продолжаются до сходимости. Этот алгоритм обеспечивает 88 чередующихся рёбер из 120 (73.3%) при равном делении 30 северных и 30 южных полюсов. Ни одна из 20 треугольных граней не оказывается монохромной (все три вершины одинаковой полярности), т. е. в каждой треугольной грани присутствуют как минимум два чередующихся ребра из трёх.

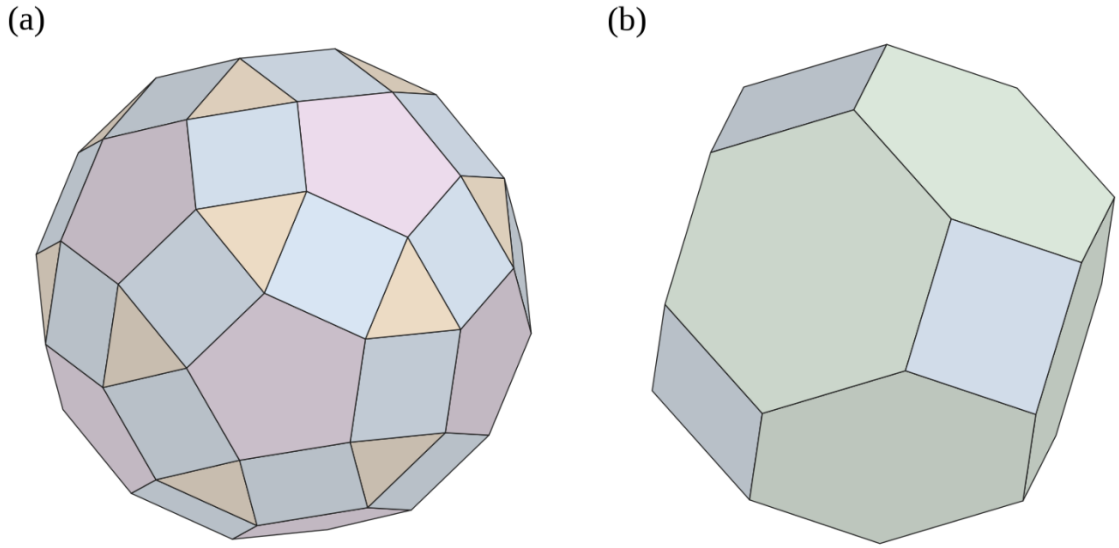


Рисунок 3.1 – Многогранники, использованные для размещения магнитов:
(a) ромбоикосододекаэдр ($M = 60$ вершин) – позиции постоянных магнитов на внешней оболочке; (b) усечённый октаэдр ($S = 24$ вершины) – позиции электромагнитов на внутренней оболочке.

3.4 Выбор многогранника для размещения электромагнитов

При выборе многогранника для расположения S электромагнитов главными являются требования 4 и 5: несовпадение групп симметрии с PM-многогранником и отсутствие мёртвых зон с гарантированно ненулевым моментом вдоль любой оси. Для количественной оценки

кандидатов введём следующие характеристики, опирающиеся на карту вращающего момента $\boldsymbol{T}(t)$.

Метрика производительности привода

При фиксированной взаимной ориентации сферических оболочек и единичной норме вектора токов $\|\boldsymbol{I}\| = 1$, максимально достижимая проекция вращающего момента на произвольную единичную ось $\widehat{\boldsymbol{d}} \in R^3$ определяется задачей [71]:

$$\tau(\widehat{\boldsymbol{d}}) = \max_{\|I\| = 1} \widehat{\boldsymbol{d}}^{\top} \boldsymbol{T}(t) \boldsymbol{I}. \tag{3.4}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, нетрудно установить, что максимум в (3.4) достигается при $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^{\top}\widehat{\boldsymbol{d}} \,/\, \|\boldsymbol{T}^{\top}\widehat{\boldsymbol{d}}\|$ и равен:

$$\tau(\widehat{\boldsymbol{d}}) = \|\boldsymbol{T}^{\top}\widehat{\boldsymbol{d}}\|. \tag{3.5}$$

Изотропность управляющего момента в данной взаимной ориентации характеризует коэффициент изотропии:

$$\eta = \min_{\widehat{\boldsymbol{d}} \in S^2} \tau(\widehat{\boldsymbol{d}}) \,/\, \max_{\widehat{\boldsymbol{d}} \in S^2} \tau(\widehat{\boldsymbol{d}}), \tag{3.6}$$

принимающий значения от 0 (момент в каком-либо направлении невозможно реализовать) до 1 (идеально изотропный привод). Для усреднённой оценки используется средний коэффициент изотропии $\bar{\eta}$, вычисляемый как среднее η по представительной выборке ориентаций из группы $SO(3)$.

Гарантированный минимальный момент

Помимо изотропности, важной характеристикой является глобальный наихудший момент [71]:

$$\tau_{min} = \min_{\Lambda \in SO(3)} \min_{\widehat{\boldsymbol{d}} \in S^2} \tau(\widehat{\boldsymbol{d}}; \Lambda), \tag{3.7}$$

определяющий гарантию ненулевого момента: условие $\tau_{min} > 0$ эквивалентно условию (3.1) о полном ранге $\boldsymbol{T}(t)$ для всех ориентаций. Поясним, $\tau(\widehat{\boldsymbol{d}}; \Lambda)$ – это проекция вращающего момента на ось $\widehat{\boldsymbol{d}}$ при ориентации оболочек, которые задаются Λ. Эта величина непосредственно отвечает за выполнение требования 5.

Сравнение кандидатов

В таблице 3.2 приведено сравнение шести кандидатов на размещение электромагнитов при фиксированном РМ-многограннике (ромбоикосододекаэдр, $M = 60$). Для каждого кандидата величины τ_{min} , $\langle \tau_{min} \rangle$ (среднее по ориентациям с указанием стандартного отклонения σ), $\langle \tau_{max} \rangle$ и $\bar{\eta}$ вычислялись путём усреднения по 10^4 равномерно распределённым на $SO(3)$ ориентациям [78], для каждой ориентации $\tau(\widehat{\boldsymbol{d}})$ вычислялась по 10^5 направлениям $\widehat{\boldsymbol{d}}$,

расположенным на сфере Фибоначчи [79]. Значения τ_{min}, $\langle\tau_{min}\rangle$ и $\langle\tau_{max}\rangle$ приведены в Н·м при $\|\boldsymbol{I}\| = 1$ А.

Таблица 3.2 – Производительность кандидатов на размещение электромагнитов при $M = 60$ постоянных магнитов на ромбоикосододекаэдре. Значения вычислены по 10^4 ориентаций × 10^5 направлений.

Многогранник	S	**Симметрия**	$\boldsymbol{\tau_{min}}$	$\langle\boldsymbol{\tau_{min}}\rangle \pm \boldsymbol{\sigma}$	$\langle\boldsymbol{\tau_{max}}\rangle$	$\bar{\eta}$
Куб	8	O_h	0.001	0.098 ± 0.049	0.401	24.9%
Икосаэдр	12	I_h	0.008	0.172 ± 0.058	0.467	38.0%
Кубооктаэдр	12	O_h	0.010	0.182 ± 0.058	0.466	39.6%
Додекаэдр	20	I_h	0.057	0.261 ± 0.066	0.590	44.7%
Усечённый октаэдр	24	O_h	0.118	0.326 ± 0.061	0.628	52.2%
Икосододекаэдр	30	I_h	0.152	0.371 ± 0.066	0.688	54.4%

Данные таблицы 3.2 показывают сильную зависимость τ_{min} от числа электромагнитов: τ_{min} возрастает от 0.01 Н·м при $S = 12$ до 0.057 Н·м при $S = 20$ и далее до 0.118 и 0.152 Н·м при $S = 24$ и $S = 30$ соответственно. Также видно, что коэффициент изотропии $\bar{\eta}$ возрастает с увеличением S.

Для двух кандидатов с одинаковым числом электромагнитов $S = 12$ кубооктаэдр (O_h) даёт несколько более высокое значение $\bar{\eta} = 39.6\%$ по сравнению с икосаэдром (I_h) с $\bar{\eta} = 38.0\%$. Это согласуется с гипотезой требования 4 о благотворности несовпадения групп симметрии. Однако следует учесть, что эти многогранники различаются и расположением вершин, поэтому эффект нельзя приписать исключительно симметрии [71].

Выбор усечённого октаэдра

В качестве размещения электромагнитов выбран усечённый октаэдр с $S = 24$ вершинами (рисунок 3.1b). Икосододекаэдр ($S = 30$) даёт более высокий наихудший момент ($\tau_{min} = 0.152$ Н·м против 0.118 Н·м, т. е. примерно на 29% выше) и несколько более высокий средний коэффициент изотропии ($\bar{\eta} = 54.4\%$ против 52.2%). Тем не менее усечённый октаэдр предпочтительнее по следующим причинам: (I) он требует на 6 электромагнитов меньше, что

снижает массу обмоток на 0.75 кг (3.00 кг против 3.75 кг) и сокращает число независимо управляемых каналов с 30 до 24, (II) граф его рёбер двудолен (все грани – квадраты и шестиугольники), что гарантирует существование двухцветной раскраски вершин электромагнитов и может облегчить их группировку при аппаратной реализации. Если приложение требует более строгой гарантии минимального момента, икосододекаэдр ($S = 30$, $\tau_{min} = 0.152$ Н·м) представляет собой приемлемую альтернативу – ценой увеличения массы и сложности проводной схемы.

Координаты вершин и геометрические соображения

24 вершины усечённого октаэдра задаются всеми перестановками троек

$$(0, \pm 1, \pm 2), \tag{3.8}$$

с последующей проекцией на сферу радиуса r_{in}. Угловое расстояние между соседними вершинами составляет $\theta_{edge}^{EM} = 36.9°$, что обеспечивает достаточный зазор для физических размеров катушек: при внешнем радиусе обмотки $r_4 = 14$ мм на сфере радиуса $r_{in} = 65$ мм каждый электромагнит занимает угловой радиус приблизительно $\arctan(r_4/r_{in}) \approx 12°$, оставляя зазор между краями соседних катушек около ≈13°.

3.5 Итоговая конфигурация и численная проверка

Полученная конфигурация привода резюмирована в таблице 3.3, а её трёхмерное представление приведено на рисунке 3.2. Постоянные магниты на внешней оболочке отмечены двумя цветами в соответствии с назначенной полярностью, электромагниты на внутренней оболочке также показаны.

Таблица 3.3 – Параметры конфигурации магнитов сферического робота с электромагнитным приводом, обеспечивающей всенаправленное движение.

Параметр	**Постоянные магниты (внешняя оболочка)**	**Электромагниты (внутренняя оболочка)**
Многогранник	Ромбоикосододекаэдр	Усечённый октаэдр
Число магнитов	$M = 60$	$S = 24$
Группа симметрии	I_h	O_h
Угловое расстояние между соседними вершинами	25.9°	36.9°
Зазор покрытия θ_{gap}^{max}	22.2°	—
Чередование полярностей	73.3% рёбер	100% (двудольный)

Средний коэф. изотропии $\bar{\eta}$	—	52.2%
Наихудший момент τ_{min}	—	0.118 Н·м

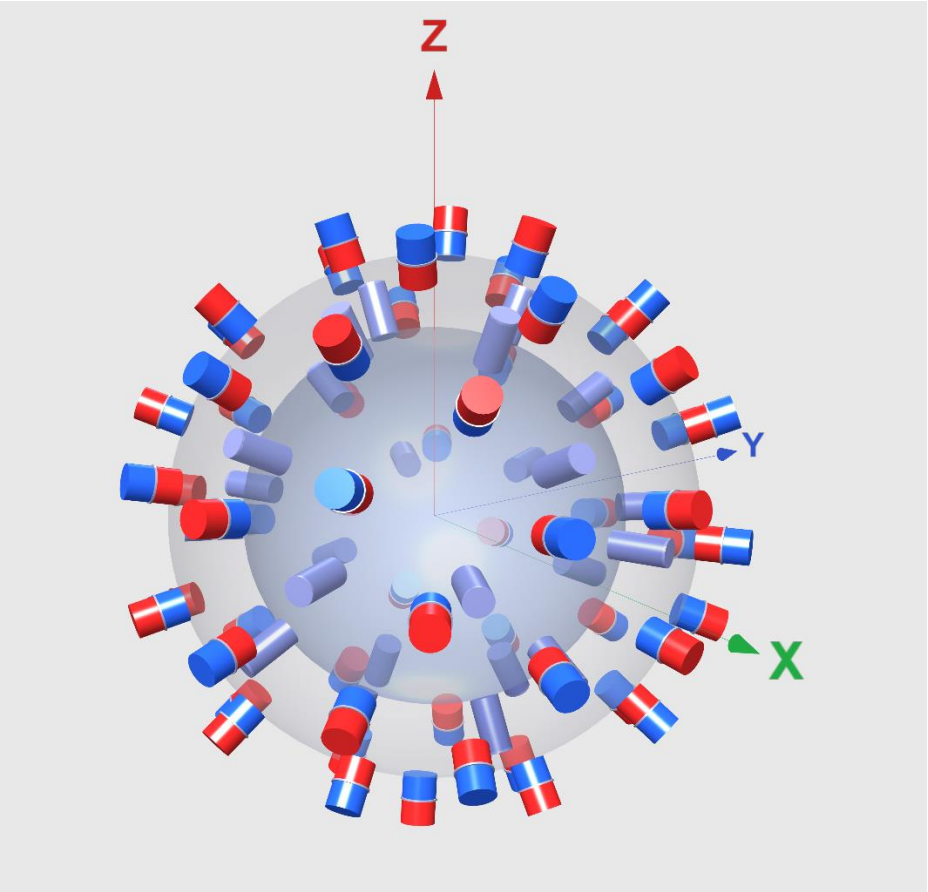


Рисунок 3.2 – Трёхмерная структура сферического робота с электромагнитным приводом. Северный полюс (N) постоянных магнитов отмечен красным, южный (S) – синим.

Численная проверка отсутствия мёртвых зон

Для подтверждения выполнения требования 5 ($\tau_{min} > 0$) для выбранной конфигурации ($M = 60$ постоянных магнитов на ромбоикосододекаэдре + $S = 24$ электромагнита на усечённом октаэдре) проведён численный эксперимент. На $SO(3)$ выбраны 10^4 равномерно распределённых ориентаций, для каждой из них функция $\tau(\hat{\boldsymbol{d}})$ вычислялась по 10^5 направлениям, образующим сферу Фибоначчи. По итогам эксперимента наименьший наблюдаемый момент составил $\tau_{min} = 0.118$ Н·м > 0.

Подчеркнём, что такой численный эксперимент не является аналитическим доказательством выполнения условия (3.1): ориентации, не попавшие в выборку, потенциально могут приводить к более низким значениям. Однако 5-й процентиль распределения минимумов вращающего момента по направлениям при фиксированной ориентации оболочек составляет

0.219 Н·м, что свидетельствует о редкости ориентаций с низким наихудшим моментом, медиана же минимумов вращающего момента по направлениям при фиксированной ориентации оболочек равна 0.328 Н·м, т.е. в типичных ориентациях производительность вращающего момента существенно превышает гарантированный минимум.

Робастность полученного результата объясняется несколькими факторами. Во-первых, характеристика Г(β) убывает с ростом β плавно: при $\beta = \theta_{gap}^{max} = 22.2°$ она ещё составляет $\sim 28\%$ от пикового значения, и даже наиболее удалённые пары постоянный магнит – электромагнит вносят заметный вклад. Во-вторых, в трёхмерной постановке каждый электромагнит одновременно взаимодействует с несколькими постоянными магнитами при различных угловых сдвигах, и эффективный вращающий момент представляет собой суперпозицию большого числа таких вкладов. В-третьих, при $S = 24$ независимо управляемых электромагнитах распределение токов (2.57) способно использовать ту подгруппу электромагнитов, чьи окрестности постоянных магнитов в данной ориентации наиболее благоприятны. Совокупность этих факторов делает маловероятным обращение τ_{min} в ноль, что согласуется с численным наблюдением: в 10^4 выборках ни одна ориентация с нулевым моментом не обнаружена [71].

3.6 Выводы по главе 3

Сформулирована и решена задача оптимального размещения магнитов на двух концентрических сферических оболочках сферического робота с электромагнитным приводом, способного совершать всенаправленное движение. Ключевые результаты главы состоят в следующем.

1. Показано, что требование, накладываемое на тензоры инерции обеих оболочек, необходимое для применимости метода оптимального управления из раздела 2.3, ограничивает выбор размещения магнитов классом вершинно-транзитивных многогранников с кубической или икосаэдрической симметрией. Соответствующее множество кандидатов конечно и состоит из 18 многогранников (5 платоновых и 13 архимедовых тел).

2. Сформулированы пять требований к конфигурации магнитов: равномерное покрытие сферы, угловое расстояние между соседними постоянными магнитами около 20°, чередование полярностей, несовпадение групп симметрии электромагнитов и постоянных магнитов, отсутствие мёртвых зон.

3. На основе численного сравнения кандидатов выбраны: ромбоикосододекаэдр ($M = 60$) для размещения постоянных магнитов и усечённый октаэдр ($S = 24$) для размещения электромагнитов. Полярности постоянных магнитов оптимизированы с помощью двухэтапного графового алгоритма, обеспечивающего чередование 73.3% рёбер.

4. Введены количественные характеристики привода: гарантированный минимальный момент τ_{min} и средний коэффициент изотропии $\bar{\eta}$. Их значения для выбранной конфигурации – $\tau_{min} = 0.118$ Н·м и $\bar{\eta} = 52.2\%$ численно подтверждают возможность генерации ненулевого вращающего момента в произвольном направлении при любой относительной ориентации сферических оболочек.

Глава 4. Компьютерное моделирование динамики сферического робота с электромагнитным приводом

Настоящая глава посвящена численным экспериментам, проведённым для верификации построенной математической модели сферического робота с электромагнитным приводом и предложенного метода оптимального управления.

Каждый эксперимент проводится по единой двухэтапной схеме. На первом этапе, используя метод оптимального управления, описанный в разделе 2.3, моделируется приближение сферического робота к заданной эталонной траектории при заданных начальных условиях. Целью этого этапа является получение временной зависимости эталонного управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in}(t)$, приложенного к внутренней сферической оболочке, который реализует оптимальное приближение к заданной траектории. На втором этапе, используя математическую модель электромагнитного привода из раздела 2.2 и метод определения электрических токов и напряжений из разделов 2.4, 2.5, по полученному эталонному управляющему моменту восстанавливаются временные зависимости токов в обмотках электромагнитов $I_i(t)$ и подаваемых на них напряжений $u_i(t)$.

Численные эксперименты разделены на две серии по используемой конфигурации привода. В серии I (разделы 4.3 и 4.4) применяется плоская конфигурация привода с $M = 18$ постоянными магнитами и $S = 12$ электромагнитами, расположенными в плоскости движения (см. подраздел 2.2.4), такие эксперименты подтверждают применимость предложенной модели и метода оптимального управления к плоскому движению робота. В серии II (разделы 4.5 – 4.6) применяется трехмерная конфигурация с $M = 60$ постоянными магнитами, расположенными в вершинах ромбоикосододекаэдра, и $S = 24$ электромагнитами, расположенными в вершинах усечённого октаэдра (см. главу 3). Эта серия экспериментов демонстрирует возможности привода при коррекции бокового смещения, при полностью трёхмерном движении на неровной поверхности и обосновывает выбор спецификации постоянных магнитов сравнением с альтернативной конфигурацией.

Во всех приводимых далее графиках время измеряется в секундах, вращающий момент в Н·м, угловая скорость в рад/с, сила тока в амперах, электрическое напряжение в вольтах.

4.1 Программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом

Для проведения численных экспериментов, представленных в настоящей главе, разработан специализированный программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом. Программа реализована на языке программирования MATLAB версии R2024a [80] и предназначена для численного

исследования установленной в главе 2 математической модели. Исходный код программного комплекса прошёл государственную регистрацию как программное обеспечение для ЭВМ (приложение А).

Программа моделирует движение сферического робота на основе уравнений движения (2.18) с учётом модели сухого трения Контенсу–Журавлёва (2.21) и условия безотрывного движения (2.20). Численная процедура построена в два последовательных этапа в соответствии с математической моделью, изложенной в главе 2: на первом этапе синтезируется оптимальное управление и интегрируются уравнения движения робота, на втором – по найденному управляющему моменту восстанавливаются электрические токи в обмотках электромагнитов, а также по уравнению Кирхгофа рассчитываются напряжения на каждой обмотке. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений движения сферического робота в программе используется метод ode15s – реализованный в MATLAB многошаговый адаптивный решатель переменного порядка (от 1 до 5), основанный на формулах численного дифференцирования, обобщающих формулы обратного дифференцирования Гира (ФДН, BDF) [81]. Применение решателя для жестких систем обусловлено тем, что в рассматриваемой системе контактное взаимодействие с опорной поверхностью и динамика угловой скорости имеют существенно разные характерные времена, и явные одношаговые методы Рунге-Кутты потребовали бы непомерно малого шага для устойчивого интегрирования. Задача полуопределённого программирования (2.51) при синтезе оптимального управления решается стандартным пакетом выпуклой оптимизации CVX [82, 83], в частности используется решатель SeDuMi [84], а интегрирование магнитного поля по объёму электромагнита выполняется встроенным в MATLAB методом адаптивной квадратуры (функции integral2 и integral3) [85]. В приложении Б приведен фрагмент исходного кода программного комплекса, связанный с поиском оптимального управления и моделированием управляемой динамики робота.

На рисунке 4.1 представлен пользовательский интерфейс разработанного программного комплекса.

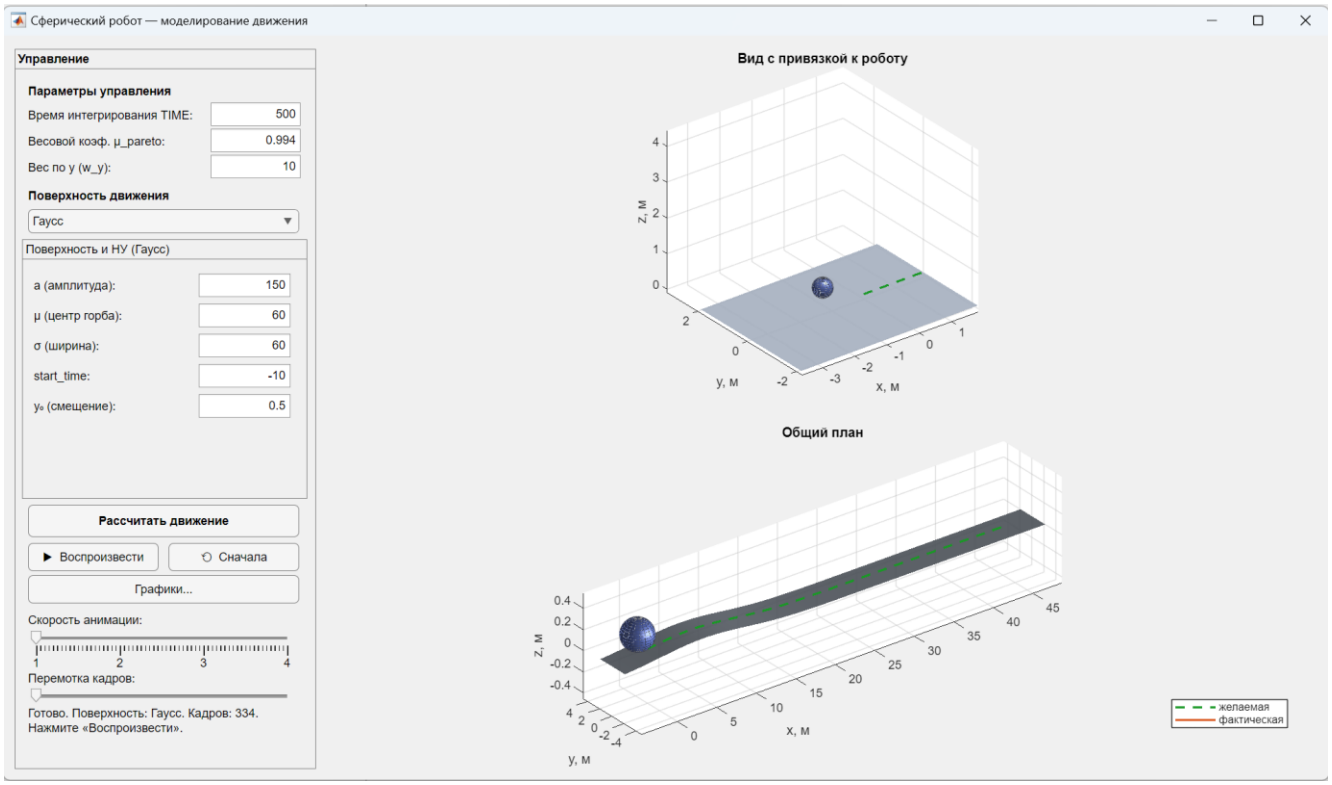


Рисунок 4.1 – Интерфейс программного комплекса для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом.

Архитектура разработанного программного комплекса включает шесть ключевых компонентов.

1. Графический интерфейс пользователя: главный компонент, реализующий взаимодействие с пользователем на платформе MATLAB App Designer. Интерфейс включает слева: панель управления (параметры моделирования, выбор типа опорной поверхности, начальные условия, кнопки запуска расчёта и просмотра графиков, регуляторы скорости анимации и перемотки кадров), справа: две сцены трёхмерной анимации: первая привязана к роботу и отображает локальную картину движения, вторая представляет собой общий план опорной поверхности с движущимся по ней роботом. На обеих сценах эталонная траектория визуализируется зелёной пунктирной линией.

2. Блок конфигурации параметров: компонент, содержащий все параметры моделирования – массово-геометрические параметры робота (радиусы и массы оболочек, моменты инерции), электромагнитные параметры (число электромагнитов и постоянных магнитов, размеры катушек, число витков обмотки, омическое сопротивление, индуктивность, остаточная намагниченность), параметры опорной поверхности, параметры численного интегрирования и параметры синтеза оптимального управления (длительность интервала управления, число узлов дискретизации). Параметры собраны в иерархическую структуру с

подразделами для динамической модели, электромагнитной модели, опорной поверхности, синтеза управления, численного интегрирования и начальных условий.

3. Расчётный модуль оптимального управления (этап 1): компонент, реализующий синтез оптимального управления (подраздел 2.3.3) и численное интегрирование уравнений движения с найденным регулятором. Включает построение матриц линеаризованной нестационарной системы на сетке времени, решение задачи полуопределённого программирования (2.51) с помощью пакета CVX для нахождения матриц обратной связи $\boldsymbol{\Theta}_{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\zeta}$, и последующее численное интегрирование исходной (нелинейной) системы уравнений движения с найденным управлением методом ode15s. Выходом этапа является временная зависимость требуемого управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in}(t)$.

4. Расчётный модуль электрических токов (этап 2): компонент, реализующий восстановление токов в обмотках электромагнитов по заданному управляющему моменту в соответствии с формулой (2.57) – регуляризованной псевдообратной матрицей. Включает численное интегрирование магнитного поля цилиндрического постоянного магнита по формуле (2.8), разложение скалярных характеристик взаимодействия и потокосцепления в ряд Фурье по углу β между постоянным магнитом и электромагнитом, вычисление взаимных индуктивностей между обмотками и решение обратной задачи (2.52) на каждом шаге по времени. Значения трудно вычислимых интегралов из уравнения (2.8), зависящих только от геометрии расположения магнитов (но не от траектории), сохраняются на диск и при повторных расчётах с той же конфигурацией привода загружаются из памяти, что существенно ускоряет численные эксперименты.

5. Расчётный модуль электрических напряжений (этап 2): компонент, реализующий восстановление подаваемых на обмотки напряжений по уравнению Кирхгофа (2.65). По известным временным зависимостям токов численно вычисляются производные dI_k/dt и $d\Phi_k/dt$, на основе которых для каждой обмотки рассчитывается временная зависимость подаваемого напряжения $u_k(t)$, учитывающая омическое сопротивление, самоиндукцию, взаимную индукцию с соседними обмотками и обратную ЭДС, связанную с взаимным движением электромагнитов и постоянных магнитов.

6. Расчётный модуль визуализации результатов: компонент, реализующий построение временных зависимостей ключевых параметров модели: угловых скоростей, вращающего момента, электрических токов и напряжений.

Программный комплекс поддерживает два режима работы, соответствующие двум типам опорной поверхности.

Режим «Плоскость» предназначен для моделирования движения сферического робота по горизонтальной плоской поверхности. В этом режиме пользователь задаёт желаемую скорость движения v, начальное положение центра масс $\boldsymbol{\xi}_0 \in R^3$ и начальную угловую скорость внешней оболочки $\boldsymbol{\Omega}_0 \in R^3$. Эталонная траектория представляет собой прямолинейное движение с постоянной скоростью v вдоль выбранной оси.

Режим «Гаусс» предназначен для моделирования движения сферического робота по неровной поверхности с профилем в плоскости $O_0x_0z_0$ в виде функции Гаусса. В этом режиме задаются параметры входящие в функцию Гаусса, начальное поперечное смещение y_0. Эталонная траектория задается в плоскости $O_0x_0z_0, y_0 = 0$ и согласована с опорной поверхностью.

В обоих режимах сохраняется единая двухэтапная структура численной процедуры моделирования. Для удобства работы пользователя реализовано отложенное вычисление этапа 2: после завершения этапа 1 пользователь может ограничиться просмотром графиков механических величин (без расчёта токов и напряжений) или открыть полный набор графиков, при первом обращении к которым автоматически запускается расчет этапа 2. Параметры моделирования (время интегрирования, параметры поверхности и начальные условия) задаются непосредственно из графического интерфейса, что позволяет быстро повторять эксперименты с изменёнными параметрами без редактирования исходного кода.

4.2 Параметры сферического робота и общие условия экспериментов

Численные эксперименты проводятся для сферического робота со следующими массово-геометрическими и электромагнитными параметрами (таблица 4.1). Внешняя оболочка изготовлена из пластика толщиной 5 мм с резиновым покрытием толщиной 5 мм для сцепления с опорной поверхностью, внутренняя оболочка – пластиковая. Постоянные магниты выполнены из неодим-железо-бор сплава (NdFeB) с высокой остаточной намагниченностью, электромагниты – толстостенные цилиндрические соленоиды, намотка которых выполнена из медного провода. Параметры постоянных магнитов и электромагнитов одинаковы для обеих рассматриваемых конфигураций, различаются лишь число магнитов и принцип их размещения.

Таблица 4.1 – Основные параметры сферического робота с электромагнитным приводом.

Параметр	**Значение**	**Параметр**	**Значение**
Радиус внутренней оболочки, мм	65	Остаточная намагниченность постоянного магнита, Тл	1.4
Толщина внутренней оболочки, мм	5	Масса одного постоянного магнита, кг	0.0675
Масса внутренней оболочки без	0.45	Внутренний радиус	4

учета электромагнитов, кг		электромагнита, мм	
Радиус внешней оболочки, мм	90	Внешний радиус электромагнита, мм	14
Толщина резинового слоя внешней оболочки, мм	5	Длина электромагнита, мм	25
Толщина пластикового слоя внешней оболочки, мм	5	Число витков обмотки электромагнита	1200
Масса внешней оболочки без учета магнитов, кг	1.25	Масса одного электромагнита, кг	0.125
Момент инерции внешней оболочки, кг·м²	0.032	Сопротивление обмотки электромагнита, Ом	8.66
Радиус постоянного магнита, мм	11	Индуктивность обмотки электромагнита, мГн	8.4
Высота постоянного магнита, мм	24	Диаметр провода обмотки электромагнита, мм	0.42

Во всех экспериментах коэффициент сухого трения между внешней оболочкой и опорной поверхностью принят равным $к = 0.8$, что соответствует типичному значению для резинового контакта. Для удобства интерпретации и в силу особенностей конфигураций магнитов временные зависимости электрических токов и напряжений приводятся только для двух соседних электромагнитов (под номерами «1» и «2»).

4.3 Движение по прямой в плоской конфигурации привода

В первую очередь рассмотрим движение сферического робота по плоской шероховатой поверхности вдоль прямой, заданной уравнениями:

$$x_0^0(t) = vt,\ y_0^0(t) = z_0^0(t) = 0. \tag{4.1}$$

Согласно (4.1), желаемое движение происходит вдоль оси O_0x_0 с постоянной скоростью v. Поскольку начальные условия и желаемая траектория обладают симметрией относительно плоскости $O_0x_0z_0$, в процессе движения отличными от нуля будут только y-компоненты угловой скорости внешней оболочки $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega_y, 0)$ и управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in} = (0, Q_y^{in}, 0)$.

Начальные условия выбраны нулевыми:

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\Omega}(0) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = (0,0,0), \tag{4.2}$$

а желаемая скорость движения принята равной $v = 3$ км/ч $= 0.833$ м/с. Тем самым задача сводится к оптимальной подстройке скорости от $v = 0$ до требуемого значения и её дальнейшей стабилизации. Степень отклонения от требуемой траектории будем оценивать величиной: $\Delta(t) = ||\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\xi}_0(t)||$, где $\boldsymbol{\xi}_0(t) = (x_0^0(t), y_0^0(t), z_0^0(t))$.

На первом этапе моделирования применением метода оптимального управления из раздела 2.3 – а именно, решением задачи минимизации γ^2, при ограничениях в виде матричных неравенств (2.51) методом полуопределённого программирования с помощью пакета CVX – получена временная зависимость эталонного управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in}(t)$, реализующего оптимальное приближение к траектории (4.1). Результаты приведены на рисунке 4.2.

Из приведённых зависимостей видно, что управляющий момент $Q_y^{in}(t)$ имеет ярко выраженный пусковой импульс отрицательного знака, длительностью около 5 с, после чего возвращается к нулю по мере выхода робота на установившийся режим качения с постоянной скоростью. Скорость вращения внешней оболочки $\Omega_y(t)$ монотонно нарастает от нуля и выходит на желаемое значение примерно за 10 с моделирования. Отклонение от эталонной траектории $\Delta(t)$ достигает максимума около $t \approx 2$ с, а затем монотонно убывает и к моменту $t \approx 10$ с практически обращается в ноль. Полученные результаты подтверждают высокое качество синтезированного регулятора в задаче подстройки и стабилизации угловой скорости.

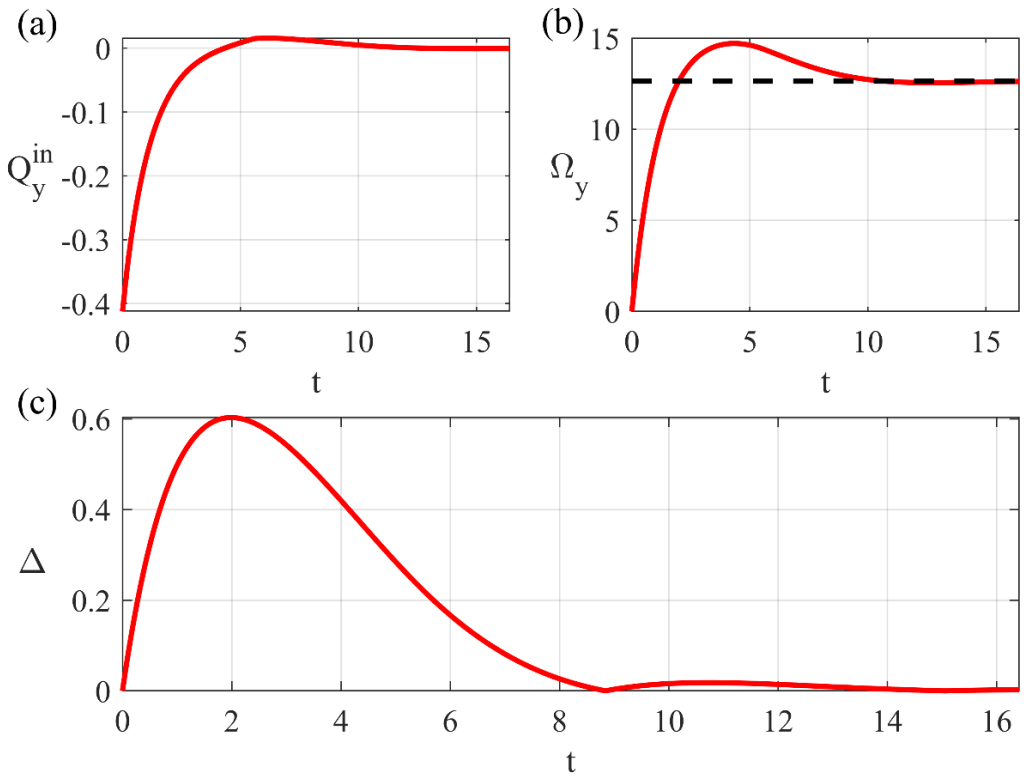


Рисунок 4.2 – (a) Зависимость -составляющей крутящего момента $\boldsymbol{Q}^{in}$ от времени; (b) Зависимость y-составляющей угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ от времени (чёрный пунктир – желаемая угловая скорость, красная сплошная линия – угловая скорость, полученная при моделировании); (c) Временная зависимость отклонения от заданной траектории.

На втором этапе используя математическую модель электромагнитного привода (раздел 2.2) и формулы (2.62) для энергетически оптимального распределения токов в плоском случае

получены временные зависимости токов на катушках электромагнитов $I_i(t)$, $i = 1, \dots, 12$, реализующих крутящий момент $\boldsymbol{Q}^{in}(t)$, и подаваемых на электромагниты напряжений $u_i(t)$. Соответствующие зависимости для соседних электромагнитов под условными номерами «1» и «2» приведены на рисунках 4.3 и 4.4.

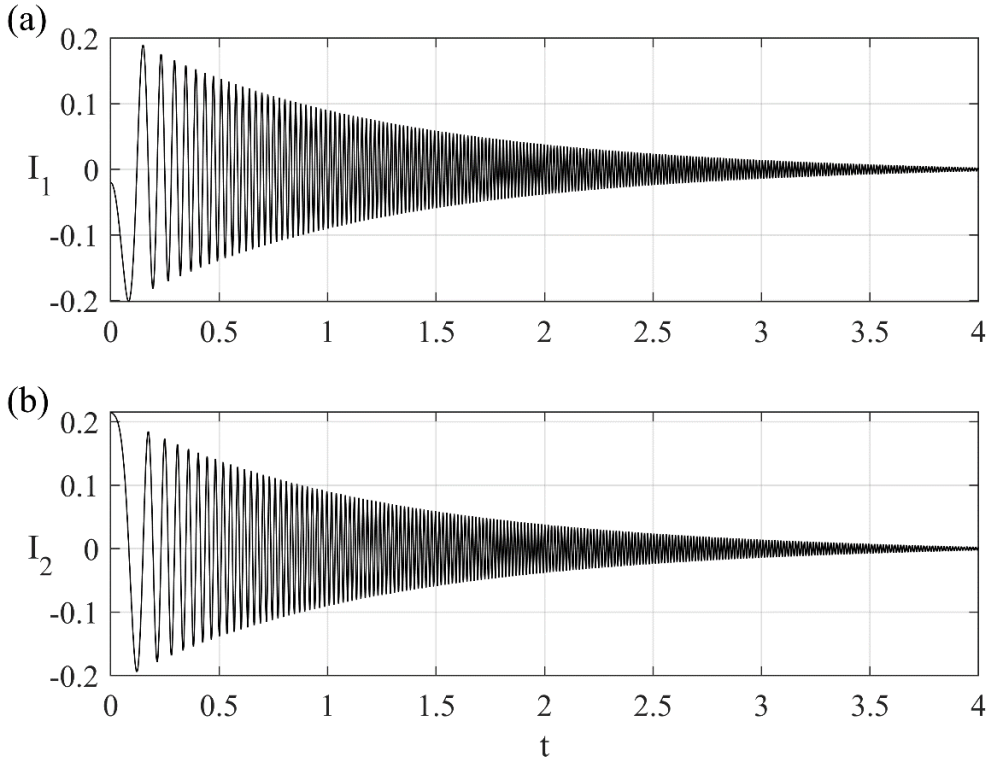


Рисунок 4.3 – Временные зависимости токов для (a) электромагнита с номером «1»; (b) электромагнита с номером «2».

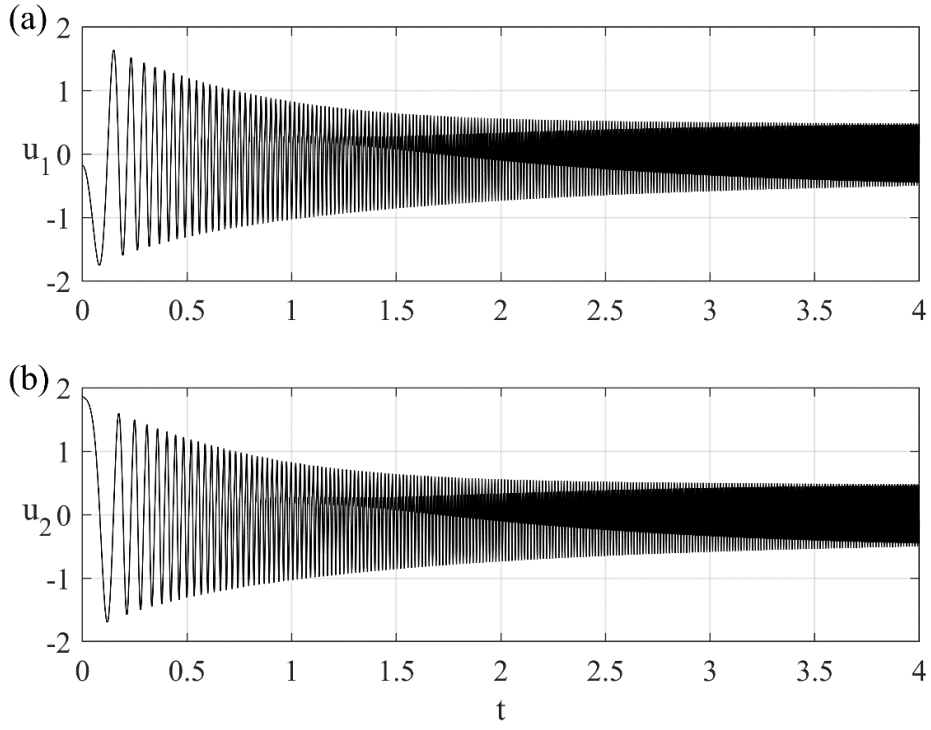


Рисунок 4.4 – Временные зависимости напряжений для (a) электромагнита с номером «1»; (b) электромагнита с номером «2».

Пиковые токи в обмотках не превышают 0.25 А и сосредоточены преимущественно на пусковом интервале, в установившемся режиме токи близки к нулю, поскольку в отсутствие сопротивления качения сохранение постоянной скорости не требует приложения момента. На графиках напряжений (рисунок 4.4) хорошо заметна высокочастотная модуляция, обусловленная обратной ЭДС, возникающей при взаимном движении постоянных магнитов и электромагнитов. Согласно уравнению (2.65), этой ЭДС соответствует последнее слагаемое в правой части – производная по времени потокосцепления постоянных магнитов с обмоткой, её величина пропорциональна относительной скорости движения сферических оболочек. В рассматриваемом эксперименте амплитуда модуляции достигает 0.5 В, что сравнимо с величиной напряжений из других источников и поэтому отчётливо заметно на графике.

4.4 Преодоление препятствия в виде горки (плоская конфигурация)

Далее рассмотрим движение сферического робота в плоскости $O_0x_0z_0$ по неровной шероховатой поверхности, профиль которой задаётся гауссовой кривой:

$$z_0(x_0) = (a\frac{R_{out}}{\sigma\sqrt{2\pi}}) \cdot \exp(-\frac{(x_0/R_{out}-\mu)^2}{2\sigma^2}), \tag{4.3}$$

где a, σ и μ – безразмерные параметры, задающие форму препятствия. Поверхность представляет собой одиночное препятствие в виде вытянутого вдоль оси O_0y_0 «холма» с симметричным подъемом и спуском, которое робот должен преодолеть. Желаемая траектория контактной точки задана как:

$$x_0^0(t) = \left(\frac{t}{T}\right)R_{out},\ y_0^0(t) = 0,\ z_0^0(t) = (a\frac{R_{out}}{\sigma\sqrt{2\pi}}) \cdot \exp(-\frac{(t/T-\mu)^2}{2\sigma^2}), \tag{4.4}$$

где $T = \sqrt{R_{out}/g}$, g – ускорение свободного падения. Безразмерные коэффициенты горки приняты равными $a = 5$, $\sigma = 2$, $\mu = 0$. Начальные условия выбраны так, что в начальный момент времени робот находится перед горкой и движется в её сторону с угловой скоростью, согласованной с движением вдоль траектории:

$$\boldsymbol{\xi}(0) = (x_0^0(-0.41), 0, z_0^0(-0.41)),\ \boldsymbol{\Omega}(0) = (0, 11.5, 0),\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = [\boldsymbol{\Omega}(0) \times \boldsymbol{n}_0], \tag{4.5}$$

где $\boldsymbol{n}_0$ — вектор нормали к опорной поверхности, вычисленный вдоль заданной траектории. Соотношение $\dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = [\boldsymbol{\Omega}(0) \times \boldsymbol{n}_0]$ выражает условие безотрыва и отсутствия проскальзывания в начальный момент времени.

Результаты применения метода оптимального управления приведены на рисунке 4.5. На рисунке 4.5a приведены желаемая и фактическая траектории движения робота в плоскости $O_0x_0z_0$ ($y_0 \equiv 0$), также на этом рисунке отчетливо виден профиль преодолеваемого

препятствия. Управляющий момент (рисунок 4.5b) принимает значения от ~−3.2 до ~0.2 Н·м и имеет нетривиальную форму, отражающую дополнительные усилия, необходимые для преодоления подъёма и удержания робота на спуске. Фактическая угловая скорость внешней оболочки Ω_y (рисунок 4.5c) следует эталонной зависимости и в конечном итоге сходится с ней. Графическая зависимость отклонения от желаемой траектории $\Delta(t)$ (рисунок 4.5d) показывает плавное приближение к нулю.

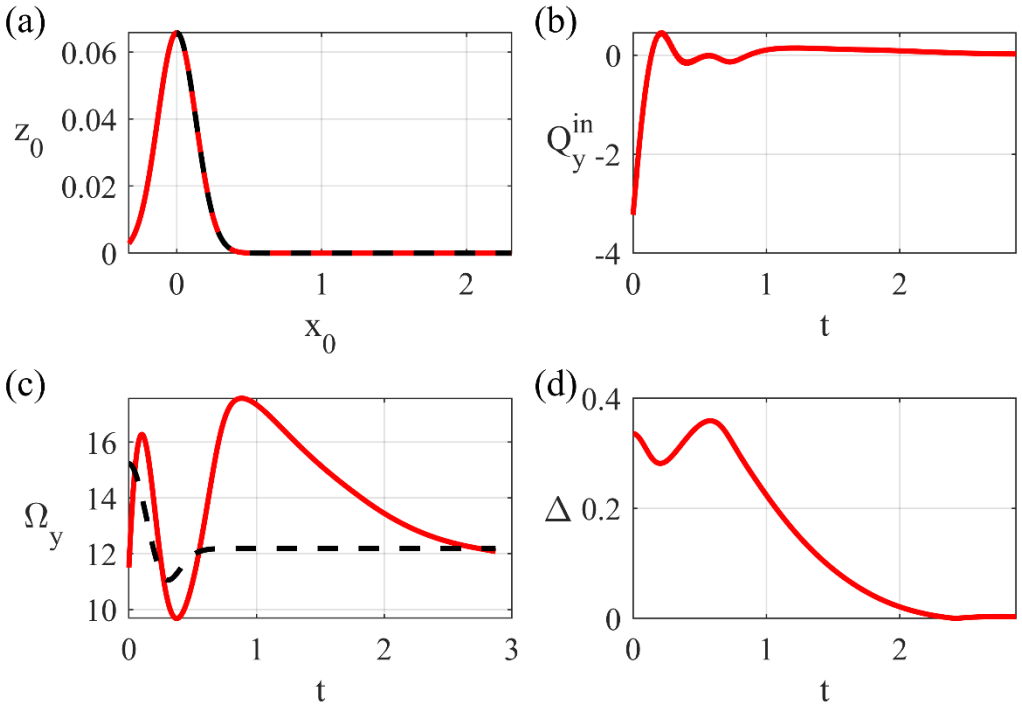


Рисунок 4.5 – (a) Желаемая траектория (черная пунктирная линия) и траектория движения робота, полученная в ходе численного моделирования (красная сплошная линия); (b) зависимость -составляющей крутящего момента $\boldsymbol{Q}^{in}$ от времени; (c) Зависимость y-составляющей угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ от времени; (d) Зависимость отклонения от желаемой траектории от времени.

Соответствующие токи в обмотках электромагнитов и подаваемые на них напряжения приведены на рисунках 4.6 и 4.7.

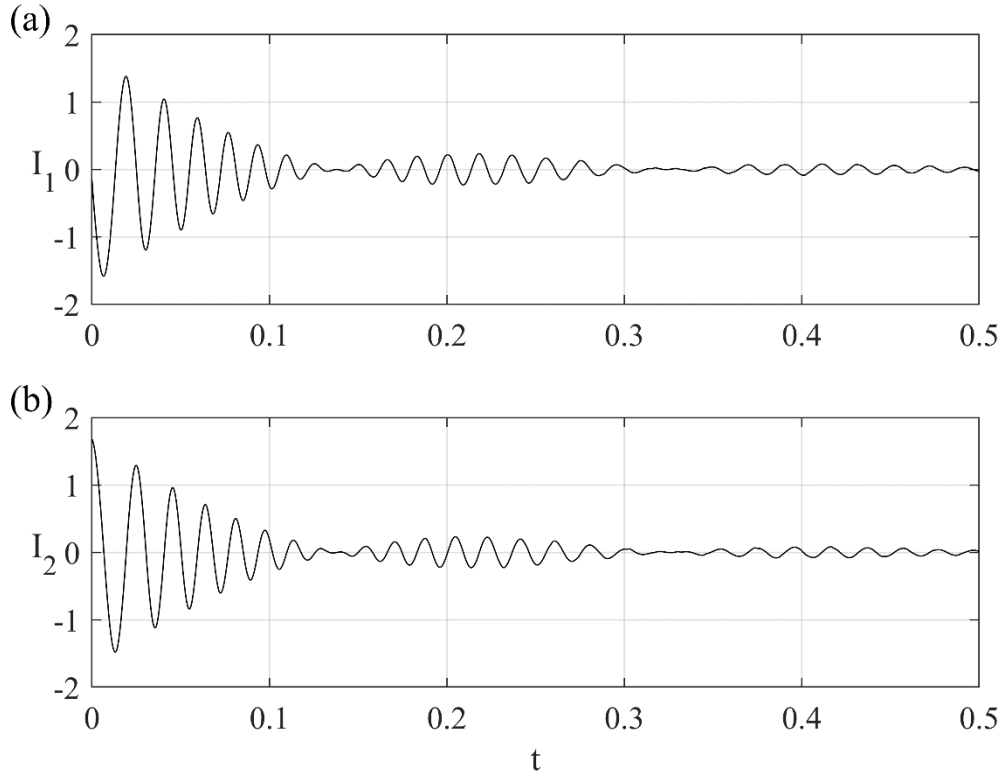


Рисунок 4.6 – Временные зависимости токов для (a) электромагнита с номером «1», (b) электромагнита с номером «2».

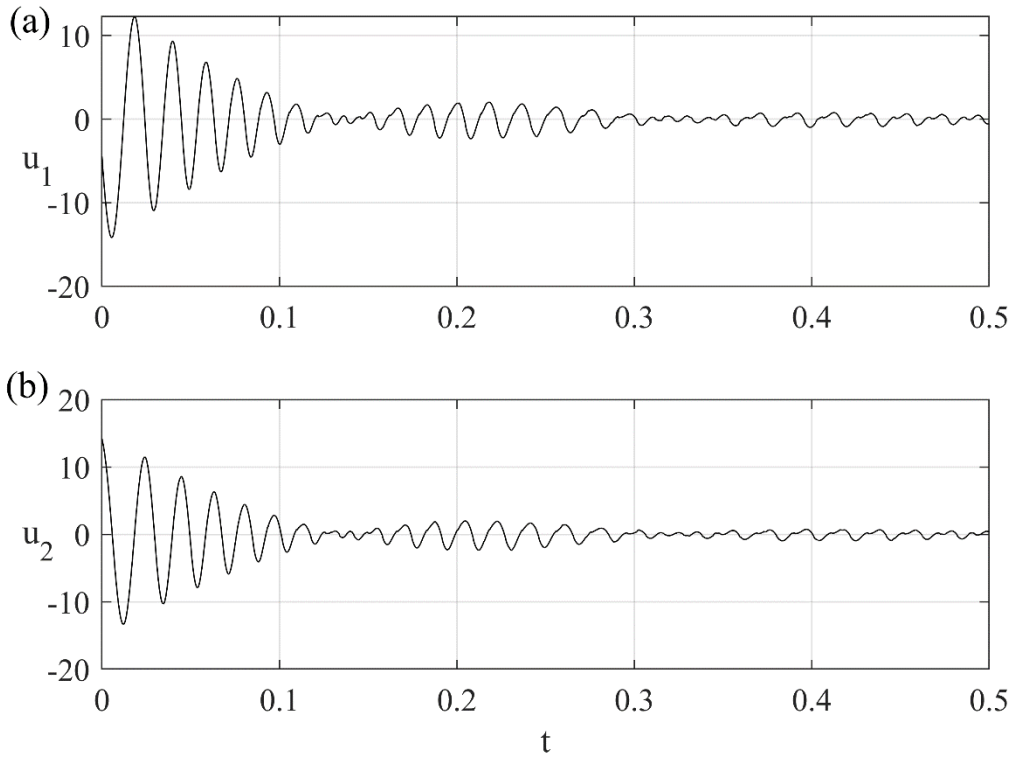


Рисунок 4.7 – Временные зависимости напряжений для (a) электромагнита с номером «1», (b) электромагнита с номером «2».

Обратная ЭДС, возникающая при взаимном движении оболочек, в данном эксперименте не превышает 0.5 В. В отличие от первого эксперимента (раздел 4.3), на графиках напряжений (рисунок 4.7) не наблюдается выраженной высокочастотной модуляции: это объясняется тем, что амплитуда подаваемых напряжений здесь существенно больше, и относительный вклад обратной ЭДС в общую картину мал. Полученные результаты подтверждают, что предложенная методика управления и принцип реализации управляющего момента посредством электромагнитного взаимодействия применимы и к движению по неровной поверхности.

4.5 Коррекция бокового смещения всенаправленной конфигурацией привода

Следующий эксперимент демонстрирует возможности всенаправленной конфигурации привода ($M = 60, S = 24$, см. главу 3) на примере задачи коррекции бокового смещения. Как и в разделе 4.3, движение происходит по плоской шероховатой поверхности с коэффициентом сухого трения к $= 0.8$ вдоль прямой (4.1) с желаемой скоростью $v = 1$ км/ч $= 0.278$ м/с, однако, в отличие от него, в начальный момент времени робот находится не на эталонной траектории, а смещён в сторону:

$$\boldsymbol{\xi}(0) = (0, 0.9, 0), \;\; \boldsymbol{\Omega}(0) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = (0, 0, 0). \tag{4.6}$$

Начальное смещение составляет 0.9 м. Содержательно эксперимент моделирует ситуацию, когда робот стартует с бокового отклонения от заданной траектории и одновременно должен и набрать заданную скорость, и вернуться на заданную траекторию. В плоской конфигурации привода такая задача неразрешима принципиально: для генерации -компоненты момента (необходимой для бокового движения) требуется, чтобы карта вращающего момента по крайней мере имела ранг 2, что невозможно при размещении всех магнитов в одной плоскости. Во всенаправленной конфигурации, как показано в главе 3, ранг карты вращающего момента равен 3 при любой взаимной ориентации оболочек, что обеспечивает возможность бокового движения.

Результаты применения метода оптимального управления приведены на рисунке 4.8. На рисунке 4.8a показаны временные зависимости всех трёх компонент управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in}$, $|Q_x^{in}|$ и $|Q_y^{in}|$ имеют сопоставимые амплитуды (около 0.05–0.1 Н·м) и несут основную долю управляющего усилия, тогда как $|Q_z^{in}|$ остаётся пренебрежимо малой на протяжении всего эксперимента. Рисунок 4.8b демонстрирует, что отклонение от эталонной траектории $\Delta(t)$ монотонно убывает от начального значения ~0.9 до нуля примерно за 30 с моделирования. На рисунке 4.8c видна траектория точки контакта в плоскости $O_0x_0y_0$: робот двигается по сложной кривой, плавно возвращаясь к прямолинейному движению вдоль оси O_0x_0. Угловые скорости

Ω_x и Ω_y (рисунки 4.8d, 4.8e) выходят на установившиеся значения, при этом $\Omega_x \to 0$ (по завершении коррекции положения), а Ω_y следует за эталонной зависимостью, отвечающей движению с заданной скоростью v.

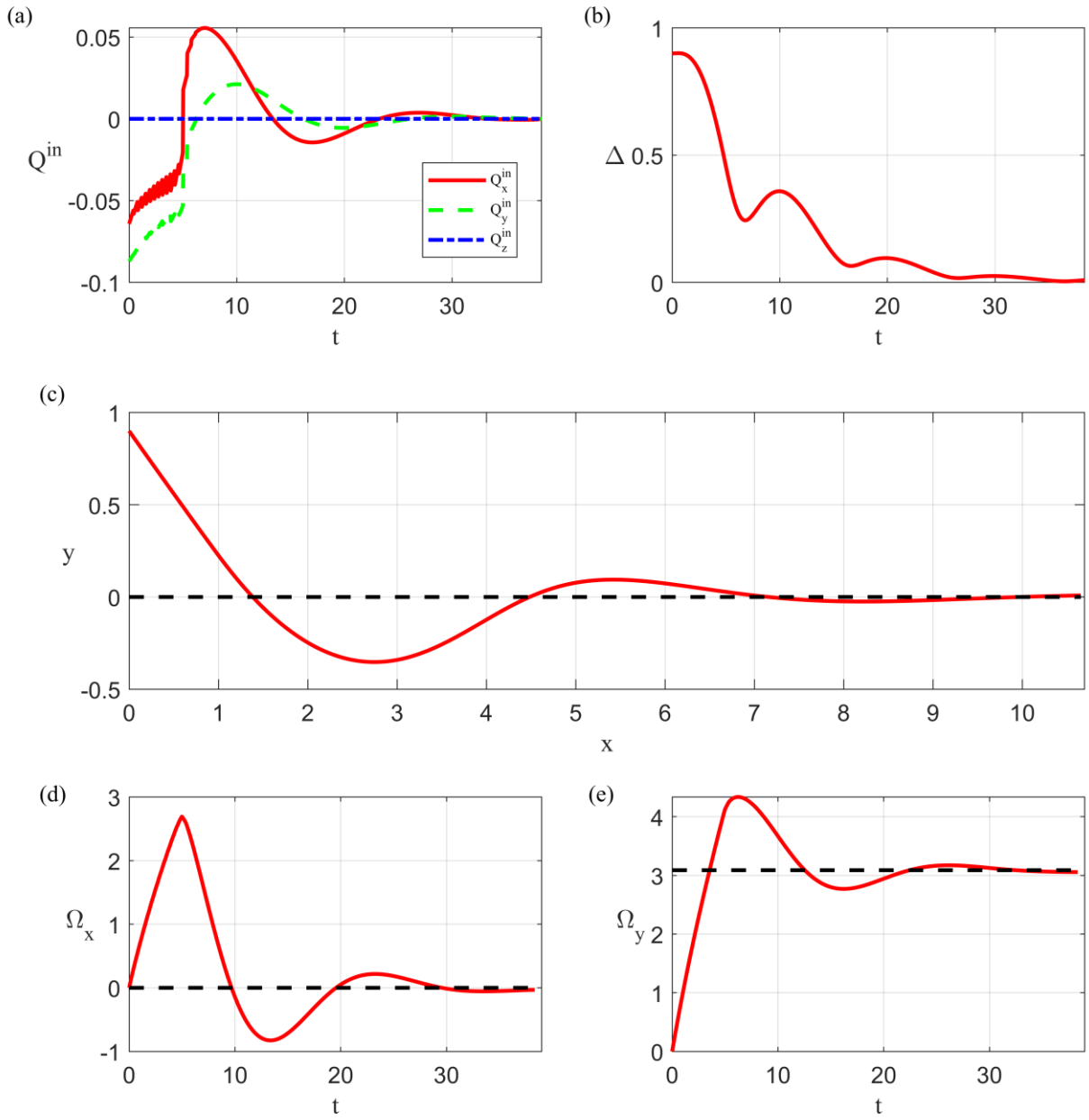


Рисунок 4.8 – (a) Временные зависимости проекций управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in}$ на оси системы $O_0x_0y_0z_0$; (b) временная зависимость отклонения от желаемой траектории; (c) траектория точки контакта в плоскости $O_0x_0y_0$ (чёрный пунктир – желаемая траектория, красная сплошная – фактическая траектория); (d) временная зависимость -компоненты угловой скорости внешней оболочки; (e) временная зависимость y-компоненты угловой скорости.

Соответствующие токи и напряжения в обмотках электромагнитов приведены на рисунках 4.9 и 4.10. Пиковые токи в обмотках достигают 0.17 А, а пиковые напряжения ±2.3 В.

Обе величины того же порядка, что и в эксперименте, описанном в разделе 4.3 (движение по прямой в плоской конфигурации), несмотря на новую конфигурацию привода. Этот результат подтверждает, что переход к всенаправленной конфигурации не приводит к существенному росту электрических нагрузок на обмотки катушек электромагнитов.

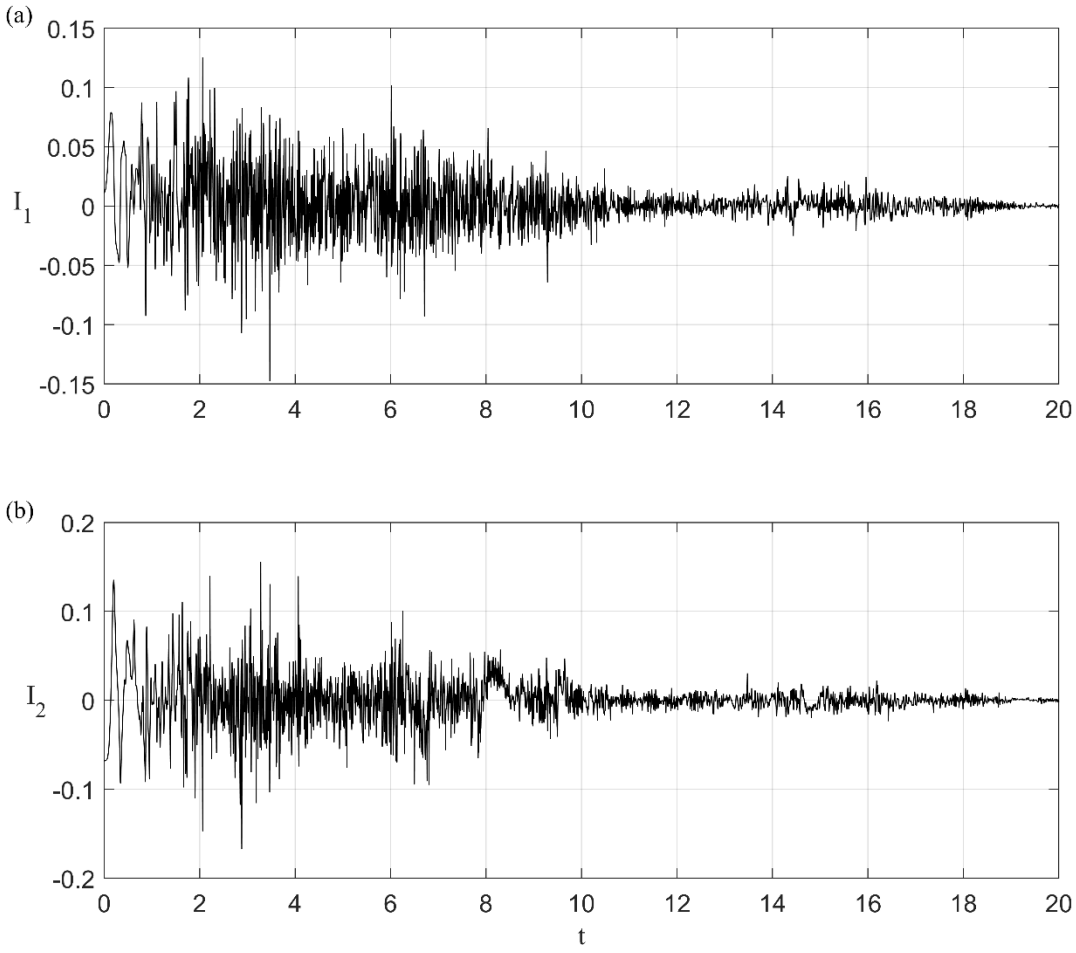


Рисунок 4.9 – Временные зависимости токов для (a) электромагнита с номером «1», (b) электромагнита с номером «2».

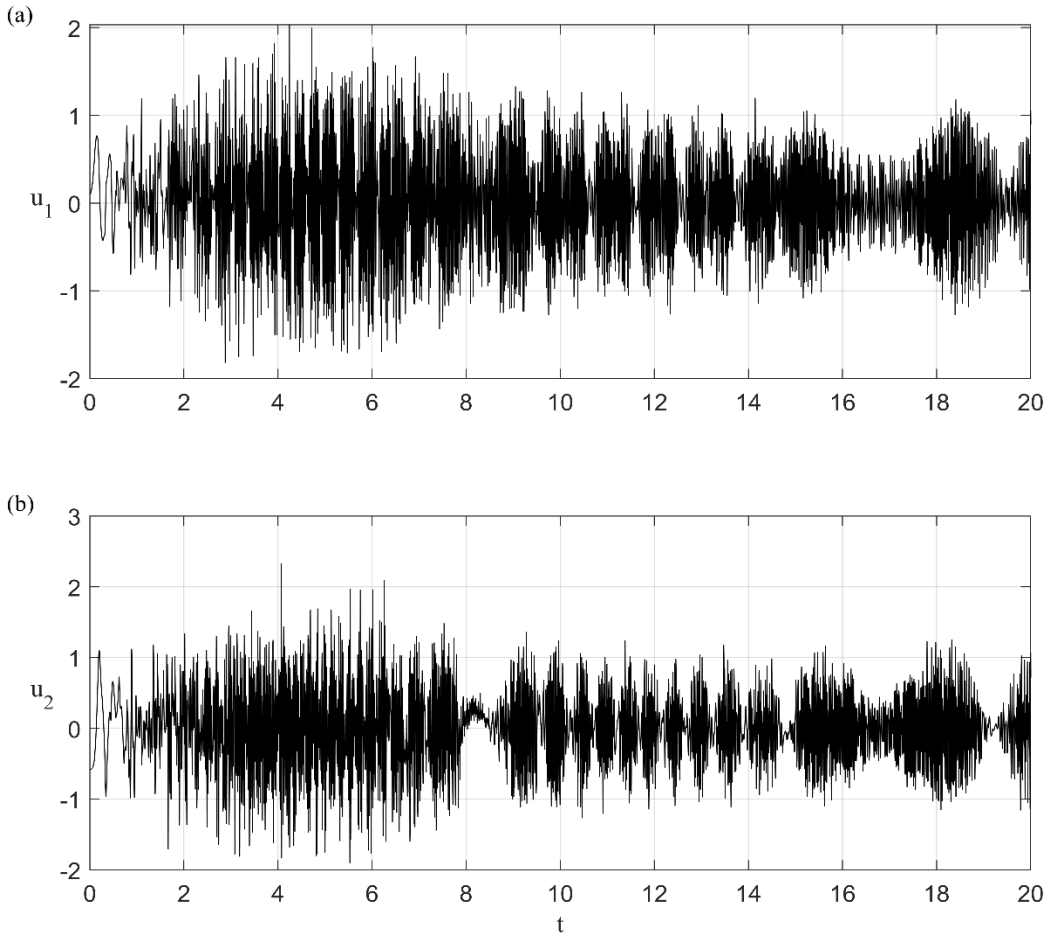


Рисунок 4.10 – Временные зависимости напряжений для (a) электромагнита с номером «1», (b) электромагнита с номером «2».

4.6 Всенаправленное движение по неровной поверхности

Заключительный, наиболее сложный эксперимент рассматривает полностью трёхмерное движение сферического робота по неровной шероховатой поверхности. Профиль опорной поверхности задаётся гауссовой функцией (4.3), а желаемая траектория записывается как (4.4). Безразмерные коэффициенты, задающие форму препятствия, равны $a = 150$, $\sigma = 60$, $\mu = 60$. Начальные условия имеют вид:

$$\boldsymbol{\xi}(0) = (x_0^0(-0.96), 0.45, z_0^0(-0.96)), \;\; \boldsymbol{\Omega}(0) = (0, 10.4, 0), \;\; \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = [\boldsymbol{\Omega}(0), \boldsymbol{n}_0], \tag{4.7}$$

Ключевое отличие настоящего эксперимента от плоского случая (раздел 4.4) состоит в том, что желаемая траектория хотя и формально задана в плоскости $O_0x_0z_0$ ($y_0 \equiv 0$), но при начальных условиях, не идеально согласованных с эталонной траекторией, робот вынужден приближаться к ней с подключением всех трёх компонент управляющего момента, поэтому задача требует полноценного трёхмерного управления.

Результаты первого этапа моделирования приведены на рисунках 4.11 и 4.12. На рисунке 4.11 показаны желаемая и фактическая трёхмерные траектории движения робота на поверхности препятствия: фактическая траектория (красная сплошная линия) после небольшого начального отклонения от плоскости $O_0x_0z_0$ возвращается к эталонной траектории (чёрная пунктирная линия) и далее движется по ней, плавно преодолевая препятствие. На рисунке 4.12a представлены временные зависимости всех трёх компонент управляющего момента $\boldsymbol{Q}^{in}$, все три компоненты вращающего момента принимают участие в преодолении препятствия и следовании заданной траектории, причём $|Q_x^{in}|$ оказывается доминирующей – что соответствует основной задаче возвращение к заданной траектории. Отклонение $\Delta(t)$ от желаемой траектории (рисунок 4.12b) убывает от начального значения примерно до нуля за 40 с моделирования. Траектории точки контакта в проекциях на плоскости $O_0x_0y_0$ и $O_0x_0z_0$ (рисунки 4.12c и 4.12d) визуализируют процесс сходимости горизонтальной и вертикальной составляющих движения. Угловые скорости внешней оболочки Ω_x и Ω_y (рисунки 4.12e, 4.12f) возвращаются к заданным значениям после возвращения робота на эталонную траекторию и преодоления препятствия.

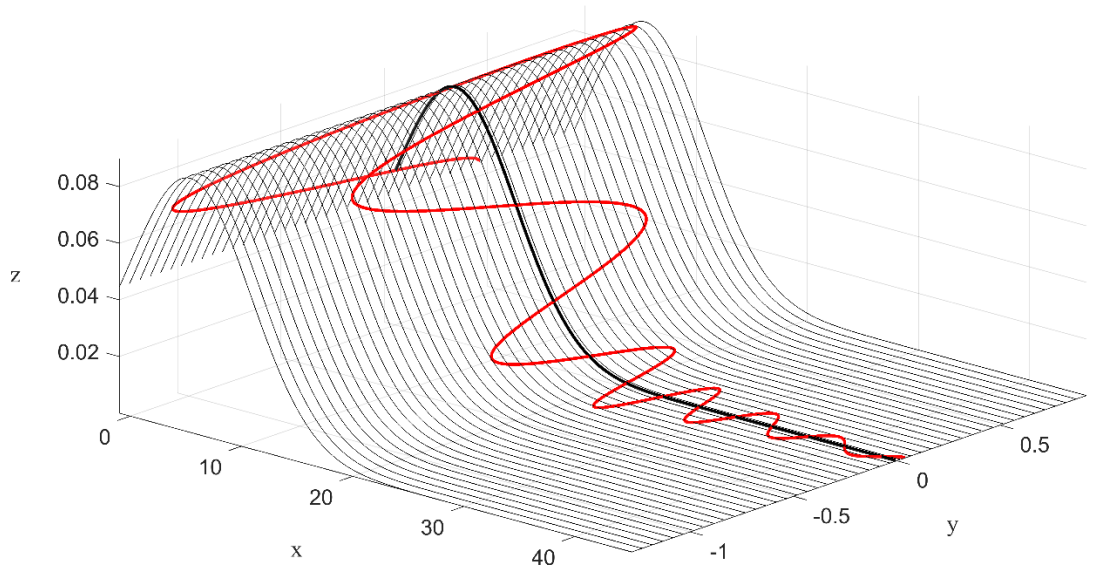


Рисунок 4.11 – Желаемая (чёрный пунктир) и фактическая (красная сплошная линия) траектории сферического робота на неровной поверхности при трёхмерном движении.

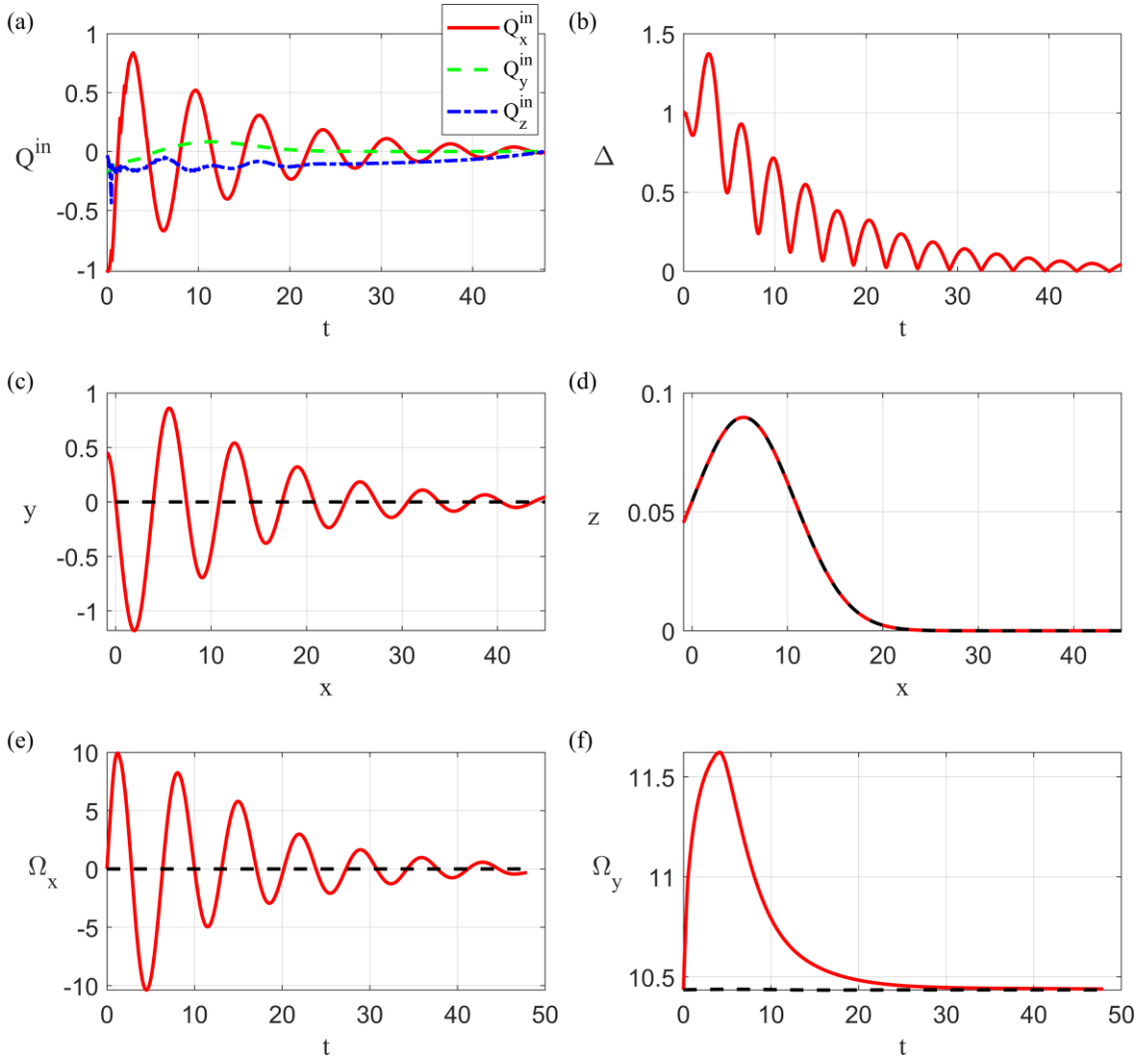


Рисунок 4.12 – Результаты первого этапа моделирования трёхмерного движения: (a) временные зависимости проекций момента $\boldsymbol{Q}^{in}$ на оси системы $O_0x_0y_0z_0$; (b) отклонение от желаемой траектории; (c) траектория точки контакта в плоскости $O_0x_0y_0$; (d) траектория точки контакта в плоскости $O_0x_0z_0$; (e), (f) временные зависимости x- и -компонент угловой скорости внешней оболочки.

Полученные на первом этапе временные зависимости управляющего момента используются на втором этапе – расчёт электрических токов в обмотках электромагнитов и напряжений на них. Полученные токи и напряжения для двух соседних электромагнитов приведены на рисунках 4.13 и 4.14.

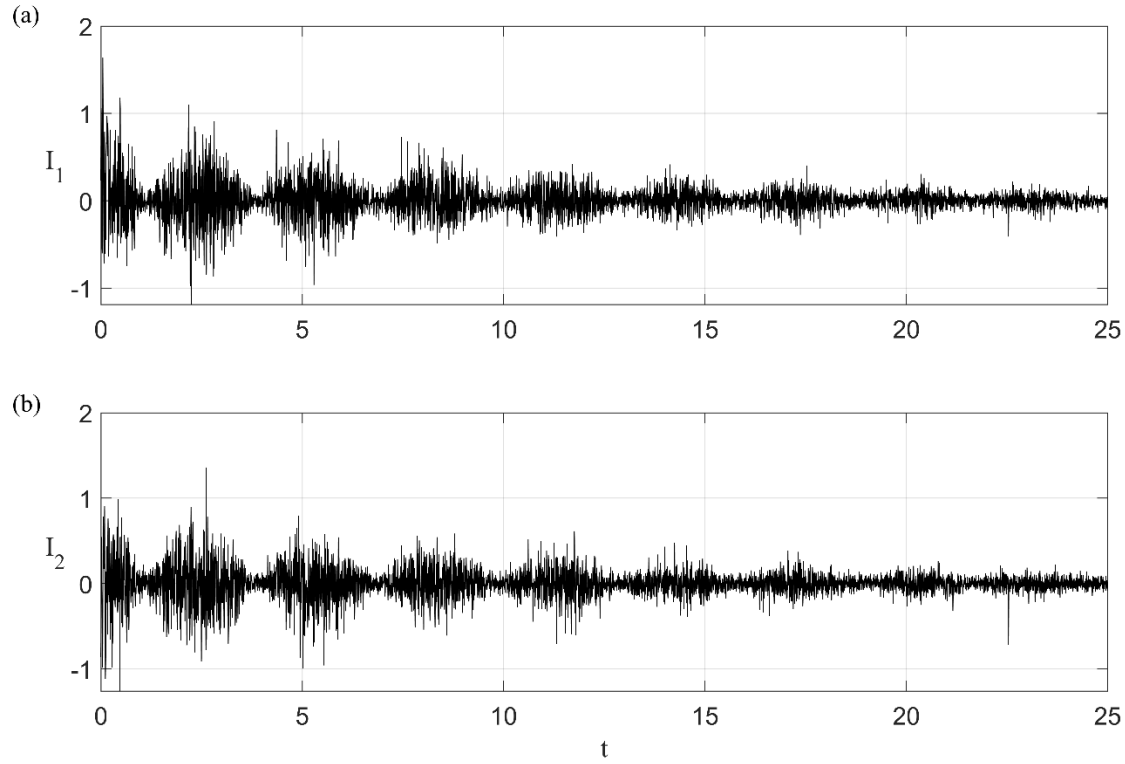


Рисунок 4.13 – Временные зависимости токов для (a) электромагнита с номером «1», (b) электромагнита с номером «2».

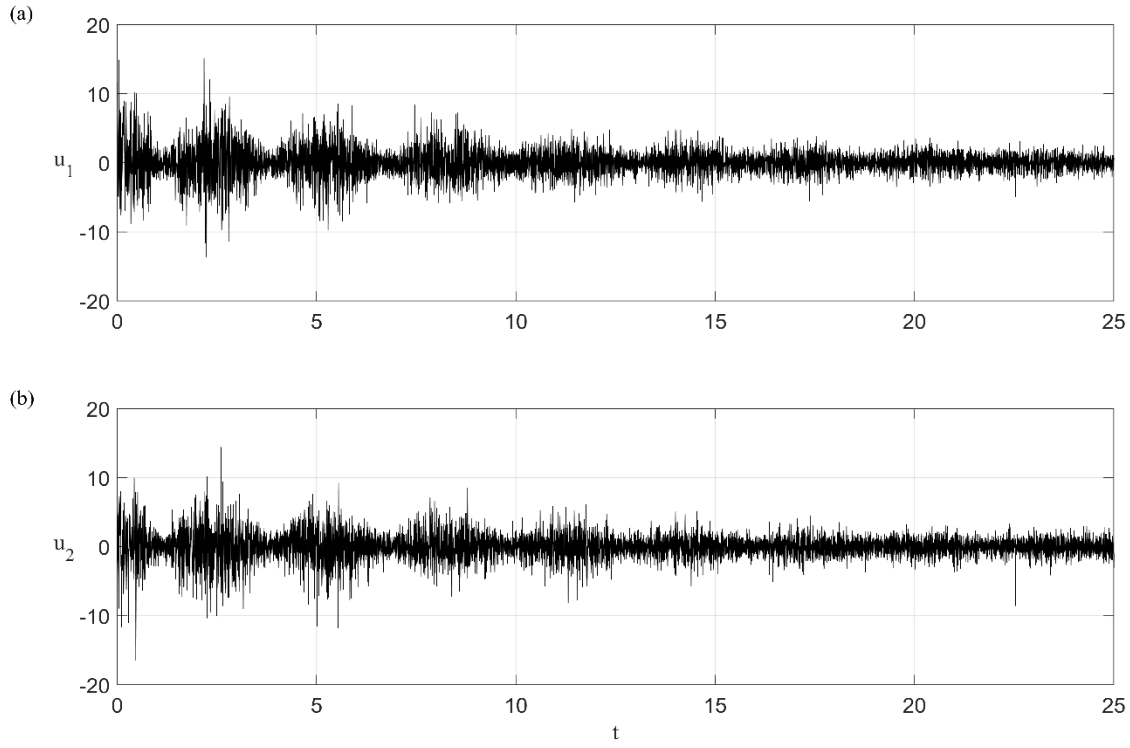


Рисунок 4.14 – Временные зависимости напряжений для (a) электромагнита с номером «1», (b) электромагнита с номером «2».

Пиковые токи в обмотках достигают ~1.6 А, а пиковые напряжения – ±16.5 В. Это примерно на порядок больше, чем в плоских экспериментах 4.3 и 4.5, что закономерно: при одновременной активации всех трёх компонент управляющего момента и более сложной геометрии движения суммарная электрическая нагрузка на обмотки возрастает. Тем не менее, обе величины остаются в пределах рабочего диапазона стандартных низковольтных драйверов электродвигателей и блоков питания, что свидетельствует о практической реализуемости предложенного электромагнитного привода.

4.7 Сравнение конфигураций постоянных магнитов

Сделанный в главе 3 выбор конфигурации постоянных магнитов ($M = 60$ цилиндрических магнитов радиуса $r_0 = 11$ мм, расположенных в вершинах ромбоикосододекаэдра) – результат компромисса между плотностью покрытия сферы и массой/энергетикой системы. Для количественного обоснования этого выбора в настоящем подразделе проведено сравнение с альтернативной конфигурацией, в которой 60 малых постоянных магнитов заменены на 8 больших магнитов радиуса $r_0 = 35$ мм, размещённых в вершинах куба. Восемь – это максимальное число цилиндрических постоянных магнитов такого размера, которые могут быть размещены на сфере радиуса $R_{out} = 90$ мм без взаимного перекрытия (зазор между краями соседних магнитов составляет 6.2 мм).

Сравнение проводится на эксперименте, описанном в разделе 4.5 (коррекция бокового смещения трехмерной конфигурацией привода) – это типовая задача всенаправленного движения, в которой одновременно задействованы несколько компонент управляющего вращающего момента. Конфигурация электромагнитов ($S = 24$ электромагнита в вершинах усечённого октаэдра) и эталонная траектория не меняются, меняется только конфигурация постоянных магнитов и их масс-геометрические характеристики, также пересчитывается скалярная характеристика $\Gamma(\beta)$. Энергетически оптимальные токи определяются по формуле (2.57).

Таблица 4.2 – Сравнение двух конфигураций постоянных магнитов при одинаковой конфигурации электромагнитов и идентичной эталонной траектории.

Параметр	**60 ПМ малого размера**	**8 ПМ большого размера**
Радиус ПМ r_0	11 мм	35 мм
Многогранник	Ромбоикосододекаэдр	Куб
Суммарная масса ПМ	4.05 кг	5.54 кг
Пиковый ток $\max\|I_i\|$	0.19 А	0.77 А
Суммарная джоулева энергия E	1.44 Дж	3.54 Дж

Из таблицы 4.2 видно, что конфигурация из 60 малых постоянных магнитов существенно превосходит альтернативную конфигурацию из 8 больших магнитов по нескольким показателям. Суммарная масса постоянных магнитов в выбранной конфигурации меньше на 37% (4.05 кг против 5.54 кг), хотя для одинаковых электромагнитной подсистемы и траектории пиковый ток в обмотках оказывается в 4 раза ниже (0.19 А против 0.77 А), а суммарная джоулева энергия – в 2.5 раза ниже (1.44 Дж против 3.54 Дж).

Полученный результат имеет ясную физическую интерпретацию. Электромагнитное взаимодействие между одиночной парой постоянный магнит – электромагнит носит локальный характер: согласно характеристике Γ(β) (рисунок 2.4 главы 2), вращающий момент существенен только в ограниченном угловом окружении (~ ± 20° от точки максимума). Поэтому увеличение размера и массы отдельного постоянного магнита не компенсирует уменьшения общего числа магнитов: большие магниты, расположенные далеко друг от друга, создают слабое «магнитное поле» вокруг внутренней оболочки, и значительная часть электромагнитов оказывается в позициях, где их вклад во вращающий момент мал. Плотное же распределение мелких магнитов обеспечивает, что для любой относительной ориентации оболочек найдётся достаточное число близко расположенных пар электромагнит – постоянный магнит, способных эффективно создавать вращающий момент. Иными словами, для генерации всенаправленного момента более важна равномерность пространственного покрытия сферы, чем индивидуальная мощность отдельного магнита.

Этот вывод не только обосновывает выбор конфигурации, сделанный в главе 3, но и формулирует общий принцип проектирования всенаправленных приводов на основе массива магнитов: предпочтение следует отдавать большому числу мелких источников магнитного поля, равномерно распределённых по сфере, а не меньшему числу более мощных, но локально сосредоточенных источников.

4.8 Выводы по главе 4

В настоящей главе проведена комплексная численная верификация построенной математической модели сферического робота с электромагнитным приводом и предложенного метода оптимального управления. Численные эксперименты охватывают плоское и трёхмерное движение, гладкие и неровные опорные поверхности, а также два альтернативных принципа размещения постоянных магнитов на сферических оболочках. Ключевые результаты состоят в следующем.

1. В плоской конфигурации привода ($M = 18$, $S = 12$) численно подтверждена применимость метода оптимального управления к двум базовым задачам: подстройка скорости и движение по прямой (раздел 4.3) и движение по неровной поверхности в плоскости (раздел

4.4). В обоих случаях отклонение от заданной траектории убывает до нуля за время порядка 10 с, пиковые токи в обмотках не превышают 2 А.

2. Во всенаправленной конфигурации привода ($M = 60, S = 24$, см. главу 3) численно продемонстрирована генерация управляющего вращающего момента в произвольном направлении. На примере задачи коррекции бокового смещения (раздел 4.5) показано, что переход к всенаправленной конфигурации не приводит к существенному росту электрических нагрузок: пиковые токи ~0.17 А и напряжения ±2.3 В сравнимы с показателями подобного плоского эксперимента.

3. В наиболее сложном из представленных эксперименте, трёхмерное движение по горке, вид которой задает функция Гаусса (раздел 4.6), численно подтверждена работоспособность полной цепочки моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом «заданная траектория → оптимальный управляющий момент → энергетически оптимальные токи → подаваемые на электромагниты напряжения». Все три компоненты управляющего вращающего момента одновременно отличны от нуля, отклонение от траектории убывает до нуля. Кроме того, пиковые токи (~1.6 А) и напряжения (±16.5 В) остаются в пределах рабочих диапазонов стандартных низковольтных драйверов и источников питания.

4. Сравнение двух конфигураций постоянных магнитов (раздел 4.7) количественно обосновывает выбор конфигурации привода, сделанной в главе 3. Конфигурация из 60 малых магнитов в вершинах ромбоикосододекаэдра требует в 4 раза меньшего пикового тока и в 2.5 раза меньшей суммарной джоулевой энергии, чем альтернативная конфигурация из 8 больших магнитов в вершинах куба, при одновременно меньшей на 37% массе магнитной конфигурации. Полученный результат сформулирован как общий принцип: для генерации всенаправленного вращающего момента более важна равномерность пространственного покрытия сферы магнитами, чем индивидуальная мощность отдельного магнита.

5. Полученные временные зависимости электрических сигналов соответствуют рабочим диапазонам стандартной электроники низкой мощности и могут быть непосредственно использованы при проектировании прототипа сферического робота с электромагнитным приводом.

Заключение

В диссертационной работе построена и численно исследована полная математическая модель сферического робота с электромагнитным приводом, способного совершать управляемое всенаправленное движение по произвольной неровной поверхности. Полученные результаты в совокупности обеспечивают теоретическую и алгоритмическую основу для создания нового класса сферических роботов с электромагнитным приводом.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Разработана математическая модель электромагнитного взаимодействия магнитов на двух концентрических сферических оболочках. На основе закона Био-Савара-Лапласа в квазистационарном приближении получено покомпонентное выражение для индукции магнитного поля одиночного цилиндрического постоянного магнита. На основе закона Ампера записано выражение для силы взаимодействия постоянного магнита с электромагнитом. Анализ зависимости вращающего момента от углового сдвига между постоянным магнитом и электромагнитом выявил локальный характер взаимодействия, что определило принципиальный подход к размещению магнитов на сферических оболочках.
2. Построена математическая модель управляемого движения сферического робота по произвольной неровной шероховатой поверхности в виде системы дифференциальных уравнений, объединяющей уравнения изменения импульса и момента импульса двух концентрических сферических оболочек, связанных силами и моментами электромагнитного взаимодействия, модель поликомпонентного сухого трения Контенсу-Журавлёва и условие безотрывного движения от опорной поверхности.
3. Сформулирован и решён вопрос оптимального размещения магнитов на сферических оболочках, обеспечивающего генерацию управляющего вращающего момента в произвольном направлении при любой взаимной ориентации оболочек. Установлено, что требование, предъявленное к тензорам инерции обеих оболочек, необходимое для применимости разработанного метода оптимального управления, ограничивает выбор размещения магнитов в вершинах многогранников принадлежащих классу вершинно-транзитивных многогранников с кубической или икосаэдрической симметрией (всего 18 многогранников, пять платоновых и тринадцать архимедовых тел). В этом классе на основе количественных характеристик привода выбраны ромбоикододекаэдр ($M = 60$ постоянных магнитов) и усечённый октаэдр (S = 24 электромагнита).

4. Разработан численный метод синтеза оптимального по Парето управления. Метод основан на дискретизации интервала управления, линеаризации уравнений движения вокруг эталонной траектории и сведении двухкритериальной задачи минимизации функционалов максимальных уклонений выхода системы и максимальных значений управляющих воздействий к семейству задач полуопределённого программирования с линейными матричными неравенствами.
5. Разработан численный метод восстановления энергетически оптимальных токов в обмотках электромагнитов по заданному управляющему моменту. Метод основан на использовании псевдообратной матрицы с регуляризацией, что обеспечивает численную устойчивость даже в окрестностях, где карта вращающего момента становится плохо обусловленной.
6. На основе разработанной математической модели и предложенных численных методов создан программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом. Комплекс реализован на платформе MATLAB и поддерживает режимы движения по плоской поверхности и по неровной поверхности с профилем в виде функции Гаусса. Комплекс прошёл государственную регистрацию как программное обеспечение для ЭВМ.
7. С помощью разработанного программного комплекса проведена комплексная численная верификация построенной математической модели и предложенных численных методов на четырёх экспериментах возрастающей сложности: для плоской конфигурации привода ($M = 18$, $S = 12$) это движение по прямой с подстройкой скорости, и преодоление плоской горки форму которой задает функция Гаусса, для трехмерной конфигурации привода сфероробота ($M = 60$, $S = 24$) – коррекция бокового смещения, и трёхмерное движение по неровной поверхности, профиль которой задается как функция Гаусса.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании сферических роботов с новым электромагнитным приводом для применения в исследовании труднодоступных и враждебных сред: глубоководных и подледных пространств, поверхностей других планет, зон химического и радиационного загрязнения, аварийных и спасательных операций. Перспективы дальнейшего развития работы включают экспериментальную верификацию построенной модели на физическом прототипе, разработку алгоритмов автономного планирования траектории при движении в неизвестной среде, исследование энергоэффективных режимов длительного движения, а также распространение разработанного электромагнитного привода на робототехнические объекты иной геометрии.

Литература

[1] Halme, A. Motion control of a spherical mobile robot / Halme A., Schonberg T., Wang Y. // 4th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control - AMC ’96 - MIE. - Mie, Japan. - 1996. - IEEE. - P. 259 – 264.

[2] Lin, X. Development of a spherical underwater robot equipped with multiple vectored water-jet-based thrusters / Lin X., Guo S. // J. Intell. Robot. Syst. - 2012. - Vol.67. - P. 307 – 321.

[3] Kalita, H. Dynamics and control of a hopping robot for extreme environment exploration on the Moon and Mars / Kalita H., Gholap A.S., Thangavelautham J. // 2020 IEEE Aerospace Conference. - Big Sky, MT, USA. - 2020. - IEEE Computer Society. - P. 1 – 12.

[4] Zhao, B. Dynamics and motion control of a two pendulums driven spherical robot / Zhao B., Li M., Yu H., Hu H., Sun L. // 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. - Taipei, China. - 2010. - IEEE. - P. 147 – 153.

[5] Li, B. A spherical hopping robot for exploration in complex environments / Li B., Deng Q., Liu Z. // 2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). - Guilin, China. - 2009. - IEEE. - P. 402 – 407.

[6] DeJong, B.P. Design and analysis of a fourpendulum omnidirectional spherical robot / DeJong B.P., Karadogan E., Yelamarthi K., Hasbany J. // J. Intell. Robot. Syst. - 2017. - Vol.86. - P. 3 – 15.

[7] Asiri, S. The design and development of a dynamic model of a low-power consumption, two-pendulum spherical robot / Asiri S., Khademianzadeh F., Monadjemi A., Moallem P. // IEEE/ASME Trans. on Mech. - 2019. - Vol.24. - P. 2406 – 2415.

[8] Ylikorpi, T.J. Dynamic modeling and obstacle-crossing capability of flexible pendulum-driven ball-shaped robots / Ylikorpi T.J., Halme A.J., Forsman P.J. // Robot. Auton. Syst. - 2017. - Vol. 87. - P. 269 – 280.

[9] Landa, K. Design and start-up of spherical robot with internal pendulum / Landa K., Pilat A.K. // 2015 10th International Workshop on Robot Motion and Control, RoMoCo 2015. - Poznan, Poland. - 2015. - IEEE. - P. 27 – 32.

[10] Zhan, Q. Design, analysis and experiments of an omni-directional spherical robot / Zhan Q., Cai Y., Yan C. // 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. - Shanghai, China. - 2011. - IEEE. - P. 4921 – 4926.

[11] Alves, J. Design and control of a spherical mobile robot / Alves J., Dias J. // Proc. Inst. Mech. Eng. I. - 2003. - Vol.217. - P. 457 – 467.

[12] Belskii, G.V. Design and implementations of spherical robot hardware level / Belskii G.V., Serykh E.V., Pankratev D.A. // 2021 IEEE Conf. of Russian Young Res. in Elec. and Elec. Eng. (ElConRus). - St. Petersburg, Russia. - 2021. - IEEE. - P. 806 – 809.

[13] Chen, W.H. Design and implementation of an omnidirectional spherical robot omnicron / Chen W.H., Chen C.P., Yu W.S., Lin C.H., Lin, P.C. // 2012 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). - Kaohsiung, China. - 2012. - IEEE. - P. 719 – 724.

[14] Karavaev, Y.L. Nonholonomic dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform: Theory and experiments / Karavaev Y.L., Kilin A.A. // Proc. Steklov Inst. Math. - 2016. - Vol. 295. - P. 158 – 167.

[15] Tafrishi, S.A. Design, Modeling, and Motion Analysis of a Novel Fluid Actuated Spherical Rolling Robot / Tafrishi S.A., Svinin M., Esmaeilzadeh E., Yamamoto M. // ASME. J. Mechanisms Robotics. - 2019. - Vol. 11, № 4. - Article 041010.

[16] Mukherjee, R. Simple motion planning strategies for spherobot: a spherical mobile robot / Mukherjee R., Minor M.A., Pukrushpan J.T. // IEEE Conference on Decision and Control. - Phoenix, USA. - 1999. - IEEE. - Vol. 3. - P. 2132 – 2137.

[17] Bowkett, J. Combined Energy Harvesting and Control of Moball: A Barycentric Spherical Robot / Bowkett J., Burkhardt M., Burdick J.W. // 2016 International Symposium on Experimental Robotics. ISER 2016. - Tokyo, Japan. - 2016. - Springer, Cham. - Vol. 1. - P. 71 – 83.

[18] Javadi, A.H. Introducing August: a novel strategy for an omnidirectional spherical rolling robot / Javadi A.H., Mojabi P. // 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation. - Washington, USA. - 2002. – IEEE. – Vol. 4. - P. 3527 – 3533.

[19] Bhattacharya, S. Spherical rolling robot: A design and motion planning studies / Bhattacharya S., Agrawal S.K. // IEEE Trans. Robot. Autom. - 2000. - Vol. 16. - P. 835 – 839.

[20] Joshi, V.A. Motion analysis of a spherical mobile robot / Joshi V.A., Banavar R.N. // Robotica. - 2009. - Vol. 27. - P. 343 – 353.

[21] Muralidharan, V. Geometric controllability and stabilization of spherical robot dynamics / Muralidharan V., Mahindrakar A.D. // IEEE Trans. Automat. Control. - 2015. - Vol. 60. - P. 2762 – 2767.

[22] Chen, J. Design and motion control of a spherical robot with control moment gyroscope / Chen J., Ye P., Sun H., Jia Q. // 2016 3rd International Conference on Systems and Informatics (ICSAI). - Shanghai, China. - 2016. - IEEE. - P. 114 – 120.

[23] Wait, K.W. Self locomotion of a spherical rolling robot using a novel deformable pneumatic method / Wait K.W., Jackson P.J., Smoot L.S. // 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation. - Anchorage, USA. - 2010. - IEEE. - P. 3757 – 3762.

[24] Kim, I.-K. Theoretical and practical study of spherical motor without the winding overhang / Kim I.-K., Kim J.-S., Goh C.-S. // 2007 IEEE International Electric Machines and Drives Conference. - Antalya, Turkey. - 2007. - IEEE. - P. 1361 – 1365.

[25] Li, Z. The Principle of Work and Essential Technology of Magnetic Suspended Spherical Motor / Li Z., Jun W. // 2011 Third International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. - Shanghai, China. - 2011. - IEEE. - P. 898 – 901.

[26] Lim, C.K. A novel approach in generating 3-DOF motions / Lim C.K., Yan L., Chen I.-M., Yang G., Lin W. // IEEE International Conference Mechatronics and Automation, 2005. - Niagara Falls, Canada. - 2005. - IEEE. - P. 1485 – 1490.

[27] He, J. Torque Modelling and Validation for a Spherical Motor with Stepped Permanent Magnets / He J., Li G., Zhou R. // J. Electr. Eng. Technol. - 2020. - Vol. 15. - P. 2661 – 2673.

[28] Karavaev, Y. L. Spherical robots: an up-to-date overview of designs and features / Karavaev Y. L. // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. - 2022. - Vol. 18, № 4. - P. 709 – 750.

[29] Diouf, A. Spherical rolling robots – design, modeling, and control: a systematic literature review / Diouf A., Belzile B., Saad M., St-Onge D. // Robotics and Autonomous Systems. - 2024. - Vol. 175. - Article 104657.

[30] Crossley, V. A. A literature review on the design of spherical rolling robots / Crossley V. A. - Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon University, 2006. - 6 p.

[31] Joshi, V. A. Design and analysis of a spherical mobile robot / Joshi V. A., Banavar R. N., Hippalgaonkar R. // Mechanism and Machine Theory. - 2010. - Vol. 45, № 2. - P. 130 – 136.

[32] Mukherjee, R. Motion planning for a spherical mobile robot: revisiting the classical ball-plate problem / Mukherjee R., Minor M. A., Pukrushpan J. T. // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. - 2002. - Vol. 124, № 4. - P. 502 – 511.

[33] Morinaga, A. A motion planning strategy for a spherical rolling robot driven by two internal rotors / Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. // IEEE Transactions on Robotics. - 2014. - Vol. 30, № 4. - P. 993 – 1002.

[34] Bai, Y. Dynamics-based motion planning for a pendulum-actuated spherical rolling robot / Bai Y., Svinin M., Yamamoto M. // Regular and Chaotic Dynamics. - 2018. - Vol. 23, № 4. - P. 372 – 388.

[35] Michaud, F. Roball, the rolling robot / Michaud F., Caron S. // Autonomous Robots. - 2002. - Vol. 12, № 2. - P. 211 – 222.

[36] Hernández, J. D. Moisture measurement in crops using spherical robots / Hernández J. D., Barrientos J., del Cerro J., Barrientos A., Sanz D. // Industrial Robot. - 2013. - Vol. 40, № 1. - P. 59 – 66.

[37] Hernández, J. D. Sensorized robotic sphere for large exterior critical infrastructure supervision / Hernández J. D., Sanz D., Rodriguez-Canosa G.R., Barrientos J., del Cerro J., Barrientos A. // Journal of Applied Remote Sensing. - 2013. - Vol. 7. - Article 073522.

[38] Karavaev, Y. L. Spherical rolling robots: different designs and control algorithms / Karavaev Y. L., Mamaev I. S., Kilin A. A., Pivovarova E. N. // Proceedings of CLAWAR 2020. - Moscow, Russia. - 2020. - P. 195 – 202.

[39] Kayacan, E. Adaptive neuro-fuzzy control of a spherical rolling robot using sliding-mode-control-theory-based online learning algorithm / Kayacan E., Kayacan E., Ramon H., Saeys W. // IEEE Transactions on Cybernetics. - 2013. - Vol. 43, № 1. - P. 170 – 179.

[40] Huo, J. Design and validation of a novel adaptive motion control for a pendulum spherical robot / Huo J., Lin R., Yang M. // Robotica. - 2023. - Vol. 41, № 7. - P. 2031 – 2049.

[41] Cai, Y. Path tracking control of a spherical mobile robot / Cai Y., Zhan Q., Xi X. // Mechanism and Machine Theory. - 2012. - Vol. 51. - P. 58 – 73.

[42] Ballie: AI companion robot for the home: официальные материалы и пресс-релизы / Samsung Electronics. - 2020–2024. - URL: https://www.samsung.com (дата обращения: 18.06.2026).

[43] Balandin, D. V. A motion control for a spherical robot with pendulum drive / Balandin D. V., Komarov M. A., Osipov G. V. // Journal of Computer and Systems Sciences International. - 2013. - Vol. 52, № 4. - P. 650 – 663.

[44] Singhal, A. Pendulum actuated spherical robot: dynamic modeling and analysis for wobble and precession / Singhal A., Modi S., Gupta A., Vachhani L., Ghag O.A. // arXiv:2301.05859 [preprint]. - 2023.

[45] Lin, R. Research on motion control of spherical robot in slope environment / Lin R., Li T., Huo J., Wang Q. // Robotica. - 2025. - Vol. 43, № 5 - P. 1910 – 1928.

[46] Karavaev, Y. L. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform / Karavaev Y. L., Kilin A. A. // Regular and Chaotic Dynamics. - 2015. - Vol. 20, № 2. - P. 134 – 152.

[47] Chiu, C.-H. Control of an omnidirectional spherical mobile robot using an adaptive Mamdani-type fuzzy control strategy / Chiu C.-H., Lin C.-M. // Neural Computing and Applications. - 2018. - Vol. 30. - P. 1303 – 1315.

[48] Mozeika, A. The first steps of a robot based on jamming skin enabled locomotion / Mozeika A., Steltz E., Jaeger H. // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). - St. Louis, USA. - 2009. - P. 408 – 409.

[49] Kumagai, M. Development and control of a three DOF spherical induction motor / Kumagai M., Hollis R. L. // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). - Karlsruhe, Germany. - 2013. - P. 1528 – 1533.

[50] Bhatia, A. Six-stator spherical induction motor for balancing mobile robots / Bhatia A., Kumagai M., Hollis R. L. // Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). - Seattle, USA. - 2015. - P. 226 – 231.

[51] Souza, K. N. Design and control of a three-coil permanent magnet spherical motor / Souza K. N., Pontes R. S. T., Oliveira A. P., Barreto G. A. // Energies. - 2018. - Vol. 11, № 8. - Article 2009.

[52] Li, H. Friction torque field distribution of a permanent-magnet spherical motor based on multi-physical field coupling analysis / Li H., Li G., Wang Q., Ju B., Wen Y. // IET Electric Power Applications. - 2021. - Vol. 15, № 8. - P. 1045 – 1055.

[53] Bai, K. Robust control of a spherical motor in moving frame / Bai K., Yan H., Lee K.-M. // Mechatronics. - 2021. - Vol. 75. - Article 102548.

[54] Guo, X. Electromagnetic torque modeling and validation for a permanent magnet spherical motor based on XGBoost / Guo X., Yang Q., Wang Q., Sun Y., Tan A. // Simulation Modelling Practice and Theory. - 2024. - Vol. 136. - Article 102989.

[55] Ohsawa, T. Geometric kinematic control of a spherical rolling robot / Ohsawa T. // Journal of Nonlinear Science. - 2020. - Vol. 30, № 1. - P. 67 – 91.

[56] Yue, M. Adaptive sliding-mode control of spherical robot with estimated rolling resistance / Yue M., Liu B., Wei X., Hu P. // Cybernetics and Systems. – 2014. – Vol. 45, № 5. – P. 407 – 417.

[57] Sadeghian, R. Design of an adaptive sliding mode controller for a novel spherical rolling robot / Sadeghian R., Bayani H., Masouleh M. T. // 2015 3rd RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM). - Tehran, Iran. - 2015. - P. 529 – 534.

[58] Kayacan, E. Velocity control of a spherical rolling robot using a grey-PID type fuzzy controller with an adaptive step size / Kayacan E., Kayacan E., Ramon H., Saeys W. // IFAC Proceedings Volumes. - 2012. - Vol. 45, № 22. - P. 863 – 868.

[59] Guo, J. Fuzzy PID algorithm-based motion control for the amphibious spherical robot / Guo J., Wu G., Guo S. // Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA). - Beijing, China. - 2015. - P. 1583 – 1588.

[60] Zhai, Y. Research of the motion balance of spherical mobile robot based on fuzzy control / Zhai Y., Li M., Luo J., Zhou Y., Liu L. // Journal of Vibroengineering. - 2015. - Vol. 17, № 1. - P. 13 – 23.

[61] Balandin, D.V. Spherical robot with electromagnetic drive: modeling and control / Balandin D.V., Tuzikov A.M., Biryukov R.S., Polovinkin A.V. // Russian J. Nonlinear Dyn. - 2025. - Vol. 21, № 4. - P. 649 – 671.

[62] Tuzikov, A.M. Numerical modeling of the controlled motion of a spherical robot with electromagnetic drive / Tuzikov A.M. // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2025. - Nizhny Novgorod, Russia. - 2026. - Springer, Cham. - Vol. 2815. - P. 169 – 183.

[63] Balandin, D.V. Path tracking control of a spherical robot with pendulum-like driver / Balandin D.V., Biryukov R.S., Tuzikov A.M. // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2023. - Nizhny Novgorod, Russia. - 2023.- Springer, Cham. - P. 176 – 189.

[64] Баландин, Д.В. Оптимальное управление движением сферического робота по неровной поверхности / Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Тузиков А.М. // Изв. РАН. ТиСУ. - 2026. - № 1. - С. 142 – 158.

[65] Balandin, D.V. Multi-objective generalized H_2 control / Balandin D.V., Kogan M.M. // Automatica. - 2019. - Vol. 99. - P. 317 – 322.

[66] Balandin, D.V. Finite-horizon multi-objective generalized H_2 control with transients / Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. // Automatica. - 2019. - Vol. 106. - P. 27 – 34.

[67] Баландин, Д.В. Оптимальное по Парето обобщенное H_2-управление и задачи виброзащиты / Баландин Д.В., Коган М.М. // АиТ. - 2017. - № 8. - С. 76 – 90.

[68] Баландин, Д.В. Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной системы на конечном интервале времени / Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. // АиТ. - 2019. - № 10. - С. 37 – 61.

[69] Golub, G. H. Matrix Computations / Golub G. H., Van Loan C. F. - 4th ed. - Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013. - 756 p.

[70] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. - 3-е изд. - М.: Наука, 1986. - 288 с.

[71] Balandin, D.V. Modeling of controlled omnidirectional motion of a spherical robot with electromagnetic drive / Balandin D.V., Tuzikov A.M., Biryukov R.S. // Regul. Chaotic Dyn. - 2026. - Vol. 31, no. 5. - P. 751 – 777.

[72] Любарский, Г. Я. Теория групп и её применение в физике / Любарский Г. Я. - 2-е изд. - М.: Физматлит, 2003. - 354 с.

[73] Cromwell, P. R. Polyhedra / Cromwell P. R. - Cambridge: Cambridge University Press, 1997. - 451 p.

[74] Tammes, P. M. L. On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains / Tammes P. M. L. // Recueil des Travaux Botaniques Néerlandais. - 1930. - Vol. 27. - P. 1 – 84.

[75] Thomson, J. J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure / Thomson J. J. // Philosophical Magazine. - 1904. - Vol. 7, № 39. - P. 237 – 265.

[76] Erber, T. Equilibrium configurations of N equal charges on a sphere / Erber T., Hockney G. M. // Journal of Physics A: Mathematical and General. - 1991. - Vol. 24, № 23. - P. L1369 – L1377.

[77] Saff, E. B. Distributing many points on a sphere / Saff E. B., Kuijlaars A. B. J. // The Mathematical Intelligencer. - 1997. - Vol. 19, № 1. - P. 5 – 11.

[78] Goemans, M. X. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming / Goemans M. X., Williamson D. P. // Journal of the ACM. - 1995. - Vol. 42, № 6. - P. 1115 – 1145.

[79] Shoemake, K. Uniform random rotations / Shoemake K. // Graphics Gems III / ed. by D. Kirk. - San Diego: Academic Press, 1992. - P. 124 – 132.

[80] González, Á. Measurement of areas on a sphere using Fibonacci and latitude–longitude lattices / González Á. // Mathematical Geosciences. - 2010. - Vol. 42, № 1. - P. 49 – 64.

[81] MATLAB. Version R2024a / The MathWorks, Inc. - Natick, Massachusetts, USA, 2024.

[82] Shampine, L. F. The MATLAB ODE suite / Shampine L. F., Reichelt M. W. // SIAM Journal on Scientific Computing. - 1997. - Vol. 18, № 1. - P. 1 – 22.

[83] Grant, M. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1 [Электронный ресурс] / Grant M., Boyd S. - 2014. - URL: http://cvxr.com/cvx (дата обращения: 18.06.2026).

[84] Grant, M. Graph implementations for nonsmooth convex programs / Grant M., Boyd S. // Recent Advances in Learning and Control / ed. by V. Blondel, S. Boyd, H. Kimura. - London: Springer, 2008. - (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 371). - P. 95 – 110.

[85] Sturm, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones / Sturm J. F. // Optimization Methods and Software. - 1999. - Vol. 11, № 1–4. - P. 625 – 653.

[86] Shampine, L. F. Vectorized adaptive quadrature in MATLAB / Shampine L. F. // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 2008. - Vol. 211, № 2. - P. 131 – 140.

Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы «Программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом»



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026684428

Программный комплекс для моделирования управляемого движения сферического робота с электромагнитным приводом

Правообладатель: ***Тузиков Александр Михайлович (RU)***

Автор(ы): ***Тузиков Александр Михайлович (RU)***

Заявка № **2026683861**
Дата поступления **03 июня 2026 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***11 августа 2026 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00a570e4f7...d3d1531b4b8818e75f29506
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 04.09.2025 по 28.11.2026

Ю.С. Зубов

Приложение Б. Фрагменты исходного кода программы

```
% driver_motion_along_line_on_surface_optimize.m
% Скрипт для моделирования движения сфероробота

function main_spherorobot_simulation()
    % Инициализация параметров
    params = init_params();

    % Предвычисление номинальных значений для всех временных точек
    precomputed = precompute_nominal_values(params);

    % Создание матриц системы
    [A, Bw, Bu, C1, D1, C2, D2, R] = create_matrices(params,
precomputed);

    % Вычисление нестационарного управления

    [state_matrix, control_input, ~, status] = pareto_gh2_control(A,
Bw, Bu, C1, D1, C2, D2, R, mu, params.count, params.step);

    % Решение системы дифференциальных уравнений
    [T_sol, X_sol, ~, ~, velocity_and_forces, xic, Omegac, Q, X_ode,
dist] = solve_ode_system(params, control_input, precomputed, C1, D1,
C2, D2);

end

function [T_sol, X_sol, Z1_sol, Z2_sol, velocity_and_forces, xic,
Omegac, Q, X_ode, dist] = solve_ode_system(params, control_input,
precomputed, C1, D1, C2, D2)
    options = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', 1e-8 * ones(1, 18),
'MaxStep', params.step / 100);

    XINIT = [zeta0s; dxi0s; Omega0s; omega0s; Phi0s; phi0s];

    % Интерполяция control_input для произвольного t
    t_interp = linspace(0, params.TIME, params.count);
    [T_sol, X_sol] = ode45(@(t, X) rhs_func(t, X, interp_control(t,
```

```
control_input, t_interp), params, precomputed), ...
        linspace(0, params.TIME, 10 * (params.count - 1) + 1),
XINIT, options);

    dist = sqrt(sum((X_ode(:, 1:3) - (xic' .* params.Rad)).^2, 2));
end

function u_inf = interp_control(t, control_input, t_interp)
    k = find(t_interp <= t, 1, 'last');
    if isempty(k) || k >= size(control_input, 3)
        k = size(control_input, 3) - 1;
    end
    u_inf = control_input(:, :, k);
end

function y = rhs_func(t, x, u_inf, params, precomputed)
    zeta = x(1:3);
    dxi = x(4:6);
    Omega = x(7:9);
    omega = x(10:12);

    nv = norm_vec(zeta, params.a, params.Mu, params.sigma);
    kv = [0; 0; 1];

    da0 = do0func(t, params.z_max, params.a, params.Mu,
params.sigma);
    n0 = n0func(t, params.z_max, params.a, params.Mu, params.sigma);
    dn0 = dn0func(t, params.z_max, params.a, params.Mu,
params.sigma);
    [normal_force, ~, fric_force, fric_moment] =
forces_of_system(zeta, dxi, Omega, params.kappa, params.a,
params.Mu, params.sigma, params.M_0, params.rho, params.beta);

    Q0 = ((1 + params.gamma) * eye(3) - params.gamma * (n0 * n0')) *
da0 + params.gamma * dn0 * dot(Omega, n0) + params.gamma * cross(n0,
kv);
    Q = Q0 + u_inf * [zeta - xi0(t, params.z_max, params.a,
params.Mu, params.sigma); Omega - o0func(t, params.z_max, params.a,
params.Mu, params.sigma)];
```

```
    y = zeros(18, 1);
    mat_to_invert = eye(3) + norm_jac(zeta, params.a, params.Mu,
params.sigma);
    y(1:3) = inv(mat_to_invert) * dxi;
    y(4:6) = fric_force + normal_force * nv - kv;
    y(7:9) = Q - params.gamma * cross(nv, fric_force) + fric_moment;
    y(10:12) = -Q;
end

function [normal_force, v_c, fric_force, fric_moment] =
forces_of_system(zeta, dxi, Omega, kappa, a, Mu, sigma, M_0, rho,
beta)
    normal_vec = norm_vec(zeta, a, Mu, sigma);
    kv = [0; 0; 1];

    norm_jac_mat = norm_jac(zeta, a, Mu, sigma);
    mat_to_invert = eye(3) + norm_jac_mat;
    dnv = norm_jac_mat * inv(mat_to_invert) * dxi;
    normal_force = dot(normal_vec, kv) - dot(dxi, dnv);

    v_c = dxi - cross(Omega, normal_vec);

    fric_force = -kappa * normal_force * v_c / (norm(v_c) + 8/(3 *
pi) * norm(dot(omega, normal_vec)) + 1e-4);
    fric_moment = -M_0 * rho * dot(omega, normal_vec) * normal_vec /
(rho * norm(dot(omega, normal_vec)) + beta * norm(v_c) + 1e-4);
end

function [yfin, ufin, optgamma, status] = pareto_gh2_control(A, Bw,
Bu, C1, D1, C2, D2, R, mu, count, step)
    nx = size(A, 1);
    nu = size(Bu, 2);
    nw = size(Bw, 2);
    nz1 = size(C1, 1);
    nz2 = size(C2, 1);

    yfin = zeros(nx, nx, count);
    ufin = zeros(nu, nx, count);
```

```
    warning('off', 'CVX:StrictInequalities');
    cvx_begin sdp
        cvx_precision best
        cvx_solver sedumi

        variable Y(nx, nx, count) symmetric semidefinite
        variable Z(nu, nx, count)
        variable G2

        minimize(G2)

        for i = 1 : count - 2
            Y(:, :, i + 1) - Y(:, :, i) - 0.5 * step * (A(:, :, i +
1) * Y(:, :, i) + Y(:, :, i) * A(:, :, i + 1)' + Bu(:, :, i + 1) *
Z(:, :, i) + Z(:, :, i)' * Bu(:, :, i + 1)' + A(:, :, i + 2) * Y(:,
:, i + 1) + Y(:, :, i + 1) * A(:, :, i + 2)' + Bu(:, :, i + 2) *
Z(:, :, i + 1) + Z(:, :, i + 1)' * Bu(:, :, i + 2)' + Bw(:, :, i +
1) * Bw(:, :, i + 1)' + Bw(:, :, i + 2) * Bw(:, :, i + 2)') == 0
        end
        for i = 1 : count - 1
            [Y(:, :, i),
Y(:, :, i) * C1(:, :, i + 1)' + Z(:, :, i)' * D1(:, :, i + 1)';
             C1(:, :, i + 1) * Y(:, :, i) + D1(:, :, i + 1) * Z(:,
:, i), mu^2 * G2 * eye(nz1)] > 0
            [Y(:, :, i),
Y(:, :, i) * C2(:, :, i + 1)' + Z(:, :, i)' * D2(:, :, i + 1)';
             C2(:, :, i + 1) * Y(:, :, i) + D2(:, :, i + 1) * Z(:,
:, i), (1 - mu)^2 * G2 * eye(nz2)] > 0
        end

        Y(:, :, 1) == inv(R)
        G2 > 0
    cvx_end
    warning('on', 'CVX:StrictInequalities');

    for i = 1:count
        yfin(:, :, i) = Y(:, :, i);
        ufin(:, :, i) = Z(:, :, i) * inv(Y(:, :, i));
```

```
    end
    optgamma = sqrt(G2);
    status = cvx_status;
end
```